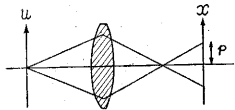


光学系を通信系の線型回路に対応させ情報理論的に取扱うことが最近発達してきたのを機会に、本号は光学特集号とした。久保田氏の論文は基礎的のもので光学系をフィルターと考えると、偽解像、反転等がよく説明でき、レンズの検査法に関しても二、三の大切なことが出てくることを示したものである。伊藤氏の論文はこれを実際のレンズに適用した場合を最近の大口径レンズの解説と共に述べたもので、大上氏は光学系の定義を受光面、すなわち感光剤の面にまで拡張した場合についてのこの理論の詳しい研究と解説である。最後に植村氏に本所の独特の高速度カメラについての解説とそれによる成果を示していただいた。

光学系の回路理論による取扱い

久保田 広

(1) 光学系の周波数特性 レンズやプリズムから成る光学系の性質を調べるのにはいままでは収差論と言うものがその主なものであった。一点から出た光が一点に収斂しないのを収差と言い、光学系には第1近似で Seidel の5収差、第2次近似で Schwalschild の9収差がある。点光源は通信系で言えば、単位インパルスに相当し収差はこれに対する response (impulse response) であるので、収差論は回路の波形伝送論に相当する。しかし通信系ではこれと併行して回路の性質を調べる有力な手段として回路解析と言うものがある。すなわち回路を周波数フィルターと考えその周波数特性を求めると、



第1図 光学系

これは入力、出力の形に関係のない回路固有のものでこれを調べることにより回路の性質がよく判る。ただしそのような函数が考えられるのは

linear の回路に限られているが、光学系でも linear な写像系と考えられる範囲においては全く同様な関係が成立する。すなわち物体面の原点 $u=0$ における点光源の任意像面 (必ずしも共軛像面でなくともよい(第1図)) における像を $h(x)$ とすれば、 $f(u)$ と言う形を持つ物体の像 $g(x)$ は

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)h(x-u)du$$

で与えられる。ただし、簡単のために倍率を +1 としてある。この式は $g(x), f(u)$ のフーリエ変換を $G(\omega), F(\omega)$ とすれば、

$$G(\omega) = H(\omega) \cdot F(\omega) \quad (1)$$

と書ける。ここで $H(\omega)$ は $h(u)$ のフーリエ変換

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{-2\pi i\omega u} du \quad (2)$$

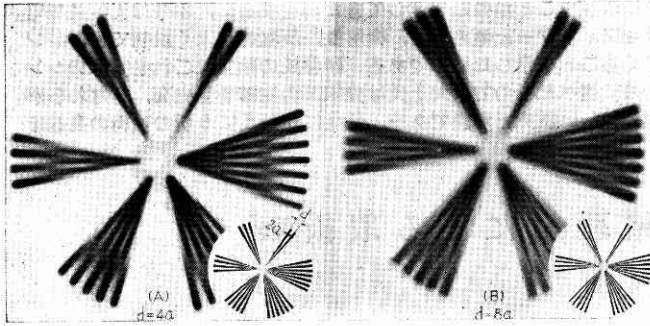
である。この式は写像系が空間周波数 ω についての1種のフィルターと考えられ、空間軸を時間軸に変えれば通信系と同等に取扱えることを示すものである⁽¹⁾。ただし、全く同等でなく、例えば通信系では $t=0$ に単位インパルスが入るとすればこれより以前には response がないから、 u を時間とすれば (2) の逆変換から $H(\omega)$ について

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{2\pi i\omega t} d\omega = 0, \quad t \leq 0$$

と言う制限があり、このため $H(\omega)$ は Paley-Wiener の条件を満たさなければならず、位相のおくれと振巾の減衰間に一定の関係ができるが⁽²⁾、光学系では $u=0$ のところの像は $x=\pm\infty$ に拡ってもよいかから上のような制限は全くなく、事実電気系では存在を許されない理想的な鋭い cut off を有する low pass filter も存在し得る⁽³⁾。その逆に光学系では像は必ず正であるから $g(x) \geq 0$ と言うような条件が入ってくる。

(2) 偽解像、反転 このように光学系を空間周波数フィルターと考える新しい考え方は、光学系の性能の評価法に従来唯一のものでされていた分解能と言うものが余り十分なものでないことも好く示してくれる。その1例として、いわゆるシーメンススターと言われる扇形チャートを収差のある光学系で写した場合を考えてみよう。このようなチャートは従来から光学系の分解能のテストに用いられてきたものである。光学系の周波数特性(光学の方ではこれを response function と呼ぶ)は (2) で与えられるが、これが最も簡単に計算できる場合として無収差の光学系でピンボケ (out of focus) の像を作った時を考えてみよう。これは十分に絞り、事実上無収差と考えられるレンズで光軸上に置いたチャートを第1図のように焦点面外で写真を撮ればよい。

第2図 (A)(B) の右下にあるシーメンススターの写真をこのようにして撮ったものがそれぞれの左上の写真である。これを見ると扇の骨の間隔の広いところは十分よい像ができているが、これが次第に狭くなると像がボヤけてきて、あるところでその構造が消えてしまうところがある。これが光学系の分解し得る極限 (以下解像限界と言う) と考えられる。ところが像の間隔がさらに狭くなると再び構造がはっきり出てくる。これは解像限界以上のところで、もはや解像しないはずであるにも拘らず解像しているように見えると言うので偽解像と名付けられている。ここでは像の白黒が物体と逆になっているのでこれを反転と言う。このような現象は古くから知られているが定性的な簡単な説明があるのみで十分な説明はなかった⁽⁴⁾。これを光学系を空間周波数フィルター



第2図 out of focusの写真(いわゆる偽解像)および反転が認められるとする考え方で説明してみよう。

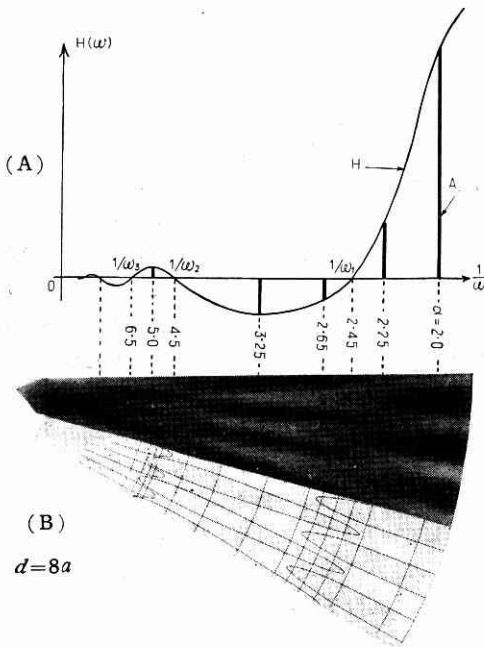
(3) response function 物体は扇形の中心から遠ざかるにしたがい、間隔の異なってくる可変常数の格子と考えられるから、これを中心からの距離が一定 ($r = \text{const}$) のところで考えると一次元の問題として取扱ってよい。したがって response function も点光源の代りに線光源の response を考える。点光源の out of focus の像は回折の影響を考えなければ半径 p の輝度一様の円盤(錯乱円)であるから直線の像のこれと直角の x -方向の強度分布は

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{x^2}{p^2}} & |x| \leq p \\ 0 & |x| > p \end{cases}$$

である。したがって response function は (2) から

$$H(\omega) = \int_{-p}^{+p} \sqrt{1 - \frac{x^2}{p^2}} \cdot e^{-2\pi i \omega x} dx = \frac{1}{2} \frac{J_1(2\pi p \omega)}{\omega}$$

となる。これは $1/\omega$ を横軸にとると第3図(A)に示し



第3図 response function とスペクトルの関係位置

たような曲線で、 $\omega = \omega_1, \omega_2, \dots$ に零点を有しその前後で $H(\omega)$ の符号が変る。

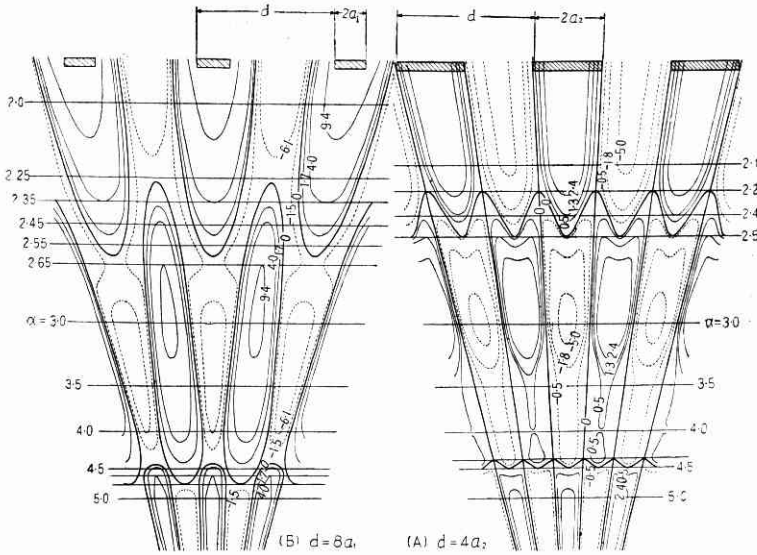
(4) 強度分布と分解能 物体は格子常数 d 格子の巾 $2a$ の、白黒が交互にある格子とすればそのフーリエ成分 $F(\omega)$ は、 $\omega = \frac{n}{d}$ ($n=0, 1, 2, \dots$) のところにある強度 $\left[\frac{\sin(2\pi na/d)}{(2\pi n/d)} \right]^2$ の線スペクトルである。第2図(A)の場合のように $d=4a$ とすれば(0次を除いて)奇数次の項のみ存在しその強度比は $1 : 1/9 : 1/25 : \dots$ となる。像のフーリエ成分は (1) によりこれ

に $H(\omega)$ を掛けただけのものであるから高次のものの強度は一般にさらに急激に減少する。したがって第1次スペクトル I_1 のみで大体の像の形が決まってしまう。事実 $J_1(2\pi p \omega) = 0$ の根の付近を除いては、像の強度分布を与える (1) から導かれる式

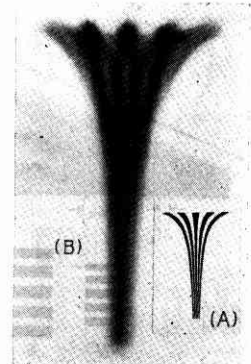
$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \cdot F(\omega) e^{2\pi i \omega x} d\omega = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(2\pi n x/d) \quad (3)$$

$$\text{ただし } A_n = \frac{J_1(2\pi n p/d) \cdot \sin(2\pi n a/d)}{(2\pi n/d)^2}$$

において、始めの数項で十分正確に像の形を与える。これを計算し強度の等しいところを連ねたものが第4図(A)、(B)である。(図中に記入してある数字は等強度線の強度を示し、太い実線の強度を I_0 とした時の $\log I/I_0$ を % で示してある。両側の α は扇形中心からの距離を与えるパラメーターで d (その位置における格子常数) と p (out of focus の錯乱円の半径) の比 $\alpha = d/p$ である。中心からの距離の等しい点は円弧の1部をなすはずであるが本図では便宜上直線として作図してある。またこの図は縦方向が横方向に比べ2倍縮めてあるので第2図の写真と比べる時はこれらのことを考慮に入れてみられたい。第2図の写真は極めて大きい $r(r=6)$ で現像し第4図の太い線(強度 I_0 のところ)より強度の弱いところ(点線で示したところ)は消え、これより強い実線のところのみ黒く出ているようにしたので第4図の太い線が写真の明暗の境になっている。第4図の太い線の内側のみをハッチして判りやすくしたのが第3図(B)である。これらの図を見ると第2図の写真に現われている $d=4a$ と $d=8a$ の場合の相違、すなわち $d=4a$ の場合 $\alpha = 2.45$ および4.5付近で構造が叉状になっているが、 $d=8a$ の場合はこのような枝分れがないことがよく判る。像の強度分布が (3) 式の初めの数項、特に $J_1=0$ の付近を除いては第1項 A_1 のみでほとんど決まってしまうのでこの第1次スペクトルにのみ着目して考えてみる。扇形の外方から中心に向かい進むことは d が次第に小さくなることで A_1 の位置 $\omega = 1/d$ は第3図(A)のように ∞ から原点に向かい動いて行くことになる。そこで out of



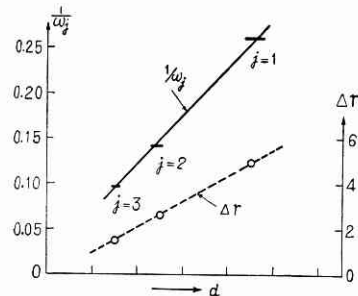
第 4 図 等 強 度 線



第 6 図 反転が等間隔に起るチャート

明瞭に出てきて $\alpha=3.25$ および $5.0, \dots$ 付近に見るように像ははっきりしてくる。したがって第一次分解能より細かいところが出ているからと言ってこれは決して偽解像ではなくて実際に解像しているので物体

focus の像の各位置とその時の A_1 の軸上における位置を対応させると第 3 図のようになり A_1 の大きさは図の線の高さに比例する。図の数字 α は第 4 図の α と同じもので扇形中心からの距離を表すパラメーターである。遠いところ $\alpha \geq 2.0$ では $H(\omega)$ が大きいから、像は物体と十分相似であるが d が次第に小さくなり、 $\alpha=2.25$ ないし 2.65 辺りになると $H(\omega)$ が小さくなるので A_1 は極めて小さくなり、第 2 第 3 次スペクトル A_2, A_3, \dots が効いてくるので像の構造に基本間隔 d がはっきり出なくなり、図のようににぼやけたものとなり相似の像が出ているとは言い難くなる。したがって $H(\omega)=0$, すなわち $A_1=0$ となる $\alpha=2.45$ および $4.5 \dots$ 付近をもって解像限界と言って差支えないであろう。しかし $J_1(2\pi p\omega)=0$ の根は無限にあるから図から判るようにこのような点は一つでなく、 $\omega_1, \omega_2, \dots$ に相当するところに無限にある。 $1/\omega_j$ の値を縦軸にとり第 j 次の解像限界の d (分解能) を横軸にとると第 5 図の実線



第 5 図 $J_1=0$ の根と実測値

等間隔であるから同図 (B) に見るように解像限界は等間隔に表われる。第 j 次の解像限界のところを過ぎると再び A が他の項に比べて大きくなるので基本周期 d が

のフーリエ成分と response function の共鳴による超解像とでも言うべきであろう。ただし $H(\omega)$ が負になっているところはスペクトルの位相が π ずれて白黒が反対になり反転を起している。したがって超解像は反転を伴うものとしからざるものがあることが判る。

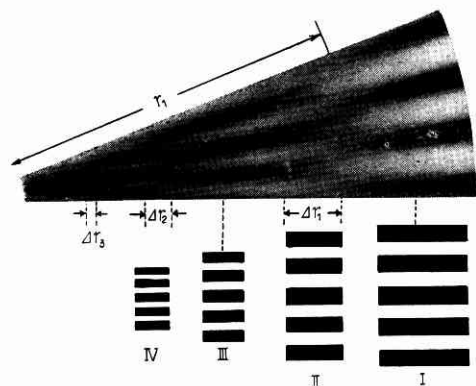
第 j 次解像限界は (近似的には) A_1 の位置 $\omega=1/d$ が $J_1(2\pi p\omega)=0$ の第 j 根 ω_j に等しくなったところであるから格子常数 d のみ関係し格子の巾 a には関係しない。このことは第 4 図 (A)(B) を比べてみるとよく判り両者共同じところで各次の解像限界を与えている。しかしこの付近の構造は (B) の場合の方が (A) のそれより簡単であるから、扇形チャートを用いず d が飛び飛びである平行格子のチャート (フーコーのチャート) を用いている場合は、解像限界の判定には後者より前者の方がよく $d=8a$ に近い格子を用いるべきである⁽⁵⁾。ただし厳密に言うと $H(\omega)=\frac{J_1(2\pi p\omega)}{\omega}$ は正弦波形に対する response function であり今の場合のような白黒が交互にある矩形波は

$$f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi na/d)}{2\pi n/d} \sin \frac{2\pi n}{d} u$$

で表わされるから矩形波に対する response function は $H'(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi na/d)}{n} H(n\omega)$, 例えば $d=4a$ とすれば,

$$H'(\omega) = H(\omega) - \frac{1}{3}H(3\omega) + \frac{1}{5}H(5\omega) \dots$$

となるから格子の構造が完全に消失するのは、 $J_1(2\pi p\omega)=0$ の根のところではなく $H'(\omega)=0$ の根のところであり、 d のみならず a にも関係する⁽⁶⁾。しかしこれを計算してみると、 $d=4 \sim 8a$ の場合、 $J_1(2\pi p\omega)=0$ の根と



第7図 不連続格子

の違いは1%以内であるので実用上は $J_1(2\pi\rho\omega) = 0$ の根をもつて解像限界と定義して差支えない。

(5) 格子の本数 次に以上の計算は格子が左右に無限に続きそのスペクトルが不連続のものであると考えたのであるが格子が有限個の場合、そのフーリエ変換は連続スペクトルを与え、(3)式の級数は積分の形になり計算が面倒になる。しかし他方 out of focus の錯乱円は半径 p の有限の拡がりのものであることを考えると、格子の像も中心から左右 $(a+p)$ より遠くへは拡がっていないはずである。したがって数本の格子を考え、その対称中心付近のみを考えれば中心より左右 $(a+p)$ 以上遠いところにある格子の存在は強度分布に影響を及ぼさず本数が有限個でも無限個と同じである。この本数、すなわち N 本以上あれば中心付近の強度分布は $N = \infty$ の場合と同じであると言う N の値は格子常数 d と格子の巾 $2a$ の函数であるが、簡単な考察から、第 N 次の解像限界の位置が正しく(格子本数 ∞ の時と同じ位置に)出てくるために必要な格子の本数は $(d=4a, 8a$ の場合共) $(N+1)$ 本であると言うことが言える。光学系の性能を表わすものとして、 $H(\omega)$ を用いる場合、少なく共第3~4次の分解能位までは知りたいから必要な格子の本数は少なく共四~五本であると言うことになる⁽⁵⁾。格子の本数が少ないと高次の分解能の所在が不明か、または正しく出ないことは第2図によっても了解されるであろう。

(6) 格子常数の間隔 最後に平行線格子(フーコーチャート)を用いると d の値は不連続になるがこの場合 d の値はどのような間隔にしたらよいかを考えてみる。現在の写真レンズの検査法の規格では d は種々の公比の幾何級数をなすようにすることが規定されている⁽⁶⁾。しかし実際は第7図の場合、図に示した大きさの格子、I, II, III, IV, ……があったとすれば、IIおよびIVの格子の像がボヤけるからこの格子の本数が第1次、および第2次の解像限界であると判断されるが、格子の間隔が粗くてIからIIIへ飛んでIIが抜けているとすればI, III共

第1表 各国のレンズ検査用チャート(フーコーチャート)の規格

	制定年	白黒巾の比	本数	d の公比
British Standard 1613	1949	$d=4a$	2	1.111...
U.S. Military Standard	1950	"	3	$6\sqrt{2}=1.1225\dots$ (preferred)
Washer, et al.(J.O.S.A. 41, 597)	1951	"	3	$6\sqrt{2} = "$
NBS	1953	"	3	$4\sqrt{2}=1.1892\dots$

により像を作っており第1次の解像限界をIVであると見誤ることになる。そこで格子の間隔は少なくとも図の Δr と記した部分の d を持つものが抜けないようにしなければならないと言うことになる。各次数のところについて Δr_j の巾を測り中心からの距離を横軸にとってグラフを画くと第5図の点線のようになり、 $\Delta r/r = \epsilon$ (const) であり ϵ の平均値は 5.5/50 となる。 d は r に比例するから相隣る格子の常数の差 Δd は $\Delta d/d = \epsilon$ となり、これは d が公比 $(1+\epsilon)$ の幾何級数をなさねばならないことを意味し、その値は $(1+\epsilon) \leq 1.11$ でなければならないと言うことになる。これから見ると現在の各国の規格の値はやや大き過ぎ解像限界の見逃しが無いことを保証し得ないと言うことになる。⁽⁵⁾

(7) 総括 まず光学系を空間周波数フィルターと考えると、その性質は周波数特性と与えられるべきで、従来用いられていた分解能と言うものは光学系の性能を表わすのに十分なものでないと言うことの1例を示した。次に光学系の性能を判定する最も実用的な方法と考えられている各種間隔の平行線格子(フーコーのチャート)の写真を撮る場合のチャートの寸法に関し

(i) 分解能は格子常数 d のみで決まり、格子の巾 a には(近似的に)無関係である。格子は白黒の巾が等しい $d=4a$ もの $d=8a$ ものより解像限界付近の像の pattern が複雑である。

(ii) 第 N 次の解像限界の値を正しく出すには格子の本数は $(N+1)$ 本以上で格子の中心付近を観察しなくてはならない。

(iii) 格子の種類は常数 d が幾何級数をなすようなものでその公比は 1.11 より小さくするべきである。と言う結論を得た。現在の写真レンズのテスト規格は実用上の十分な検討を経た優れたものであるが、やや理論的根拠に乏しい嫌いがある。上記の結論は無収差で out of focus と言う特別の場合について、極めて r の大きい撮影をした時に得られたもので、この場合の response function は一般の場合の傾向をよく示しているが、さらに多くの実際に表われる収差の response function について吟味しておく必要がある。(1956.5.25)

文献

- (1) P.M. Duffieux: L'Integral de Fourier et ses Application a l'optique (Besancon, Faculte de Sciences, 1946).
- (2) 例え S. Goldman: Information Theory (New York, 1953).
- (3) 久保田広:「科学」1956年6月, p. 285.
- (4) このような写真は、例え L'Institute d'Optique, (Paris) の Mlle Flamant が撮っており、説明は例え J. Flugge, Die Wissenschaftliche und angewandte Photographie, Vol. 1 (Springer Verl. Wien 1956). 等にある。
- (5) 写真レンズ検査規格, 第1表参照。
- (6) J.W. Coltman: Jour. Opt. Soc. Am., 44 (1954) 468.