

# 微分解析機による観測ロケットの性能計算例

渡 辺 勝・三井田 純

観測ロケットの性能に関係した数学的問題を検討するため、昨年の終りに生研の一部の人々で小委員会が出来て、その一つの活動として生研の機械式微分解析機によって、いろいろの性能計算を行った。

ここには上昇性能に関する計算とドップラーレーダーによるトラッキングに関して行った計算を述べる。このほかロケット表面の空気力学的加熱による温度上昇についての計算も行われたが、もとの式に少し検討すべき点が出てきたので、これは別の機会にゆずることになった。

本文では計算を微分解析機によって行う方法についての解説を主体としているから、個々の計算結果からさきの面白い話は、それぞれの研究者の解説を参考にさせていただく。微分解析機の結線図についてはなるべく実際の使用状態に近いあらわし方をとって、利用者に分かりやすいようにつとめたつもりである。

## § 1.1 ロケットの自由上昇

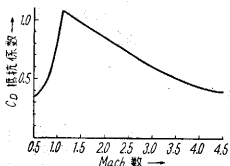
燃焼後のロケットの上昇(垂直)の方程式は

$$\frac{dv}{dt} = -g \left\{ \frac{D_0(v)}{W} e^{-\alpha z} + 1 \right\}$$

- $v$ : 速度 (km/sec)
- $t$ : 時間 (sec)
- $z$ : 高度 (km)
- $g$ : 重力の加速度 = 0.0098 (km/sec<sup>2</sup>)
- $\alpha$ : 空気密度の対数的減少率 = 0.133 (km<sup>-1</sup>)
- $W$ : ロケット重量 (kg)
- $D_0$ : 地上における空気抵抗 =  $\frac{1}{2} \rho_0 v^2 c_D S$  (kg)
- $S$ : 断面積 (m<sup>2</sup>)
- $\rho_0$ : 地上の空気密度 =  $\frac{1}{8}$  (kg·sec<sup>2</sup>/m<sup>4</sup>)
- $c_D$ : 抵抗係数

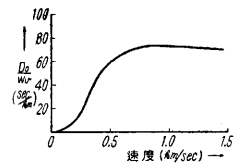
実際の計算では  $c_D$  をどういう値にとるかに問題がある。それによって上昇性能がひどく影響される。以下の計算ではアメリカの Deacon ロケットについての観測より得た値(第1図)を用いた<sup>(1)</sup>。

第1図 Deacon ロケットのドラッキングデータより求めた抵抗係数の値(Van Allen と Ray による)



だろうと思われることと; 上昇性能を安全側に計算し得るという点から用いただけで、理論的には検討の余地がある。また  $c_D$  はマッハ数の函数であり、高度により音速が変わることも考えるべきであるが、それは省略して速度だけの函数として計算した。

ロケットの重量は 100kg, 直径 0.5m とした。これらの値の違ったものについては計算結果の  $z-v$  線図において適当にシフトを行えばよいが、詳細は秋葉氏の解説<sup>(2)</sup>を見られたい。



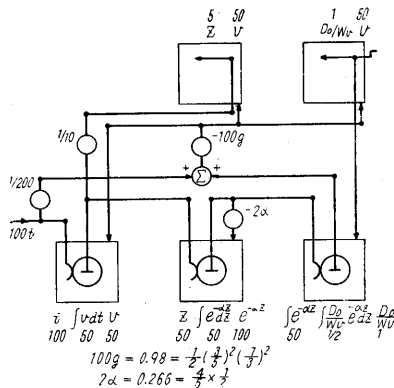
第2図 微分解析機による解法(第3図,第5図)に用いた入力曲線

微分解析機によって解くにはもとの式を変形して

$$\begin{cases} v = -g \left\{ \int \frac{D_0(v)}{Wv} dz + t \right\} \\ z = \int v dt \end{cases}$$

この式で  $D_0(v)/Wv$  は  $c_D$  の値から計算しておき(第2図)入力卓により導入する。この式の結線図を第3図に示す。

各積分機では  $W = \frac{1}{100} \int v dt U$  が演算される。  $U, V$



は積分機の回転入力軸, 変位入力軸の,  $W$  は出力軸の回転角をあらわし, それぞれ特定のスケール・ファクターをもって, 対応する函数を代表する。

第3図 自由上昇の式を解く結果。たとえば第一の積分機では  $U = 100t, V = 50v, W = 50 \int v dt = 50z$  となる。それらの代表される函数と, そのスケール・ファクターを積分機の記号の下に示す。スケール・ファクターを決めるにはまず独立変数軸  $t$  について決める。たとえば実際の飛行時間すなわち  $t$  の変る範囲を 100 秒とす

ると、 $t$  のスケール・ファクターを図のように 100 にとれば独立変数軸は  $100 \times 100 = 10000$  回転を要し、これを 500 r.p.m で回転すれば、解に要する時間が 20 分となる。精度の点からいえば  $t$  のスケール・ファクターは大きい方がいいが、解答時間をむやみに長くするのは能率が悪いから適当な値に落着くことになる。つぎに積分機の入力変位軸では  $-100 \leq V \leq 100$  の制限があるので、 $V$  を代表する変数の大きさから、この制限を越えぬようきめる。精度を高く解くには、以上の制限を越えぬ限り大きくとった方がよい。 $V$  を代表する変数が未知の函数の場合は、大体の推定により定め、実際に解いて不適当な時には、スケール・ファクターを変える。

入力卓、出力卓についても、それぞれ横軸、たて軸のスケール・ファクターがきめられる。実際の機械では精度を高めるため送りねじのピッチを 2mm にとっているから結線図に示した倍率をさらに 2 倍した長さ (mm) で図があらわされる。

各ユニットの結線の中間に入れた丸印はギャまたは加算機を示し、ギャについては、ギャ比を肩に記入してある。負号は回転方向を逆にすることを示す。ギャは過負荷をさけるため減速 (ギャ比  $\leq 1$ ) して用いる。 $g, \alpha$  などの常数は現在手持ちのギャを組合わせて、図の下に記入したようにあらわす。このような選び方が目の子で簡単にきまらぬ時は計算尺を利用するとよい。これで 2~3 桁の小数を整数の比にとり、分母分子を素因数に分解してゆく。現在あるギャの組合せでは、この素因数は 10 以下のものに限る。たとえば

$$100g = 0.98 = \frac{49 \times 2}{100} = \frac{7^2}{5^2 \times 2} = \left(\frac{7}{3}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)$$

以上の結線で、初速  $v_0 = 1.8 \text{ km/sec}$  にとり、出発高度を 0 から順次上げていって、解いたものが第 4 図である。この線図を作るに約 2 日を要した。

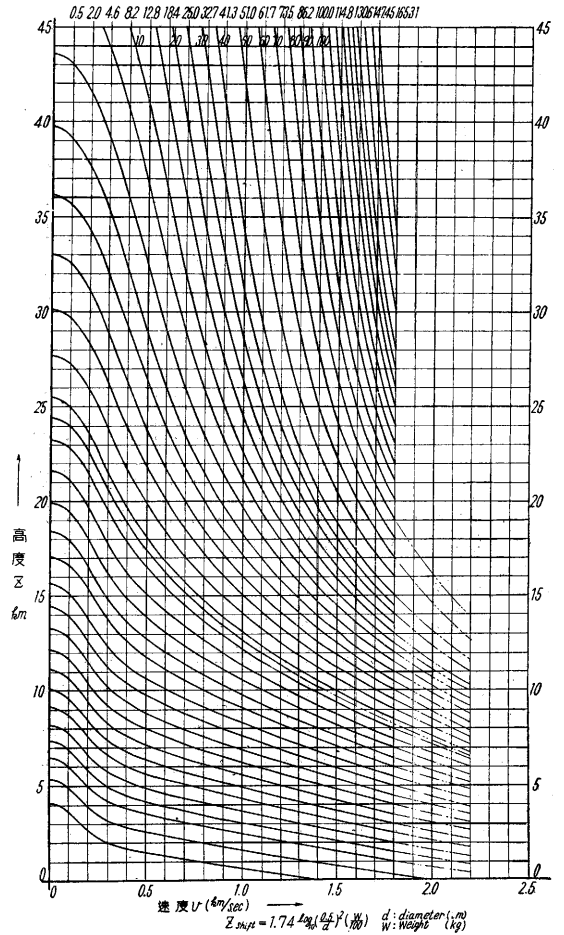
§ 1.2 燃焼中の上昇

燃焼がほぼ瞬間的に行われるとして、最高到達高度を求めるには § 1.1 に得た線図を用いて行えるが、<sup>(2)</sup> 燃焼時間を長くのばした場合、上昇性能がよくなるであろうかということは實際上重要な問題であろう。これを検討するには、燃焼中の運動を解かねばならぬ。今 1 例として 3 段ロケットの各段の燃焼時間を長くした場合を次のデータを用いて計算した。

|         | $d$<br>外径<br>(mm) | $T$<br>推力<br>(kg) | $W_p$<br>燃料重量<br>(kg) | $W$<br>全備重量<br>(kg) | $t_p$<br>燃焼時間<br>(sec) |
|---------|-------------------|-------------------|-----------------------|---------------------|------------------------|
| ブースター 1 | 220φ              | 878               | 60.5                  | 121.5               | 14                     |
| ブースター 2 | 220φ              | 878               | 60.5                  | 112.5               | 14                     |
| 主ロケット   | 220φ              | 878               | 60.5                  | 112.5               | 14                     |

出発時の全重量  $W_0 = \sum W = 346.5 \text{ (kg)}$

また各ブースターの殻は各段の燃焼直後におとすものとする。



第 4 図 ロケットの上昇性能線図 (微分解析機により作成したもの) Zshift の意味応用については秋葉氏論文本号 14 頁を参照)

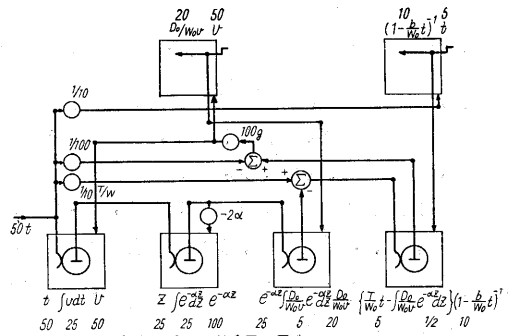
燃焼中の運動方程式は

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{T - D_0(v) e^{-\alpha z}}{W_0 - bt} - 1$$

ただし  $b = \frac{W_p}{t_p}$  (specific impulse) である。上式を

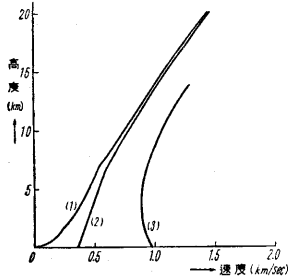
$$v = g \left\{ \int \frac{1}{1 - \frac{b}{W_0} t} d \left( \frac{T}{W_0} t - \int \frac{D_0 e^{-\alpha z}}{W_0 v} dz \right) - t \right\}$$

と変形すれば、第 5 図の接続をもってあらわせる。



第 5 図 燃焼中の上昇の式を解く結線

こうして解いた結果は第6図(1)に示される。また同じ図の(2)は第1段を地上で瞬時に燃焼させたのち、第2段以下の燃焼時間をのばした場合で、(3)は1, 2段とも地上で瞬時に燃焼された場合である。§ 1・1 に得た最高高度とここで得た(1), (2)による最高高度とはあまり変わらないことが分った。(2)厳密にいえば、たとえば(2)は(1)にくらべていくらかよいか、しかし(3)ではかなり悪くなる。

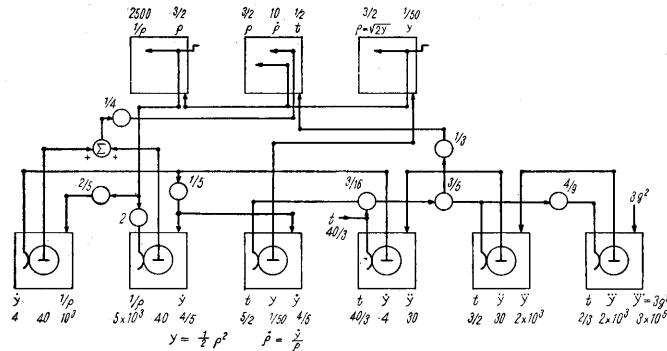


§ 2 ロケットのトラッキングに関する計算<sup>(3)</sup>

ロケットの飛行経路を地上に配置した数ヶ所あったときの上昇性能 (現在計画中の DOVAP 方式によると、一つの発信点と、3ヶ所の受信点を設け、発信点と受信点を焦点とする3つの巨転楕円面の交点として位置を標定する)の観測点より観測する際、観測地点をどう選定したらよい観測結果が得られるかという、問題の資料として行われた計算である。種々の想定された飛行経路をたどるロケットに対し、適当に選ばれた観測地点とロケットの直距離および、その時間的変化を求めることが必要となる。これをきめる式は

$$\frac{d^4}{dt^4}(\rho^2) = \text{const}$$

で与えられる。ここに  $\rho$  は直距離で、この式をロケット



第7図  $\frac{d^4 \rho^2}{dt^4} = \text{const}$  を解いて、 $\rho, \dot{\rho}$  を求める結果

の発射角、最高高度や、発射点と観測点との距離などできまる初期条件をもちいて解けばよい。(付録参照)  
計算にはつぎの方法をとった。 $\rho$  につき直接解くことは非線型の式を扱うことになり厄介なので、 $\rho^2$  のままで4回積分し、 $\rho^2, \frac{d\rho^2}{dt}$  を求め、入力卓を用いて  $\sqrt{\rho^2} = \rho$  を求め、つぎにこれを別の入力卓にみちびき、 $\frac{1}{\rho}$  を求め、これと  $\frac{d\rho^2}{dt}$  の積として  $\frac{d\rho}{dt}$  を求めた。

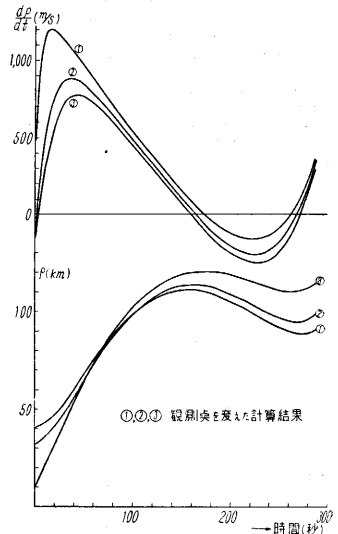
上の操作から分るように、第2の入力卓では、第1の

入力卓からくるノイズ(人手による操作からくる不規則性をこう呼んでおく)とそれ自体のノイズが重なる。そしてこれが、積をつくる積分機の円板回転軸に入り、したがって  $\frac{d\rho}{dt}$  に直接あらわれてくる。そこで第8図に見

られるように、とくに  $\frac{1}{\rho}$  の曲線の傾斜

が急な、解きはじめの部分ではかなりの凹凸が見られた。しかし同一の解を2回くり返して解いた結果、この凹凸は解の精度には影響がなく、解のなめらかな部分にくると、きわめてよい一致(鉛筆の太さ以内)を示すことが分った。

本計算の実施にあたっては、竹中教授を委員長とする微分解析機委員会、および観測ロケット委員会の方々に御世話になったことを御礼申し上げる。



第8(上), 9(下) 図

を委員長とする微分解析機委員会、および観測ロケット委員会の方々に御世話になったことを御礼申し上げる。

註

- (1) M. S. Jones, Jr. : Journal of the American Rocket Society, Oct., 1955, 531—534
- (2) 秋葉「ロケットの垂直上昇性能と最適推力計画」本号 14 頁
- (3) 野村「DOVAP 受信点の選定に関する基礎資料」生産研究昭和 31 年 4 月号 89 頁

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

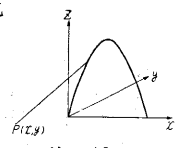
付 録

最良観測点設定についての解析

§ 2 に解いたロケットと観測点を結ぶ距離を求める式は野村助教授が出されたもの<sup>(3)</sup>であるが、読者の便のため重複をいとわず書いておく。

ロケットの発射点を原点にとり、 $x-z$  面内に発射されたとする。(第10図) 観測に重要な飛行部分は大部分真空中と同じと考えるとロケットの軌道は

$$\begin{cases} x = V \cos \theta \cdot t \\ z = V \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$



第10図

$V$ : 初速,  $\theta$ : 発射角, 観測点( $x, y$ )とロケットの距離を  $\rho$  とすると

