

# 性能計算

銭 福 星

## 1. ま え が き

ロケットの性能計算は従来の飛行機と違って、(1) 燃焼中は燃料の消費が大きく、従って重量の変化を考慮に入れること。(2) 空気抵抗の影響が高度、マッハ数および速度の函数となっていること等のために運動方程式の解を簡潔にした式で与えることができない。ここでは step-by-step method を用いて性能計算を行うための合理的な時間間隔を検討して、これに基づいてペンシル・ロケットの重心の速度、加速度および飛翔径路の計算を行った。計算は下の場合のおおのについて行った。

- (1) 0°, 20°, 45°, 60°, 75° および 90° の発射角に対する飛翔径路。
- (2) 長さ 200 m, 高さ 2 m のトンネル内でペンシル・ロケットを飛翔させる場合の最適発射角。
- (3) 尾翼の翼角を 2° とした場合の spin の計算。
- (4) open test を行うための安全地域の決定の計算。
- (5) 横方向微風を受けたための deviation の計算。

## 2. 記 号

- $T$  推力. kg
- $W$  ロケットの重量. kg
- $W_0$  時刻  $t=0$  におけるロケットの重量. kg
- $g$  重力の加速度.  $m/sec^2$
- $x, y$  水平および垂直方向の座標.
- $\rho$  空気密度.  $kg \cdot sec^2/m^4$
- $v_x, v_y$  水平および垂直方向のロケットの成分速度.  $m/sec$
- $v$  ロケットの合成速度.  $m/sec$
- $F$  胴体断面積.  $m^2$
- $C_x$  抗力係数
- $t$  時間. sec
- $dv_x/dt, dv_y/dt; x, y$  軸方向の加速成分.  $m/sec^2$
- $E$  単位時間の燃料消費量.  $kg/sec$
- $I_x/g$  胴体軸周りの慣性能率.  $kg \cdot m \cdot sec^2$
- $L_\delta = C_{i\delta} \frac{\delta}{57.3} \times \frac{1}{2} \rho v^2 a_0 S$
- $L_p = \frac{\partial C_l}{\partial (\frac{pb_0}{2v})} \times \frac{pb_0}{2v} \cdot \frac{1}{2} \rho v^2 b_0 S$
- $C_l$  揚力係数
- $\delta$  尾翼翼角 (度)
- $p$  廻転角速度.  $rad/sec$
- $\varphi$  rolling angle rad.

- $b_0$  最大翼幅. m
- $S$  翼面積.  $m^2$
- $z$  水平面内で  $x$  軸に垂直な方向の座標.
- $D$  抗力
- $L$  揚力
- $\alpha$  迎角. rad.
- $K$  定数
- $v_x, z$  方向の速度.  $m/sec$
- $v_0$  燃料の燃え切った直後のロケットの速度.  $m/sec$
- $\lambda_0$  ロケットの発射角度

## 3. 基礎方程式

水平、垂直方向のロケットの運動方程式は迎角を 0 として

$$\frac{W}{g} \frac{dv_x}{dt} = \left( T - \frac{1}{2} C_x \rho v^2 F \right) \frac{v_x}{v} \quad (1)$$

$$\frac{M}{g} \frac{dv_y}{dt} = -W + \left( T - \frac{1}{2} C_x \rho v^2 F \right) \frac{v_y}{v} \quad (2)$$

ただし燃焼後は  $T=0$  となる。抗力係数  $C_x$  はマッハ数の函数であり、空気密度  $\rho$  は高度の函数である。

また燃料消費に関しては

$$W = W_0 - Et \quad (3)$$

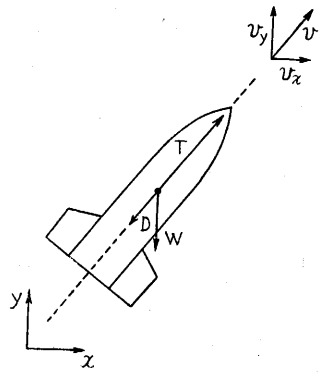
上の式 (1), (2) および (3) を使って一定の時間間隔で逐次に数値積分を行っていくことにより各時刻における速度、加速度、飛翔径路を求めることができる。

ロケットの rolling angle は次式によって求められる

$$\frac{I_x}{g} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = L_\delta - L_p \quad (4)$$

ここで  $L_\delta, L_p$  は、それぞれ rolling moment および damping moment である。ペンシル・ロケットが slender cruciform wing-body combination であることに留意して、slender wing theory を適用し等角写像の助け<sup>(1)</sup>を借りれば  $L_\delta, L_p$  が容易に求められる。また燃焼中  $I_x$  は時間とともに変化する。

open test を行うための安全地域の計算には通常の拋物体の式



第 1 図 ロケットの座標系およびロケットに作用する力

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0 \cos^2 \lambda_0} + x \tan \lambda_0 \quad (5)$$

を適用する。これは空気の抵抗を省略している。

またロケットが発射に際して、横から微風を受けて飛翔径路がそれる。その影響を計算するには、ロケットがランチャーを出た直後に燃料が燃え切って最大速度に達するので、それ以後の運動を考えればよい。有効迎角が小さいので揚力係数は迎角に比例<sup>(2)</sup>し、抗力係数の迎角による増分は無視できるほど小さい<sup>(3)</sup>。抗力がほとんど一定の間を考え、pitching や yawing が無いものとするれば、水平面内で近似的に次の運動方程式を考えればよい。

$$\frac{W}{g} \frac{d^2x}{dt^2} = -D \quad (6)$$

$$\frac{W}{g} \frac{d^2z}{dt^2} = L = Kv^2 \alpha \quad (7)$$

$z$  は水平面内で  $x$  軸に垂直で、deviate を表わす。式(6)を解いて

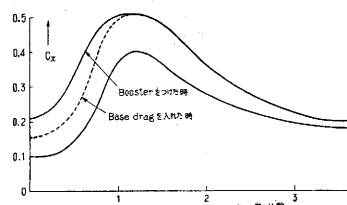
$$v_x = \sqrt{v_{x0}^2 - \frac{gD}{W}x} \quad \text{又は} \quad t = \frac{W}{gD} (v_{x0} - v_x) \quad (8), (9)$$

式(7)より

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{g}{W} Kv_x v_x \quad (10)$$

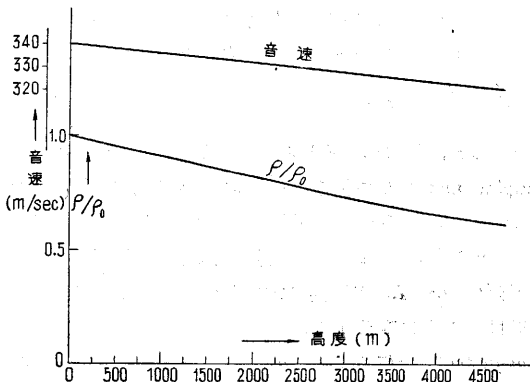
$v_{x0}$  は燃料が燃え切った直後のロケットの発射方向の速度(ロケットは  $x$  方向に水平発射)。 $v_z$  は  $z$  方向の速度で、横からの微風の速度を表わす。また迎角  $\alpha$  は近似的に  $v_z/v_x$  に等しい。式(8)、(9)および(10)を使うことにより飛翔径路の deviate を算出できる。

4. 計算方法および結果



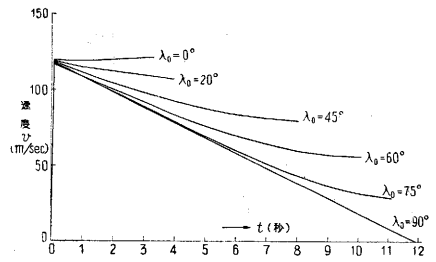
第2図 抗力係数とマッハ数との関係

飛翔径路の計算は式(1)、(2)および(3)に基づいて行うのであるが、それには時間間隔を小さく区切って逐次に数値計算を進める。その際時



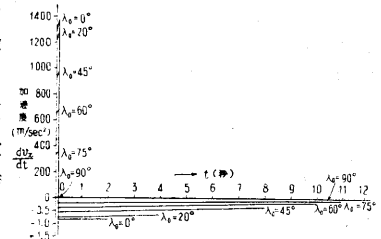
第3図 空気密度および音速と高度との関係

間間隔を大きくすると計算時間を節約できるが精度が落ちる。許容される範囲



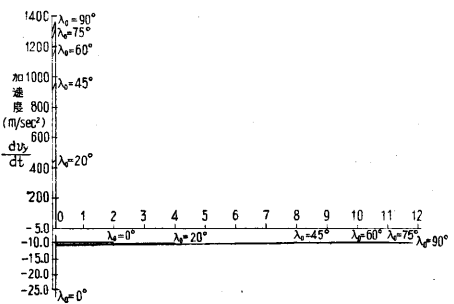
第4図 ペンシル・ロケットの速度

内の精度でしかも計算労力を余り必要としない時間間隔を垂直飛翔について検討した。その結果燃焼中 0.01 秒、燃焼後 0.5 秒の時間間隔で



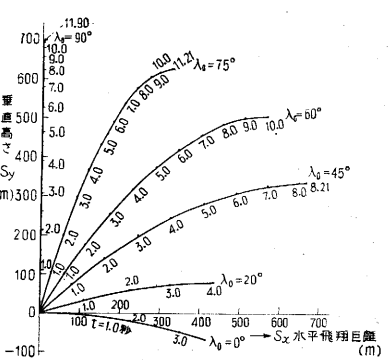
第5図の1  $dv_x/dt \sim t$  曲線

速度、加速度、飛行距離の最大誤差がそれぞれ 6.9%、0.085



第5図の2  $dv_z/dt \sim t$  曲線

%、0.36%であった。また燃焼中 0.025 秒、燃焼後 1.0 秒の時間間隔で計算を行うと速度、加速度、飛行距離の最大誤差がそれぞれ 9.9%、0.10%、1.3 %であった。



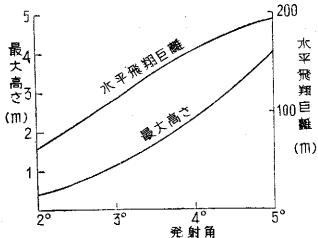
第6図 ペンシル・ロケットの飛翔径路

このことから燃焼中 0.01 秒、燃焼後 1.0 秒の時間間隔で計算を行えば充分であることがわかった。以後の計算結果はすべてこの時間間隔で行ったものである。

逐次近似を進めるに当たって抗力係数  $C_x$  はマッハ数の函数であるばかりでなく、燃焼後は base drag も考えなければならない。また空気密度、音速は高度の函数となっている。第2図、3図<sup>(4)</sup>にそれぞれ計算に使われた

第 1 表 燃焼中 0.01 秒, 燃焼後 1.0 秒の  
時間間隔で計算した結果 (垂直飛翔)

t (秒)	v (m/sec)	dv/dt (m/sec <sup>2</sup> )	S (m)
0	0	1286.0	0
0.01	12.88	1294.7	0.06435
0.02	25.84	1302.4	0.25792
0.03	38.88	1310.7	0.58148
0.04	52.00	1319.1	1.0358
0.05	65.22	1327.6	1.6218
0.06	78.52	1336.2	2.340
0.07	91.90	1344.9	3.194
0.08	105.37	1353.0	4.175
0.09	118.93	-10.606	5.297
1.0	109.3	-10.48	109.14
2.0	98.89	-10.36	213.23
3.0	88.56	-10.25	306.93
4.0	78.34	-10.15	390.38
5.0	68.22	-10.07	463.66
6.0	58.18	-9.993	526.86
7.0	48.20	-9.933	580.04
8.0	38.28	-9.884	623.28
9.0	28.41	-9.847	656.57
10.0	18.57	-9.821	680.08
11.0	8.75	-9.805	693.74
11.90	0	-9.80	697.67



第 7 図 発射角と最大高さおよび  
水平飛翔距離との関係

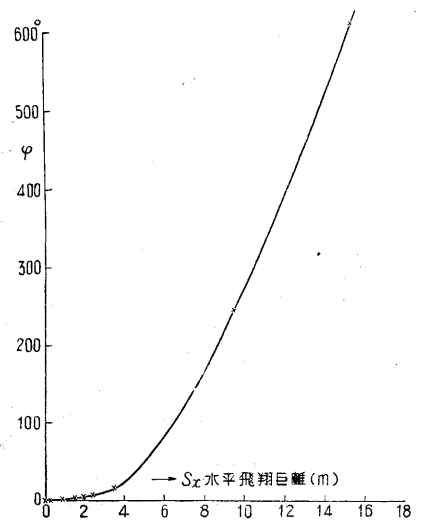
全備重量 219.3 gr (燃料も含めて) 推力 29.0 kg  
燃焼時間 0.09 秒

速度, 加速度, 飛翔径路の計算結果はそれぞれ第 4, 5, 6 図に示されている。また数値表の一例として垂直飛行の場合を第 1 表に掲げている。

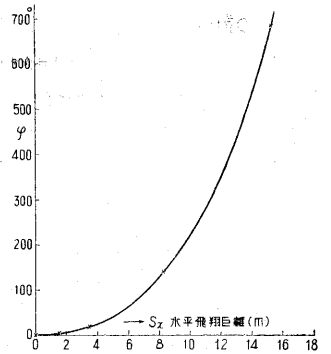
長さ 200 米, 高さ 2 米のトンネル内でペンシル・ロケットを発射させるにはいかなる発射角が最も適当であるかを見出すために発射角を 2°, 3°, 3.5°, 5° にして計算した。その結果が第 7 図に示されている。これにより発射角の最適値は 3.7° 位である。水平飛翔距離は最大高さの時の水平飛翔距離の倍と見てよい。

尾翼の翼角により生ずる rolling angle を計算するには式 (4) を使う。ペンシル・ロケットでは尾翼の縦横

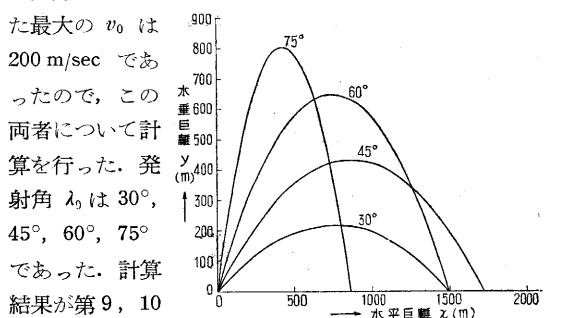
比は 2, また  $C_{D\delta} = 0.51$ ,  $C_{D\beta} = 0.32$  である。燃焼中は  $I_x/g$  の変化も考慮せねばならない。翼角  $\delta = 2^\circ$ , 発射角  $3.5^\circ$  の時の rolling angle の計算結果が第 8 図に示されている。



式 (5) を使えば open test 第 8 図の 1 rolling angle (degrees) launcher 2 m より発射した場合  $\delta = 2^\circ$  発射角  $3.5^\circ$  の計算ができる。ペンシル・ロケットがランチャーを飛び出して、燃料が燃え切った瞬間の速度を初速度  $v_0$  として、その時からの飛翔径路を空気抵抗を無視して求めたのが式 (5) である。この  $v_0$  は実際にペンシル・ロケットを試射して得たものの平均値として 130 m/sec が記録されており、また最大の  $v_0$  は 200 m/sec だったので、この両者について計算を行った。発射角  $\alpha_0$  は  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$  であった。計算結果が第 9, 10 図に示されている。

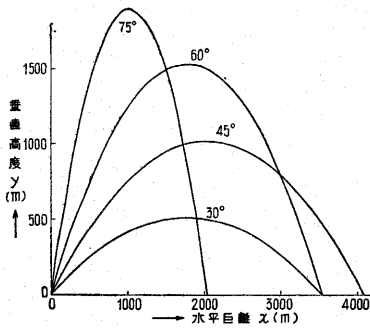


第 8 図の 2 rolling angle (degrees) launcher なし  $\delta = 2^\circ$  発射角  $3.5^\circ$



第 9 図 pencil rocket trajectory (空気抵抗無視) 初速 130 m/sec (これが試射 pencil rocket の平均値)

一般にロケットは発射に際して少しながら trajectory がそれる。それには推力が胴体軸と一致しなかったり、振動や pitching, yawing 等の原因もあろうが、ここではペンシル・ロケットについて、ランチャーを出て燃料が燃え切った直後から風速 3 m/sec の横風を受けて飛翔径路がそれる有様



第 10 図 pencil rocket trajectory (空気抵抗無視) 初速 200 m/sec (pencil rocket の中で最大のもの)

結果が第 11 図に示されている。ここでは質量が前と少し違って  $W/g=0.019592 \text{ kg-m-sec}^2$  になっている。また  $K=2.0627 \times 10^{-4}$  である。

5. 結言

以上の計算は主としてロケットの重心の運動に限っていた。しかしロケットの性能を向上させ、安定をよくするためには重心周りの運動すなわち制御性の問題も考慮せねばならない。これには風圧中心や重心の位置、迎角

を検討した。初速 130 m/sec, 150 m/sec, 180 m/sec の三つの場合に対して、水平発射をした時の運動をしらべた。運動は水平面内で行われているものとする。式 (8), (9) および (10) を

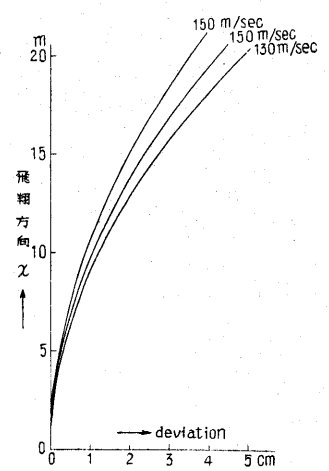
の変化、発射時の条件、燃焼による振動等が重要な要素となる。ペンシル・ロケットの性能計算に当って一応制御性の問題を除いたが、次のベビー・ロケットにおいて是非これを考慮に入れて計算したいと思っている。

終りに種々懇切丁寧に御指導を賜りました糸川英夫教授に深く感謝致します。

(1955. 6. 13)

文献


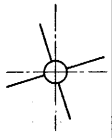
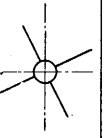
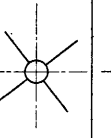
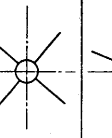
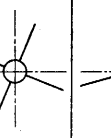
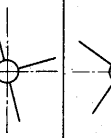
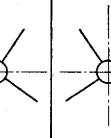
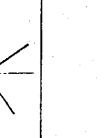


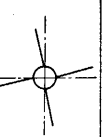
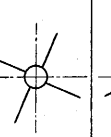
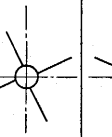
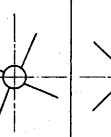
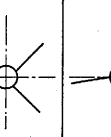
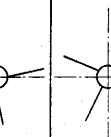
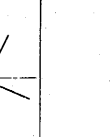
- (1) Adams-Dugan: N.A.C.A.T.R. 1088 (1952)
- (2) Bolz: J. Aero. Sci. 17.2 (1950)
- (3) Kelly: J. Aero. Sci. 21.8 (1954)
- (4) Sibert: High Speed Aerodynamics. New York (1948)



第 11 図 横風 3 m/sec 初速 (130) (150) m/sec の時の Deviation (180)

Pencil rocket の標的通過時の足跡

下図は実験結果の二、三の例で、Spin が解るつもりであったが尾翼に特長を与えてなかったために解析することができなかったが、参考のためにここに掲載した。(吉山巖・秋葉鏝二郎)

飛翔目標 機種	1m	2m	3m	4m	5m	7m	9m	12m
NO.6 Fu11 L=3m 30-S 								
NO.14 Fu11 L=2m 32-S 								
NO.17 Fu11 L=2m 35-S 