円筒函数の商函数について

尾　上　守　夫

1. 定　義

表題の意味は“円筒函数の商として定義される函数”である．次の漸化式

$$\frac{2\nu}{z}C_\nu(z)=C_{\nu-1}(z)+C_{\nu+1}(z) \tag{1}$$

$$2\,C_\nu'(z)=C_{\nu-1}(z)-C_{\nu+1}(z) \tag{2}$$

を満足する複素変数 z，ν の函数 $C_\nu(z)$ を Nielsen に従って ν 次の**円筒函数**と呼ぶことにする．ベッセルの微分方程式の基本解として普通採用される第１種，第２種および第３種の**ベッセル函数**，すなわち $J_\nu(z)$，$Y_\nu(z)$，および $H_\nu^{(1)}(z)$，$H_\nu^{(2)}(z)$ はいずれも円筒函数の一種である．円筒函数，ベッセル函数の名称は同じ意味に使うことが多いが，ここでは両者を区別し，一般の場合を論ずるときに円筒函数の名称を使うことにする．

次式が円筒函数 $C_\nu(z)$ の商函数 $\mathfrak{C}_\nu(z)$，$\tilde{\mathfrak{C}}_\nu(z)$ の定義式である．

$$\mathfrak{C}_\nu(z)=\frac{z\,C_{\nu-1}(z)}{C_\nu(z)} \tag{3}$$

$$\tilde{\mathfrak{C}}_\nu(z)=\frac{z\,C_{\nu+1}(z)}{C_\nu(z)} \tag{4}$$

（１）式から明かなように両函数の間には次の関係式がある．

$$\mathfrak{C}_\nu(z)+\tilde{\mathfrak{C}}_\nu(z)=2\nu \tag{5}$$

（３）（４）の定義式において C の代りにそれぞれ J，Y，H を使えば各種のベッセル函数に対応する商函数が得られる．その記号としては原函数の記号をドイツ文字に直したもの，すなわち $\mathfrak{J}$，$\mathfrak{Y}$，$\mathfrak{H}$ を使用することにする．

これ等の商函数はいずれもリッカチの微分方程式の一種である次式を満足し，互に密接な関係がある．

$$z\frac{dy}{dz}\pm(y^2-2\nu y+z^2)=0 \tag{6}$$

複号は＋が（３）式の形の函数に，－が（４）式の形の函数に適用される．

変形ベッセル函数 $I_\nu(z)$，$K_\nu(z)$ は（１）（２）式を満足しないから円筒函数ではないけれども，商函数との間に（３）（４）式に類似の関係がある．

$$\mathfrak{J}_\nu(iy)=\frac{y\,I_{\nu-1}(y)}{I_\nu(y)} \tag{7}$$

$$\tilde{\mathfrak{J}}_\nu(iy)=\frac{y\,I_{\nu+1}(y)}{I_\nu(y)} \tag{8}$$

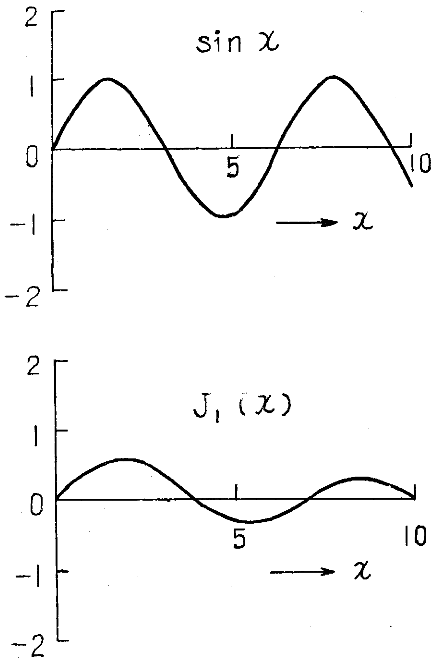
$$\mathfrak{H}_\nu^{(1)}(iy)=\frac{-y\,K_{\nu-1}(y)}{K_\nu(y)} \tag{9}$$

$$\tilde{\mathfrak{H}}_\nu^{(1)}(iy)=\frac{y\,K_{\nu+1}(y)}{K_\nu(y)} \tag{10}$$

2. 商函数がなぜ必要か

上のように定義し，記号をつけてみても，そこに何等かの積極的内容が含まれていなければ意味のないことである．純理論的な見地からいえば，（３）（４）式のように単なる既知函数の商では，わざわざ一つの函数として取上げるほどの価値に乏しいであろう．しかしもしもこうした商の形が実用的な問題にしばしば出てくるならば，それに記号を与えて一つの函数として取扱う方が便利だという実際的な見地もあるわけで，筆者の意図もそこから出発している．この場合でも定義した函数が規則正しい性質を備えていなければならないことはいうまでもない．この間の事情を円函数との相似において説明しよう．

誰しも知っているように円函数表には sin，cos 表とともに tan，cot 表が収められている．前者があれば，理論的には後者は余計なものである．しかし実用に際して sin，cos の商の形が多く出てくるので，tan，cot なる函数を定義し，表を作ることが必要になってきたのだとも見ることができる．この場合 tan，cot はいわば“円函数の商函数”なのである．第１種のベッセル函数 $J_\nu(z)$ と



第　１　図

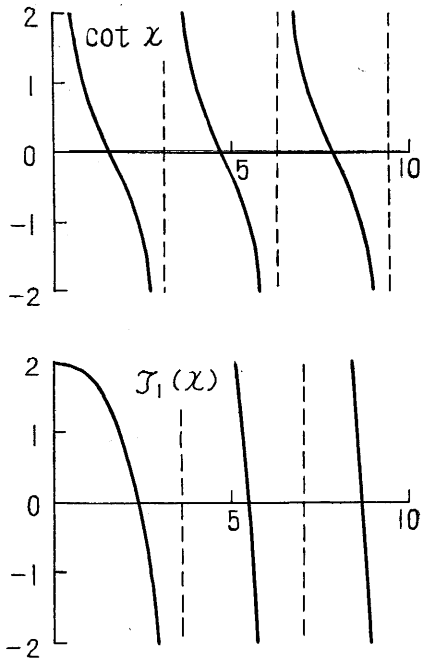
円函数の sin, cos とは第1図にみられるように形がよく似ているが，その類似点は次のようにいうことができよう．

「両函数とも z の実軸上に無数の単純な零点を持ち．極点はない．また各零点の間では極値をただ一回だけとる．」

このような表現で tan, cot の性質を述べると，

「z の実軸上に単純な零点，極点が交互に並び，微係数の符号は常に同一である．」

となる．そしてこれはまた商函数 $\mathfrak{J}_\nu(z)$ の性質でもある（第2図参照）．実は tan, cot の代りに $z\tan z$, $z\cot z$ と比べれば，一層よくこの対応がつく．とくに $\nu=1/2$ ならば



第 2 図

$$\mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}=z\cot z \tag{11}$$

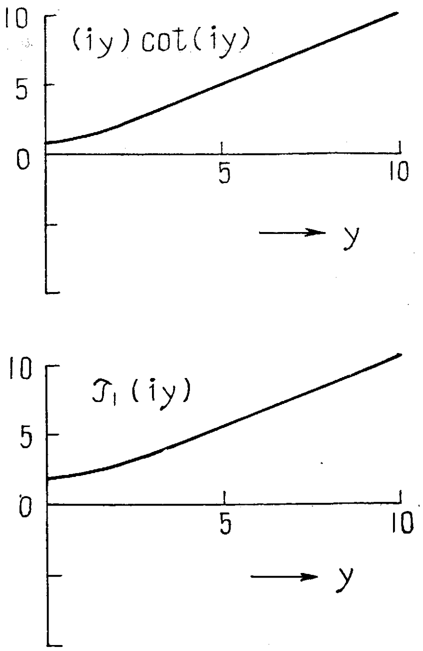
$$\tilde{\mathfrak{J}}_{\frac{1}{2}}(z)=z\tan z \tag{12}$$

となって完全に一致してしまう．

z の虚軸上では両函数とも実の単調函数となって，やはり同様の対応がある（第3図参照）．

以上によって円筒函数の商函数 $\mathfrak{J}_\nu(z)$ は円函数の商函数 tan, cot と同じ様な規則正しい性質を持ちその自然な拡張であることがうなずけるであろう．したがって実際問題に現れてくる回数が十分多ければ，円函数において tan, cot が持っているのと同じ存在意義があると言えよう．他の商函数 $\mathfrak{Y}_\nu(z)$, $\mathfrak{H}_\nu(z)$, $\mathfrak{C}_\nu(z)$ に関しても事情は同一である．

後に示すように数理物理学の領域では円筒函数の商の形はかなりしばしば現れる．にも拘らずこれを一つの函数として積極的に取上げ，解析的性質を究めた上で使用することはこれまで行われていない．筆者は上述のようにこれを商函数として取上げることが合理的であると考え，また実際便利なことを経験してきたので，ここにその使用を提唱する次第である．



第 3 図

商函数の公式表，数表は別に刊行する予定なので[1]，詳しい性質はそれにゆずり，ここではどんな問題に商函数が現れてくるかを実例をもって示すにとどめよう．

3. 商函数の使用例

数理物理学の問題を円筒座標で解くとき，その境界条件，永年方程式等に商函数が現れてくる機会が多い．

（a） 弾性振動

周辺自由の等方性弾性円板の屈曲振動の固有振動周波数 f は次式で計算できる．

$$f=\frac{z^2 t}{\pi D}\sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\sigma^2)}} \tag{13}$$

ここに D：直径，t：厚味，E：ヤング率，σ：ポアソン比，ρ：密度である．z は Kirchhoff による次の永年方程式の根である．

$$\frac{(\mu-1)\{zJ_n'(z)-n^2J_n(z)\}-z^2J_n(z)}{(\mu-1)\{izJ_n'(iz)-n^2J_n(iz)\}+z^2J_n(iz)}=\frac{n^2(\mu-1)\{zJ_n'(z)-J_n(z)\}-z^3J_n'(z)}{n^2(\mu-1)\{izJ_n'(iz)-J_n(iz)\}+iz^3J_n'(iz)} \tag{14}$$

これを商函数を使って書直すと次のようになる．

$$\left\{\mathfrak{J}_n(z)+\frac{\xi^2z^2}{4}-n(n+1)\right\}\left\{\mathfrak{J}_n(iz)-\frac{\xi^2z^2}{4}-n(n+1)\right\}=n^2(n^2-1)-\frac{\xi^4z^4}{16} \tag{15}$$

$\mathfrak{J}_n(z)$ の性質をよく知っていれば根の存在範囲の決定や数値計算等が非常に見通しよく行える．

円板の他の種の振動——輪郭振動，周辺固定の振動，

等——についても同様である．筆者が商函数を使うようになったのは，実はこの種の問題を解く必要からであった．その詳細は別に発表する予定なのでここでは立入らない[(2)]．

（b）熱伝導

側面が Newton の輻射，すなわち

$$\frac{\partial T}{\partial r}=-hT \tag{16}$$

なる境界条件の円筒の軸方向への熱伝導を扱う場合，解は

$$T=\sum_n A_n e^{-k_n z} J_n(k_n r)\, e^{in\theta} \tag{17}$$

の形になる．ここに A_n：定数，T：温度，$(r,\ \theta,\ z)$：円筒座標，h：表面輻射率，a：半径，で k_n は次式から求まる．

$$\mathfrak{I}_n(k_n a)=n-ha \tag{18}$$

$\mathfrak{I}_n(z)$ の表があれば，かかる問題を扱うのに便利なことは明かであろう．

熱伝導に限らず一般に波動方程式 $(\Delta+k^2)\ T=0$ を (16) なる境界条件の下で円筒座標で解く場合は同様のことが常に起る．

（c）半導体内の少電導粒子の拡散

ゲルマニウム等の半導体の重要な定数である少電導粒子 (minority carrier) の life time L_p の測定には Molton-Haynes 法がよく使われる[(3)]．これは半導体表面に線状の光を照射して小電導粒子をつくり，そこから x の距離における粒子密度 p を測定し，距離を大きくしていったときの拡散による減衰の模様から次式によって L_p を求める方法である．

$$x\frac{\partial}{\partial x}\log p=\mathfrak{H}_0^{(1)}\left(i\frac{x}{L_p}\right) \tag{19}$$

左辺は測定し得る量である．L_p の算出は $\mathfrak{H}(z)$ の表があれば簡単である．

（d）高周波加熱

誘電率 ε，誘磁率 μ，導電率 σ なる物質を半径 a なる円板状電極ではさんで電界型の高周波加熱を行う場合[(4)]，その電極の呈するインピーダンス Z は

$$Z=\frac{Z_0}{2}\mathfrak{I}_1(\gamma a) \tag{20}$$

である．ここに Z_0：低周波におけるインピーダンス，$\gamma=\sqrt{\varepsilon\mu\omega^2+i\sigma\mu\omega}$，$\omega$：使用角周波数である．

γ は一般に複素数であるから，この問題では複素函数としての $\mathfrak{I}(z)$ の性質を知る必要がある．

同じ物質を半径 a なる線輪中に入れて磁界型の高周波加熱を行う場合[(5)]，線輪の呈するアドミッタンス Y は

$$Y=\frac{Y_0}{2}\mathfrak{I}_1(\gamma a) \tag{21}$$

ここに Y_0 は低周波における線輪のアドミッタンスである．

（e）進行波管

広帯域増幅管として重要な進行波管の設計には螺線上を伝播する電磁波の性質を知る必要がある[(6)]．

半径方向への伝播定数 γ（これはまた軸方向への伝播定数にほぼ等しい）は次式で与えられる．

$$\mathfrak{I}_1(i\gamma a)\,\mathfrak{H}_1^{(1)}(i\gamma a)+(\beta_0 a\cot\Psi)^2=0 \tag{22}$$

ここに a：螺線の半径，β_0：自由空間の伝播定数，Ψ：螺線のピッチ角である．上式の第 1 項は (γa) に関して単調減少函数である．したがって $(\beta_0 a\cot\Psi)$ が大きくなれば (γa) も大きくなることが直に判る．

なお上例 (19)～(22) 式にはいずれも 1 次の商函数しか現れてこないが，高次の現象まで考慮すれば当然高次の商函数が必要になることは言うまでもない．例えば進行波管において空間高調波を考慮すると[(7)]，(22)式は次のようになる．

$$\left[\mathfrak{I}_n(i\gamma a)-n\right]\cdot\left[\mathfrak{H}_n^{(1)}(i\gamma a)-n\right]+\left[\frac{na\sqrt{\gamma^2+\beta_0^2}-(\gamma a)^2\tan\Psi}{\beta_0 a}\right]^2=0 \tag{23}$$

商函数の使用例はこの他にも，導波管[(8)]．電波の散乱，等の諸問題に見ることができるが与えられた紙幅もつきたので省くことにする．

4. 結　言

円筒函数の商として（3）（4）式で定義される函数が，新しい函数として取上げるにふさわしい規則的性質と，広い実際的な使用面とを持っていることを示し，その使用を提唱した．この函数の詳しい公式表，数表は近く刊行する予定である[(1)]．円函数における tan, cot と同様に気軽に使われることを期待している．

終りに本所高木昇教授の御指導と安達芳夫助教授の御助言に厚く感謝申上げる次第である．　(1954. 12. 20)

文　献

（1）生研報告 4, 5（近刊）

（2）電気学会誌寄稿中

（3）L. B. Valdes：I. R. E. 40, 1422 (Nov. 1952)

（4）安宅：電磁界とその解析，p. 439（昭 19）

（5）斎藤：電気工学論文集 1, 38（昭24—6）

（6）J. R. Pierce：Travlling Wave Tubes, p. 231 (1950)

（7）平野：電気通信学会誌 37, 154（昭29—3）

（8）H. Suhl & L. R. Walker：B. S. T. J. 33, 579 (May 1954) は gyromagnetic な物質を導波管内につめた際の電磁波の伝播を解析するにあたり

$$F_n(x)=\frac{xJ_n'(x)}{J_n(x)}$$

なる函数を定義し，n が 1 次のものを使用している．しかるに

$$\mathfrak{I}_n(x)=n+F_n(x)$$

なる関係があるから，これも商函数の利用とみることができる．