拡張誤差函数，拡張ガンマ函数

——損失のある拡散現象に便利な新しい函数——

安　達　芳　夫

1. まえがき

最近トランジスタや原子炉の出現と共に，途中で損失や発生のある拡散現象（これを不完全拡散現象と呼ぶことにしよう．その基礎方程式は付録1に述べてある）を取扱う機会が急増してきたが，この種不完全拡散現象に属する自然現象は極めて多い．たとえば熱伝導・化学反応・RCG 分布定数電気回路・放電現象・破壊現象・伝染病などの伝播現象等々．

ところでこの種の問題の過渡現象を考察するばあいには，従来数学的道具としてフーリエ級数展開とかたとえば一次元問題では誤差函数を使用しているが，これらの函数では不完全拡散現象の定性的性質をはあくするのが困難な欠点がある．この欠点を除去するのにふさわしく，かつ数学的にも意味のある函数として次に述べる函数——拡張誤差函数・拡張ガンマ函数および不完全拡散函数（すべて仮称）——が便利であることがわかったので，その定義・主な性質と簡単な応用例を紹介してみよう．

2. 函数の定義

よく知られているように誤差函数，およびガンマ函数群は次式で定義されている．

$$\operatorname{erf} y \equiv \Phi(y) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{-\xi^2}d\xi \tag{1—1}$$

$$\operatorname{erfc} y \equiv \Theta(y) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_y^\infty e^{-\xi^2}d\xi = 1-\Phi(y) \tag{1—2}$$

$$\Gamma(\nu) \equiv \int_0^\infty \xi^{\nu-1}e^{-\xi}d\xi \tag{2—1}$$

$$\gamma(\nu, y) \equiv \int_0^y \xi^{\nu-1}e^{-\xi}d\xi \tag{2—2}$$

$$\Gamma(\nu, y) \equiv \int_y^\infty \xi^{\nu-1}e^{-\xi}d\xi \tag{2—3}$$

これらを拡張して拡張誤差函数および拡張ガンマ函数群を次式で定義する．

$$\Phi_z(y) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^z\int_0^y e^{-\left(\xi^2+\frac{z^2}{4\xi^2}\right)}d\xi \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{-\left(\xi-\frac{z}{2\xi}\right)^2}d\xi \tag{3—1}$$

$$\Theta_z(y) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^z\int_y^\infty e^{-\left(\xi^2+\frac{z^2}{4\xi^2}\right)}d\xi = 1-\Phi_z(y) \tag{3—2}$$

$$\Gamma_z(\nu) \equiv \int_0^\infty \xi^{\nu-1} e^{-\left(\xi+\frac{z^2}{4\xi}\right)}d\xi = 2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu K_\nu(z) \tag{4—1}$$

$$\gamma_z(\nu, y) \equiv \int_0^y \xi^{\nu-1} e^{-\left(\xi+\frac{z^2}{4\xi}\right)}d\xi \tag{4—2}$$

$$\Gamma_z(\nu, y) \equiv \int_y^\infty \xi^{\nu-1} e^{-\left(\xi+\frac{z^2}{4\xi}\right)}d\xi \tag{4—3}$$

さらに次式で不完全拡散函数群を定義しておく．

$$_\lambda\Gamma_z(\nu) \equiv \int_0^\infty \xi^{\nu-1} e^{-\left(\lambda\xi+\frac{z^2}{4\xi}\right)}d\xi \tag{5—1}$$

$$_\lambda\gamma_z(\nu, y) \equiv \int_0^y \xi^{\nu-1} e^{-\left(\lambda\xi+\frac{z^2}{4\xi}\right)}d\xi \tag{5—2}$$

$$_\lambda\Gamma_z(\nu, y) \equiv \int_y^\infty \xi^{\nu-1} e^{-\left(\lambda\xi+\frac{z^2}{4\xi}\right)}d\xi \tag{5—3}$$

3. 函数の性質

（i） $_\lambda\gamma_z$（ν, y）の性質

するとまず $_\lambda\gamma_z$（ν, y）は実変数域 z, ν, $\lambda=(-\infty, \infty)$, $y=[0, \infty)$ にて次の漸化式を満足する．（半無限平面 $z=0 \cap \nu\leqq 0$ を除く）

$$\underset{(\nu)}{T}\,{}_\lambda\gamma_z(\nu, y) = {}_\lambda\gamma_z(\nu-1, y),\quad \underset{(\nu)}{T} = -\frac{2}{z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{6}$$

$$\overset{(\nu)}{T}\,{}_\lambda\gamma_z(\nu, y) = S\,{}_\lambda\gamma_z(\nu+1, y),\quad \overset{(\nu)}{T} = \nu-\frac{z}{2}\frac{\partial}{\partial z},$$

$$S = \lambda+\frac{\partial}{\partial y} \tag{7}$$

$$\therefore\ \underset{(\nu+1)}{T}\overset{(\nu)}{T}\,{}_\lambda\gamma_z(\nu, y) = \overset{(\nu-1)}{T}\underset{(\nu)}{T}\,{}_\lambda\gamma_z(\nu, y) = S\,{}_\lambda\gamma_z(\nu, y)$$

$$\text{ここで}\quad \underset{(\nu+1)}{T}\overset{(\nu)}{T} = \overset{(\nu-1)}{T}\underset{(\nu)}{T} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1-2\nu}{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$= \frac{1}{z^{1-2\nu}}\frac{\partial}{\partial z}\left(z^{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\therefore\ \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1-2\nu}{z}\frac{\partial}{\partial z}-\lambda-\frac{\partial}{\partial y}\right]{}_\lambda\gamma_z(\nu, y) = 0 \tag{8}$$

この（8）式を付録（A.4）式と比較すればわかるように $_\lambda\gamma_z$（ν, y）は D（拡散定数）$=1$ の 2（$1-\nu$）次元空間球対称不完全拡散方程式を満足しており，z, y, λ, ν はそれぞれ距離，時間，損失係数，および空間次元と密接な関係がある．

$\lambda>0$ ならば $_\lambda\Gamma_z(\nu, y)$ もまた上の方程式を満足する．

次に次数が $-\nu$ と ν の函数間には下記の関係がある．

$$_\lambda\gamma_z(-\nu, y) = \lambda^\nu\left(\frac{2}{z}\right)^{2\nu}{}_\lambda\Gamma_z\left(\nu, \frac{z^2}{4\lambda y}\right)$$

$$(z \neq 0 \cup \lambda \neq 0) \tag{9—1}$$

$$= \left(\frac{2}{z}\right)^{2\nu}\Gamma_{\sqrt{\lambda}z}\left(\nu, \frac{z^2}{4y}\right)\ (z\neq 0) \tag{9—2}$$

この式はガンマ函数には無い重要な関係式であるが，拡散現象の性質を整理するのにも役立つ．たとえば一次元問題$\left(\nu=\frac{1}{2}\right)$と三次元問題$\left(\nu=-\frac{1}{2}\right)$の関連性，二次元問題（$\nu=0$）の特異性など．なお $\lambda=0$ のばあいには

(9—1) 式が成立しないが (9—2) 式は成立することを特に記しておこう．よく知られてているように無損失一次元問題では誤差函数が活躍するが，これは (9—2) 式によるものである．

さて z, y, λ, ν と変数が多すぎるので，その数を減らしたいばあいには次の相似法則を用いればよい（下記関係式は四変数および α_i が複素数でも成立する）．

$$ {}_{\lambda}\gamma_{z}(\nu, y)=\alpha_1^{-2\nu}\,{}_{\frac{\lambda}{\alpha_1^2}}\gamma_{\alpha_1 z}(\nu, \alpha_1^2 y)=\alpha_2^{-\nu}\,{}_{\frac{\lambda}{\alpha_2}}\gamma_{\sqrt{\alpha_2}z}(\nu, \alpha_2 y) $$

$$ =\alpha_3^{\nu}\,{}_{\alpha_3\lambda}\gamma_{\frac{z}{\sqrt{\alpha_3}}}\left(\nu, \frac{y}{\alpha_3}\right)\text{（以上 }\alpha_i\neq 0\text{）} \quad (10) $$

これらの式で $\alpha_i=-1$ とおけば拡散現象の一側面を知るに役立つが，特に $\alpha_3=1/\lambda$ とおけば，

$$ {}_{\lambda}\gamma_{z}(\nu, y)=\lambda^{-\nu}\gamma_{\sqrt{\lambda}z}(\nu, \lambda y) \quad (\lambda\neq 0) \qquad (10') $$

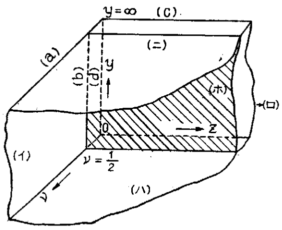
すなわち ${}_{\lambda}\gamma_{z}$ (ν, y) はすべて拡張ガンマ函数 $\gamma_{z'}(\nu, y')$ に帰することができる．ただしこの関係式は $\lambda>0$（損失のある拡散現象）のばあいには便利であるが，$\lambda<0$（発生のある拡散現象）のときは $\sqrt{\lambda}z$, λy がそれぞれ正の純虚数，負の実数となり不便なので，後者では次の式で函数 ${}_{-1}\gamma_{z'}$ (ν, y') に帰して整理するほうが好ましい．

$$ {}_{\lambda}\gamma_{z}(\nu, y)=(-\lambda)^{-\nu}\,{}_{-1}\gamma_{\sqrt{-\lambda}z}(\nu, -\lambda y), \quad (\lambda\neq 0) \qquad (10'') $$

ここでは損失のある拡散現象への応用に重点をおく関係上，函数 ${}_{-1}\gamma_{z}$ (ν, y) の性質の説明は省略する．

(ii)　γ_z (ν, y) の性質

次に函数 $\gamma_z(\nu, y)$ は ${}_{\lambda}\gamma_{z}$ (ν, y) で $\lambda=1$ のばあいの性質をもっていることはいうまでもないが，この函数の性質を知るためには第1図の如き z, ν, y を三直線直交軸とする三次元空間の部分空間 z, ν, $y=[0, \infty)$（ただし直線 $z=0\cap\nu=0$ を除く）での函数の挙動，特に特殊面上における性質を調べておくと便利である．



（イ）$\gamma_0(\nu, y)=\gamma(\nu, y)$
（ロ）$\gamma_{\infty}(\nu, y)=0$
（ハ）$\gamma_z(\nu, 0)=0$
（ニ）$\gamma_z(\nu, \infty)=2\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}K_{\nu}(z)$
（ホ）$\gamma_z\left(\frac{1}{2}, y\right)=\sqrt{\pi}\,e^{-z}\,\Phi_z(\sqrt{y})$
（a）$\gamma_0(\nu, \infty)=\Gamma(\nu)$
（b）$\gamma_0\left(\frac{1}{2}, y\right)=\sqrt{\pi}\,\Phi(\sqrt{y})$
（c）$\gamma_z(0, \infty)=2K_0(z)$
（d）$\Gamma_0(0, y)=Ei(y)$

第1図　γ_z (ν, y) 函数空間

そこで，まず z 軸に垂直な平面として $z=0$, $z=\infty$ を採用すれば，各平面上で

$$ \gamma_0\ (\nu,\ y)=\gamma\ (\nu,\ y) \qquad (11\text{—}1) $$

$$ \gamma_{\infty}\ (\nu,\ y)=0 \qquad (11\text{—}2) $$

次に y 軸に垂直な平面 $y=0$, $y=\infty$ 上ではそれぞれ

$$ \gamma_z\ (\nu,\ 0)=0 \qquad (12\text{—}1) $$

$$ \gamma_z\,(\nu, \infty)=\Gamma_z(\nu)=2\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}K_{\nu}(z) \qquad (12\text{—}2) $$

さらに γ_z (ν, y) は z に関して単調減少，y に関して単調増加函数であることが言える．

以上のように z 軸，y 軸に垂直な特定平面上での函数の性質はよく調べられているが，ν 軸に垂直な面 $\nu=$（一定）上での函数の性質はまだ調べられていない．しかもこの函数を拡散現象へ応用するには $\nu=$（一定）面上での挙動を知っておくことこそ重要である．

そこで $\nu=\frac{1}{2}$ を採用し（これは一次元問題に役立つ），$\gamma\left(\frac{1}{2}, y\right)=\sqrt{\pi}\,\Phi(\sqrt{y})$ に準じて $\gamma_z\left(\frac{1}{2}, y\right)=\sqrt{\pi}e^{-z}\Phi_z(\sqrt{y})$ とおけば［(3—1) 式はこの関係を満足するよう定義してある］，$\Phi_z(y')$ は下記 (iii) に述べるように誤差函数 $\Phi(y')$ に準じた，しかも拡張した簡単な性質をもっている．

以上を要約すれば，拡張誤差函数 $\Phi_z(y)$ と不完全ガンマ函数 γ (ν, y)，第二種変型ベッセル函数 $K_{\nu}(z)$ の三函数は，第1図の如き γ_z (ν, y) 函数空間において互いに直交する三特定平面上で定義された函数の関係にある．なお (12) 式からもわかる通り，γ_z (ν, y) は不完全ガンマ函数 γ (ν, y) の拡張函数であると同時に，第二種変型ベッセル函数 K_{ν} (z) の不完全函数であるとの見方をとることもできる．このことは γ_z (ν, y) の定義式を次のように書直してみるとさらにわかり易い．

$$ \gamma_z(\nu, y)=\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\int_0^{\frac{2y}{z}}\zeta^{\nu-1}e^{-\frac{z}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)}d\zeta $$

$$ =\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{2y}{z}\right)}e^{\nu\theta-z\,\mathrm{ch}\,\theta}d\theta \qquad (13) $$

なお K_{ν} (z) の定義式は

$$ K_{\nu}(z)=\int_0^{\infty}\mathrm{ch}\,\nu\theta\cdot e^{-z\,\mathrm{ch}\,\theta}\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\nu\theta-z\,\mathrm{ch}\,\theta}d\theta \qquad (14) $$

(iii)　Φ_z (y) の性質

次に拡張誤差函数 Φ_z (y) は実変数域 z, $y=(-\infty, \infty)$ にて次の性質をもっている．

$$ \Phi_z(-y)=-\Phi_z(y), \quad \Phi_{-z}(y)=e^{-2z}\Phi_z(y) \qquad (15) $$

ゆえに z, $y=[0, \infty)$ にて考察しておけばよいが，まず y に関しては

$$ \Phi_z(0)=0, \quad \Phi_z(\infty)=1 \qquad (16) $$

$$ \frac{\partial}{\partial y}\Phi_z(y)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\left(y-\frac{z}{2y}\right)^2}\geqq 0 \qquad (17) $$

ゆえに $\Phi_z(y)$ は $z=[0, \infty)$ にて y が $0\to\infty$ のとき0から1まで変化する単調増加函数である．

また z に関しては

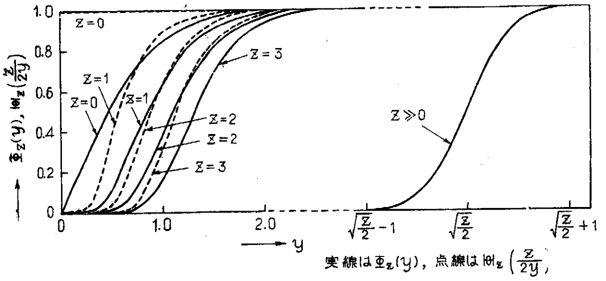
$$ \Phi_0(y)=\Phi(y)\equiv\mathrm{erf}\,y, \quad \Phi_{\infty}(y)=0 \qquad (18) $$

$$ \frac{\partial}{\partial z}\Phi_z(y)=\Phi_z(y)-\Theta_z\left(\frac{z}{2y}\right)\leqq 0 \qquad (19) $$

から $\Phi(y)$ は $y=(0, \infty)$ にて z が $0\to\infty$ のとき erf y から0まで変化する単調減少函数であることが言える．

また上にでてきた $\Theta_z\left(\frac{z}{2y}\right)$ は，あたかも sin, sinh に対する cos, cosh のごとく，表現を変えると共軛数のごとく $\Phi_z(y)$ の各種運算に顔を出す函数である［(6) 式および (9—2) 式に由来する］が，この函数 $\Theta_z\left(\frac{z}{2y}\right)$ も $z=(0, \infty)$ にて y が $0\to\infty$ のとき0から1まで変化する単調増加函数，$y=(0, \infty)$ にて z が $0\to\infty$ のとき1から0まで変化する単調減少函数という単純な性質

をもっている．第2図には函数 $\Phi_z(y)$，$\Theta_z\left(\frac{z}{2y}\right)$ と変数 y との関係を z を補助変数にとって図示してある．実線は $\Phi_z(y)$，破線は $\Theta_z\left(\frac{z}{2y}\right)$ を表わす．



第2図　$\Phi_z(y)$，$\Theta_z\left(\frac{z}{2y}\right)$ 曲線

z が非常に大きくなると

$$\Phi_z(y) \doteqdot \Theta_z\left(\frac{z}{2y}\right) \doteqdot \frac{1}{2}\Theta_0(\sqrt{2z}-2y) \qquad (20)$$

すなわち $\Phi_z(y)$，$\Theta_z\left(\frac{z}{2y}\right)$ は共に同一誤差曲線に漸近するが，この誤差曲線を次のように折線近似しておくと応用上便利である．（最大誤差 0.105）

$$\frac{1}{2}\Theta_0(\sqrt{2z}-2y)$$

$$=\begin{cases} 0, & y \leqq \sqrt{\frac{z}{2}}-\frac{\sqrt{\pi}}{4} \\ \frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(y-\sqrt{\frac{z}{2}}\right), & \sqrt{\frac{z}{2}}+\frac{\sqrt{\pi}}{4} \geqq y \geqq \sqrt{\frac{z}{2}}-\frac{\sqrt{\pi}}{4} \\ 1, & y \geqq \sqrt{\frac{z}{2}}+\frac{\sqrt{\pi}}{4} \end{cases} \qquad (20')$$

たとえば原点から十分遠方の点での損失のある拡散現象の伝播速度を定義することもできる．

なお，拡張誤差函数 $\Phi_z(y)$，$\Theta_z\left(\frac{z}{2y}\right)$ と誤差函数との間には次のような重要な関係式が成立する．

$$\Phi_z(y)=\frac{1}{2}\left[\Theta_0\left(\frac{z}{2y}-y\right)-e^{2z}\Theta_0\left(\frac{z}{2y}+y\right)\right] \qquad (21\text{—}1)$$

$$\Theta_z\left(\frac{z}{2y}\right)=\frac{1}{2}\left[\Theta_0\left(\frac{z}{2y}-y\right)+e^{2z}\Theta_0\left(\frac{z}{2y}+y\right)\right] \qquad (21\text{—}2)$$

4. 応　用

（i） ラプラス変換表

さて不完全拡散函数ないしは拡張誤差函数を含むいろいろな微分積分方程式の計算を簡単に行うためには，周知のようにこれらの函数を含むラプラス変換表を整備しておくと便利である．ここでは一次元拡散問題への応用に重点をおいて，拡張誤差函数およびこれに関連ある函数を含む主なるラプラス変換式（第二種）を第1表に示しておこう．表中 $q_\lambda=\sqrt{p+\lambda}$ で，これだけの表があれば下記のような裏函数の表函数はすべて簡単な代数計算で求めることができる．

$$e^{-q_\lambda x},\ \frac{1}{p}e^{-q_\lambda x},\ \frac{1}{p+\alpha}e^{-q_\lambda x},\ \frac{p}{p+\alpha}e^{-q_\lambda x},$$

$$\frac{1}{q_\lambda+\beta}e^{-q_\lambda x},\ \frac{p}{q_\lambda+\beta}e^{-q_\lambda x},\ \frac{1}{(q_\lambda+\beta)p}e^{-q_\lambda x},$$

第1表　拡張誤差函数（および関連のある函数）の主なるラプラス変換表（第二種）

$$e^{-q_\lambda x} \subset e^{-\sqrt{\lambda}x}\,\Theta_{\sqrt{\lambda}x}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \qquad (A_1)$$

$$\frac{1}{q_\lambda}e^{-q_\lambda x} \subset \frac{1}{\sqrt{\lambda}}e^{-\sqrt{\lambda}x}\,\Phi_{\sqrt{\lambda}x}(\sqrt{\lambda t}) \qquad (A_2)$$

$$\frac{p}{p+\alpha}e^{-q_\lambda x} \subset e^{-(\alpha t+\sqrt{\delta}x)}\,\Theta_{\sqrt{\delta}x}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \qquad (B_1)$$

$$\frac{p}{(p+\alpha)q_\lambda}e^{-q_\lambda x} \subset \frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-(\alpha t+\sqrt{\delta}x)}\,\Phi_{\sqrt{\delta}x}(\sqrt{\delta t}) \qquad (B_2)$$

$$\frac{p}{(q_\lambda+\beta)q_\lambda}e^{-q_\lambda x} \subset e^{-[(\lambda-\beta^2)t+\beta x]}\left[\Theta_{\beta x}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)-\Phi_{\beta x}(\beta\sqrt{t})\right] \qquad (C_2)$$

$$pe^{-q_\lambda x} \subset \frac{x}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}}e^{-\left(\lambda t+\frac{x^2}{4t}\right)} \qquad (D_1)$$

$$\frac{p}{q_\lambda}e^{-q_\lambda x} \subset \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\left(\lambda t+\frac{x^2}{4t}\right)} \qquad (D_2)$$

ただし　$q_\lambda=\sqrt{p+\lambda}$，　$\delta=\lambda-\alpha$

$$\frac{1}{(q_\lambda+\beta)(p+\alpha)}e^{-q_\lambda x},\ \frac{p}{(q_\lambda+\beta)(p+\alpha)}e^{-q_\lambda x},$$

$\frac{\mathrm{ch}\,q_\lambda x}{\mathrm{sh}\,q_\lambda y}$，$\frac{\mathrm{sh}\,q_\lambda x}{\mathrm{sh}\,q_\lambda y}$，$\frac{\mathrm{ch}\,q_\lambda x}{\mathrm{ch}\,q_\lambda y}$，$\frac{\mathrm{sh}\,q_\lambda x}{\mathrm{ch}\,q_\lambda y}$ およびこれらの函数に q_λ，$\frac{1}{q_\lambda}$，$\frac{1}{q_\lambda{}^2}$ が作用した裏函数．

なお第1表のうち（A_1），（A_2）両式は基本式として特に重要であるが，各式はそれぞれ従来よく知られている次式の拡張式になっていることを特記しておこう．

$$e^{-\sqrt{p}x} \subset \Theta\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \qquad (A_1')$$

$$\frac{1}{\sqrt{p+\lambda}} \subset \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Phi(\sqrt{\lambda t}) \qquad (A_2')$$

（ii） 積分公式

上のラプラス変換表を利用すると一次元不完全拡散現象の整理にも役立っ一連の（第一種合成型）不定積分公式表ができるが，その中の数例を下に示しておこう．

$$\int_0^t e^{\alpha\xi}\,\Phi_{\sqrt{\lambda}x}(\sqrt{\lambda\xi})\,d\xi=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\,\Phi_{\sqrt{\lambda}x}(\sqrt{\lambda t})-\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha\sqrt{\delta}}e^{(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\delta})x}\,\Phi_{\sqrt{\delta}x}(\sqrt{\delta t}) \qquad (22\text{—}1)$$

$$\int_0^t e^{\alpha\xi}\,\Theta_{\sqrt{\lambda}x}\left(\frac{x}{2\sqrt{\xi}}\right)d\xi=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\,\Theta_{\sqrt{\lambda}x}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)-\frac{1}{\alpha}e^{(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\delta})x}\,\Theta_{\sqrt{\delta}x}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \qquad (22\text{—}2)$$

$$\int_0^t \xi^{-\frac{1}{2}}e^{-\left(\lambda\xi+\frac{x_1{}^2}{4\xi}\right)}\Phi_{\sqrt{\lambda}x_2}\left[\sqrt{\lambda(t-\xi)}\right]d\xi$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\left[e^{-\sqrt{\lambda}x_1}\,\Theta_{\sqrt{\lambda}x_3}\left(\frac{x_3}{2\sqrt{t}}\right)-e^{-\lambda t+\sqrt{\lambda}x_1}\,\Theta_0\left(\frac{x_3}{2\sqrt{t}}\right)\right] \qquad (23\text{—}1)$$

$$\int_0^t \xi^{-\frac{1}{2}}e^{-\left(\lambda\xi+\frac{x_1{}^2}{4\xi}\right)}\Theta_{\sqrt{\lambda}x_2}\left[\frac{x_2}{2\sqrt{t-\xi}}\right]d\xi$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}e^{-\sqrt{\lambda}x_1}\Phi_{\sqrt{\lambda}x_3}(\sqrt{\lambda t}) \qquad (23\text{—}2)$$

$$\int_0^t \Phi_{\sqrt{\lambda}x_1}(\sqrt{\lambda\xi})\,\Phi_{\sqrt{\lambda}x_2}\left[\sqrt{\lambda(t-\xi)}\right]d\xi$$

$$=-\frac{x_3}{2\sqrt{\lambda}}\Phi_{\sqrt{\lambda}x_3}(\sqrt{\lambda t})+\frac{\lambda t-1}{\lambda}\Theta_{\sqrt{\lambda}x_3}\left(\frac{x_3}{2\sqrt{t}}\right)$$

$$+\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t+\sqrt{\lambda}x_3}\Theta_0\left(\frac{x_3}{2\sqrt{t}}\right) \qquad (24)$$

ただし　$\delta=\lambda-\alpha$,　$x_3=x_1+x_2$.

(iii)　偏微分方程式への応用

最後に偏微分方程式 [(A. 5) 式で $n=1$ のばあい]

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-y=\frac{\partial y}{\partial t} \quad (0\leqq x<\infty \text{ または } 0\leqq x\leqq w;\ 0\leqq t)$$

の解 $y(x,t)$ を初期条件：$y(x,0)=0$ と次の境界条件を与えたばあいにつき求めておく [(イ)(ロ)では $0\leqq x<\infty$, (ハ)～(ヘ)では $0\leqq x\leqq w$].

(イ)　境界条件：$y(0,\ t)=a$, $y(\infty,\ t)$ は有界.

解：$y(x,\ t)=ae^{-x}\Theta_x\left(\dfrac{x}{2\sqrt{t}}\right)$　(25)

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x,\ t)=-ae^{-x}\left[\Phi_x(\sqrt{t})+\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\left(\sqrt{t}-\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^2}\right]$$

(ロ)　境界条件：$\dfrac{\partial y}{\partial x}(0.\ t)=-b$, $y(\infty,t)$ は有界.

解：$y(x,t)=be^{-x}\Phi_x(\sqrt{t})$　(26)

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x,\ t)=-be^{-x}\Theta_x\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$$

(ハ)　境界条件：$y(0,t)=a$,　$y(w,t)=0$

解：$y(x,t)=a\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}M_n$　(27)

(ニ)　境界条件：$y(0,t)=a$,　$\dfrac{\partial y}{\partial x}(w,t)=0$

解：$y(x,t)=a(M_1+M_2-M_3-M_4++--\cdots)$, (28)

(ホ)　境界条件：$\dfrac{\partial y}{\partial x}(0,t)=-b$,　$y(w,t)=0$

解：$y(x,t)=b(N_1-N_2-N_3+N_4+--+\cdots\cdots)$,　(29)

(ヘ)　境界条件：$\dfrac{\partial y}{\partial x}(0,\ t)=-b$,　$\dfrac{\partial y}{\partial x}(w,t)=0$

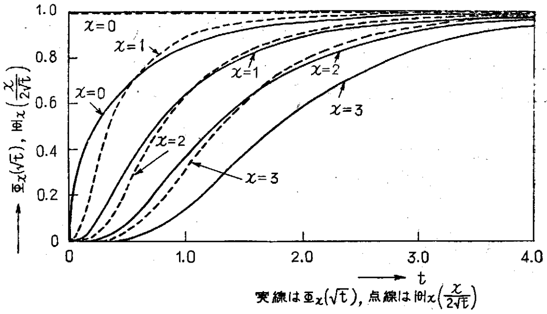
解：$y(x,t)=b\sum\limits_{n=1}^{\infty}N_n$　(30)

ただし

$$M_n=e^{-z_n}\Theta_{z_n}\left(\frac{z_n}{2\sqrt{t}}\right),\quad N_n=e^{-z_n}\Phi_{z_n}(\sqrt{t})$$

ここで　$z_{2m+1}=2mw+x$,　$z_{2m}=2mw-x$　(31)

これら拡張誤差函数を用いて表わした解の特長は，まず (イ) (ロ) の二例では過渡解 $\Theta_x\left(\dfrac{x}{2\sqrt{t}}\right)$, $\Phi_x(\sqrt{t})$ を定常解 ae^{-x}, be^{-x} と分解して眺めることができる点にある．第3図には x を補助変数にとり $\Phi_x(\sqrt{t})$, $\Theta_x\left(\dfrac{x}{2\sqrt{t}}\right)$ の t による変化模様を図示しておいた．また (ハ) から (ヘ) までの四例では M_n, N_n が共に w があまり小さすぎない範囲では n の増加と共に急速に 0 に近づく正数で，数級の収斂が非常に速いのを特長としている．なおこの四例では解の第二項以下は端反射の影響を表わす項と見ることもできる．



第3図　$\Phi_x(\sqrt{t})$,　$\Phi_x\left(\dfrac{x}{2\sqrt{t}}\right)$ 曲線

むすび

ここに簡単な紹介を行った拡張誤差函数・拡張ガンマ函数は，もともとトランジスタ内部での少数キャリアの挙動を説明するために案出したものであるが，話はトランジスタにまでおよばずある意味では無味乾燥なものとなった．トランジスタとの関連は稿を改めて述べることにしたいが，この拙文が不完全拡散現象および統計現象に興味を持たれる読者諸賢にご参考となれば筆者の幸甚とするところである．終りにあたって星合・高木教授，今岡・尾上助教授およびトランジスタ研究班員各位に厚く謝意を表したい．(1957. 1. 16)

〔付録 1〕 不完全拡散現象の基礎方程式

いま対象とする物理スカラ量の体積密度（または，これに相当する量）の平衡状態からのずれを $\rho\,[X/\mathrm{m}^3]$, ρ の流れの面積密度を $\boldsymbol{i}\,[X/\mathrm{m}^2\mathrm{sec}]$ とすれば，一次反応的不完全拡散現象の基礎方程式は次式で表わせる．（物理スカラ量の例：粒子数・人数・質量・電荷量・エネルギー・ポテンシャル）

流れの式　$\boldsymbol{i}=-D\nabla\rho$　(A. 1)

連続の式　$\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=-\nabla\cdot\boldsymbol{i}-\lambda\rho$　(A. 2)

ここで D は拡散定数 $[\mathrm{m}^2/\mathrm{sec}]$, λ は損失係数 $[1/\mathrm{sec}]$ ($\lambda>0$, $\lambda<0$, $\lambda=0$ はそれぞれ損失，発生のあるばあう，および無損失理想的なばあい).

D, λ 共に一定と仮定すれば

$$\nabla^2\rho=\frac{\lambda}{D}\rho+\frac{1}{D}\frac{\partial\rho}{\partial t},\quad \nabla^2\cdot\boldsymbol{i}=\frac{\lambda}{D}\boldsymbol{i}+\frac{1}{D}\frac{\partial\boldsymbol{i}}{\partial t} \quad (\text{A. }3)$$

特に n 次元球対称のばあいには

$$\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)=\frac{\lambda}{D}\rho+\frac{1}{D}\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

すなちち

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial\rho}{\partial r}-\frac{\lambda}{D}\rho-\frac{1}{D}\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \quad (\text{A. }4)$$

次に $\lambda\gtrless 0$ に応じて

$$\frac{1}{\pm\lambda}=\tau\,[\mathrm{sec}],\quad \sqrt{\frac{D}{\pm\lambda}}=L\ [\mathrm{m}]$$

とおき [τ を減衰（増大）時定数または平均寿命，L を拡散距離と呼ぶ], $r/L=x$, $t/\tau=t'$, $\rho/\rho_0=y$ (ρ_0 は ρ の基準値) とおけば

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{n-1}{x}\frac{\partial y}{\partial x}\mp y=\frac{\partial y}{\partial t'} \quad (\text{複号は } \lambda\gtrless 0 \text{ と同順}) \quad (\text{A. }5)$$

ゆえに上記仮定の下では一次反応的損失（または発生）のある拡散現象の基本式として無次元式 (A. 5) 式を考察しておけばよい．