

# 与えられた磁界分布を実現する磁極形状の解析

—— とくにベータートロンの電磁石への応用について ——

小川 岩 雄

ベータートロン、シンクロトロン等の電磁石の設計にさいして、子午面上で必要な与えられた磁界(磁束密度)分布:  $B_z = -F(r)$ ,  $B_r = 0$  をなるべく忠実に実現するような磁極の形:  $z = z_1(r)$  を求めることがしばしば必要になる。従来はこういう場合に、狭い磁極間隙のどこをとって磁力線が子午面にほとんど直角であると思なし、渦なし場の条件式:  $\text{rot } \mathbf{B} = 0$  の粗い近似式

$$z_1(r) \cdot F(r) = \text{const} \quad (1)$$

を用いて  $z_1(r)$  の大体の形を求め、これを参考にして、工作のなるべく容易ないろいろの形状を考え、電解槽による模型実験で最良のものをえらび出すという cut and try の方法によるのが常であった。

しかし(1)の近似は  $F(r)$  の  $r$  方向の変化が著しく、いわゆる  $n$ -値( $n \equiv -(r/F) \cdot (\partial F/\partial r)$ )の絶対値が大きい場合や、間隙  $2z_1(r)$  が大きい場合には近似が急に悪くなり、 $z_1(r)$  の正確な形を知る手掛りとして役に立たなくなる。そこでこういう場合に(1)の近似をもう少し進めて、 $F$  の  $r$  についての微係数  $F'$ ,  $F''$ , ……等を考慮する方法を考え、 $F(r)$  に 2, 3 の具体的な形を与えて磁極の形を求めてみた。

計算に先立つ基本的仮定として、(1)の場合と同様間隙附近に励磁コイルなどの電流はないものとする静磁近似を用い、また磁極材料の飽和はなくその透磁率  $\mu$  は無限大、したがって磁極表面はひとつの等静磁位面と一致するものとする。なお磁位分布の形は  $z$  軸に関して軸対称であるのは勿論子午面  $z = 0$  に関しても逆対称であると仮定する。

このような実用上一応許される仮定のもとで静磁位:  $\varphi = \varphi(r, z)$  に対して成立つ Laplace 方程式:

$$\Delta \varphi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

の解を子午面附近で近似的に求めるために、子午面での境界条件:

$$B_z = -(\partial \varphi / \partial z)_{z=0} = -F(r), \quad B_r = -(\partial \varphi / \partial r)_{z=0} = 0, \quad \varphi(r, 0) = 0 \quad (3)$$

を考慮して、 $\varphi$  を  $z$  について次のように展開する。

$$\varphi(r, z) = F(r)z + (G_1(r)/3!)z^3 + (G_2(r)/5!)z^5 + \dots \quad (4)$$

(4)を(2)に代入し、得られた  $z$  のべき級数の各項の係数を0に等しいとおくと、未知函数  $G_1(r)$ ,  $G_2(r)$ , ……は与えられた函数  $F(r)$  およびその導函数  $F'(r)$ ,  $F''(r)$ , ……を用いて次のように表わされることがわかる:

$$\begin{aligned} G_1(r) &= -(rF')/r, \\ G_2(r) &= (1/3!) \cdot [r\{(rF')/r\}]/r, \dots\dots\dots \\ G_m(r) &= \{1/(2m-1)!\} \cdot (rG'_{m-1})/r, \\ G_0(r) &= F(r), \quad m=1, 2, \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (5)$$

これを(4)に代入して  $\varphi(r, z) = \text{const} = \varphi_1$  とおいたものは一つの等磁位面、したがって可能なひとつの磁極面の方程式となる。とくに  $G_1, G_2, \dots$  が充分急速に0に収斂する場合には、 $z$  があまり大きくない限り近似的に

$$z = z_1(r) = (\varphi_1/F) - (G_1/3!) (\varphi_1/F)^3 - \dots \quad (6)$$

として  $z_1(r)$  の形が explicit に求まる。この第1項は明らかに(1)から求めた  $z_1(r)$  と一致し、第2項以下がその補正項となっている。より厳密には  $\varphi(r, z)$  を各点で算出した上で等磁位面を graphical に求めるべきことはいふまでもない。

いま一例としてしばしば問題になる磁界分布:

$$F(r) = B_0 \cdot (r_0/r)^n = Cr^{-n}, \quad C \equiv B_0 \cdot r_0^n, \quad n: \text{定数} \quad (7)$$

についてこのような方法で、(6)に相当する磁極面の式を求めると

$$z_1 \equiv z_0 \cdot \{ [1 - (n^2/3!) \zeta_0^2] \rho^n + (n^2/3!) \zeta_0^2 \rho^{2n-2} \} \quad (8)$$

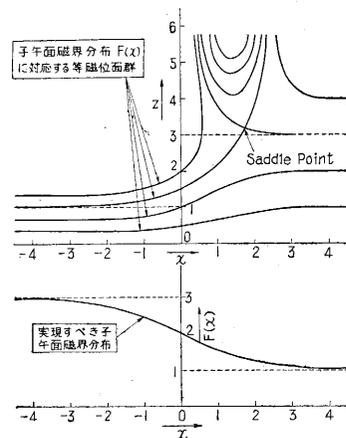
となる。ただし  $\zeta_0 \equiv z_0/r_0$ ,  $\rho \equiv r/r_0$ ,  $z_0 \equiv z_1(r_0)$  である。 $(n\zeta_0)^2 \ll 3!$  のとき(8)は  $z_1 \equiv z_0 \rho^n$  となり(1)の近似が成立つ。ベータートロンの軌道部では  $0 < n < 1$  で、しかもおおむね  $\zeta_0 \ll 1$  であるから、(1)が実用上充分な近似であることがわかる。

しかし、同じベータートロンでも中心磁束部と軌道部の境界部分のように  $F(r)$  をある  $r=r_1$  で急に落そうとするときは(5), (6)の第2項以下を無視するわけにはゆかなくなる。いまこのような  $F(r)$  の模式的な一例として双曲正切函数で表わされる分布:

$$F(r) = B_1 - B_2 \tanh \kappa x, \quad x \equiv r - r_1, \quad B_1 \equiv F(r_1) \quad (9)$$

を考えると、これは  $\kappa \rightarrow \infty$  のとき  $r=r_1$  で  $2B_2$  の跳びを示す階段函数的な分布に近迫する分布であって、 $B_1, B_2$  を適当にえらべば、軌道部で  $n=0$  とする仮想的なベータートロンの磁界の特徴を一応荷ったものと見ることが出来る。

(9)に前述の方法を適用して、 $B_2 = B_1/2$ ,  $\kappa = 0.487$  なる特定の(小型ベータートロンの実際に近い)場合について  $r=r_1$  附近の子午面近傍の等磁位面(したがって



第 1 図

可能な磁極面)を求めてみると大体第1図のようになり、一定の  $\kappa$  のもとで磁極間隙をある程度以上ひろげるとすると単一磁極面では同じ  $\kappa$  が実現できなくなり、逆符号の磁極(実用上はコイル等で代用)を挿んだ溝が必要になることがわかる。また単一磁極面のできる範囲で間隙を最大にする(または  $\kappa$  を最大にする)場合にも浅い溝がかなり有効であるとの結論が得られる。なおこの場合の計算は(2)をさらに簡単化して  $r_1$  附近で  $\Delta \varphi = (\partial^2 \varphi / \partial x^2) + (\partial^2 \varphi / \partial z^2) = 0$  とする2次元近似によった。(1954. 12. 6)