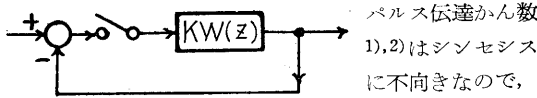


# パルス伝達かん数の根軌跡

森 政 弘

第 1 図のようなサンプリング制御系の取扱いに用いる



第 1 図 サンプリング制御系

Evans<sup>3),4)</sup>が提案した根軌跡法をパルス伝達かん数に拡張した。これによるとサンプリング制御系の取扱いが幾分容易になる。

パルス伝達かん数の根軌跡をえがくのに利用する法則は連続系根軌跡で成り立つ法則<sup>3),4),5)</sup>と同じであり、安定判別、過渡応答などの判定規程は下記のように  $s$  面で連続系軌跡に対するものを  $z = e^{sT}$  で  $z$  面に写像したものとなる。またダンピング判定条件ではパルス伝達かん数の周期性のため  $s$  面に  $z$  面に幾重にも写像されるが、 $s$  の虚数部の  $-j\pi \sim +j\pi$  に対応する範囲についてだけ動作するように設計することが hidden instability をとり除くことになる。以上が研究結果として結論される。

第 1 図で系のパルス伝達かん数を  $W(z)$  とし

$$1 + KW(z) = 0$$

の根  $z_i$  がゲイン定数  $K=0 \sim \infty$  に対して  $z$  面上にえがく軌跡をパルス伝達かん数根軌跡 ( $z$  軌跡) と定義する。これに対し  $s$  面上の連続系根軌跡を  $s$  軌跡とよぶ。

### ① $z$ 軌跡をえがくに用いる法則

連続系伝達かん数  $s$  はの有理かん数。パルス伝達かん数は  $z (z = e^{sT}, T: \text{サンプリング周期})$  の有理かん数で形式上はまったく同一だから、 $z$  軌跡は  $s$  軌跡をえがくに用いるのと<sup>3),4),5)</sup>同じ法則でえがくことができる。

### ② 安定条件

一般にパルス伝達かん数の極が、原点を中心とする単位円内であればそのパルス系は安定であり、単位円外にあれば不安定である。第 1 図の閉ループパルス伝達かん数は

$$KW(z)/(1+KW(z))$$

だから  $1+KW(z)=0$  の根が単位円内にあることが安定条件になる。

### ③ 過渡応答

(a) 根の位置と応答の形 単位ステップ  $z/z-1$  に対する閉ループの出力 sequence  $w_k$  は<sup>6)</sup>

$$w_k = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{K(z-o_1)(z-o_2)\cdots(z-z_n)}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_m)} z^{-k-1} dz$$

$$= \{A_1\gamma_1^k + A_2\gamma_2^k + \cdots\} + \{B_1\eta_1^k \sin k\theta + C_1\eta_1^k \cos k\theta_1 + \cdots\}$$

ただし  $z_i$ : 根,  $o_i$ : 零点,  $k$ : 正の整数,

$A_i, B_i, C_i$ : 定数,  $\gamma_i, \eta_i$ :  $z_i$  から定まる定数

$m \geq n$ .  $z_i$  は実数か一對の共やく複素数

この式より  $k$  の増大にともなう  $w_k$  の変化をしらべ次の結果が出た。

- 一つの正の実根から → 一つの非周期変化
- 単位円内複素共やく根 } から → 一つの減衰振動  
または負の実根
- 単位円内正の実軸からの分岐点 → 臨界減衰点
- 被積分項分母に  $z-1$  がのこると → オフセット

(b) 25%ダンピング条件 出力を近似的に余弦波的と考え、 $w_k$  をそのサンプル値と見る。

一對の共やく根からの出力 sequence は

$$w_k = 2|z_i|^k |R_i| \cos(k\theta_i + \varphi_i)$$

ただし  $|z_i|$ : 根の絶対値,  $R_i$ : その根についての留数

$\theta_i$ :  $z_i$  の偏角,  $\varphi_i$ :  $R_i$  の偏角

$k$  が 0 より次第に増し,  $k=2\pi/\theta_i$  のとき  $w_{k=2\pi/\theta_i}$  が  $w_{k=0}$  の  $1/4$  (25%) になる条件は

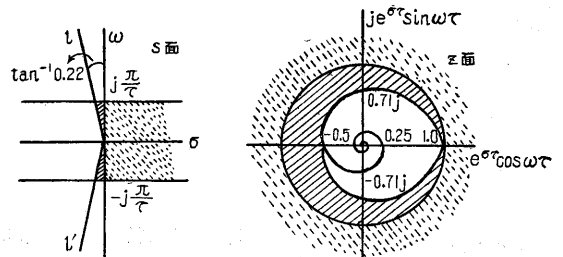
$$|q_i| = (1/4)^{\theta_i/2\pi}$$

この軌跡は第 2 図 a の対数ら線になる。根がこのうず上にあれば 25% ダンピング条件を満す。

ここで hidden instable な状態を許さなければ,  $\theta_i > \pi$  の部分は考える必要がなく, 結局第 2 図 (a) のハート形が 25% がダンピング条件である。

### ④ $s$ 面と $z$ 面の対応

②の安定条件, ③, (a) の各条件および ③, (b) の 25% ダンピング条件は,  $s$  面上  $z$  軌跡に対する諸条件と  $z = e^{sT}$  の写像関係があることが研究結果より明らかとなっている。(第 2 図参照)



b)  $s$  軌跡 20% ダンピング条件 ( $l, l'$ ) (a)  $z$  軌跡 25% ダンピング条件 (ハート形)

第 2 図  $s$  面  $z$  面の対応  $z = e^{sT}, s = \sigma + j\omega$

以上の諸関係を利用すればサンプリング動作も連続動作と同程度の容易さで、シンセシス、アナリシスすることができる。(1954. 8. 30)

### 文 献

- 1) H. M. James, N. R. Nichols, R. S. Phillips, Theory of Servomechanisms, (1947), 231, McGraw-Hill
- 2) R. H. Barker, Proc. IEE. 99, IV, 4 (1952)-12, 302
- 3) W. R. Evans, Trans. AIEE, 67 (1948), 547
- 4) W. R. Evans, Trans. AIEE, 69 (1950), 66
- 5) V. C. M. Yeh, ASME Paper 53-F-7
- 6) D. Lawden, G. H. Smith, A. E. Bailey; A. Tustim, Automatic and manual Control, (1952), 380, Butterworth