

アナログコンピュータによる二次元翼のフラッタ解析について

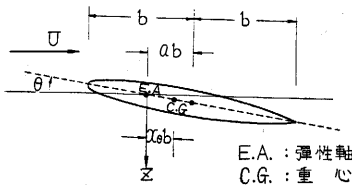
富 田 文 治

§. 1 はし が き

固有振動数, 重量, 形状等が与えられた翼が空気中で飛行する場合に, ある一定の速度に達すると突然振動を開始する可能性が生ずる. この振動は一種の自励振動と見なされるもので, 振動すること自体によって翼は空気からエネルギーを供給されるから, 一たびこの種の振動が発生すると振幅は減衰することなくして限りなく増大し, ついに翼の破壊にまで達するのが普通である. このような振動現象がフラッタであり, その限界の速度がフラッタの危険速度と言われるものである. この現象を低速度型アナログコンピュータで解析する方法およびその結果について簡単に述べる.

アナコンによる解析方法は, フラッタの運動方程式を適当な初期条件の下に直接解いて, その解が時間的に収斂または発散するかによって危険速度を求めるのであるが, この場合に一番問題になるのは, Wagner 函数に対応する空気力をいかにして発生するかということである.

§. 2. 運動方程



第 1 図 二次元翼の断面図

第 1 図に示すような二次元翼の弾性軸の上下方向の変位 z および弾性軸回りの回転角 θ は次のような運動方

$$\begin{aligned}
 & M d^2 z / d\tau^2 + M(\omega_z b / U)^2 z + S q d^2 \theta / d\tau^2 = -\pi \rho b^2 \times \\
 & \quad [d^2 z / d\tau^2 + b d\theta / d\tau - a b d^2 \theta / d\tau^2] \\
 & - 2\pi \rho b^2 \int_0^\tau \phi(\tau - \tau') \frac{d}{d\tau'} [b\theta(\tau') + dz(\tau') / d\tau' \\
 & \quad + (\frac{1}{2} - a) d\theta(\tau') / d\tau'] d\tau' \\
 & I q d^2 \theta / d\tau^2 + I q (\omega_\theta b / U)^2 \theta + S q d^2 z / d\tau^2 = \pi \rho b^3 \times \\
 & \quad [a d^2 z / d\tau^2 - (\frac{1}{2} - a) b d\theta / d\tau - (\frac{1}{8} + a^2) d^2 \theta / d\tau^2] \\
 & + (\frac{1}{2} + a) 2\pi \rho b^3 \int_0^\tau \phi(\tau - \tau') d / d\tau' \times \\
 & \quad [b\theta(\tau') + dz(\tau') / d\tau' + (\frac{1}{2} - a) d\theta(\tau') / d\tau'] d\tau'
 \end{aligned} \tag{1}$$

ただし,

- b : $\frac{1}{2}$ 翼弦長, ω_z : 曲げの固有振動数
- a : 弾性軸と翼の中心との距離 ω_θ : 振れの固有振動数
- $M = \int dm$: 単位巾の質量 ρ : 空気密度
- $S q = \int r dm$: (r は弾性軸からの距離) U : 速度
- $I q = \int r^2 dm$: 慣性能率 t : 物理的時間
- $\tau = Ut / b$: 無次元化した時間

ここで $\phi(\tau) = (2 + \tau) / (4 + \tau)$ は Wagner 函数で, 静止翼が突然一定速度で動き出したときに $\frac{1}{4}$ 翼弦点に作用する空気力が時間的に変化する模様を示す函数である. 翼が正弦波状定常振動をしている場合には

$$\int_0^\tau \phi(\tau - \tau') dw(\tau') / d\tau' d\tau' = C \left(\frac{\omega b}{U} \right) w(\tau)$$

で表わされる. ただし

$$\begin{aligned}
 w(\tau) &= b\theta(\tau) + dz(\tau) / d\tau + (\frac{1}{2} - a) b d\theta(\tau) / d\tau \\
 &: \frac{1}{4} \text{翼弦点の速度函数} \\
 C \left(\frac{\omega b}{U} \right) &: \text{Theodorsen 函数}
 \end{aligned}$$

§. 3. アナログコンピュータにおける空気力の発生

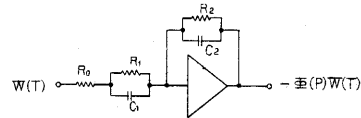
(1)式における $\frac{1}{4}$ 翼弦点に作用する空気力の発生が一番重要な問題である. まずスケールファクタ $\lambda_z, \lambda_\theta, \lambda_\tau$ を $b\theta = \lambda_\theta \theta, z = \lambda_z Z, \tau = \lambda_\tau T, d / d\tau = 1 / \lambda_\tau \cdot P$ とすれば θ, z, τ はそれぞれコンピュータにおける変数 θ, Z, T に変換されるから $\frac{1}{4}$ 翼弦点における速度函数は

$$W(T) = PZ(T) + \kappa_s P\theta(T) + \kappa_\theta \theta(T), \tag{2}$$

と書かれる. いま $\theta(P)$ を次のようなオペレイタとして定義する.

$$\lambda_\theta \theta(P) W(T) = \int_0^\tau \phi(\tau - \tau') / d\tau' d\tau', \lambda_\theta: \text{常数} \tag{3}$$

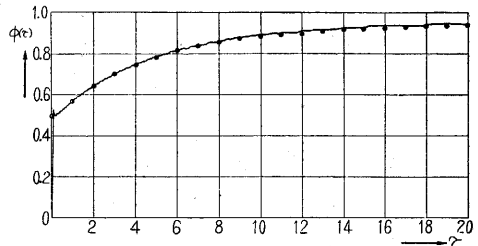
$\theta(P)$ の具体的な形としては第 2 図に示す回路を選定し



第 2 図 Wagner 函数に対応する空気力の発生回路. R_0 は補正用の小抵抗で, R_1, C_1, R_2 および C_2 の値が支配的要素であり, この部分の伝達函数 (Transfer function) は

$$(1 + bP) / (1 + aP) \text{ ただし } b = C_1 R_1, a = C_2 R_2 \tag{4}$$

である. $2b = a$ に選ぶと (4) 式で示される伝達函数は Wagner 函数を e の級数に展開したとき第 2 項までで近似したことに相当する. 第 3 項まで採った近似式に相当する伝達函数を採用すれば一層正確であるが, 亜音速領域のフラッタに対しては (4) 式に小抵抗 R_0 の補正をした伝達函数で十分のようである. さて $\phi(\tau)$ を定義した場合のように第 2 図の回路の入力に $W(T) = 1(T)$ を加えたときの出力を記録したのが第 3 図である. 実線がその記録で



第 3 図 コンピュータにおける Wagner 函数

研究速報

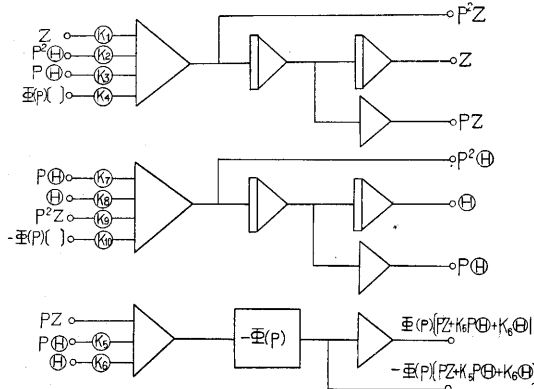
丸印は理論値を示す. 記録装置の時定数が大きいために立上りの線が多少傾斜しており, また, $\tau=0$ で行き過ぎていたのは記録装置の慣性によるため, 細かいギザギザも記録装置のため, これらはいずれもオペレイタとは無関係である.

§ 4. アナログコンピュータにおける結線法

(1)式をコンピュータにおける Machine Equations に書き換えると,

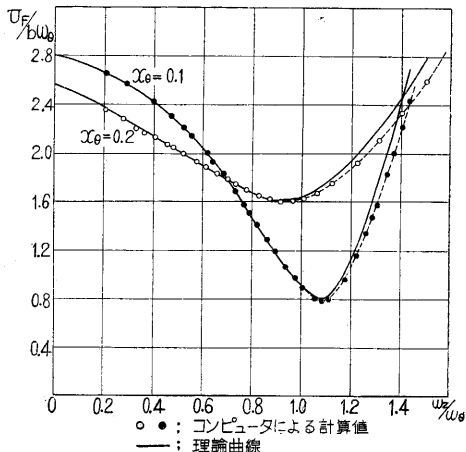
P^2Z + \kappa_1 Z + \kappa_2 P^2\theta + \kappa_3 P\theta = -\kappa_4 \phi(P) \times [PZ + \kappa_5 P\theta + \kappa_6 \theta]
P^2\theta + \kappa_7 P\theta + \kappa_8 \theta + \kappa_9 P^2Z = \kappa_{10} \phi(P) \times [PZ + \kappa_5 P\theta + \kappa_6 \theta] (5)

ただし \kappa_1 = 1/(1+\xi) \cdot \lambda_\tau^2 T_i^2 (\omega_z/\omega_\theta)^2 (b\omega_\theta/U)^2,
\kappa_2 = (x_\theta - a\xi)/(1+\xi) \cdot \lambda_\theta/\lambda_z,
\kappa_3 = \xi/(1+\xi) \cdot \lambda_\theta/\lambda_z \cdot \lambda_\tau T_i, \kappa_4 = 2\xi/(1+\xi) \cdot \lambda_\tau T_i,
\kappa_5 = (\lambda_\theta/\lambda_z) \cdot \lambda_\tau T_i,
\kappa_6 = \xi(1/2 - a) / \{\gamma\theta^2 + \xi(1/8 + a^2)\} \cdot \lambda_\tau T_i,
\kappa_7 = \gamma\theta^2 / \{\gamma\theta^2 + \xi(1/8 + a^2)\} \cdot \lambda_\tau T_i^2 \cdot (b\omega_\theta/U)^2,
\kappa_8 = (x_\theta - \xi a) / \{\gamma\theta^2 + \xi(1/8 + a^2)\} \cdot \lambda_z/\lambda_\theta,
\kappa_9 = 2(\lambda_\theta/2 + a)\xi / \{\gamma\theta^2 + \xi(1/8 + a^2)\} \cdot \lambda_\tau T_i,
\xi = \pi\rho b^2/M, x_\theta = S/Mb, \gamma\theta^2 = I_\theta/Mb^2,
T_i: 積分器の時定数

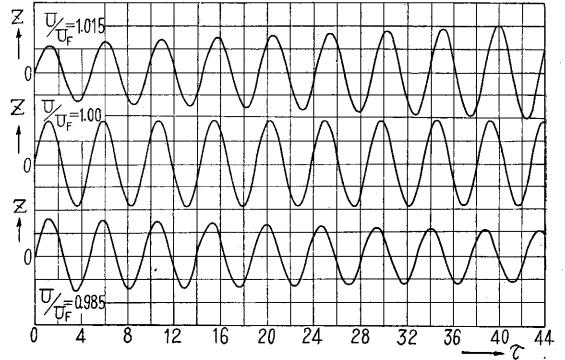


第4図 アナログコンピュータの結線法

(5)式を解くためには第4図に示すように積分器4台, 加



第5図 計算例—無次元フラッタ速度 U_F/b\omega_\theta と \omega_z/\omega_\theta との関係



第6図 (XYレコーダによる) 種々の速度に対する振動の記録 U: 速度, U_F: フラッタ速度 算器3台, 符号変換器3台, オペレイタ1台を結線すればよい.

§ 5. 計算結果

以上に述べた方法に従い計算した結果の一, 二の例を示す. 第5図は \xi=0.05, \gamma\theta^2=1/4, a=-0.3, x_\theta=0.1, 0.2 の二次元翼についてフラッタ速度と固有振動数の比との関係を示す計算結果で, 実線はおのおの場合の理論値である. また第6図はコンピュータにおける解の収斂, 発散の程度を示す図で \xi=0.1, \gamma\theta^2=1/4, a=-0.3, x_\theta=0.1, \omega_z/\omega_\theta=0.75 の翼について, U/U_F=1.015, 1.00, 0.985 に対する解を記録したものである.

§ 6. 結 び

従来フラッタ現象を解析する方法としては, まず振動を定常的正弦波振動と仮定し, いわゆるフラッタ判別式の実数部, 虚数部を同時に零にする根を筆算で求めていたが, このような方法では比較的単純な二次元翼の場合ですら時間的にも労力的にも大変である. 最近ではデジタルコンピュータを用いて計算の迅速化, 労力の軽減化をはかっているが, 残念ながら現在のところではわが国ではその段階にまで至っていない. アナログコンピュータによる方法は, 第5図の結果から判るように, まだ精度的に今後検当すべき点は多々あるが, 上述したような方法で, アナコンにより迅速にフラッタ現象の解析が行い得ることはフラッタ問題究明のための有力な武器が得られたことと思われる.

またこの方法は圧縮性流体のフラッタについても適用できる方法で, ただこの場合には Wagner 関数の種類も増し, その形も複雑になる上に, Wagner 数の函数になるので非圧縮性流体の場合ほど簡単ではないが, この空気力の発生法さえできれば, 後は上述の場合と全く同様な手続きで容易に解析できるもので現在計算を行いつつある.

最後にこの計算にあたってご指導, ご援助をいただいた池田健教授ならびに森大吉郎助教授に深く感謝する. (1957. 3. 30)

文 献

Bisplinghoff, R. L., Aeroelasticity, Addison-Wesley Publishing Co., 1955.
Fung, Y. C., Aeroelasticity, Addison-Wesley Publishing Co., 1955.
Winson, J., The Solution of Aeroelastic Problems by Electronic Analogue Computation, J. A. S., July, 1950.
MacNeal, R. H., The Solution of Aeroelastic Problems by Means of Electrical Analogies, J. A. S., Dec., 1951.