

## 性能計算

銭 福星 ・ 中村 巖

## 1. ま え が き

ベビー・ロケットはブースター付きの2段式ロケットであり、しかも実験研究の段階に応じてS. T. Rの3種類に分けられた。本報告では性能計算に当って主としてstep-by-step integration method<sup>(1)</sup>を採用しており、またS. T. Rと種類が違っていても、payloadを加減することにより計算を進めて行くことができるので、計算方法はペンシル・ロケットの場合と実質的に変りない。性能計算はロケット重心のTrajectoryを求めるのに重点がおかれ、同時に飛翔中の各時刻、各飛翔位置での速度、加速度を求めた。特に燃焼中に達し得る最大加速度が問題になる。ここでは飛翔実験に応じて全備重量をいろいろ変えたり、特に60°~80°の間のいろいろの発射角についてのTrajectoryが計算された。

垂直上昇性能計算に際しては従来のstep-by-step integration methodのほか次に次の三つの方法が提案された。

- (1) ロケットの垂直飛翔の運動方程式を直接に解く方法。これは結局step-by-step integrationに帰する。<sup>(2)(3)</sup>
- (2) iterative method<sup>(4)</sup>
- (3) (速度・高度) diagram method<sup>(5)</sup>

これらの方法はいずれもその時の条件に応じてそれぞれ特色を持っているが、詳しいことは次の機会に譲ってここでは概略だけを述べる。

## 2. 性能計算の方法

性能計算には次の仮定がおかれている。

(1) 燃焼中ロケット・モーターは一定の推力を与える。すなわち燃焼生成ガスが一定の割合で噴出し、同時にeffective exhaust velocityが一定なることである。

(2) 重力による加速度が一定なること。

## A. Step-by-Step Integration Method

水平、垂直方向のロケットの運動方程式は迎角を0として

$$\frac{W}{g} a_x = \left( T - \frac{1}{2} C_d \rho_0 \sigma v^2 F \right) \frac{v_x}{v} \quad (1)$$

$$\frac{W}{g} a_y = -W + \left( T - \frac{1}{2} C_d \rho_0 \sigma v^2 F \right) \frac{v_y}{v} \quad (2)$$

ここで  $W$  はロケットの重量;  $g$  は重力の加速度;  $a_x$   $a_y$  はそれぞれ水平、垂直方向の加速度成分;  $v$  は速度  $v_x$   $v_y$  はそれぞれ水平、垂直方向の速度成分;  $T$  は推力;  $C_d$  は空気抵抗係数;  $\rho_0$  は海面上の空気密度;  $\sigma = \rho/\rho_0$ ;  $F$  はロケットの横断面積である。燃焼後は  $T=0$  となる。ロケット・モーターによって与えられる推力は

$$T = mc \quad (3)$$

である。 $m$  は単位時間に噴出するガスの質量、 $C$  はガスの effective exhaust velocity である。式(1), (2), (3)より

$$a_x = \left( mc - \frac{1}{2} C_d \rho_0 \sigma v^2 F \right) \frac{v_x}{v} - g/W \quad (4)$$

$$a_y = \left\{ -W + \left( mc - \frac{1}{2} C_d \rho_0 \sigma v^2 F \right) \frac{v_y}{v} \right\} g/W \quad (5)$$

また仮定(1)により

$$W = W_0 - mgt \quad (6)$$

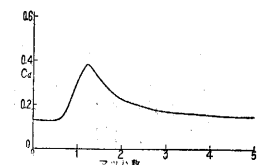
$W_0$  はロケットの燃焼が始まる前の重量である。燃焼時間を  $t_b$  とすれば燃焼後はロケットの重量が  $W = W_0 - mgt_b$  で一定となる。同時に  $mc=0$  となる。また飛翔前は  $W = W_0$ 、 $v = v_x = v_y = 0$ 、air drag = 0 となる。かかることを考慮して式(4), (5), (6)を使って燃焼中、燃焼後のロケットの加速度、速度、変位をstep-by-stepに求めて行くことができる。

B. ロケットの垂直飛翔の運動方程式を直接に解く方法

燃焼中のロケットの運動は近似的には空気抵抗を省略するとか、燃焼前と燃焼直後のロケットの平均重量で飛翔すると考えて可成り正確に解き得る。燃焼後のロケットの垂直飛翔の運動方程式は(2)式において  $T=0$ 、 $v_y=v$  とおいた場合である。式(2)を書き直すと

$$\frac{1}{2} \frac{W}{g} \frac{dv^2}{dy} = -W - C_d \frac{1}{2} \rho_0 \sigma v^2 F \quad (7)$$

ここで空気抵抗係数  $C_d$  はマツハ数と共に変化する。 $C_d$  とマツハ数との関係が第1図\*に示されている。図から明らかな如くマツハ数3以上または0.6以下では  $C_d$  はほとんど一定である。観測ロケットでは燃焼後のマツハ数が3以上であるのが



第1図 代表的なロケットの抵抗係数・迎角0°・jet噴流なし

普通である。したがって当分  $C_d$  を一定として取扱ひ、最後の数値積分で  $C_d$  を変化させて計算を行えばよい。

いま  $k=C_d\rho_0 Fg/W, \sigma=e^{-\alpha y}$  ( $\alpha=0.000138\text{m}^{-1}$ ) とおいて式 (7) を書き直すと

$$\frac{dv^2}{dy} = -2g - ke^{-\alpha y}v^2 \quad (8)$$

更に  $e^{-\alpha y}=u$  とおけば式(8)は

$$\frac{dv^2}{dy} - \frac{k}{\alpha}v^2 = \frac{2g}{\alpha} \frac{1}{u} \quad (9)$$

式 (9) は一階の線型微分方程式であるから、容易に解ける。この解をもとの変数に戻し、 $y=y_0$  で  $v=v_0$  なる初期条件を代入して

$$v^2=v_0^2 e^{-\frac{k}{\alpha}(e^{-\alpha y_0}-e^{-\alpha y})} - 2g \int_{y_0}^y e^{-\frac{k}{\alpha}e^{-\alpha y}} dy \quad (10)$$

これが垂直飛翔における式(7)に対する厳密解である。式(10)により rocket parameters  $F, W$  は勿論のこと、 $C_d, g$  の変化に応じて数値計算を進めて行くことができる。

特に  $y_0=0, C_d$  一定と考えて式 (10) の右辺第 2 項を級数に展開して項別に積分を行い  $v=0$  とおけば最高到達高度  $y_{max}$  を求める近似式が次の如く得られる。

$$y_{max} = \frac{v_0^2}{2g} e^{-\frac{k}{\alpha}} + \frac{k}{\alpha^2} - \frac{k^2}{4\alpha^3} + \frac{k^3}{18\alpha^4} - \dots \quad (11)$$

### C. Iterative Method

iterative method は燃焼中と燃焼後において別々に適用される。

#### (1) 燃焼中

垂直飛翔の式は

$$\frac{dv}{dt} = \frac{T - W - \frac{1}{2}C_d\rho_0\sigma v^2 F}{W/g} \quad (12)$$

まず第 0 次近似として式 (12) において空気抵抗の項を省略し、 $W$  は燃焼後の値を使う。したがって第 0 次近似の速度  $v_0$  は ( $v_0$  は燃焼直後の速度)

$$v_0 = \int_0^{t_b} \frac{T - W}{W/g} dt \quad (13)$$

したがって

$$v = \frac{v_0}{t_b} t \quad (14)$$

$$y = \frac{v_0}{2t_b} t^2 \quad (15)$$

これから  $\sigma$  が計算され、また別に  $C_d v^2 \sim v$  曲線を用意する。その際音速を 300m/s として一定とする。したがって  $t \sim C_d v^2$  の関係がわかり、式 (12) の右辺は時間のみの函数となる。この  $dv/dt$  を  $t$  に対して plot し、図式積分を行って得た値  $v$  を速度の第 1 次近似とする。以下同様にして第 2 次、3 次と繰返して行けばよい。

#### (2) 燃焼後

式 (12) において  $T=0$  とおき、 $C_d v^2 \sim v$  曲線を最小自

乗法を使って  $av^2 \sim v$  曲線で近似させる。 $a$  は定数。しかる時 式 (12) は次の如く書き換えられる。

$$\frac{W}{g} \frac{dv}{dt} = -W - k/v^2 e^{-0.000138y} \quad (16)$$

$v$  の第 0 次近似として、 $\sigma=\rho/\rho_0=e^{-0.000138y}=1$  とおき

$$\frac{W}{g} \frac{dv}{dt} = -W - k/v^2$$

を積分して得た値を使う。ここで  $k' = \frac{1}{2} a \rho_0 F$

したがって

$$t - t_b = \frac{1}{9.8} \sqrt{\frac{W}{k'}} \left[ \tan^{-1} \sqrt{\frac{W}{k'}} v_0 - \tan^{-1} \sqrt{\frac{W}{k'}} v \right] \quad (17)$$

$v$  の第 0 次近似がわかれば図式積分で  $y$  を求め、 $\sigma$  を算出し、 $C_d v^2 \sim v$  曲線を利用して式 (12) に基づいて  $dv/dt$  が算出され、図式積分により次の近似の  $v, y$  が求められる。以下同じ操作を繰返せば近似がどんどん進められる。

ここでは  $C_d v^2$  を  $av^2$  で近似させたが、 $av^3$  または  $av^4$  で近似させてもよい。

### D. (速度・高度) Diagram Method

ここでも燃焼後の垂直上昇性能計算について取扱う。音速の変化を無視して、一定と考えればロケットの垂直飛翔の運動方程式は

$$\frac{1}{g} \frac{dv}{dt} = - \left( \frac{D(v)}{W} e^{-\alpha y} + 1 \right) \quad (18)$$

ここで  $D(v) = \frac{1}{2} \rho_0 v^2 C_d F, e^{-\alpha y} = \rho/\rho_0$ , 式 (18) を書き直して

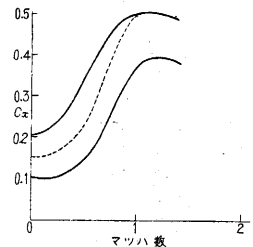
$$\frac{1}{2g} \frac{dv^2}{dy} = - \left( \frac{D(v)}{W} e^{-\alpha y} + 1 \right) \quad (19)$$

いま  $dv^2/dy = -C$  とおけば、同じ  $C$  に対する等傾曲線は

$$(\log_{10} \alpha) y = \log_{10} D(v) - \log_{10} W - \log_{10} \left\{ \frac{C}{2g} - 1 \right\} \quad (20)$$

これは  $C$  の如何にかかわらず同じ形状なので作図に便利である。したがって式 (20) を使えば容易に(速度・高度) diagram がつくれる。また多段式ロケットでは重量  $W$ , 断面積  $F$  が計算の途中で変って来るが、これは高度  $y$  を shift させることにより、同じ diagram で性能を推定し得る。ただし抵抗係数  $C_d$  が  $D(v)$  に入っている

ので、 $C_d$  の変化による  $\text{shift}_t$  も考えなければならぬ。今  $C_d$  とマツハ数との関係が共に同じ二つのロケット ( $W_1, F_1$ ), ( $W_2, F_2$ ) を考える。すなわち重量と断面積がそれぞれ違うのである。その直径をそれぞれ  $d_1, d_2$  とする。いまもし ( $W_1, d_1$ ) のロケットについて、式 (20) により(速度・高度)



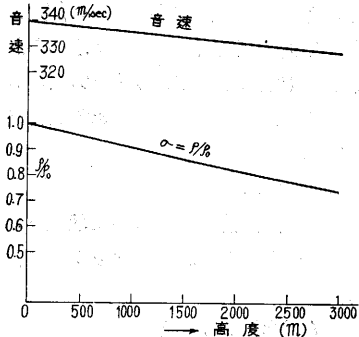
第 2 図 抗力係数とマツハ数との関係

diagram が作られたとすれば、これを  $(W_2, d_2)$  のロケットに適用するには  $y$  を次の如く shift させればよい。

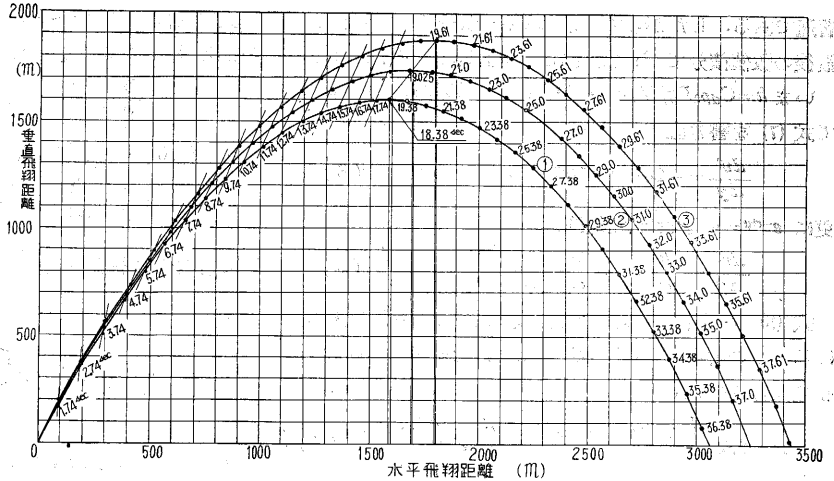
$$y_{shift} = 16800 \log \frac{W_2 \left( \frac{d_1}{d_2} \right)}{W_1 \left( \frac{d_2}{d_1} \right)} \quad (21)$$

3. 性能計算の結果

性能計算に使われた  $C_d$ ,  $\rho/\rho_0$  音速の変化が第 2, 3 図に示されている。数値計算の step size についてはペンシ



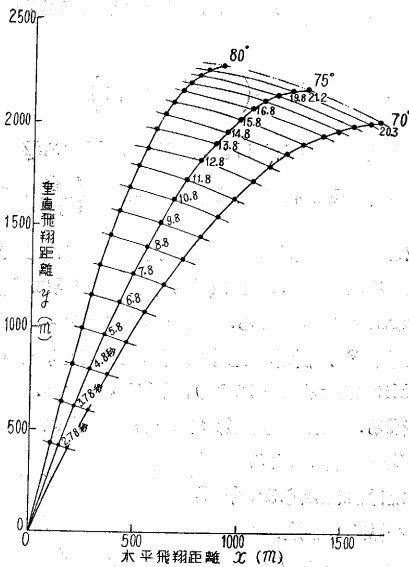
第 3 図 空気密度および音速と高度との関係



- ロケット本体重量
- ブースター重量 2.43kg
- 燃料重量
- ブースター燃料重量 155g
- 燃焼時間 1.605秒
- ブースター燃焼時間 0.605秒
- 本体推力 112kg
- ブースター推力 524kg
- 発射角 65°
- ロケット本体点火秒時 0.1315秒

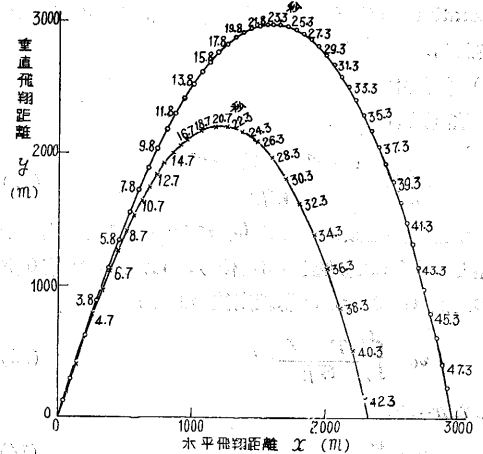
	1	2	3
ロケット本体重量	8.375kg	7.875kg	7.375kg
ブースター重量		1kg	1kg
燃料重量		1kg	1kg
燃焼時間			
ブースター燃焼時間			
本体推力			
ブースター推力			
発射角			
ロケット本体点火秒時			
ランチャー			4 m

第 6 図



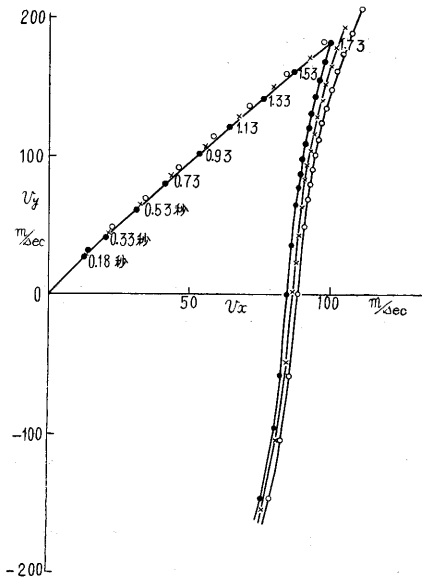
- ロケット本体重量 7.375kg
- ブースター重量 2.43kg
- 燃料重量 1kg
- ブースター燃料重量 155g
- 燃焼時間 1.605秒
- ブースター燃焼時間 0.0615秒
- 本体推力 112kg
- ブースター推力 524kg
- ロケット本体点火秒時 0.1315秒

第 4 図 ビー・スター付きペー・ロケット (70, 75, 80) 度発射飛翔径路 (ランチャーなし)

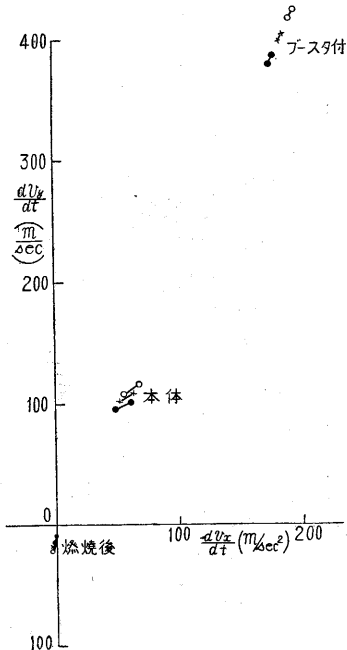


	○印	×印
ロケット本体重量	4.62kg	8.375kg
ブースター重量	2.43kg	2.43kg
燃料重量	1kg	1kg
ブースター燃料重量	140g	155g
燃焼時間	1.605秒	1.605秒
ブースター燃焼時間	0.0615秒	0.0615秒
本体推力	112kg	112kg
ブースター推力	524kg	524kg
ロケット本体点火秒時	0.1615秒	0.1315秒
ランチャー	なし	4m

第 5 図 ビー・スター付きペー・ロケット 75° 度発射飛翔径路

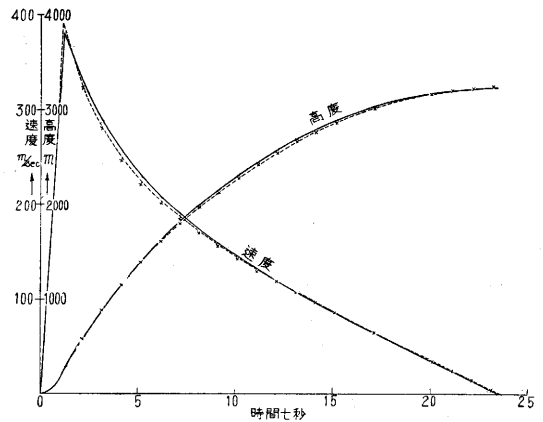


第 7 図 65° 発射 4m ランチャー速度要目は第 6 図に同じ  
 ●本体 9.375kg ×本体 8.875kg ○本体 8.375kg



第 8 図 65° 発射 4m ランチャー加速度要目は第 6 図と同じ  
 ●本体 9.375kg ×本体 8.875kg ○本体 8.375kg  
 ル・ロケットの所で詳しく述べたのでここで省略する。計算結果が第 4～8 図に示されている。これらは何れも step-by-step integration method によるものである。

また第 9 図は iterative method と step-by-step integration method との結果を比較したものである。iterative method では燃焼中については第 1 次近似の結果が示されていて、速度は 2.5%以内、高さは 2.0%以



第 9 図 Iterative Method による垂直上昇性能計算結果 一段ロケット 全備重量 5.06kg (燃料 1kg) 燃焼時間 1.14秒, 推力 167kg  
 —iterative method (燃焼中, 第 1 次近似, 燃焼後, 第 2 次近似の結果)  
 .....step by step integration method

内の誤差の範囲内にある。ここでは step-by-step method の時間間隔は 0.05 秒である。燃焼後の iterative method の結果は第 2 次近似のものである。iterative method に関する限り第 0 次, 第 1 次, 第 2 次と近似値が求まっていれば比例配分の関係式から最終的な最も確からしい値を求めることも可能である。

#### 4. 結 言

本報告では性能計算は飛翔実験の要求に応じて 60°～80° 発射の場合に重点をおいた。特に垂直飛翔の場合には別に述べた方法で計算するのが便利である。なお本報告は糸川教授の御指導のもとに作成されたものである。(1956. 3. 3)

#### 文 献

- (1) Malina and Smith, J. Aero. Sci. 5. 5. 1938
  - (2) 池田 健, ロケット飛翔体における強度上の諸問題概説
  - (3) 銭 福星, 観測ロケットの上昇性能計算, 糸川研究室報告
  - (4) 銭 福星, Iterative Method による Baby Rocket の上昇性能計算, 糸川研究室報告
  - (5) 秋葉鎌二郎, “Ω” の上昇性能について, 糸川研究室報告
- ※ Frank J. Malina and M. Summerfield “The Problem of Escap from the Earth by Rocket. Journal of the Aeronautical Sciences. Vol. 14, No. 8. August, 1947.