船の不規則な動揺

田 宮　真

船の動揺は風や波の周期的な力でおこるが，従来外力は規則的な sine 函数であらわすのが普通であつた．実在の外力は不規則複雑な様相を示すもので，単一の，あるいは若干の規則的な外力の組合せでこれを代表することが困難である．ここに不規則外力の船にあたえる運動の一つの取扱方法を示し，規則的外力によるものとの比較を行つた結果を報告する．

運動方程式

Rolling, Pitching, Heaving の方程式を次の形に書く

$$I'_x\frac{d^2\theta}{dt^2}+N_x\frac{d\theta}{dt}+Wm_x(\theta)=f_x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$I'_y\frac{d^2\psi}{dt^2}+N_y\frac{d\psi}{dt}+Wm_y(\psi)=f_y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$M'\frac{d^2z}{dt^2}+N_z\frac{dz}{dt}+Am_z(z)=f_z \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ここに I はそれぞれの軸のまわりの質量慣性モーメント，M は質量，N は減衰係数，A は水線面積，W は船体重量，$A\cdot m$(又は $W\cdot m$ は) 復原力，f は外力を示す．ダッシュは，船のまわりの水の動的影響を含めた“見掛け”の値を示す．N, m, f 等は (1) (2) と (3) とでは当然次元を異にする．θ は $\pm 40°$ に及ぶことも稀ではないが，ψ, z は一般には小さい値で，m を ψ, z の一次函数とすることが普通である．

N は船毎に異なるけれども，同じ船でも振幅や船速強制外力の性質によつて影響をうける．従ってこれ等をとくことは決して簡単でない．ただここでは外力の不規則性がどのように運動に影響するかを見るために，大胆な仮定をおき，常係数線型方程式を考えることにする．そのときは一般に (1), (2), (3) を次の形に書いてよい．

$$\ddot{\theta}+2h\dot{\theta}+\nu^2\theta=f \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$f=0$ の場合はいわゆる“自由動揺”であって，この時の無抵抗動揺周期 $(T)_{h=0}=\dfrac{2\pi}{\nu}$ を固有周期というが，船にあっては T は Rolling が一番大きく，Pitching と Heaving はほぼ同じ大きさで Rolling に比べて小さい．それぞれを区別するため添字 r, p, h をつけると，

$$T_r=2\pi\sqrt{\frac{I_x'}{W\cdot GM_x}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$T_p=2\pi\sqrt{\frac{I_y'}{W\cdot GM_y}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$T_h=2\pi\sqrt{\frac{M'}{w\cdot A}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

ここに GM はメタセンタ高とよばれる長さで，重心とメタセンタとの距離を示す．また w は単位体積の水の重さである，(5) (6) (7) 式右辺にあらわれる量は I_x', I_y', M' を除いていずれも計算で求められる．見掛の質量については実験的に求めることが可能であるが，流体力学的の算定法を利用すれば大体の推定はできる．船体のみの質量にもとづく値 I_x, I_y, $\dfrac{W}{g}\equiv M$ を使つて

$$I'=I(1+k) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

の形に表わすと係数 k は船形によつてかわるが，k_x, k_y, k_z いずれも船の幅と吃水の比によつてほぼきまる．しかして巾と吃水の比は多くの商船では 2～2.5 であつて，この時の k_x 等の値は $k_x\fallingdotseq 0$～0.1，$k_y\fallingdotseq 0.8$，$k_z\fallingdotseq 1.0$ である．

次に動揺に対する抵抗 h を無次元の $\kappa=\dfrac{2h}{\nu}$ であらわすと，κ_x はビルジキールつきの船で大体 0.1 位であるのに，κ_y, κ_z は 0.4～0.5 に達する．h が 0 でないと自由動揺の周期は大きくなるが，Rolling ではその影響は僅小である．

外力 f について考える．事柄を簡単にするため，船に動揺を起させる原因である波は二次元的の構造をもち，Rolling においては船の真横から，その他では真前または真後から進行するものとする．大洋におこる規則的な sine wave では周知の如く，波長 λ，周期 T_w，波速 C の間に

$$C^2=\frac{g\lambda}{2\pi}, \quad T_w=\frac{\lambda}{C}$$

という関係があつて，いずれか一つをあたえれば，他は定まる．波高（波の谷から山までの高さ）H と波長の関係 λ/H は 15～50 であるが，波を起す原因が生じてからの時間と，そのエネルギを受ける海面の広さとで異なる．また，λ/H には上限があつて無暗と峻しい波はできない．

規則的な波をうけると外力は

$$f=F_0\cos pt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

とあらわしてよい．F_0 は波形と船の大きさできまるが p は縦揺，上下動では波と船との相対速度でかわってくる．すなわち一つの波の山から，次の山に遭遇するまでのいわゆる“出会周期” T_e は次式であたえられる．

$$T_e=\lambda/|v\pm C|=\frac{2\pi}{p}\text{func.}(\lambda,\ v) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

但し v は船速であって－符号は船と波の進行速度が同

一の場合（追波）である．追波では T_e は大きくなる．

(9) のような外力が働くときの (4) の解はよくしられたように減衰する自由動揺と，p なる circular frequency をもった強制動揺との和になり，十分時間がたてば後者のみが残る．その値は

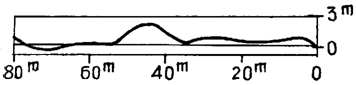
$$\theta=\frac{F_0}{\sqrt{(\nu^2-p^2)^2+(2hp)^2}}\cos(pt-\varepsilon)\cdots\cdots\cdots(11)$$

$$\varepsilon=\tan^{-1}\frac{2hp}{\nu^2-p^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

となる．振幅 $\Theta=F_0/\sqrt{(v^2-p^2)^2+(2hp)^2}$ は $\nu=p$（共振）のとき最大値をとる．θ の自乗平均は $\Theta^2/2$ となる．

不規則な動揺（I）

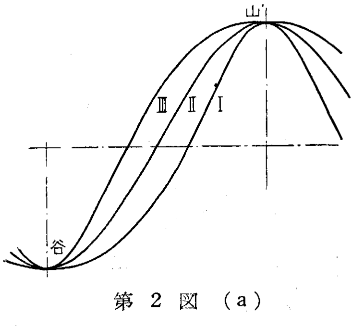
船が洋上で遭遇する波は上に考えたような規則的なものではない．たとえば第1図に示したのは，日聖丸船上でステレオ撮影によって得られた波形の一例であるが，この波の峯は決して長くは続かない．幾つもの方向に進む波が重なつたようで，到る所に小山のような波の起伏がならんだ状態である．主な波がほとんど真正面からきている時に日聖丸ではかなりの動揺を記録しているのは，このためといわれる．



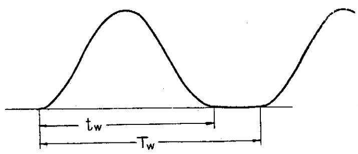
第 1 図　大洋波の一例

このような海の様相をどのように数式化すべきであろうか．いちばん簡単なのは多数の資料をもとにして (9) 式の F_0, p を適当に一箇だけ代表的に定めることである．現在の船型水槽の設備で模型試験を行うには結局この方法による以外ない．ただ現在までは観察の結果得られた波長，波高等をそのまま対応する F_0, p にあてはめる以外に方法がなく，実際の状態との対応を調べることはごく稀であつた．第1図をみると，たとえ観測時の波長，波高（周期については比較的よい観測ができる）が良い精度であつても，それを (9) の形にもってゆくことは誤差の因になることがわかる．

今少しこれを一般化して，f の波形は任意でただ周期は一定値をとるものと考えると，この時の周波数を p として，f は p, $2p$, $3p$, ………を周期とする円函数の和であらわされることは，周知の通りで，この方向から波形（実際の波の形そのものでなく外力 f の波形）の sine 曲線からの変化による影響を知ることができる．たとえば，第2図(a)のI，II，III曲線は波の山の部分が漸次ふえる時の影響を与える模型と考えられる．またそれぞれは sine 状（周期 tw）の波が平坦部をへだてて種々な周期 Tw でくるような模型（第2図b）も考えられる．

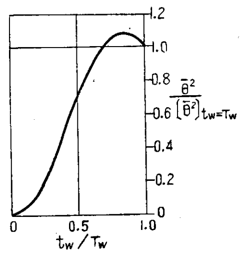


第 2 図　(a)



第 2 図　(b)

この考え方ではいずれにしても出てくる結果は (11) 式と同様な形の項の和となり，強制動揺だけが残ってくる．第2図 (b) の波形を sine wave と平坦部とからなるものとして，tw/Tw を種々にかえ，振幅の自乗平均を求めると第3図に示すような結果が得られる．図では波形が一定である場合，tw/Tw が1よりやや小さい所で最大の振幅の生ずることがみられるが，これは有効な峻度がこの辺で最大になることを意味する．なおこの曲線の形は減衰係数 h や Tuning factor p/ν にあまりよらない．図では同調時，$\dfrac{2h}{\nu}=0.5$ の結果を示す．$\overline{\theta}^2$ はかなり変化するが．θ について考えるとかなり波形が歪んでも結果はあまりかわらない．この方法は顕著なウネリが存在するような時には有効であるかもしれない．なお上のような一定周期外力のとき後述のスペクトル密度 $S(f)$ は不連続な分布を示し，



第 3 図

$$S(f)=a_n{}^2T,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\cdots$$

$$T\text{ は周期},\quad f=\frac{n}{T}\cdots\cdots(13)$$

a_n は外力 f の Fourier cosine 係数である．（$S(f)$ の f は frequency の意味に用いた．）

以上の考え方においては波の不規則性を適当な変形された規則波に置き変えたが，何を適当とすべきかには根拠がない．次に述べる自己相関函数を利用する方法は，資料さえ得られれば，機械的に整理することによって外力の性質を統計的に知ることができる．

不規則な動揺（II）

不規則な波の様相をそのままあらわす一つの方法として，その自己相関函数 $R(\tau)$ またはそのスペクトル密度 $S(f)$ を用いることができる．(4) 式の f に対して R, S は次のように定義される．

$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)f(t+\tau)dt\quad\cdots\cdots\cdots(14)$$

$$S(f)=4\int_0^\infty R(\tau)\cos 2\pi f\tau d\tau==\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left|B(f)\right|^2$$

$$\text{ただし}\quad B(f)=\int_{-T}^{T}f(t)e^{-2\pi ift}dt\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

海洋波の与える外力 f について得られる R, S 等は厳密には time の函数であるが，その変化の進度はゆるやかであると考えられる．

実際には波の観測から各瞬間の f を求めることは，は

なはだ困難であってここでも，これにふれようとは思わない．規則波の場合については，たとえば Weinblum[1] は Pitching, Heaving に対し次の形を与えている．

$$f_P=\rho g\vartheta_m J_y \Psi\left(\frac{\lambda}{L}\right)\sin w_e t \quad\cdots\cdots(16)$$

$$f_H=\rho g r_m AE\left(\frac{\lambda}{L}\right)\cos w_e t \quad\cdots\cdots(17)$$

ρ は密度，g は重力加速度，J_y は y 軸のまわりの水線面積の慣性モーメント，Ψ，E は $\frac{\lambda}{L}$ の函数，λ, L はそれぞれ波長，船長，$w_e=\frac{2\pi}{Te}$，$\vartheta_m=\frac{2\pi r_m}{\lambda}$，$r_m$ は波高の½をあらわす．一般には任意の点の自由表面の高さを，静水面より計って r とするとき

$$f_H \doteqdot 2\rho g\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} r y_s dx \quad\cdots\cdots(18)$$

$$f_P \doteqdot 2\rho g\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} r x y_s dx \quad\cdots\cdots(19)$$

y_s は点 x における水線面の巾の ½ である．船の全長にわたって r すなわち波のプロファイルが刻々記録されていれば，$f(t)$ を (18), (19) で求めることはできる．いずれにせよ不規則成分があれば，R，S はそれに応じて規則波の時とは異った様相を呈する．(9) 式で示される規則的な外力に対しては

$$R(\tau)=\frac{F_0^2}{2}\cos p\tau \quad\cdots\cdots(20)$$

$$S(f)=a_n^2 T$$

すなわち外力と同じ周期の cosine 函数が得られる．

さて (15) 式のようなスペクトル密度の強制外力が与えられるとき，船体は一種の Filter の役をなし，その運動としてあらわれる振動は次のスペクトル密度をもつ．

$$S_s(f)=F^2 S(f) \quad\cdots\cdots(21)$$

ここに
$$F=|(i\omega)^2+2hi\omega+\nu^2|^{-1}$$
$$=\{(\nu^2-\omega^2)^2+(2h\omega)^2\}^{-1} \quad\cdots\cdots(22)$$

ただし $\omega=2\pi f$ である．

S から R を求めることは次の関係 (23) で得られ，振巾の大きさ θ^2 は，(24) で与えられる．

$$R_s(\tau)=\int_0^\infty S_s(f)\cos 2\pi f\tau\, df \quad\cdots\cdots(23)$$

$$\overline{\theta^2}=R_s(0)=\int_0^\infty S_s(f)df \quad\cdots\cdots(24)$$

外力が (9) 式で与えられるときは $S(f)$ は $f=\frac{1}{T}$ においてのみ有限であって，このとき

$$\overline{\theta_R}^2=\frac{F_0^2}{2}\{(\nu^2-p^2)^2+(2\pi p)^2\}^{-1}$$

これは (11) 式の結果にほかならない．外力 f が不規則であると，τ を増すにつれて互の関係がうすくなり，$R(\tau)$ は絶対値において減少すると考えられる．

例えば本誌 1953 年 8 月号の速報に高橋教授の報告した市川大橋橋面の凸凹についての $R(\tau)$ はその一例である．この例に適用された形に $R(\tau)$ を模式的に表わして

$$R(\tau)=Re^{-\alpha\tau}\cos\beta\tau \quad\cdots\cdots(25)$$

と仮定する α，β は定数であり，$R=R(0)$ は外力の自乗平均を表わす，$\alpha(0\sim\infty)$ が大きいことは不規則性のつよいことを示す．(25) に対して

$$S(f)=2R\alpha\varphi \quad\cdots\cdots(26)$$

$$\varphi=\{\alpha^2+(\beta+2\pi f)^2\}^{-1}+\{\alpha^2+(\beta-2\pi f)^2\}^{-1} \quad(27)$$

$S(f)$ は $f\doteqdot\beta/2\pi$ において極大を示し，$S(0)=4R\alpha/\alpha^2+\beta^2$, $S(\infty)\to 0$ となる．つまり β によってスペクトル密度最大の位置が指定される．さらに $R_s(\tau)$ を求めると

$$\left.\begin{aligned}R_s(\tau)&=\int_0^\infty S_s(f)\cos 2\pi f\tau\, df\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty S(f)\,F^2\cos\omega\tau\, d\omega\\&=\frac{1}{\pi}(R\alpha\Psi)\\ \text{ただし}\quad \Psi(\tau)&=\int_0^\infty\frac{\varphi\cos\tau\omega\, d\omega}{(\nu^2-\omega^2)^2+(2h\omega)^2}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(28)$$

Ψ の積分は $h\gtrless\nu$ に従って取扱いに差が出るが，普通 $h<\nu$ であって，このとき

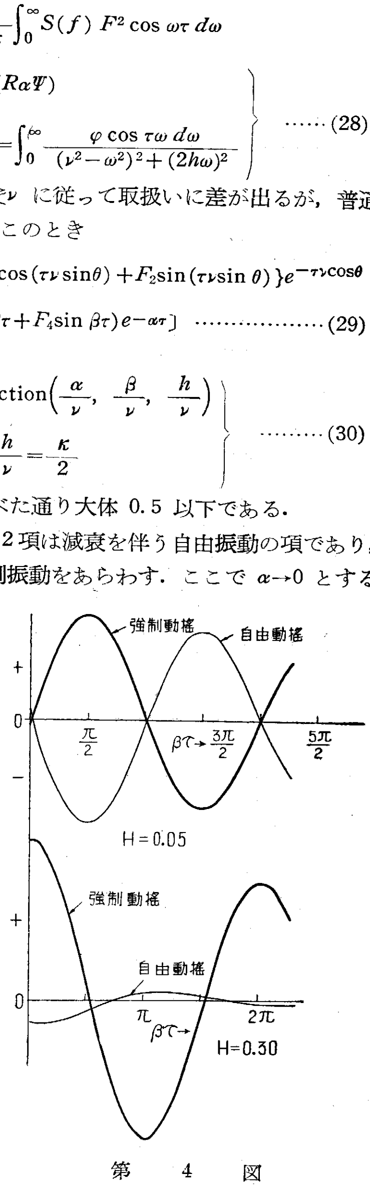
$$\Psi=\frac{\pi}{\nu^5}[\{F_1\cos(\tau\nu\sin\theta)+F_2\sin(\tau\nu\sin\theta)\}e^{-\tau\nu\cos\theta}$$
$$+(F_3\cos\beta\tau+F_4\sin\beta\tau)e^{-\alpha\tau}] \quad\cdots\cdots(29)$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}F_i&=\text{function}\left(\frac{\alpha}{\nu},\ \frac{\beta}{\nu},\ \frac{h}{\nu}\right)\\ \cos\theta&=\frac{h}{\nu}=\frac{\kappa}{2}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(30)$$

κ は最初に述べた通り大体 0.5 以下である．

(29)式の第 1，2 項は減衰を伴う自由振動の項であり，第 3，4 項は強制振動をあらわす．ここで $\alpha\to 0$ とすると F_3 のみが α^{-1} の項を有して (28) 式の R_3 はこれにもとづく項のみで表わされる．すなわち規則波では自由振動は結局減衰してしまうが，不規則波ではつぎつぎに異なる周期で振動が励起されて継続した効果をもたらす．



第　4　図

$F_i(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ の大小と，$h=\nu\cos\theta$ と α との関係で R_s は種々の形をあらわすが，h の小さいときと，大きい時の差をしらべると次のような結果がえられる．(第 1 表)

ここで $A=\alpha/\nu=0.05$, $B=\beta/\nu=1.0$ とし，$H=\cos\theta$ を 0.05 および 0.3 とした．第4図はこれから Ψ の自由，強制両成分を図示したものである．

$$\overline{\theta^2}=R_s(0)=\frac{R\alpha\Psi(0)}{\pi}$$

で $\Psi(0)$ にきいてくるのは F_1 と F_3 である，$H=0.05$ と 0.3 について $|F_1/F_3|$ を A, B の種々の値に対して求めると第2表に示すようになるが，この値は自由振動成分と強制振動成分との割合を示すものと考えられる．

第 1 表

H	F_1	F_2	F_3	F_4
.05	2503	−39940	−1499	$\fallingdotseq F_2$
.30	−7.75	−5.51	56.71	5.77

第 2 表　$\left|\frac{F_1}{F_3}\right|$

H	A	B 0.8	1.0	1.2
.05	.05	.862	1.67	1.29
	.1	2.10	2.01	4.11
	.2	10.6	4.15	72.8
.30	.05	.106	.137	.031
	.1	.207	.273	.091
	.2	.331	.534	.533

F_1 も F_3 も A, B, H の組合せで正負の値をとる $(F_1+F_3>0)$ ので F_3 が0の附近では大きな値があらわれているが，H が小さいときは自由動揺が優勢で，H が大きいときは逆に強制振動揺が極めて大きい点は，実船の観測結果によくあっている．

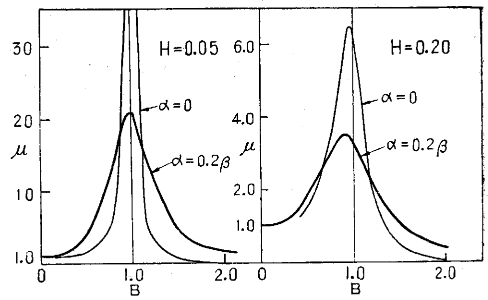
α の値は推定が困難であるが，かりに Pitching の場合 $h\gg\alpha$ と考えると (29) の自由動揺の項を τ の大きな値に対して無視することができる．R_s の観測値から β を視察によって決めれば，α は近似的に定められる．日聖丸の実験結果から得られた α(1/sec) と，これを波の円周波数 $\beta_w=\frac{2\pi}{Tw}$ で割った値および α/ν を次表に示す．β_w は観測値をそのまま用いた．また $\nu\fallingdotseq\frac{2\pi}{7.2}(1/s)$ とした．

第 3 表

実験番号	56	57	80	89	93	96
α	.10	.10	.040	.028	.019	.043
α/β_w	.15	.11	.064	.045	.030	.096
α/ν	.12	.12	.05	.03	.02	.05

この値はきわめてラフなものであるが，大体の α の大きさを示すものと思われる．〔本誌 Vol. 6, No. 6 の速報に報じた値は解析に誤があった．〕観測結果をみると $R_s(\tau)$ が急激に減少するものも多くあり，α が大きいと思われるが，計算にのせるには精度不足であった．

α の影響を示す計算例として，(28) 式における $R=$ const として，種々の $B=\beta/\nu$ (Tuning Factor) における $\overline{\theta^2}$ を $\alpha=0$ と $\alpha=0.20\beta$ について求めた．具体的に船の縦揺で考えると停止している船に波長の長い程傾斜のゆるやかな種々の波長の波があたる場合にあたる．$H=0.05$ と 0.20 について無次元の $\mu=\frac{\overline{\theta^2}\nu^4}{R}$ を第5図に示した．



第 5 図　α の影響

不規則性の影響は $B=1.0$ の附近で著しく，H が小さい時に特に甚だしい．H が大きい時は，同調の近くを除くと不規則波によって振幅は増すが，実際上は変らない程度である．

日聖丸において，船速 (9.9節)，波高 (3.2m) を一定に保ち，波長を 100～200 m に変化した情況に対応する模型実験を行つて縦揺角を求めている．出会周期は波長約140m のとき船の固有周期に一致する．模型試験と実船観測の結果とをくらべると，波長が約120m 以下では観測値がはるかに大きく，波長が長くなると逆に観測値が小さくなる．この実験に対応するような計算を(28)式を使って行ってみると，観測値と実験値との比として次の値を得る．

第 4 表

波長 m	100	120	128*	140	160	180	200
$\sqrt{\overline{\theta^2}}$の比	1.05	0.86	0.81	0.77	0.80	0.85	0.91

*128 m は日聖丸の長さ

ただし $H=0.20$, $\alpha=0.2\beta_w$, $\beta_w=\sqrt{\frac{2\pi g}{\lambda}}$ を仮定した．

また R の λ による変化は Weinblum の報告[2]を参照し，α によって R が変化せぬものとしてある．第4表は，定性的には日聖丸で得られた結果に合っているが，実際の差はこれよりはるかに大きい．この原因は(25)式の不備，α の変化，船速の変化，R と α との関連性等によるものと思われる．

結　　語

以上不規性波中の動揺の取扱について一つの試をのべ若干の計算を示したが，船体運動の解析にこれを適用するためにはやはり実際の波高の連続的な観測値が多数必要になる．北斗丸において，当所の高橋助教授が水位計を考案して船側のプロファイルをとることに成功したが，これが船の長さ方向に充分の数だけ備えられて，同時連続記録が得られれば大いに有効であると思われる．

終りにスペクトル密度等の方法は，前記高橋教授の市川大橋橋面の解析にヒントを得たもので，ここに感謝の意を表わすともとに，御叱正を願うものである．

(1954. 10. 14)

文　　献

1) Weinblum, G. and M. St. Denis; "On the Motions of Ships at Sea." Trans. S. N. A. & M. E. Vol. 58, 1950.
2) 同上