

DOVAP 受信点の選定に関する基礎資料

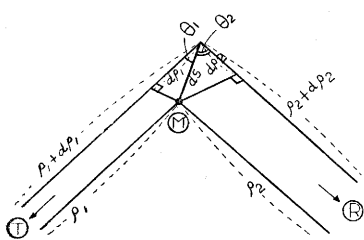
野 村 民 也

1. 緒 言

飛翔中の観測ロケットの軌道測定には、現在、トランスポンダ・レーダと DOVAP が計画されている。これらの System の詳細は、別の機会に紹介の予定であるが、後者についての概略は、すでに本誌でも簡単に説明されている。

DOVAP は、飛翔体の運動による Doppler 効果を利用してその速度を求め、これから飛翔経路を算出するもので、非常に高い精度を期待できる特徴を有している。米国 White Sand 基地に常設されている例では、装置の精度は位置標定において、±1 呎といわれている。この特徴を十分に発揮するためには、装置の設計および運用に相当の留意が必要で、それらの点について若干の考察を行ったので、その概要を報告したいと思う。

2. DOVAP の原理



第 1 図

第 1 図において、 \textcircled{A} および \textcircled{B} はそれぞれ地上におかれた送信機および受信機とし、 \textcircled{M} をロケットとする。

f_T : 地上送信周波数 f_R : 地上受信周波数

f_T' : 機上送信周波数 f_R' : 機上受信周波数

とすれば、 $\textcircled{A} \rightarrow \textcircled{M}$ の直距離を ρ_1 、 $\textcircled{M} \rightarrow \textcircled{B}$ の直距離を ρ_2 として次の関係がある。

$$f_R' = f_T \left(1 - \frac{1}{C} \frac{d\rho_1}{dt} \right) \dots\dots\dots (1)$$

$$f_T' = 2f_R' = 2f_T \left(1 - \frac{1}{C} \frac{d\rho_1}{dt} \right) \dots\dots\dots (2)$$

$$\begin{aligned} f_R &= f_T' \left(1 - \frac{1}{C} \frac{d\rho_2}{dt} \right) \\ &= 2f_T \left(1 - \frac{1}{C} \frac{d\rho_1}{dt} \right) \left(1 - \frac{1}{C} \frac{d\rho_2}{dt} \right) \\ &\approx 2f_T \left[1 - \frac{1}{C} \left(\frac{d\rho_1}{dt} + \frac{d\rho_2}{dt} \right) \right] \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

ただし C : 光速

$\textcircled{A} \rightarrow \textcircled{M} \rightarrow \textcircled{B}$ の距離を ρ とすれば

$$f_R \approx 2f_T \left[1 - \frac{1}{C} \frac{d\rho}{dt} \right] \dots\dots\dots (4)$$

地上受信機において、送信周波数 f_T の 2 倍と受信周波数 f_R の差周波数 (Doppler Frequency) を求める。

これを f_D とすると、

$$\begin{aligned} f_D &= 2f_T - f_R \\ &\approx 2f_T \cdot \frac{1}{C} \frac{d\rho}{dt} = \frac{2}{\lambda_T} \cdot \frac{d\rho}{dt} \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

ただし λ_T : 地上送信波長

$$\therefore \rho(t) = \int_{\tau}^t \frac{d\rho}{dt} dt + \rho_{\tau} = \frac{C}{2f_T} \int_{\tau}^t f_D \cdot dt + \rho_{\tau} \dots\dots\dots (6)$$

すなわち、 f_D の積分によって、任意の時刻における $\textcircled{A} \rightarrow \textcircled{M} \rightarrow \textcircled{B}$ の距離を求めうる。

したがって、地上受信機 1 台に対して、(6) の距離で決まる \textcircled{A} 、 \textcircled{B} を焦点とする 1 つの回転楕円面が対応する。受信機を 3 ケ所に配置し、同様の測定をそれぞれで行えば、各受信点で 3 個の回転楕円面が描けることになり、その交点としてロケットの位置を決定することができる。

3. f_D の最大値

f_D は $\textcircled{A} \rightarrow \textcircled{M} \rightarrow \textcircled{B}$ の距離変化の正負に応じて、正または負の値をとる。 f_D を (5) で定義すれば距離が増大する場合、 f_D は正となる) その絶対値の最大がどの位であるかを知ることが装置の設計上必要である。

ロケットの線速度を dS/dt とすると、第 1 図より

$$\frac{d\rho_1}{dt} = \frac{dS}{dt} \cos \theta_1, \quad \frac{d\rho_2}{dt} = \frac{dS}{dt} \cos \theta_2$$

$$\therefore \frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{d\rho_1}{dt} + \frac{d\rho_2}{dt} \right) = \frac{dS}{dt} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \leq 2 \frac{dS}{dt}$$

したがって $|f_D|$ の最大値は

$$|f_D|_{max} = 4f_T \cdot \frac{1}{C} \frac{dS}{dt}_{max} \dots\dots\dots (7)$$

いま $\frac{dS}{dt}_{max} = 2\text{km/s} (\approx 6\text{mach})$ とすると、

$$|f_D|_{max} \approx f_T (\text{Mc/s}) \times 27 (\text{c/s}) \dots\dots\dots (8)$$

$f_T = 50 \text{ Mc/s}$ とすると、 $|f_D|_{max} = 1,350 \text{ c/s}$ となる。

4. 距離測定の精度

(5) より f_D の 1c/s は

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{C}{2f_T} = \frac{150}{f_T (\text{Mc/s})} (\text{m/s}) \dots\dots\dots (9)$$

の距離変化に相当し、 f_D の積分値 1 サイクル 当りの距離 ρ_0 は(6)より

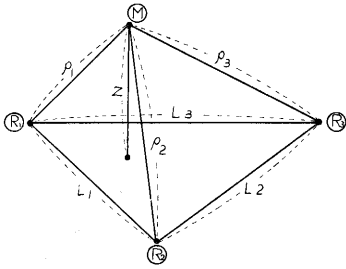
$$\rho_0 = \frac{150}{f_T(\text{Mc/s})} (\text{m}) = \frac{\lambda_T}{2} \dots\dots\dots (10)$$

したがって 1 サイクル 当り、 $f_T=50\text{Mc/s}$ であれば ρ_0 は 3m となる。0.1 サイクル まで読みうるとすれば 0.3m の精度となる。

一方、 f_T に ϵ_T の誤差を含むとすると、直距離に含まれる誤差も ϵ_T である。ロケットの最高高度を 150km とすると、 ρ としては 300km。したがって 3m の精度を確保するには、 f_T の安定度は 10^{-5} 以上、0.3m の精度ならば少なくとも 10^{-6} に達する安定度を要することになる。

5. 高度の算出

1つの送信点に対して 3ヶ所に受信点を設けた場合は



第 2 図

計算は容易ではない。受信点の 1つを送信点と同一位置におけば、3箇所の受信点からロケットに至る直距離が求められ、これからその高度

も比較的容易に計算できる。

第 2 図で、受信点 R_1 R_2 R_3 からの直距離をそれぞれ ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 とすると、高度 Z は

$$Z^2 = \frac{1}{(L_1+L_2+L_3)(L_1+L_2-L_3)(L_1-L_2+L_3)} \left[\begin{aligned} &(-L_1+L_2+L_3) \left[-(\rho_1^4 L_1^4 + \rho_2^4 L_2^4 + \rho_3^4 L_3^4) \right. \\ &+ \rho_1^2 \rho_2^2 (L_1^2 + L_2^2 - L_3^2) + \rho_2^2 \rho_3^2 (L_2^2 + L_3^2 - L_1^2) \\ &+ \rho_3^2 \rho_1^2 (L_3^2 + L_1^2 - L_2^2) + \rho_1^2 L_1^2 (L_2^2 + L_3^2 - L_1^2) \\ &+ \rho_2^2 L_2^2 (L_3^2 + L_1^2 - L_2^2) + \rho_3^2 L_3^2 (L_1^2 + L_2^2 - L_3^2) \\ &\left. - L_1^2 L_2^2 L_3^2 \right] \dots\dots\dots (11) \end{aligned} \right]$$

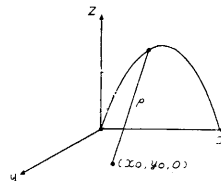
3箇所の受信点を規定する基準三角形の諸元の与え方によって、 Z の算定式は種々の形式となるが、誤差の点から各測定量に対し equal weight のものが望ましいので、(11)の如く対称形となるものを選定した。

予想されるロケットの軌道に対して、どのような受信点配置が適するかは解析的に検討することは困難で、いまだ結論はえられていない。(11)から、 $L_1+L_2-L_3$, $L_2+L_3-L_1$, $L_3+L_1-L_2$ などのいずれもが零に近くなることが必要である。これは基準三角形を著しく鈍角な三角形にならぬよう選定すべきことを意味する。各観測量の測定精度を同一とした場合には、基準三角形を正三角形とし、その中心の垂直上方にロケットが位置することが、誤差最小の必要にして十分な条件であることが証

明されるが、これは秋田道川海岸の状況、ロケット飛翔状況から考えて実現しえない条件である。したがって基準三角形の選定は、秋田海岸の地勢と、予想されるロケットの飛翔経路との双方から、若干の計算によって検討すべき問題となる。この点はまた別に稿を改めて報告の予定である。

6. Doppler Frequency の変化

Doppler Frequency f_D は前述のように、 $\text{①} \rightarrow \text{②} \rightarrow \text{③}$ の距離変化に応じて、正または負になる。簡単な唸周波



第 3 図

数記録法では、 f_D の正負を与えることはできない。したがって、ロケットの飛翔中、 f_D がどのような変化をするかは、DOVAP 装置の受信、記録部分の設計にかなりの影響をもつ。 f_D として全期間

中同一の符号のみ期待できれば、記録系は極めて簡単になる。

ロケットの予想軌跡を第 3 図に示すように、 $x-z$ 面内の抛物線軌跡とする。抛物線のパラメータとして、最高高度 Z_0 と発射角 θ をとると、軌跡の方程式は

$$\begin{cases} x = \sqrt{2gZ_0} \cdot \cot \theta \cdot t \\ z = \sqrt{2gZ_0} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \dots\dots\dots (12)$$

$x-y$ 面上の点 $(x_0, y_0, 0)$ からロケットを狙うとする。直距離 ρ に対して

$$\rho^2 = (x-x_0)^2 + y_0^2 + z^2 \dots\dots\dots (13)$$

$$\therefore \frac{d(\rho^2/2)}{dt} = \rho \cdot \frac{d\rho}{dt} = (x-x_0) \frac{dx}{dt} + z \frac{dz}{dt} \dots (14)$$

f_D の正負は $d\rho/dt$ の正負によるが、(14) からこれは y_0 には無関係である。すなわち、受信点を y 方向に移動しても、 f_D の符号には影響しないことが分る。

(14)に(12)の関係を代入すれば

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{d\rho}{dt} &= -\sqrt{2gZ_0} \cdot x_0 \cdot \cot \theta + \frac{2gZ_0 \cdot t}{\sin^2 \theta} \\ &- \frac{3}{2} g \sqrt{2gZ_0} \cdot t^2 + \frac{1}{2} g^2 t^3 \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$x_0 < 0$ とすれば(15)は $t=0$ において正。したがって f_D は正である。全飛翔期間にわたって f_D が正であるための条件は

$$-\frac{x_0}{z_0} \cot \theta \geq (2\varphi-1)(\varphi+1)^2 \dots\dots\dots (16)$$

ただし $\varphi = \sqrt{1 - \frac{2}{3} \text{cosec}^2 \theta}$

第 1 表

θ	85°	80°	75°
$-x_0$	4.1 Z_0	1.6 Z_0	0.6 Z_0

θ の種々の値に対し (16)の条件を充たす x_0 の値は第 1 表のごとくである。

$Z_0=100\text{km}$ とすれば、 $\theta=80^\circ$ でも受信点を 160km も

後方におかねばならないことになり、これでは到底実用の望みはない。f_D は飛翔期間中、正負の両域にわたって変化することを予期せねばならない。

7. 距離変化の算定

DOVAP 受信点の妥当な選定のためには、予想されるロケット飛翔経路に対し、予想しうる受信点を想定してそれぞれについて直距離とその時間的变化を計算し、その結果から総合判断することが必要である。

この数値計算は多くのパラメータを含む点でかなりの手数を要することとなる。このような計算は微分解析機を利用することによって能率的に進めることができる。

ロケットの軌跡を(12)で与えると、x-z面上の点(x₀, y₀, 0)からの直距離(13)式は、t に対して4次式となる。したがってその4次微分係数は常数であり、ρ²はこの常数を4回積分すればよい。すなわち、

$$\frac{d^4(\rho^2/2)}{dt^4} = 3g^2 \quad 0 \leq t \leq \sqrt{\frac{8Z_0}{g}} \dots (17)$$

ただし t=0 にて

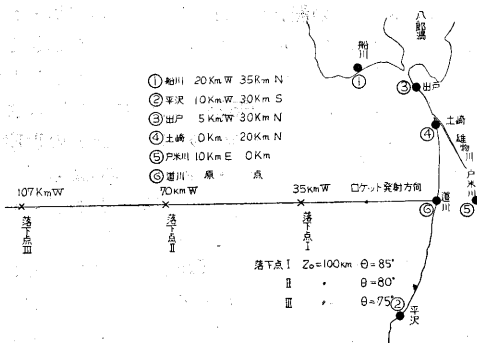
$$\rho^2/2 = (x_0^2 + y_0^2)/2 \quad \frac{d(\rho^2/2)}{dt} = -x_0 \sqrt{2gZ_0} \cot \theta$$

$$\frac{d^2(\rho^2/2)}{dt^2} = 2gZ_0 \operatorname{cosec}^2 \theta \quad \frac{d^3(\rho^2/2)}{dt^3} = -3g \sqrt{2gZ_0}$$

ρ および dρ/dt はこれで算出された ρ²/2 および $\frac{d(\rho^2/2)}{dt}$ とより

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{2(\rho^2/2)} \\ \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d(\rho^2/2)}{dt} \end{cases} \dots (18)$$

の関係を利用し、やはり微分解析機を使って計算できる。

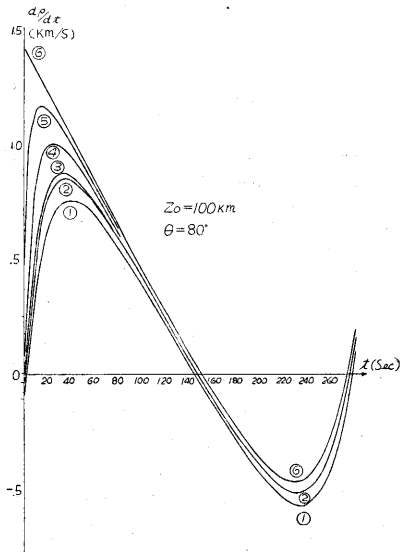


第 4 図 道川海岸付近略図

第 4 図は道川を中心とした秋田県日本海沿岸の略図である。ロケットは真西に飛翔するとして、その軌跡を拋物線とする。最高高度を 100km とし、発射角度が75°, 80°, 85°のそれぞれに対する落下点は図中に示した点である。この飛翔経路と秋田海岸の状況から推して、ロケットの発射角が小さいと、観測の確度を確保することが困難となることが分るのであろう。また海岸線が比較的単調なので、DOVAP 基準三角形の選定は前述の条件を充

たすことが困難である。

海岸線に沿って図中に番号を付した各点からの直距離の変化についての計算結果の一例を第 5 図に示す。



第 5 図 $\frac{d\rho}{dt}$ の変化の一例

これらの計算結果では、Doppler Frequency の測定に対しては、第 4 図の各点では不都合はないこと。基準三角形の選定は特に有利なものではなく、基線長の長いものほど有利であること。したがってその位置は以上の条件を充たしつつ地上波の伝播特性などの点からむしろ定めらるべきこと、などの点が一応の結論となるが、詳細は後日に譲りたい。

8. 結 言

DOVAP 装置の設計とその運営に対して必要な考察を 2, 3 の点について試みた。微分解析機による計算に対しては、渡辺技官のご教示を頂いた。また実際の計算に際しては、市川初男、長谷川毅、矢部泰三君の協力をえた。共に記して厚く謝意を表する次第である。(1956. 4. 15)

表紙説明

左よりペンシル・ロケット、ペンシル 300・ロケット、2 段ペンシル・ロケット、ペビー S・ロケット、ペビー T・ロケット、ペビー R・ロケットの外観を示す。寸法は同一縮小率で示してある。左上はペビー S・ロケットの発射瞬間の写真で、下地の写真はペビー R・ロケット 3 号機のロケット・ボーン・カメラにより撮影した写真の一駒で発射後 228 秒・高度 1,990 m の最高点より北方の陸地、および海面を撮影したものである。