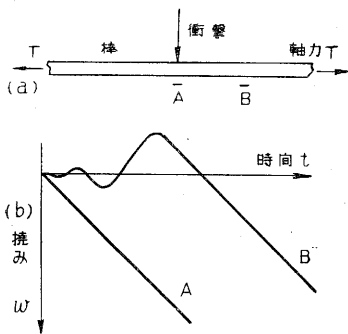


棒および板の横衝撃について

森 大 吉 郎・莊 司 敦

1. 緒 言

水平に横たわる棒または梁に第 1 図のように横衝撃が加わる問題は、一つの基本的な衝撃問題であり、実際上からも重要であるため、古来多くの解析や実験がなされており、今日なお多くの論文がつきつぎと発表されている。主要な研究題目は衝撃後の最大応力、接触特性、塑性変形等であるが、この他に衝撃後の曲げ波の伝播特性についても二・三の論文がある。それは Bohnenblust⁽¹⁾, Vigness⁽²⁾ 等の論文で、第 1 図のように無限長棒の一点 A にある形の衝撃を加え、その結果 A 点が同図 (b) のように一定速度で変位してゆくときには、衝撃点 A より x_0 だけ離れた B 点は (b) 図の B 曲線のように振動し、結局最後には A と同一方向に変位してゆくが、その最後に零線を通るまでに経過した時間を t_0 とすると、 x_0^2/a^2t_0 は一定である ($a^4=EIg/Ar$) ということが強調され、実験でも確かめられている。



第 1 図 棒の横衝撃

著者⁽³⁾は上記の棒の衝撃の場合に軸方向にあらかじめ張力または圧縮力 T が働いていると x_0^2/a^2t_0 の値はどのように変化するかを解析し、実験も行った。この結果を逆に利用すると、 x_0^2/a^2t_0 を測定することによって、あらかじめ棒に加わっていた軸力 T を推定することが、場合によっては可能性があるその検討も行った。以上のことは、平面応力を受けている板の場合にも同様な方法で取扱うことができるので、簡単な解析と実験を行った。本文ではこれらの結果の概略を述べたいと思う。

2. 棒の横衝撃

2.1 解析の結果 軸力 T のかかっている均一棒の横振動の基礎式は

$$a^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (1)$$

$$\text{ただし } a^4 = \frac{EIg}{Ar}, \quad c^2 = \frac{Tg}{Ar}, \quad f = \frac{Pg}{Ar} \quad (2)$$

で EI : 曲げ剛性, Ar/g : 棒の単位長さあたりの質量
 $P(x, t)$: 横衝撃力, w : 撓み

いま x の正負方向に無限に長い棒の中央点 $x=0$ に

$$P(x, t) = \frac{P_0 \delta(x)}{\sqrt{t}}, \quad (\delta(x) \text{ は Dirac の delta 函数})$$

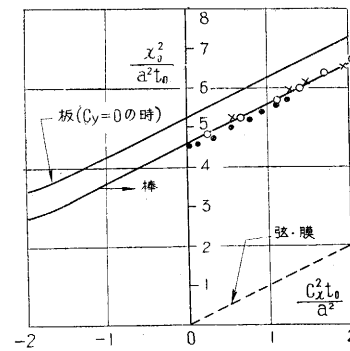
の形の衝撃が加わったとして (1) をフーリエ変換で解くと撓み w は次式で表わされる。

$$w = \frac{P_0 g}{2\pi Ar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{\omega(\xi)} \int_0^t \frac{\sin \omega(t-u)}{\sqrt{u}} du d\xi \quad (3)$$

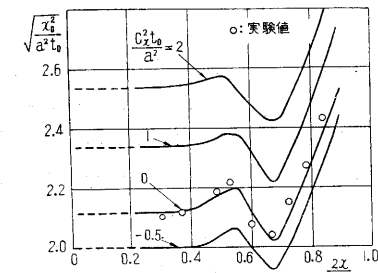
$$\text{ただし } \omega^2 = a^4 \xi^4 + c^2 \xi^2$$

(3) 式を計算すると任意の点の振動状況がわかるが、その結果、衝撃点 $A(x=0)$ は第 1 図 A 曲線のように一定速度で変位してゆき、また x_0 だけ離れた B 点は第 1 図 B 曲線のように振動するが、それが最後に零線を通るまでの経過時間を t_0 とすると、軸力と伝播速度との関係は無次元パラメータ x_0^2/a^2t_0 と c^2t_0/a^2 との関係として第 2 図のようになることがわかった。これは c^2t_0/a^2 が $-1 \sim 2$ までの間では近似的に

という式で表わされる。 $c=0$ すなわち $T=0$ のときには $x_0^2/a^2t_0 = 4.5$ となるが、これは Bohnenblust の計算値に帰着する。(4) 式によって張力 ($T > 0$) がかかると x_0^2/a^2t_0 の値は増加し、圧縮力がかかるとその



第 2 図 応力と t_0 との関係



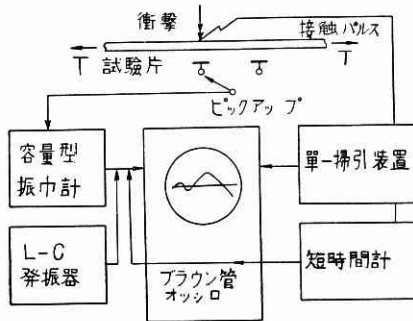
第 3 図 両端支持棒の場合

値が減少することがわかる。

なお棒の長さが有限である場合の一例として、両端支持で長さ L の棒の中央に衝撃がかかった場合についてフーリエ解析を使って解いた結果を第3図に示す。図よりわかるように、 $2x_0/L$ が0から0.4までのすなわち棒の中央附近では x_0^2/a^2l_0 の値はほとんど一定であって、中央附近では無限長の場合の関係式(4)を使っても大した誤差を生じないことになる。

2.2 実験 以上の結果を確かめるために次のような実験を行った。

実験装置 装置の構成を第4図に示す。棒を引張試験機に取りつけて引張荷重をかけ、中央点を小型電動機で



第4図 装置の構成

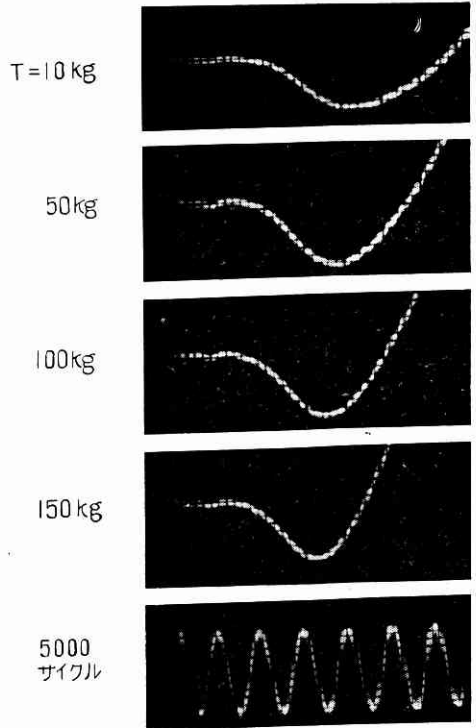
2~3秒に1回の割合で錠で叩く。その叩いた度に錠と棒とが接触して生ずる電気的パルスを利用して、ブラウン管の輝点を水平方向に1回掃引させる。棒の振動は容量型振幅計でピックアップして、ブラウン管の垂直軸に入れる。このようにして衝撃直後の振動状況がブラウン管上に書かれるが、これを写真撮影するか、あるいは後述の短時間計でブラウン管のスクリーン上で直接測定するかして t_0 を測る。第5図は写真の一例である。引張荷重が増加するにつれて t_0 の値が(第1図参照)小さくなってゆくの明瞭に認められる。

次におおのの装置の要点を述べる。

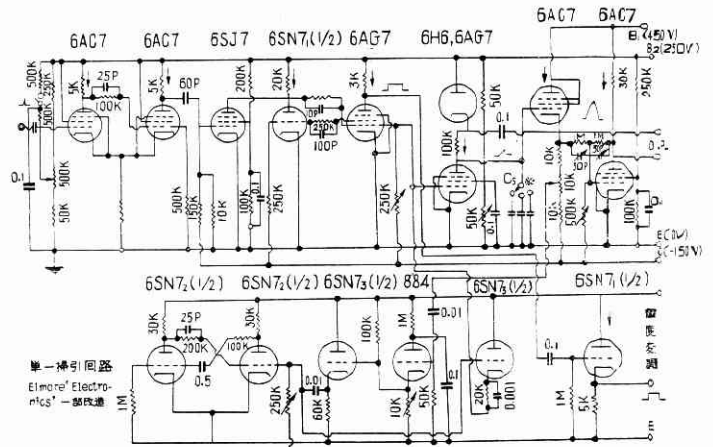
a) 単一掃引回路 (Single sweep generator) 錠と試験片との接触による電気的パルスを受取って、直ちにブラウン管の輝点を1回だけ掃引する回路で、一・二他型式を試みたが、結局第6図の回路⁽⁴⁾が少し半刀ではあるが好性能であった。rise time は充分小さく、掃引速度は $0.2 \sim 20 \times 10^{-3}$ 秒/10cm の範囲内で実験を行った。

b) ピックアップは普通の容量型振幅計を使っている。回路は井上回路、写真撮影は Cannon F 1.8 で行った。

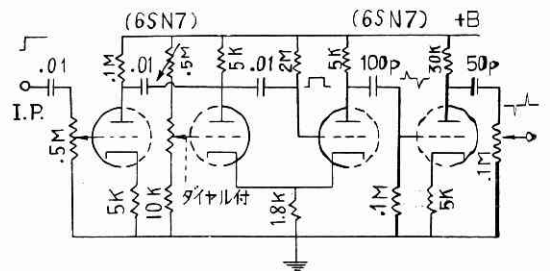
c) 試験片 棒として断面は 10mmφ または 10mm × 10mm 角程度以下の軟鋼またはアルミ棒で、長さ約 1m のものを使用し、材料試験機 (2 ton) に取付けた。



第5図 5mmφ 丸棒についての実験写真 ($x_0 = 17^{\text{cm}}$)。 d) 短時間計 実験においては時間 t_0 を測定するのがもっとも重要な作業である。時間測定にはいろいろの



第6図 掃引回路



第7図 短時間計

方法や装置が考えられるが、ここでは簡便な次の方法を使用した。これは第 7 図に示す回路⁹⁾で、パルスを受取って後、一定時間 τ_0 の後にパルスを発生する一種の遅延回路で、 τ_0 の値は図の中の可変抵抗器 R で正確に変えることができる。使用するときには、鉛と試験片との接触によるパルス（これは同時に単一掃引回路の起動にも使われる）によって起動され、ブラウン管上において、ピックアップよりの振動波形（2~3 秒に 1 回の割で書かれる）とこの短時間計より出たパルスを同時に観察しながら、 τ_0 を t_0 に一致させるように R を調節し、その R のダイヤル目盛から τ_0 （したがって t_0 ）の値を読み取る仕組である。

実験結果 数種の鉄またはアルミ棒について実験したが、その二・三の例を第 2 図に示す。一般的傾向として細い棒では理論式(4)とよく適合するが、棒が太くなるにつれて定性的にはやはりよく適合するのであるが、絶対値はあまりよく一致しなくなる。この原因として次の起因することが考えられる。

- (1) 両端の影響が大きき利く。
- (2) 0.2ms 以下の微小時間を正確に測るのが難しい。これは単に時間測定器のみの問題でなく、波形増幅の際の歪、棒とピックアップの大きさの比、衝撃法等に起因する各種の困難がある。
- (3) 衝撃後に衝撃点の変位はじめるまでに多少の時間を要するが（0.1ms 内外）、太い棒ではこの時間がやや長くなる。
- (4) 衝撃点の変位速度を一定に保つことがこの実験の基本条件の一つであるが、その速度を衝撃後 1ms 程度の間一定に保つことは太い棒ではだんだん困難になり、大きな衝撃力を必要としてくる。

以上のような要素がどのように影響するかについては将来なお検討をしなくてはならない。

つぎに両端支持棒の理論解析に対応する実験として、軸力のない場合について行つた結果を第 3 図に附加した。

2.3 索 索（ケーブル）は曲げ剛性が小さい（ a が小）棒と考えられるので、(4)式に沿った実験は容易であって、太い索でも張力 T により x_0^2/a^2t_0 の値が大巾に変化するのが観察される。ただし弦としての式（ $a=0$ ）では一般に誤差が大きいのでやはり(4)式を用いるべきである。被覆されたケーブルや、振動減衰の強いケーブルでは測定がやや困難になってくる。

3. 板の横衝撃

棒の場合に、軸方向に張力がかかれれば衝撃による曲げ波の伝播速度が早くなり、圧縮力がかかると伝播速度が反対に遅くなることが(4)式のように示され、それが確認された以上、平板の場合についても同様に平面応力

によって伝播速度が変化することが想像される。しかも平板の場合には、平面応力の正負や大小が方向によって変われば、伝播速度もまた方向により変化することが想像される。それについて簡単な解析と実験を行つたのでその概略の結果を述べる。

振動の基礎式は

$$a^4 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w - c_x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - c_y^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, y, t) \tag{5}$$

ただし $a^4 = \frac{Dg}{rh}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$: 板の曲げ剛性

$$c_x^2 = \frac{\sigma_x T}{r}, \quad c_y^2 = \frac{\sigma_y T}{r}, \quad f = \frac{Pg}{rh}$$

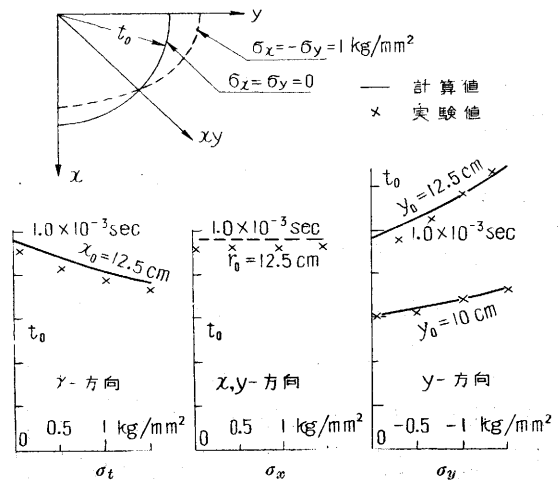
σ_x, σ_y : 主応力。

σ_x, σ_y の値が全領域で一定の場合のみを取扱い、静止した一様な無限平板の原点（ $x=0, y=0$ ）に突然一定値 P_0 の大きさの力がかかったとして、(5)をフーリエ変換で解くと形式的な解は簡単に求まる。ただその二重積分の数値計算は容易でない。一方 $\sigma_x = \sigma_y$ の場合には(5)を極座標で書き直して Hankel 変換で解くことができるがこの数値計算は割合に易しい。以上の 2 種類の計算から棒のときと同様に定義した x_0^2/a^2t_0 に対する大略の近似式として次の式を誘導した。すなわち $c_x^2 t_0/a^2$ が -1 から 2 の間では、 x 軸上においては

$$\frac{x_0^2}{a^2 t_0} \approx 5.2 + \frac{c_x^2 t_0}{a^2} - 0.1 \cdot \frac{c_y^2 t_0}{a^2} \tag{6}$$

この曲線は第 2 図に棒の場合と比較して示してある。上式の意味は、主応力 σ_x および σ_y の働いている平板上で x 軸における x_0^2/a^2t_0 の値には、 σ_x の影響は棒の場合と同程度に利き、 σ_y の影響はごく僅かであるというを示す。

実験は 1mm × 500mm × 500mm のアルミ板に x 方向に圧縮力、 y 方向に引張力を加えて行つた。第 8 図に示



第 8 図 板における曲げ波の伝播状況

すように、応力が零のときには各方向に一樣な伝播速度であったものが、応力がかかると張力のかかった y 方向では速度が早く (t_0 が小に)、圧縮力のかかった x 方向はその反対になり、また xy (45度) 方向では大した変化は認められない。これらの結果は絶対値の一致は未だあまり香しくないが、定性的な傾向としてはよく (6) 式に適合している。

4. 実在応力測定法としての可能性

構造物の部材としての棒や板の応力を測定するには、あらかじめ応力零のときに歪計をとりつけ、その後荷重をかけて歪計のふれから応力を測るのが通常であるが、すでに構造物が組立てられている際には応力をいったん零にさせることは困難である。このような場合に部材の実在応力を何とかして測りたいということはしばしば起る。その実在応力の非破壊的推定法として最近振動法がよく提唱されている。これは軸力 T を受けた棒の一次の固有振動数は

$$f = f_0 \sqrt{1 - P/P_{cr}}$$

(ただし f_0 は軸力 P が零のときの固有振動数、 P_{cr} は Euler の挫屈荷重)

の形で表わされることを利用し、 f を測定することによって P を推定する方法である。

これに対し衝撃法 (仮称) によっても応力を推定できる可能性がある。すなわちいままでに説明したように x_0^2/a^2t_0 と応力 σ との間に (4) および (6) 式が成立し第 2 図に示されるような関係が確認された以上、これを逆に利用して、 x_0^2/a^2t_0 を測定してその値から応力 σ を

推定することができることは容易に想像される。問題はこの方法が適用できる範囲はどの程度か、また振動法と比較しての利害得失は如何ということである。詳しい検討は後日に譲るとして、ここではごく概略の筆者の考えを述べて本論を終りたいと思う。

衝撃法は細長い棒や薄くて大きな板であると測定し易いが、振動法はある程度太い棒でも使える。ただし振動法は両端の境界条件 (固定状態) の影響を直接に受ける。一樣な応力を受けた板では衝撃法が優れており、主応力の方向までわかる。細長い棒では、筆者の予想では高次の固有振動を起させて測る振動法が両端の影響も少なくて、有効ではないかと思う。

5. 結 び

本研究には池田健教授の御指導を受けている。また富田文治君、NRL の I. Vigness 博士および応力測定委員会の諸氏より多くの助言を得た。(1955. 4. 30)

註

- (1) H.F. Bohnenblust, J. Appl. Mech. Dec. 1949
- (2) I. Vigness, Proc. Soc., Exp. Stress Analysis, Vol. 8. No. 2. p. 69 (1951)
- (3) D. Mori, Proc, 3rd Jap. Nat. Congr. for Appl. Mech. p. 343 (1953), および Proc. 4th Jap. Nat. Congr. for Appl. Mech. p. 361 (1954).
- (4) Elmore & Sands "Electronics" 1949 p. 288.
- 5) S. Seeley, "Electron-tube circuits" 1950. p. 427.

次号予告 (7月号)

研究解説

- H T 52 高張力鋼の熔接.....安藤 良夫
- 写真の定着について.....菊池 真一
- 送電線への落雷.....藤高 周平
麻生 忠雄

海外事情

カナダ滞留記(カナダ国立科学研究所).....末岡 清市

研究速報

- ラジアルタービンの動翼出口における流出角.....水町 長生
内田 正和
金子 弘雄
- 鋼管の押し拡げ試験について.....鈴木 文雄
日比野 勝郎
井上 建一
- 自動車の走行抵抗に関する実験.....平尾 収一
大谷 建義
植村 恒夫
- 格子式超高速カメラの研究.....森重 照智
石原 智夫
河 西 隆
- トルクコンバータの性能におよぼす作動油中の気泡について.....

表紙写真

生研式逆張力伸線機；ステンレス用高速伸線機、逆張力によって伸線速度が画期的に増大したので、起動用加速装置・断線時の自動停止装置等をそなえ、ダイス回転装置も設けられている。

正誤表 (5月号)

頁	段	行	種別	正	誤
表 2	左	F 4	ニュース会	電気三学会連合大会	同上 (電気三学会連合大会 部門講演)
"	右	上 3	"	電気三学会連合大会 部門講演	同上 (電気三学会連合大会)
"	右	F 10	"	同上	同上 (")
		F 7	"	電気三学会連合大会 (1955. 5. 1)	同上
19	左	上 11~12		ビッカース硬度	ビッカース硬度
22	左	F 10		ビニール	ビニール