

微分解析機による解の誤差について

渡 辺 勝

微分方程式を微分解析機⁽¹⁾で解く場合、機械に固有の誤差、たとえばバックラッシュ、送りねじのピッチ誤差、振動などによる不規則なノイズのために、解には必ず誤差をとまらう。この誤差（以下絶対誤差をいう）が解の進行につれて増大しないことが望ましい。実際に解いた例では、この誤差が増大して困ることもあるが、誤差が生長せず定常になっているか、逆に減少してくれる場合もある。

与えられた方程式を機械に組む際、その式の誤差がどのようにふるまうかを、あらかじめ判定しておくことは、とくに精度の高い解を得ようという場合重要である。さらに、たとえその式自身は誤差が増大する形であってもこれに適当な変数の変換を行えば、減少するような形にすることもできる。この際、上の判定条件が目安になる。つぎにこの条件を具体的に論じよう。

判定条件 一般に n 階の微分方程式は、 n 個の連立一階方程式になおすことができる。

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, y_2, \dots, y_n, x) \\ y_2' = f_2(y_1, y_2, \dots, y_n, x) \\ \dots \dots \dots \\ y_n' = f_n(y_1, y_2, \dots, y_n, x) \end{cases} \dots (1)$$

解に誤差を生じた場合には、 x の進行につれ、各変数につぎのように誤差がともなってくる。

$$\bar{y}_1 = y_1 + \epsilon_1, \bar{y}_2 = y_2 + \epsilon_2, \dots, \bar{y}_n = y_n + \epsilon_n \dots (2)$$

y_1, y_2, \dots, y_n は正しい解である。 $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n$ は機械による解であるが、機械は各瞬間においては、もとの式を厳密に正しく解いているから、やはり (1) を満足している。そこで (2) を (1) に代入して $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ が小さいことを考えると

$$\begin{cases} \epsilon_1' = \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \epsilon_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \epsilon_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \epsilon_n \\ \epsilon_2' = \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \epsilon_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \epsilon_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \epsilon_n \\ \dots \dots \dots \\ \epsilon_n' = \frac{\partial f_n}{\partial y_1} \epsilon_1 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \epsilon_n \end{cases} \dots (3)$$

この式は x のある値の近傍で成立つ“誤差の微分方程式”である。 $\epsilon_1 = a_1 e^{\lambda x}, \epsilon_2 = a_2 e^{\lambda x}, \dots, \epsilon_n = a_n e^{\lambda x}$ とおいて (3) に代入し、 λ をきめる式を導くと

$$\begin{vmatrix} \lambda - \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & -\frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & -\frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \lambda - \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & -\frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\partial f_n}{\partial y_1} & -\frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \dots & \lambda - \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = 0$$

この式の根の実数部分の正、負、0 によって、誤差は増大か、減少か、定常となるかきまる。誤差が増大しないためにはすべての根の実数部分が正でないことが必要かつ十分な条件である。

以下にいくつかの応用例を示そう。

(1) 簡単な例

$y' = \pm y, \lambda = \pm 1, y = e^x$ のとき誤差も増大し、 $y = e^{-x}$ のときは減少する。 $y = e^x$ の場合には、 x の方向が逆になるように解けば減少させることができる。

$$y'' = -a^2 y, \lambda = \pm ai \text{ で定常.}$$

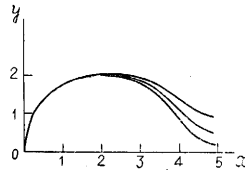
(2) 誤差の減少区間から増大区間にうつる例

$$y'' = (ax-1)(1+y^2)^{\frac{3}{2}} + (1+y^2)y^{-1}$$

この式は毛細管の先端から滴りおちんとする水銀滴の形をきめる微分方程式であって、仁木助教のポーログラフィの研究に関して必要となったものである。

$y' = \tan \theta$ とおいて、 y と θ との連立方程式になおすと

$$\begin{cases} y' = \tan \theta \\ \theta' = (ax-1) \sec \theta + y^{-1} \\ \lambda \begin{vmatrix} -\sec^2 \theta \\ y^{-2} & \lambda - (ax-1) \tan \theta \sec \theta \end{vmatrix} = 0, \\ \lambda = \frac{1}{2} \left\{ (ax-1) \tan \theta \sec \theta \pm \sqrt{(ax-1)^2 \tan^2 \theta \sec^2 \theta - 4 \sec^2 \theta y^{-2}} \right\} \end{cases}$$



第 1 図

$$y'' = (ax-1)(1+y^2)^{\frac{3}{2}} + (1+y^2)y^{-1} \text{ の解}$$

a : パラメータ

与えられた a は小さく $ax-1 < 0$ であるから、 λ の実数部分は $\tan \theta$ の正負によりきまり、実際解では θ が正から負にうつるとき、すなわち y の極大値を通過したときに誤差が急に増大する。(第 1 図)

(3) 適当な変換によって誤差を安定ならしめ得る例

l 次の球面波動かん数をあらわす式

$$y'' + \{k^2 - l(l+1)x^{-2}\}y = 0 \quad k > 0, l = 0, 1, 2, \dots$$

において、解は原点付近で $y \sim x^{l+1}$ で、誤差は増大する傾向を示す。これに $y = x^{l+1}z$ なる変換を行って、 z の方程式にうつれば、

$$z'' + 2(l+1)x^{-1}z' + k^2z = 0$$

この式に対し、 $\lambda = -(l+1)x^{-1} \pm \sqrt{(l+1)^2 x^{-2} - k^2}$ となって二根とも負で安定する。

微分方程式は多くの場合、 $y^{(n)} + f(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y, x) = 0$ なる形で与えられる。 $y^{(n-1)} = y_{n-1}, y^{(n-2)} = y_{n-2}, \dots, y' = y_1$ によって $\{y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_1, y\}$ に対する連立微分方程式として、前の方法を用いれば、 λ の方程式は

$$\lambda^n + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \lambda^{n-1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y'} \lambda + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

たとえば前例 (3) のように、線型方程式の場合は、各階の微係数の係数をそのまま用いて λ の高次方程式を作ればよい。(1956. 2. 24)

文献 (1) 渡辺, 三井田: 生産研究第 6 巻第 8 号 (昭和 29 年) p 197.