

ロケットの垂直上昇性能と最適推力計画

秋葉 録 二 郎

観測用ロケットにあっては、これをいかにして高空に達せしめるかということが最大関心事である。このため第一にその垂直上昇性能を速かに知る方法が、その設計の過程において切実に求められてきた。またロケットを打ち上げる際に、空気密度の大きい地面上に近いところで瞬間的に大きな推力を働かせ高速を得ることは、大きな空気抗力を受けこれによるエネルギーの損失が大となり決して得策でない。また極端に推力を小さくすれば機体が持ち上がらないという結果となる。従ってその間に適当な推力と高度の関係があるはずである。すなわち第二にロケットの燃料を合理的に使うための推力計画を必要とする。これを行うのに液体燃料ロケットでは連続的に推力を変えることが可能であるが、固体燃料ロケットではこれが殆んど不可能であるので特殊な方法を必要とする。

以下これらの要求により行われた試みを概述する。

1 垂直上昇性能

i) 燃焼中の上昇性能

運動方程式は次の如くなる

$$\frac{W(t)}{g} \frac{dv}{dt} = T(t) - D(v, z) - W(t) \dots\dots (1)$$

ここに t : 時間, z : 海面上よりの垂直飛翔距離,
 v : 飛翔速度, $W(t)$: 時刻 t におけるロケットの重量,
 $T(t)$: 時刻 t におけるロケットの推力,
 $D(v, z)$: 速度 v , 高度 z において, ロケットの受ける空気抵抗,

普通の固体燃料ロケットでは T は時間によらず一定とみてよい。ロケットエンジンについては

$$T = -I \frac{dW}{dt} \dots\dots (2)$$

$$\left(I = \frac{c}{g} \approx 200 \text{ sec} : \text{specific impulse} \right)$$

の関係があるのでこの場合

$$T(t) = T = \text{const}, W(t) = W_0 - bt \dots\dots (3)$$

ここに W_0 : 燃焼前ロケット重量, W_p : 燃料重量,

$$b = \frac{W_p}{t_p} : \text{燃焼率}, t_p : \text{燃焼時間}$$

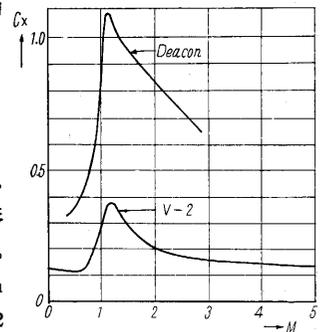
とみてよい。

$$\text{空気抗力は } D(v, z) = \frac{1}{2} \sigma \rho_0 v^2 c_x S \dots\dots (4)$$

ρ_0 : 海面上における空気密度, c_x : 抵抗係数,

S : ロケット胴体の最大断面積, $\sigma = \frac{\rho}{\rho_0}$: 密度比

で, z, v により一義的にきまるとみてよい。ここに $\sigma \approx e^{-az}$ ($a \approx 0.133 \times 10^{-3} m^{-1}$) である。また c_x はマッハ数とリノルズ数の函数であるがこのうち後者の影響は比較的わずかである。第1図に Deacon Rocket (米) と V-2 Rocket (独) の c_x とマッハ数の関係を示す。^{2) 3)}



第 1 図

さらに音速が高度によらず一定とすれば(4)は

$$D(v, z) = D_0(v) e^{-az} \dots\dots (4)'$$

とかける。ここに $D_0(v)$ は海面上における抗力を示す。これらの関係を入れると(1)式は次の如くなる。

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{T - D_0(v) e^{-az}}{W_0 - bt} - 1 \right) g \dots\dots (1)'$$

これを解けば燃焼後の v, z が得られる。この微分方程式に対する近似解法は二, 三あるが結果はあまり簡単でなく精度も余りよくない。しかしながら最高高度を求めるのが目的ならば, 燃焼時間の短い固体燃料ロケットにあっては, 空気抗力を無視し平均重量を \bar{W} として

$$v_{max} = \left(\frac{T}{\bar{W}} - 1 \right) g t_p \dots\dots (5)$$

だけ燃焼により速度を得, その代りこの間の高度増加がないとしてこれを燃焼後の初期条件に入れれば最高高度として十分よい値が得られるものである。一般の長時間燃焼の場合(1)'を解くのは微分解析機によるのが最良の方法と思われる。(微分解析機による観測ロケットの上昇性能計算本号 10 頁参照)

ii) 燃焼後の運動

(1)式で $T=0, W(t)=W_1=\text{const}$ として運動方程式は次の如くなる。

$$\frac{dv}{dt} = - \left[\frac{D(v, z)}{W_1} + 1 \right] g \dots\dots (6)$$

(1)を(1)'にしたと同様の仮定のもとに(6)は

$$\frac{dv}{dt} = - \left[\frac{D_0(v) e^{-az}}{W_1} + 1 \right] g \dots\dots (6)'$$

独立変数 t を z に変えると

$$\frac{dv}{dz} = -\left[\frac{D_0(v)e^{-az}}{W_1} + 1\right]g/v \dots\dots\dots (7)$$

今空気抗力がこれの s 倍で重量が W のロケットについては

$$\frac{dv}{dz} = -\left[\frac{sD_0(v)e^{-az}}{W} + 1\right]g/v \dots\dots\dots (8)$$

となるがこれは $z' = z + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{W}{W_{1s}} \dots\dots\dots (9)$

の変換で(7)式になる。したがって c_x の同じ相似形のロケットについてはそのうちある胴体最大直径 d_1 , 重量 W_1 のものについて, $v-z$, 平面上種々の初期条件のもとにおいておけば, 重量 W および胴体最大直径 d のものについては(9)式より単に z 軸の原点を上方に

$$(z)_{shift} = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{d_1}{d} \right) \left(\frac{W}{W_1} \right) \dots\dots\dots (10)$$

だけ shift させることにより同じ解平面が使えらることになる。

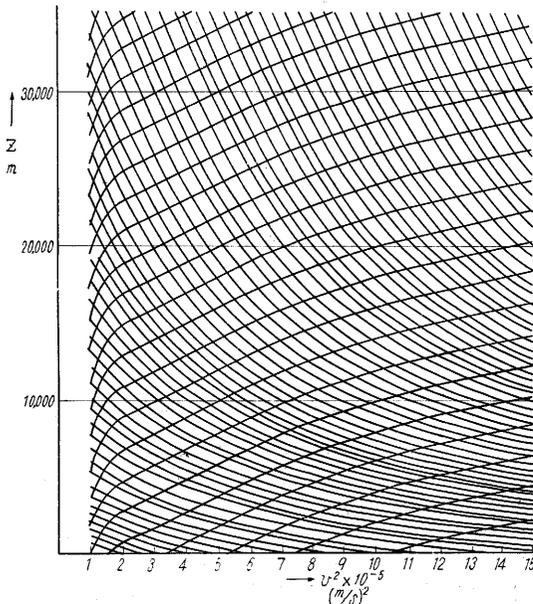
(7)を解くには, これを

$$\frac{dv^2}{dz} = -2g \left[\frac{D_0(v^2)e^{-az}}{W_1} + 1 \right] \dots\dots\dots (11)$$

の形にし v^2-z 平面で isoclinic の方法で解くのが比較的簡単である。この場合 $\frac{dv^2}{dz} = -c$ の isoclinic は

$$(\log_{10} e) az = \log D_0(v) - \log W_1 - \log \left\{ \frac{c}{2g} - 1 \right\}$$

であり, すべての c に対し同一形状なのが作図上便利である。これの 1 例を第 2 図に示す。 c_x は V-2 のそれを使った。しかし, 後に述べる推力計画に対しては $v-z$ 平面の方が便利であり, 微分解析機による方法はより有力である。(微分解析機による観測ロケットの上昇性能



第 2 図

計算 本号 11 頁第 4 図参照)

c_x は Deacon Rocket のそれを使った。その他 $c_x = \text{const}$ としたときの解は, すでにいづつかの論文にあるように)

$$v^2 = e^{\kappa z} \left\{ \frac{2g}{\alpha} [E_i(-\kappa \zeta) - E_i(-\kappa \zeta_0)] + v_0^2 e^{-\kappa \zeta_0} \right\}$$

ここに $\zeta = e^{-az}$, $\zeta_0 = e^{-a z_0} \dots\dots\dots (12)$

v_0, z_0 は初期値 $\kappa = \frac{1}{2} \rho_0 c_x S \cdot \frac{2g}{W_{1\alpha}}$

$$-E_i(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \frac{e^t}{-t} dt = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt > 0 \quad (\infty > x > 0)$$

同様に $c_x = \text{const}$ としたときの下降運動は (空気抗力の方向が逆になる),

$$v^2 = e^{-\kappa z} \left\{ \frac{2g}{\alpha} [\bar{E}_i(\kappa \zeta) - \bar{E}_i(\kappa \zeta_0)] + v_0^2 e^{\kappa \zeta_0} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ここに $\bar{E}_i(x) = \int_{\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$

である。 E_i, \bar{E}_i はいずれも数表に出ている (Jahnke-Emde "Tables of Functions")。これらはいずれも c_x のとり方にもよるが 1~2 割の誤差をもつが比較的重要でない落下運動に対してはこの程度で十分と思われる。(第 5 図参照)

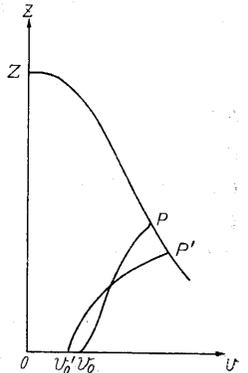
2 推力計画

i) 連続噴射の 1 段ロケットの場合)

これについては, Tsien の論文が代表的である。ここではごくその概要を述べるに止める。

今, 最高高度が Z であるようなロケットのうち

(1)燃焼後重量が W_1 , (2) $D(v, z)$ が同じであるようなものを考える。 $v-z$ 平面上にこれらの軌跡をかけばこのような一群のロケットについては燃焼後の径路は全く同じであり, 燃焼中の径路が $0-v_0-P$, $0-v_0'-P'$ のように異なる。



第 3 図

ここに v_0, v_0' は初速度である。そしてこれらおのおのの径路に対応し, 0 におけるロケットの重量すなわち初期重量が異なってくる。今これらのいろいろの径路のうち, 初期重量が最小になるような径路を求めると, これは 1 つの変分を与えられ, その Euler-Lagrange の方程式は

$$\frac{\partial D}{\partial z} = \frac{\partial^2 D}{\partial z \partial v} v + \frac{\partial^2 D}{\partial v^2} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{c} \left\{ \frac{\partial D}{\partial z} v + \frac{\partial D}{\partial v} \left(2 \frac{dv}{dt} + g \right) + \frac{D}{c} \left(\frac{dv}{dt} + g \right) \right\} \dots\dots\dots (14)$$

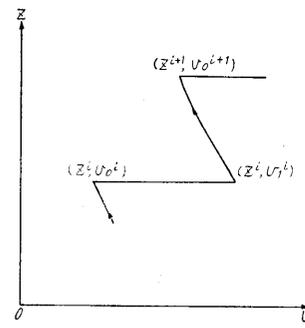
また補助条件として

$$v_1 \left\{ \left(\frac{\partial D}{\partial v} \right)_1 + \frac{D_1}{c} \right\} = D_1 + W_1 \dots\dots\dots (15)$$

が得られる (添字 1 は P における値を示す). これと燃焼後の径路とを連立させることにより第 3 図の P 点の座標が最適径路について与えられる. この点を初期条件として (14) をといていけば, これが燃焼中の最適径路で, これと v 軸の交点 v_0 が最適初速である. 以上が Tsien の取扱いの概要であるがこゝで最終重量と初期重量との構造的関係がないとしているのが余り real でない仮定であろう.

ii) 多段固体燃料ロケットの場合

比較的短い燃焼秒時を有する固体燃料ロケットにあっては上述のような推力計画の方法をとることはできない. にもかかわらず, その操作の比較的簡単であること, specific impulse が比較的大きいこと, 燃焼秒時が短いためエンジン壁の材料劣化が幾分救われること, 等の長所



第 4 図

もあるのですがまた捨て難いところもある. このような要求のもとに考えられたのが間歇噴射方式の推力計画である. すなわち多段の固体燃料ロケットの各段の噴射をある時間間隔をおき, 適当な高度, 速度の状態においてな

である.

今各段の燃焼が瞬間的に行われ, その間の高度増加が無視できるとすると, このような N 段ロケットの $v-z$ 平面の軌跡の i 段目の燃焼前後を図示すると第 4 図のようになる. i 段目の燃焼の高度, 同燃焼開始時の初速度がきまれば i 段目の燃焼後の速度 v_1^i は一義的にきまる. また (z^i, v_1^i) がきまればそこを通る燃焼後径路はただ一つきまる.

$$\text{すなわち } v_1^i = g^i(v_0^i, z^i) \dots\dots\dots (16)$$

$$v_0^{i+1} = f^i(z^{i+1}, z^i, v_1^i) \dots\dots\dots (17)$$

$$\text{また頂点 } Z \text{ では } 0 = f^N(Z; z^N, v_1^N) \dots\dots\dots (18)$$

したがって, Z は $z^i (i=2, \dots, N)$ の函数であるから $(z^1=0)$, Z を最大にするためには

$$\frac{\partial Z}{\partial z^i} = 0 \quad (i=2, \dots, N) \dots\dots\dots (19)$$

でなければならない. (14) (15) (16) からこれを作れば次の如くなる.

$$\frac{\partial f^i}{\partial z^i} + \frac{\partial f^i}{\partial v_1^i} \left(\frac{\partial g^i}{\partial z^i} + \frac{\partial g^i}{\partial v_0^i} \frac{\partial f^{i-1}}{\partial z^i} \right) = 0 \quad (i=2, \dots, N) \dots\dots\dots (20)$$

今 (z^i, v_1^i) の微小変動に対し v_0^{i+1} の 1 位の微小変動 dv_0^{i+1} は (17) 式より $dv_0^{i+1} = \frac{\partial f^i}{\partial z^i} dz^i + \frac{\partial f^i}{\partial v_1^i} dv_1^i$ であるが, 最適径路に対してはこれが 0 となるはずだから

$$\frac{dv_1^i}{dz^i} = - \frac{\frac{\partial f^i}{\partial z^i}}{\frac{\partial f^i}{\partial v_1^i}} \dots\dots\dots (21)$$

ところでこれは (17) で v_0^{i+1}, z^{i+1} を通る径路の (v_1^i, z^i) における切線の tangent であるから, これを $\left(\frac{dv_1^i}{dz^i}\right)_1$ とかくと (20) は

$$\left(\frac{dv_1^i}{dz^i}\right)_1 = \frac{\partial g}{\partial z^i} + \frac{\partial g^i}{\partial v_0^i} \frac{\partial f^{i-1}}{\partial z^i} \dots\dots\dots (20)'$$

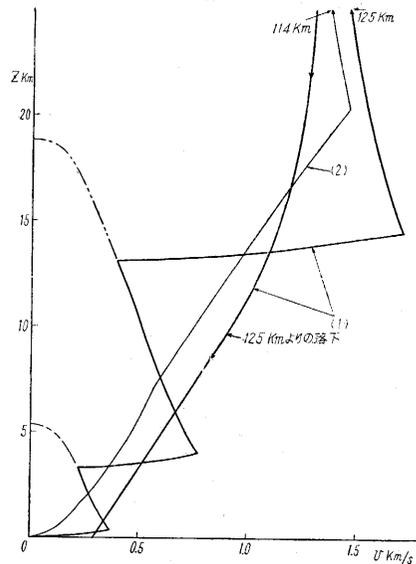
ここで各段ごとの速度増加 $\Delta v^i (i=2, \dots, N)$ が高度によらないとすれば $g^i = v_0^i + \Delta v^i \dots\dots\dots (16)'$

となるので (20)' の右辺は $\frac{\partial f^{i-1}}{\partial z^i}$ となるが, これは $i-1$ 番目の燃焼後径路の (v_0^i, z^i) における切線の tangent なので, これを $\left(\frac{dv_0^i}{dz^i}\right)_0$ とおくと (20)' は結局

$$\left(\frac{dv_1^i}{dz^i}\right)_1 = \left(\frac{dv_0^i}{dz^i}\right)_0 \dots\dots\dots (22)$$

となり, $v-z$ 平面において i 段目の燃焼前後の点における径路の切線の傾斜が等しいような高度で i 段目の燃焼を行わすべきであるという結論を得る. すなわち (6) から

$$\left(\frac{D^{i-1}(v_0^i, z^i) + 1}{W_1^{i-1}}\right) / v_0^i = \left(\frac{D^i(v_1^i, z^i) + 1}{W_1^i}\right) / v_1^i \dots\dots\dots (23)$$



第 5 図 間歇噴射方式による推力計画の例

	外径 (mm)	推力 (kg)	燃焼時間 (sec)	燃料重量 (kg)	全備重量 (kg)
Main	220	8775	1.41	60.5	121.5
Booster 1	"	"	"	"	112.5
Booster 2	"	"	"	"	112.5

(2) 推力=877.5kg, 燃焼時間=14.1sec の他は上と同じ, また (1) の落下径路としては $c_x=0.7$ としたものを示した

が燃焼の前後において成立たねばならぬ、ところで燃焼前後の径路は本号11頁第4図を shift させることにより与えられるから、各径路の切線が平行になるような高度は graphical に容易に求めることができる。この場合燃焼による速度の増加は(5)で与えられるとして大差はない。このようにして求めた径路の例を第5図に示す。この図には、同時に同じ燃料の量で燃焼時間が10倍になったものの飛翔径路を示してある(微分解析機による)。

上に求めた最適径路は、その段数を無限に大きくし、1段ごとの速度の増しを無限に小さくすれば一つの滑らかな径路に近づくが、これは specific impulse が無限大の極限で、連続燃焼の場合と一致する。すなわち specific impulse が無限大ということは、燃焼により重量変化がないということであるから、(23)の条件は $v-z$ 平面上の isoclinic の上の1点から1点へ v 軸に平行に跳び移ることを意味する。ここで1段ごとの速度の増しを無限に小さくすれば、この跳び移りの距離が0に近づき、極限において、これは isoclinic の極小点を通る一つの滑らかな径路をとることになる。isoclinicは(6)で $\frac{dv}{dz} = -c_1 g$

$$\text{とおいて } \frac{D(v, z)}{W_1} + 1 = c_1 v \dots\dots\dots (24)$$

極小点の軌跡はこれを v で微分し $\frac{dz}{dv} = 0$ とした式

$$\frac{1}{W_1} \frac{\partial D}{\partial v} = c_1 \text{ と (25) から } c_1 \text{ を消して}$$

$$D(v, z) + W_1 = v \frac{\partial D}{\partial v} \dots\dots\dots (25)$$

となるが、これは(15)において $c \rightarrow \infty$ としたものである。またこれを z で微分すれば

$$\frac{\partial D}{\partial z} = v \frac{\partial^2 D}{\partial v^2} \frac{dv}{dz} + v \frac{\partial D}{\partial v \partial z} = \frac{\partial^2 D}{\partial v^2} \frac{dv}{dt} + v \frac{\partial D}{\partial v \partial z} \dots (26)$$

となり(14)で $c \rightarrow \infty$ としたものと一致する。したがって、この場合は連続噴射の場合の最適径路と一致することがわかる。

次に多段ロケットの燃料の総量が与えられたとき、これを各段にどのように分配すればよいかという問題がある。真空中においては、各段の燃焼による速度増加が等しくなるように分配したときに最大速度が得られることが知られている。^{*3)} 空気抗力のある場合、これが多少変わってくることはあり得るが、実際のロケットについて計算してみると、やはり各段ごとの速度増加が一定のように燃料を分配した場合が最も到達高度が大きくなるようであるが少しばかりこの配分を変えても余り大きな影響はない。

3. 結 び

以上観測用ロケットの上昇性能の計算法および最適推力計画について、概述した。いまだ本格的観測ロケットがわが国において飛翔していない現在では、これらの議論がどの程度実際に役に立ち得るか疑問であり、今後さらに修正検討を加えなければならないと思われるが、こ

こに一応現在 KAPPA ロケットにつき行っている性能計算に関連して述べてみた。

なお、本文を終えるに当り、ご指導をいただいた糸川教授、微分解析機による計算をしていただいた渡辺先生、計算を手伝って下さった糸川研究室中村君に感謝する次第である。
(1956. 4. 30)

註 * の証明

N段ロケットの i 段目の燃焼により得る速度は真空中においては、(1)に(2)の関係を入れた式で $D(v, z) = 0$ とした式から $\Delta v^i = -c \ln(1 - \zeta_i) - g t_p / N \dots\dots [1]$ ここに各段の燃焼時間は等しく、また全燃焼時間 t_p は一定であるとする。また $\zeta_i = \frac{W_p^i}{W_0^i}$ で i 段目の燃料重量と、燃焼前重量の比、すなわち i 段目の mass ratio である。ここで、 λ_i を i 段目の燃焼前重量と $i+1$ 段目の燃焼前重量 (i 段目のエンジンは落している) との比とする。すなわち

$$\lambda_i = \frac{W_0^{i+1}}{W_0^i} \dots\dots\dots [2]$$

ただし λ_N は、 N 段目の燃焼前重量とエンジンおよび燃料の重量を除いた重量 ($=W_l$) との比とする。またエンジンおよび燃料の重量とエンジン重量の比を ϵ とすれば、これは各段とも一定とみてよい。すなわち $W \epsilon^i$ を i 段目のエンジン重量とすれば

$$\epsilon = \frac{W \epsilon^i}{W \epsilon^i + W_p^i} \quad (1 \leq i \leq N) \dots\dots [3]$$

これを使うと [1] は

$$\Delta v^i = -c \ln[\epsilon(1 - \lambda_i) + \lambda_i] - g \frac{t_p}{N} \dots\dots [4]$$

したがって、 N 段の燃焼を連続的に行わせたときに得る速度 v_{max} は

$$v_{max} = \sum_{i=1}^N \Delta v^i = -c \ln \prod_{i=1}^N [\epsilon(1 - \lambda_i) + \lambda_i] - g t_p \dots [5]$$

これを $\prod_{i=1}^N \lambda_i = \frac{W_l}{W_0^1} = \text{const} \equiv \kappa$ のもとで最大にするには同

じ条件のもとで $S = \prod_{i=1}^N [\epsilon(1 - \lambda_i) + \lambda_i]$ を最小にすればよい。これは A を Lagrange 乗数として

$$\frac{1 - \epsilon}{\epsilon(1 - \lambda_\nu) + \lambda_\nu} \prod_{i=1}^N [\epsilon(1 - \lambda_i) + \lambda_i] + A \frac{\lambda_i}{\lambda_\nu} = 0 \quad (\nu = 1, \dots, N)$$

すなわち $\frac{1 - \epsilon}{\epsilon(1 - \lambda_\nu) + \lambda_\nu} S_{min} + A \frac{\kappa}{\lambda_\nu} = 0 \quad (\nu = 1, \dots, N)$ がすべての ν について成立たねばならないということである。ここで ϵ が0でない限り、 $\lambda_\nu (\nu = 1, \dots, N)$ がすべて等しくなければならぬことを示している。換言すれば各段の mass ratio はすべて等しい時、すなわち Δv^i がすべて等しいとき v_{max} が最大になる。
(1956. 4. 23)

文 献

(1) H. S. Tsien and R. C. Evans "Optimum Thrust Programming for a Sounding Rocket" ARS Journal, vol 21 No. 5, Sept. 1951 pp. 99-107.
(2) M. S. Jones, Jr. "A Method for Estimating Altitude Performance of Balloon Lunched Rockets" ARS Journal, vol 25 No. 10 Oct. 1955 pp. 531-534.
(3) F. J. Malina and M. Summerfield "The Problem of Escape from the Earth by Rocket" Jour. Aero. Sci. vol 14 No. 8 Aug. 1947 pp. 471-480