

カ ヱ パ II 型 および カ ヱ パ III 型の性能計算

井 上 俊 男・広 沢 曄 夫

ま え が き

ロケット飛しょうに先き立ちその性能計算は是非行わなければならないものであり、計算結果は次のような目的の為に用いられる。

- 1) 観測計画の立案および準備
- 2) ロケット細部の設計資料
- 3) ロケット搭載諸計測器の準備および基礎資料
- 4) 警戒領域の決定資料
- 5) ロケット飛しょう径路観測資料
- 6) ロケットのリカバの為の落下点予想
- 7) 飛しょう後のデータ整理およびその検討

計算方法は

- 1) step-by-step method
- 2) 逐次近似法
- 3) Z-V diagram method
- 4) 燃焼中急速計算法

等があり、1), 2), 3) 等については“カ ヱ パ 128 型の性能計算および慣性モーメントの計算”(生産研究 Vol. 9, No. 6) を参照されたい。

1. 利用面から見た計算法

(1) **step-by-step method** 計算の性質上時間のかかることはさげられないが、その精度は他の計算法に比して高く、したがってロケットの飛しょうに先き立っての予想性能、警戒領域の決定、飛しょう後の観測データとの比較検討などの精度を要する場合に使用した。

① 時間を独立変数にとる場合

これは高度を大きくすると近似度が悪くなる為、時間高度の区分を小さく計算する燃焼中および上昇計算ほど精度を要しない落下計算の場合に使用した。

$$\frac{W}{g} \frac{dv_z}{dt} = (T - D_0(v)e^{-\alpha z}) \frac{v_z}{v} - W \quad (1)$$

$$\frac{W}{g} \frac{dv_x}{dt} = (T - D_0(v)e^{-\alpha z}) \frac{v_x}{v} \quad (2)$$

W : ロケットの重量 (kg)

g : 重力加速度 (m/sec²)

T : 推力 (kg)

v_z : ロケット速度の高度成分 (m/sec)

v_x : ロケット速度の水平成分 (m/sec)

$D_0(v)$: 海上におけるロケットの空気抵抗 (kg)

$$D_0(v) = 1/2 \rho_0 v^2 C_x S$$

ρ_0 : 海上での空気密度 (kg · sec²/m⁴)

C_x : 抵抗係数

S : ロケットの断面積 (m²)

② 高度を独立変数にとる場合

時間を独立変数にとった場合の欠点をのぞく為、高度を独立変数とし、これは主として燃焼後の上昇計算に用いた。(1) および (2) 式を書き換えて次の式を得る。

$$\frac{dv_z}{dz} = -\frac{D_0(v)e^{-\alpha z}}{mv} - \frac{g}{v_z} \quad (3)$$

$$\frac{dv_x}{dz} = -\frac{D_0(v)e^{-\alpha z}}{mv} \frac{1}{\tan \theta} \quad (4)$$

この方法は時間、加速度、水平飛しょう距離を求めるのに手間がかかるが、高度はかなりの精度まで得ることができる。

(2) **逐次近似法** この方法はまず空気抵抗を無視して 0 近似の速度および高度を求める。0 近似によって求めた速度、高度より空気抵抗を求めて第 1 近似を行い、これをくり返して逐次近似度を高めて行く。燃焼後は Z-V diagram による方法を取ることが多い。この計算法は時間も余り必要とせず、その結果も比較的良好なのでロケットの最適重量計算、大略の予想到達高度を求める場合等に使用した。

(3) **燃焼中急速推定法**¹⁾ 燃焼時間の短いロケットについては step-by-step method と比して大差ない結果が得られるが、この計算法は加速度が得られない欠点がある。大略の予想到達高度および最高速度等を求める場合に使用した。

計算法の大略を説明すると、垂直上昇の場合の運動方程式は

$$\frac{1}{g} \frac{dv}{dt} = \frac{T - D_0(v)e^{-\alpha z}}{Wt} - 1 \quad (5)$$

ここで空気抵抗力および重力は推力に比して小であるとして、

$$v = v^{(0)} + \Delta v \quad (6)$$

とおくと

$$v^{(0)} = -C \log \frac{W}{W_0} + v_i \quad (7)$$

$$\Delta v = -\frac{e^{-\alpha z_i}}{T} \int_{v_i}^{v^{(0)}} D_0(v) dv - gt \quad (8)$$

で得られる。ここで

$v^{(0)}$: 真空中重力のない場合の速度 (m/s)

C : exhaust velocity (m/s)

W_0 : 燃焼前のロケット重量 (kg)

W : 燃焼後のロケット重量 (kg)

また高度 z は

$$z = \int v^{(0)} dt + \int \Delta v dt + z_i \quad (9)$$

第一項が真空中の飛しょう距離、第二項が空気抵抗力、重力による補正項、第三項が初期高度である。ここで

$$\int v^{(0)} dt = \frac{WC}{b} \log \frac{W}{W_0} + (C + v_i)t \quad (10)$$

$$\int \Delta v dt = -\frac{gW_0}{b^2 C} e^{-\alpha z_i} \left\{ e^{\frac{v_i}{C}} [\psi(v^{(0)}) - \psi(v_i)] - \frac{W}{W_0} [\varphi(v^{(0)}) - \varphi(v_i)] \right\} \quad (11)$$

b: 燃料の燃焼率 (kg/sec)

また

$$\left. \begin{aligned} \psi(v) &= \int_0^v e^{-\frac{v}{C}} D_0(v) dv \\ \varphi(v) &= \int_0^v D_0(v) dv \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

この (12) 式を予めグラフに求めておけば速度、高度は容易に求めることができる。

これは垂直上昇の場合であるが、発射角のついた場合には (8) 式の重力の項に $\sin \theta$ を、(10), (11) 式に $\sin \theta$ を乗ずれば近似的な値が得られる。

(4) 発射角のついた場合の急速到達高度算出法
ロケットはそのほとんどの場合が発射の際において角度をつけており、前述の逐次近似法および Z-V diagram method はいずれも垂直上昇の場合であるので、予め以前に計算集録された多くの資料を基にして“発射角の変化による到達高度の変化率”を表にしておけば、逐次近似法、Z-V diagram 等によって求めた垂直上昇到達高度より、発射角のついた場合の到達高度が容易に求まるわけである。なおこの場合空気抵抗を無視すれば

$$Z_0 = \frac{v_0^2}{2g} \quad Z_\theta = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

Z_0 : 垂直上昇の到達高度 (m)

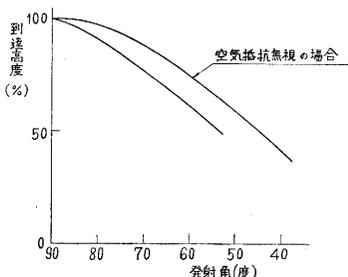
v_0 : 垂直上昇の初速度 (m/s)

Z_θ : 発射角 θ° のついた場合の到達高度 (m)

g : 重力加速度 (m/sec²)

上式より $Z_\theta/Z_0 = \sin^2 \theta$ となり発射角と到達高度の関係は容易に求まる。

第1図に発射角と到達高度の関係を示す。



第1図 発射角の変化による到達高度の変化

2. 空気抵抗

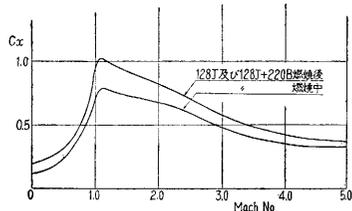
空気抵抗はロケットの速度、高度、形状および音速等の函数であり前述のご

とく海面上における空気抵抗は $D_0(v) = 1/2 \rho_0 v^2 C_x S$ であるが、ここで空気抵抗係数 C_x はマッハ数の函数として与えられる。現在われわれが計算に使用しているものは米国の Deacon Rocket のそれを参照し、それに base drag および friction drag を estimate して求めたもの

である。第2図は計算に使用したカッパ III 型用の抵抗係数曲線である。

3. 風によるロケットの分散計算²⁾

実際の飛しょうに際して、その警戒領域決定の為には“風の影響による分散計算”を必要とする。計算に必要な風のデータ



第2図

は過去数年間に集録されたものを使用する。

計算法

詳しくは“風によるロケットの分散”(生産研究 Vol. 9, No. 3) を参照されたい。

ここに計算に必要な結果のみを簡単に述べると、風を次のように仮定する。

$$w = w_1 + w_2 S$$

w : 風速 s : 飛しょう距離

燃焼中の分散

$$\frac{\theta_1}{w_1 \sqrt{\frac{\pi}{G\sigma}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\cos P - \sin P) - \sqrt{2\pi} \cos P \cdot S(P) + \sqrt{2\pi} \sin P \cdot C(P) \quad (13)$$

$$\frac{\theta_2}{w_2 \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi G}}} = \sqrt{S} - 2\sqrt{P} - (P \sin P + \cos P) \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{2\pi} C(P) \right] - (\sin P - P \cos P) \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{2\pi} S(P) \right] \quad (14)$$

ここで

$$P = 2\pi \frac{b}{\sigma} \quad S = 2\pi \frac{s}{\sigma}$$

G : thrust/mass b : launcher length

θ_1 : w_1 による分散角 s : 飛しょう距離

θ_2 : w_2 による分散角 σ : wave length

燃焼後の分散角

飛しょう距離 s を大きくとり lift の影響を無視すれば、

$$\frac{M}{2} \frac{dv^2}{dt} = -D_z(v) - W \sin \theta \quad (15)$$

$$Mv^2 \frac{d\theta'}{ds} = D_z(v) \theta' - W \sin \theta \quad (16)$$

$$Wv^2 \frac{d\theta''}{ds} = D_z(v) \theta'' \quad (17)$$

v : ロケットの速度 (m) s : 飛しょう距離 (m)

M : ロケットの質量 (= W/g)

D_z : 高度 Z_m における空気抵抗 (kg)

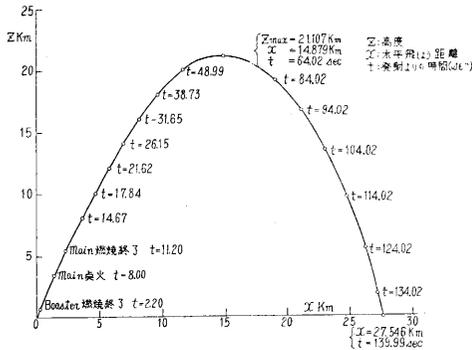
W : ロケットの重量 (kg)

θ' : 垂直面内の分散角 ($^\circ$) θ'' : 水平面内の分散角 ($^\circ$)

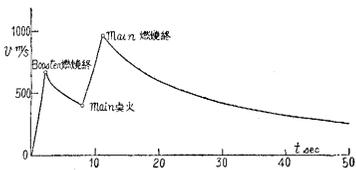
実際の計算に当っては使用する風は最悪の状態（最大風速）の場合について行う。

第 2 表

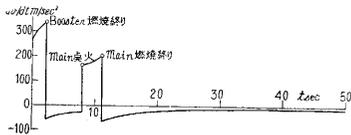
sec	m	m	m/s	m/s	m/s	m/s ²	m/s ²	m/s ²
Booster 燃焼中								
t	z	x	v	v _z	v _x	dv/dt	dv _z /dt	dv _x /dt
0	0	0	0	0	0	266.12	250.07	94.58
0.2	5.00	1.90	53.20	50.00	18.90	274.46	257.91	97.43
0.4	20.16	7.63	108.10	101.58	38.39	283.12	266.05	100.39
0.6	45.80	17.32	164.72	154.79	58.47	291.70	274.11	103.33
0.8	82.24	21.08	223.06	209.61	79.14	300.25	282.15	106.26
1.0	129.80	49.03	283.10	266.03	100.39	308.14	289.56	108.96
1.2	188.80	71.26	344.73	323.94	122.18	312.17	293.35	110.34
1.4	259.45	97.90	407.16	382.61	144.25	316.55	297.46	111.83
1.6	341.92	128.99	470.47	442.10	167.91	322.13	302.71	113.74
1.8	436.40	164.85	534.90	502.64	190.66	328.00	308.22	115.74
2.0	543.09	205.30	600.50	564.28	213.81	334.57	314.40	118.00
2.2	662.23	250.42	670.59	627.16	237.41			



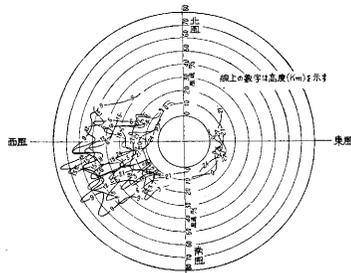
第 3 図 カップⅢ型 3号機 (70° 発射) Trajectory



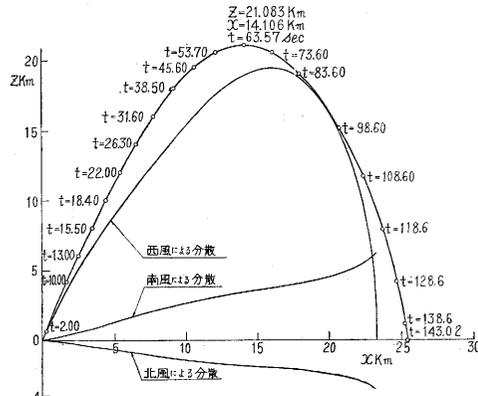
第 4 図 カップⅢ型 (3号機) 時間—速度曲線



第 5 図 カップⅢ型 (3号機) 時間—加速度曲線



第 6 図



第 7 図 カップⅢ型 70° 発射の風による分散

Coasting (発射より 8.00 秒まで)

t	z	x	v	v _z	v _x	-dv/dt	dv _z /dt	dv _x /dt
2.2	662.23	250.42	670.59	627.16	237.41	59.95	57.20	17.94
2.6	908.52	343.95	646.65	604.28	230.23	55.66	53.15	16.51
3.0	1145.98	434.72	582.65	538.02	223.63	47.46	45.13	14.69
3.5	1409.35	544.70	559.00	515.46	216.29	43.78	41.69	13.38
4.0	1661.87	651.17	537.20	494.62	209.60	41.14	39.21	12.46
4.5	1904.28	754.41	516.72	475.02	203.37	38.60	36.83	11.57
5.0	2137.19	854.65	497.53	456.61	197.59	36.35	34.71	10.78
5.5	2361.17	952.10	479.47	439.26	192.20	34.06	32.57	9.96
6.0	2576.73	1046.96	462.59	422.98	187.22	31.26	29.96	8.92
6.5	2784.48	1139.46	447.06	408.00	182.76	29.95	28.72	8.48
7.0	2984.89	1229.78	432.23	393.64	178.52	28.02	26.92	7.76
7.5	3178.35	1318.07	418.37	380.18	174.64	26.24	25.26	7.10
8.0	3365.28	1404.50	405.42	367.55	171.09			

Main 燃焼中

t	z	x	v	v _z	v _x	dv/dt	dv _z /dt	dv _x /dt
8.0	3365.28	1404.50	405.42	367.55	171.09	162.65	145.66	72.37
8.4	3523.95	1478.73	470.46	425.81	200.04	165.09	147.88	73.40
8.8	3706.10	1564.62	536.48	484.96	229.40	167.95	150.47	74.60
9.2	3912.12	1662.35	603.65	545.15	259.24	172.00	154.14	76.31
9.6	4142.51	1772.15	672.44	606.81	289.76	175.43	157.25	77.76
10.0	4397.81	1894.27	742.61	669.71	320.86	179.62	161.05	79.53
10.4	4678.58	2028.98	814.45	734.13	352.67	186.00	166.84	82.22
10.8	4985.58	2176.63	888.85	800.87	385.56	194.31	174.38	85.73
11.2	5319.88	2337.71	966.57	870.62	419.85			

Main 燃焼後

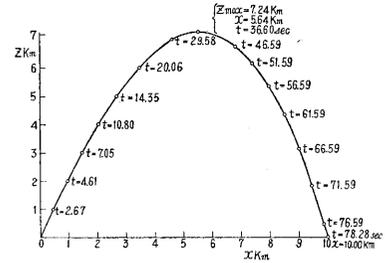
t	z	x	v	v _z	v _x	-dv/dt	-dv _z /dt
11.20	5320	2337.71	966.57	870.62	419.85	60.80	24.75
12.01	6000	2665.64	913.45	821.37	399.80	53.65	21.54
13.28	7000	3152.38	840.28	753.23	372.45	44.89	17.58
14.67	8000	3646.84	773.52	690.83	348.02	37.16	14.25
16.19	9000	4150.62	713.38	634.34	326.36	31.85	11.58
17.84	10000	4665.10	657.90	581.78	307.26	26.73	9.21
19.64	11000	5193.25	607.74	533.66	290.69	22.58	7.28
21.62	12000	5737.97	561.62	488.95	276.28	19.71	5.88
23.77	13000	6303.01	518.62	446.58	263.64	17.06	4.61
26.15	14000	6893.36	478.19	405.98	252.66	15.28	3.67
28.75	15000	7515.71	439.64	366.26	243.13	13.54	2.81
31.65	16000	8179.54	402.71	327.00	234.99	12.16	2.16
34.93	17000	8898.19	366.55	287.12	227.89	10.95	1.59
38.73	18000	9691.90	330.92	245.51	221.85	9.97	1.06
43.28	19000	10595.57	295.24	200.14	217.01	9.80	0.73
48.99	20000	11679.93	258.84	147.28	212.82	9.80	0
64.02	21107	14878.61	212.82	0	212.82		

sec	m	m	m/s	m/s	m/s	m/s ²	m/s ²	m/s ²
落下								
t	z	x	v	v _z	v _x	dv _z /dt	-dx _x /dt	
64.02	21107	14878.61	212.82	0	212.82	9.80	0	
69. "	20984.50	15942.71	218.39	49.00	212.82	9.74	0.25	
71. "	20617.75	17003.69	233.04	97.70	211.57	9.65	0.34	
84. "	19158.25	19102.39	234.69	194.20	208.17	9.19	0.66	
94. "	16756.75	21151.09	349.98	286.10	201.57	7.76	1.44	
104. "	13507.75	23094.79	409.04	363.70	187.17	4.80	2.57	
114. "	9630.75	24837.99	442.23	411.70	161.47	-0.86	4.18	
124. "	5556.75	26243.69	420.49	403.10	119.67	-7.17	5.04	
134. "	1884.75	27188.39	338.46	331.30	69.27	-5.37	3.17	
139. "	295.38	27495.12	309.10	304.45	53.42	-4.92	2.58	
139.99	0	27545.72						

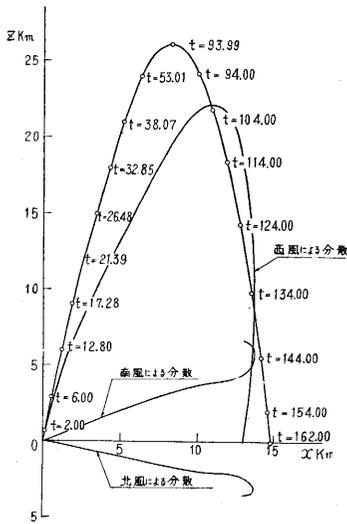
第1表 カップⅢ型の計算に使用した数値

	1号機		2号機		3号機	
	ブースタ	メイン	ブースタ	メイン	ブースタ	メイン
W_0	123.00	44.15	124.20	42.91	121.03	49.27
T	4699.11	926.44	4699.11	926.44	4805.90	926.44
τ	2.00	3.00	2.25	3.20	2.20	3.20
$P.L$		7.65	6.50	5.20	2.32	5.55

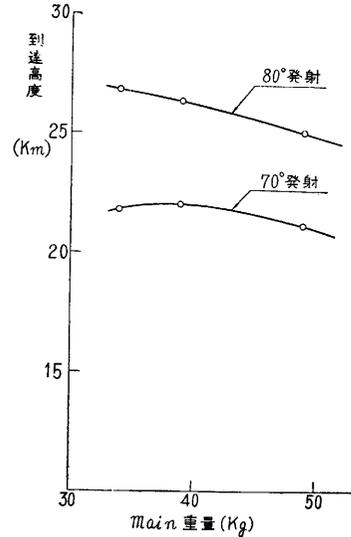
W_0 : 燃焼前の重量 (kg) T : 推力 (kg)
 τ : 燃焼時間 (sec) $P.L$: Pay load (kg)



第9図 カップⅡ型 Trajectory (65° 発射)



第8図 カップⅢ型 80° 発射の風による分散



第10図 main の重量による到達高度の変化

第3表 カップⅢ型計算結果

	θ	ブースタ			メイン			z_{max}	$t(z_{max})$	x	$t(x)$	z'
		v_{b0}	z_{b0}	α_{max}	v_{b0}	z_{b0}	α_{max}					
1号機	70	696.07	630.97	387.69	983.51	5993.70	243.62	21083	63.57	25476	143.02	4217.80
2号機	70	682.17	686.30	332.79	1174.30	4269.16	215.40	22637	62.69	25365	143.62	1711.07
3号機	70	670.59	662.23	334.57	966.57	5319.88	194.31	21107	64.02	27546	140.00	3365.28

θ : 発射角 (°) v_{b0} : 燃焼直後の速度 (m/s) z_{b0} : 燃焼直後の高度 (m) α : 加速度 (m/s²)
 t : 時間 (sec), $t(x)$: 落下までの時間 x : 水平飛しょう距離 (m) z' : メインロケットの点火高度 (m)

第4表

計算期日	θ	ブースタ						メイン						z_{max}	$t(z_{max})$	x	$t(x)$	z'
		W_0	T	τ	v_{b0}	z_{b0}	α_{max}	W_0	T	τ	v_{b0}	z_{b0}	α_{max}					
32年1月	70°	119.6	8752	1.41	850.00	577.20	680.00	42.49	988.20	3.00	1095.00	8010.00	240.00	30700	78.62	42700	174.00	6000
" 3月	65°	123.0	4699.11	2.00	702.10	616.60	398.00	44.15	926.44	3.00	990.40	5739.00	243.62	19200	59.75	27035	134.54	4000
" "	70°	"	"	"	696.07	630.97	387.69	"	"	"	983.51	5993.70	252.20	21083.2	63.57	25476.2	143.02	4217.8
" "	75°	"	"	"	695.70	649.90	387.90	"	"	"	975.90	6531.00	252.15	23630	68.45	22851	151.97	4700
" "	80°	"	"	"	695.34	662.09	381.00	"	"	"	976.93	6996.33	255.63	26126.02	73.99	14837.83	160.00	5154.21
" "	85°	"	"	"	695.19	670.20	386.24	"	"	"	977.34	6916.00	"	27321	76.33	8850.2	168.72	5000
" 4月	70°	120.00	4805.90	"	722.20	676.40	"	39.00	"	"	1082.80	6428.90	"	21977	64.50	25726.8	150.70	4500
" "	"	"	"	"	744.80	697.60	"	34.00	"	"	1195.20	6549.80	"	21698.8	63.90	23268.5	150.25	4500
" "	"	"	"	"	680.20	639.90	"	49.00	"	"	923.50	6235.50	"	21104.5	65.00	26545.7	142.90	4500
" "	"	110.00	"	"	744.80	697.60	"	44.00	"	"	1027.40	6434.50	"	23028.6	66.10	28680.0	150.00	4500
" "	"	130.00	"	"	652.60	610.90	"	44.00	"	"	960.20	6204.30	"	20125.40	63.30	25286.80	141.60	4500
" "	80°	120.00	"	"	718.60	707.00	"	39.00	"	"	1073.80	7030.6	"	26349.70	72.70	16142.5	164.10	5000
" "	"	"	"	"	744.40	732.50	"	34.00	"	"	1194.76	7182.10	"	26788.70	72.40	16073.5	168.80	5000
" "	"	"	"	"	673.00	662.20	"	49.00	"	"	911.60	6817.6	"	24979.10	72.30	16300.7	153.80	5000
" "	110.00	"	"	"	744.40	732.50	"	44.00	"	"	1020.00	7037.80	"	27508.10	74.20	17168.6	164.00	5000
" "	130.00	"	"	"	652.00	641.50	"	44.00	"	"	952.10	6805.80	"	24210.40	71.00	15972.4	156.20	5000

θ : 発射角, W_0 : 燃焼前重量 (kg), T : 推力 (kg), τ : 燃焼時間 (sec), v_{b0} : 燃焼直後の速度 (m/s), z_{b0} : 燃焼直後の高度 (m), α : 加速度 (m/s²)
 z : 高度 (m), x : 水平飛しょう距離, t : 時間 (sec), $t(x)$: 落下までの時間 (sec), z' : メインロケット点火高度 (m)

4. 性能計算

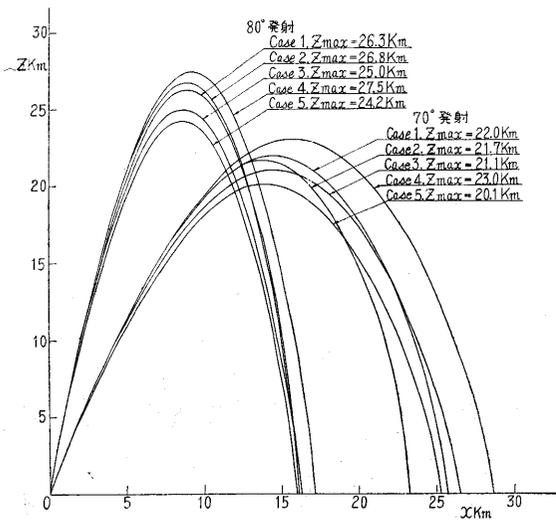
(1) カップ III 型の性計能算 カップ III 型は 1 号機より 3 号機まで計 3 機 32 年 5 月より 7 月にかけて東京大学生産技術研究所秋田実験場で飛しょう実験が行われ、発射角はいずれも 70° であった。

計算式は (1), (2), (3), (4), 空気抵抗係数は第 2 図のものを用いた。

以下計算に用いた数値および計算結果の一例を示す。

なお、実際に飛しょうしたのは 70° 発射のみであるが 70° 発射以外の発射角の場合についての計算結果および Trajectory は 11 ページ第 3 図 (A) を参照されたい。

また風の分散計算は (13), (14), (15), (16), (17) の各式を用いて秋田気象庁で観測した。1955 年および 19



第 11 図 カップ III 型の各種重量配分による Trajectory

カップ II 型計算使用値

	128 φ ダミー	ブースタ
W_0	42.05	124.60
T	—	5,286.50
τ	—	2.00

W_0 : 燃焼前の重量 (kg)

T : 推力 (kg)

τ : 燃焼時間 (sec)

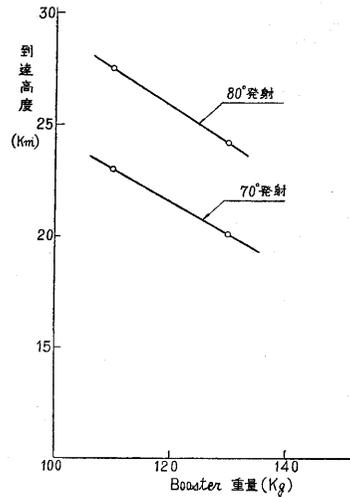
56 年 4 月の風のデータによって行った。第 6 図に使用した風のデータを示す。計算表はスペースをとるので第 7 図および第 8 図にその結果のみを示す。

(2) カップ II 型の性能計算 カップ II 型は 32 年 4 月 24 日に東大生研秋田実験場で飛しょうさせたが、これは III 型のメインロケット (128J 型) がダミーロケット (エンジンなしのロケット) になったものでブースタは III 型と同じ 220 B 型で、III 型の予備実験として行われたものである。これはブースタ燃焼後も切りはなしは行わない。計算方法は III 型と同様で発射角度は 65° である。

第 9 図にその Trajectory を示す。

(3) ブースタおよびメインロケットの重量変化による到達高度の検討 ロケットの上昇性能はその質量比 (燃焼前の重量/燃焼後の重量) の変化によって左右される。計画立案されたロケットはその推奨重量の変更は無いとしても、諸計測器等の搭載物の重量は飛しょうまでに変ることが考えられる。そこで最終的な性能計算を行う以前に推奨重量は変化しないとして全備重量が変更になった場合を考慮して、そのいくつかのケースについて計算を行っておけば、予想到達高度を知ると共に、搭載物の重量変化による到達高度の変化を知ることができる。

ここにカップ III 型の場合について次の五つのケースについての計算結果を一例として第 10, 11, 12 図に示す。



main 重量 = 44.0 kg

第 12 図 Booster の重量による到達高度の変化

ケース	メイン重量 (kg)	ブースタ重量 (kg)	全備重量 (kg)
1	39	120	159
2	34	120	154
3	49	120	169
4	44	110	154
5	44	130	174

註. 推奨重量は 5 ケースとも同じである。

(4) 補遺 カップ III 型が計画され飛しょう実験に進むまでに計算された結果を参考までに第 4 表に示す。

むすび

以上カップ III 型の性能計算について述べたが、各関係者の参考の為に役に立てていただければ幸いである。終りにご指導をいただいた糸川教授を始め秋葉鏡二郎氏、中村巖氏に深謝する。(1357.10.3)

文献

- (1) 秋葉鏡二郎 “燃焼時間の短いロケットの燃焼中の速度、高度の急速推定法” 糸川研究室報告
- (2) 秋葉鏡二郎、中村巖 “風によるロケットの分散” 生産研究 第 9 巻第 3 号, P. 23
- (3) 中村巖他 “カップ 128 型の性能計算および慣性モーメントの計算” 生産研究 第 9 巻, 第 3 号 P. 18