

# アナログコンピュータによる棒の振動解析

森 大 吉 郎

## 1. はし が き

低速度型アナログコンピュータを用いて均一断面の棒の曲げ振動を解析する方法については前<sup>(1)</sup>に述べたが、さらに函数発生器や掛算器を併用すれば一般の変断面棒の振動も解析しうることが判ったので、その方法の概略と計算例とをとりあえず報告する。

## 2. 基礎式とコンピュータの結線

変断面棒の定常振動の基礎式は

$$\frac{d^2}{dx^2} \left\{ EI(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right\} = m(x) \omega^2 y \quad (1)$$

ここに

- $EI(x)$ ; 棒の曲げ剛性,  $m(x)$ ; 単位長さの質量,
- $x$ ; 棒の軸方向にとった坐標,  $y$ ; 撓み,
- $\omega$ ; 固有振動数.

変換係数を使って (1) を変換すると

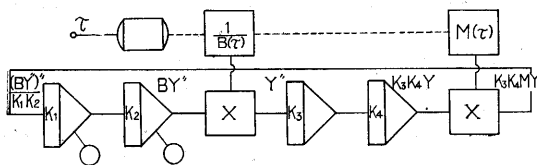
$$\frac{d^2}{d\tau^2} \left\{ B(\tau) \frac{d^2 Y}{d\tau^2} \right\} = \frac{m_0 l^4 \omega^2}{EI_0 T^4} \cdot Y \quad (2)$$

ただし

- $Y = ay, \tau = ax, a_2 = 1, a_1 = T/l, \}$  (3)
- $EI = EI_0 B(x), m = m_0 M(x)$
- $l$ ; 棒の全長,  $T$ ; 計算時間,
- $EI_0, m_0$ ; 基準点における値.

(2)式をコンピュータで結線すると第1図のようになる。積分器4台のほかに、 $B(\tau)$ 、 $M(\tau)$  のための函数発生器および掛算器<sup>(2)</sup>が必要になる。

コンピュータの操作としては、計算時間  $T$  を棒の長さ



第1図 棒の曲げ振動の結線図

$l$  に対応して  $1/B(\tau)$ 、 $M(\tau)$  を函数発生器で発生し、 $\tau=0$  および  $\tau=T$  における各積分器の電圧すなわち初期値および終極値が、与えられた棒の両端の境界条件にそれぞれ正確に対応するように初期値および  $K_1, \dots, K_4$  を試算で調整する。この場合はこれらのうち任意の二つを調整すれば、所望の状態にすることができる。

第1図において結線の関係を調べると

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \left( B \frac{d^2 Y}{d\tau^2} \right) = K_1 K_2 K_3 K_4 M Y \quad (4)$$

の関係があるから、上記の調整ができたときの  $K_1, \dots, K_4$  および  $T$  の値を測定すれば (2) (4) を対応させて

$$\omega^2 = \frac{EI_0}{m_0 l^4} (K_1 K_2 K_3 K_4 T^4) = \frac{EI_0 \lambda^4}{m_0 l^4} \quad (5)$$

ただし

$$\lambda^4 = K_1 K_2 K_3 K_4 T^4$$

となるからこれにより固有振動数が求まり、同時に計算中における各積分器の電圧を自動平衡型記録計・インクライターもしくは電磁オシロ等で記録することにより撓み・傾斜・モーメント・剪断力図がすべて求まる。

## 3. Rayleigh 原理の応用

基本振動の場合は正解によく近似した適当な振動形態  $y_a(x)$  を仮定すれば

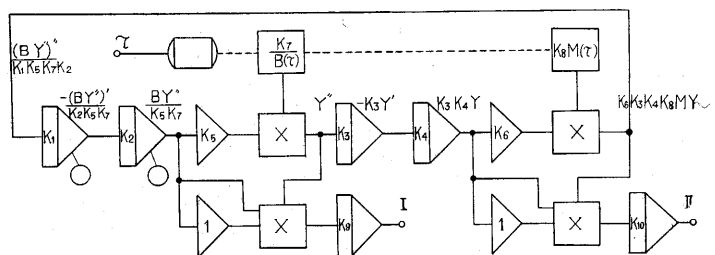
$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EI (y''_a)^2 dX}{\int_0^l m y_a^2 dx} \quad (6)$$

を計算することによって正解に近い固有値を求めうることが Rayleigh 原理としてよく知られているが、前節のコンピュータによる解析においてはせつかく  $Y, Y''$  の近似解が記録器により記録されるのであるから、それを直ちに利用して (6) を変形した

$$\omega^2 = \frac{EI_0 T^4}{m_0 l^4} \frac{\int_0^T B (Y'')^2 d\tau}{\int_0^T M Y^2 d\tau} \quad (7)$$

を計算すればさきの(5)式による値よりも一段と近似の良い値を期待できる。

(7)を計算するには、 $Y$  および  $Y''$  の記録から筆算で積分計算を行ってもよいが、掛算器および積分器を増設して第2図のように結線すれば(7)の分子と分母の積分値を一挙にしかも自動的に求めることができて好都合である。



$$I = \int \frac{K_3 B Y'^2}{K_5 K_7} d\tau, \quad II = \int K_3^2 K_4^2 K_5 K_{10} M Y^2 d\tau.$$

第2図 変断面棒の曲げ振動の結線図 (詳細)

研究速報

4. 計算例

(1) 均一断面の片持梁 1次振動の場合の計算例を第1表に示す。\$K\_1=0.100\$ の場合は両端の境界条件をほぼ正確に満たすように係数を調整した場合である。\$K\_1=0.090\$ 以下の場合にはもはや一端の境界条件は満足されていないので(5)式を適用できない状態であるが、それでも(7)式による計算を行うと近似の良い \$\lambda\$ の値が得られ、3節の方法が近似解法として有効であることがわかる。

第1表 均一片持梁の計算例

\$K_1\$	\$T\$ (秒)	* I (V)	* II (V)	** \$\lambda_{(5)}\$	** \$\lambda_{(7)}\$
.100	18.6	50	47	1.86	1.88
.090	17.8	49	39	/	1.88
.080	16.2	49	27	/	1.88
.070	15.8	49	23	/	1.89
.060	15.4	49	21	/	1.90

\$K\_2=K\_3=K\_4=0.100, \lambda(\text{正解})=1.875\$.

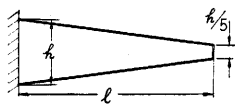
初期値: \$(BY'')\_0=50V, (BY''')\_0/K\_2=-37.5V\$ (第2図参照)

\* I, II は第2図の I, II の個所の計算終了時における電圧 (ボルト)

\*\* \$\lambda\_{(5)}, \lambda\_{(7)}\$ はそれぞれ(5), (7)式により計算した値。

2次振動の場合は \$K\_1, \dots, K\_4=0.200\$ で \$T=23.6\$ 秒となり \$\lambda=4.72\$ (正解は 4.69) の値が得られた。この場合の(7)式の適用性については今後吟味する予定である。

(2) 変断面棒 Bisplinghoff (9) の示した例題である第3図の楔形片持梁を例として選んだ。1次振動の計算例を第2表に示す。函数発生器・掛算器等が追加されているので誤差が増大することが心配されたが、結果は意外に良好で、また Rayleigh 原理による解法も有効なことが判った。結線が全部終了してから、係数の調整



を行い記録を取り終るまでに要した時間は約1時間である。\$B(\tau), M(\tau)\$ を函数発生器に装着して発生させ

第3図 楔形片持梁 (Bisplinghoff の例題)

第2表 楔形片持梁の計算例

\$K_2\$	\$T\$ (秒)	I (V)	II (V)	\$\lambda_{(5)}\$	\$\lambda_{(7)}\$
.500	24.7	27.0	44.0	2.10	2.08
.510	21.5	25.5	24.2	/	2.08
.520	20.0	24.8	18.3	/	2.08
.530	19.3	24.0	14.2	/	2.10
.540	18.3	24.0	11.0	/	2.12

\$K\_1=0.2, K\_3=0.8, K\_4=2, K\_5=0.09, K\_6=0.02, K\_7=0.02, K\_8=0.9, K\_9=K\_{10}=0.1, (第2図参照)\$

\$\lambda(\text{正解})=2.07\$.

初期値: \$(BY''/K\_5K\_7)\_0=50V\$.

{\$(BY''')\_1/K\_2K\_5K\_7}\_0=-6.4V\$

るに要する時間も約1時間である。一般に1次振動に比較して2次振動を求めるには2~3倍の手数と時間を必要とする。また片持梁よりも自由・自由棒の方がかなり調整し難い。解(固有振動数)の大略値を知っていると調整は非常に早くなる。

5. 実際の結線

(2)式を解くには原理的には第1図の結線でよいのであるが、実際の結線は次の諸因によりやや複雑になる。

(1) 函数発生器はローラー型であるので函数発生と掛算を一挙に行える点は好都合であるが、インピーダンスが低い(300 \$\Omega\$) のので、それが積分器に及ぼす悪影響を緩和するため演算増幅器を前置した。

(2) 掛算器はサーボ掛算器を使用した。これには-1の演算器を常時併用するのが性能上必要のようである。変数が正負にわたるときはもちろん必要である。

(3) (7)式の計算を行うための結線。

第2図に実際の結線図を示す。このように実際のコンピュータの結線においてはもとの微分方程式より割り出した数よりも相当上回った数の演算増幅器を必要とすることが多い。

総合精度としては2~3%程度と思われるが、掛算器および函数発生器にはなお今後改良の余地がある。ローラー型函数発生器は抵抗値 10k \$\Omega\$ のを試作中である。

6. 結 び

アナログ・コンピュータを用いて変断面棒の振動を解析する方法および Rayleigh 原理を用いた精度向上の方法について述べたが、このうち Rayleigh 原理の応用は池田健・林毅両教授よりのご示唆によるものである。

結局この方法は変断面棒の振動解析法として実用的であり、また(7)式により容易に(4)の値の吟味もしくは精度向上を図ることができる点で特徴があると結論してよさそうである。なお詳細な計算は、また2次振動の場合の精度の検討等は今後行う予定である。(1957.3.26)

文 献

- 1) 森大吉郎・莊司教 生産研究 7, 119 (1955).
- 2) 莊司教 生産研究 7, 230 (1955).
- 3) R. L. Bisplinghoff, "Aeroelasticity" Addison-Wesley, 1955.

正 誤 表 (5月号)

頁	段	行	種 別	正	誤
3	左		第3図	{ I } { II } { III } { IV }	(特性曲線中) 1, 2, 3, 4
"	右	"	本文	1	{ I }
5	"	"	第7図	a Kodalith Ortho	a Koda-lith Ortho