

1. ま え が き

微分解析機 (Differential Analyzer) はよく知られているように、主として微分方程式の解を求めめるために作られた計算機械で、理工学の方野に有力な研究手段を提供している。生産技術研究所では機械式高精度大型微分解析機の試作研究を微分解析機委員会を中心として多方面の専門分野の人々の助言をもとにして行ってきたが、その一部を完成し現在すでに実用され多方面の多くの問題を取扱ってきている。すでに本誌(1)にその原理、規模の一部を発表してあるが、ここではその後の発展をかんたんにのべ、応用の方を主として述べたい。構造の詳細はまた別の機会にゆずり、微分解析機がどのような問題を取扱えるかを利用者がかんたんに見通しが得られる程度に説明したい。紙面が少いためにこの目的を得ることすらなかなか困難であるが、幾分なりとも読者の理解の助けになれば筆者等の幸である。

本研究の微分解析機は理工学研究所(2)において完成した積分機 4 台を有する機械をもとにしてより高い精度と、規模、取扱の容易さ、計算速度の速いことをねらって作られたもので、将来積分機を 20 台迄増設できるように考慮して設計されている。現在の機械の容量は第 1 表に示される。

第 1 表 微分解析機部品数 (1954 年 7 月現在)

積 分 機	4
入 力 卓	3
(二変数の函数を入れることが可能出力卓としても用いられる)	
出 力 卓	1
加 算 機	5
カ ウ ン タ ー	3
ギ ャ	(1:1) 30 (2:5) 6
	(1:2) 30 (2:3) 2

本試作研究の性質はすでに完成した部分が次期の改良拡張の母体となる。したがって現在の機械をできるだけ使用して実用化し、その間にその結果を研究して次期計画の資料とすることと、一方多くの計算の要望にこたえるという二つの相反する求要をみたさなければならない

微分解析機の応用

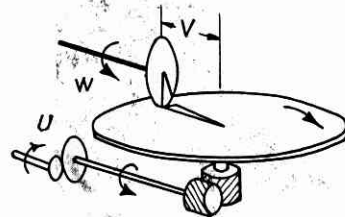
渡 辺 勝・三井田純一

ため、機械の使用にかなりの無理がある。したがって計算の要求に直ちに応ぜられない場合がかなりあるが機械の進歩発展のためにできるだけ多くの計算に接することが望ましいと思はれるので、多方面の計算を持参されることを希望する。

2. 微分解析機の原理、構造の概要

微分解析機の原理をかんたんにのべる。方程式の中に現われてくる変数はすべて軸の回転角であらわされ、機械を構成する基本的要素は、積分機、入力卓 (方程式の中にある定数でない係数を入れる装置)、連結装置及び解を記録する出力卓である。積分機の原理構造は第 1 図及び第 2 図を参照されたい。

入力卓 (第 5 図) はたとえば与えられた函数 $F(x)$ を入れた場合セクションペーパーの上に横軸に x 、縦軸に $F(x)$ をとって曲線をかき、これを x 軸により動くキャリッジにはりつける。拡大レンズがつねに曲線上

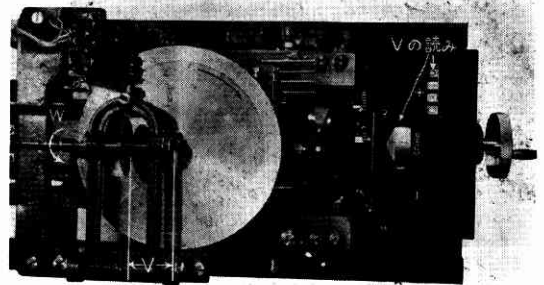


$$dW = \frac{1}{K} \cdot v dU$$

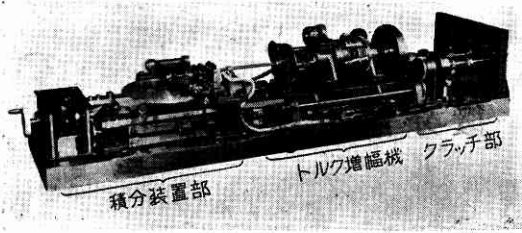
K は積分機常数と呼ばれる定数である。

従って $W = \frac{1}{K} \int v dU$ が得られる。

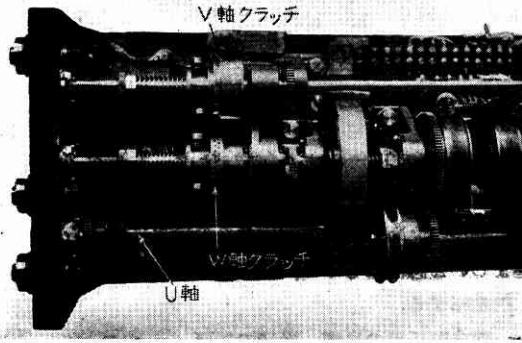
第 1 図 積分機の原理



第 2 図 積分機 (積分装置) 第 1 図の原理図を参照



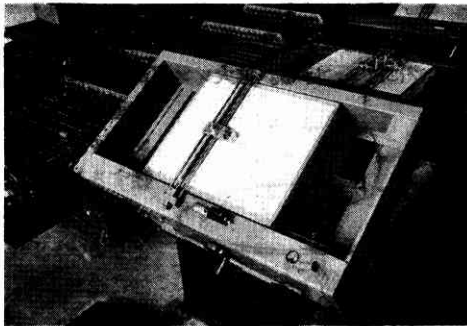
第3図 積分機の全景



積分機と連結装置との間にクラッチがあつて運転中以外は電磁石により結合が外れる。

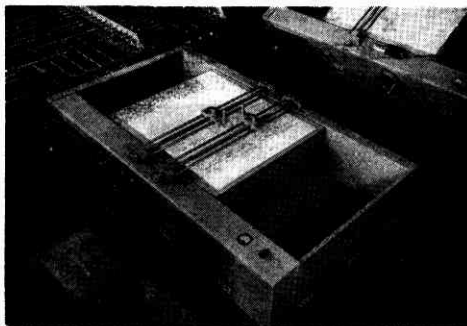
第4図 積分機のクラッチ部

出力卓(第6図)は解を記録する装置であるから計算には直接関与しない。構造は入力卓に似ているが、追従用のレンズの代りに記録装置(鉛筆またはボールペンが自由にとりつけられる)がつけられて解を曲線の形で紙上に記録する。



曲線を拡大レンズにより追従して、その函数を機械に導入する。

第5図 入力卓



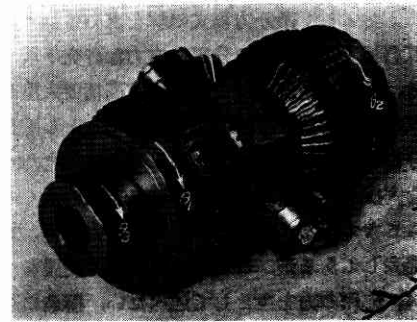
解をグラフの形に記録する。同時に2本の解を記録できる。

第6図 出力卓



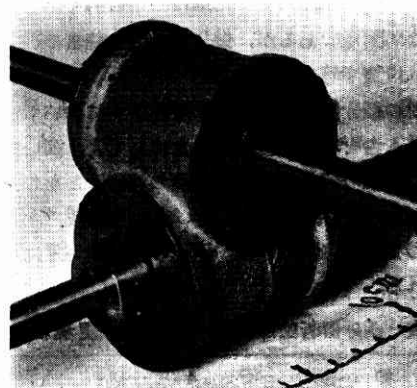
ギヤボックスにより任意のパスシャフトと任意のクロスシャフトを自由に連結し得る。スタフシャフトにスパーギヤを入れて求めるギヤ比を作り、加算機もここに挿入する。カウンタは任意の位置におくことができ、軸の回転数を読むことができる。

第7図 連結装置



$$\theta_a = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \text{ となる}$$

第8図 加算機

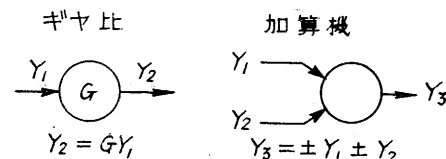
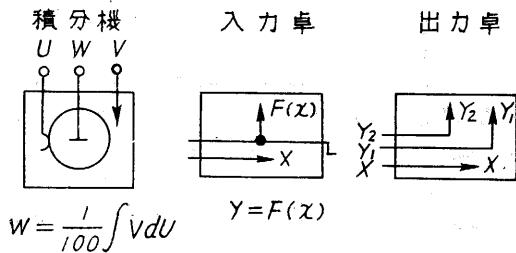


第9図 ギヤボックス

連結装置(全景図及び第7図参照)は上下二段にならんだ多数の軸(相隣る軸は互に等間隔に配列されている)によって隣の軸と任意のギヤ比によって連結され、或はまた必要に応じて加算機(第8図)を入れることによって二軸の回転角の和または差を第三軸から取出することができる。積分機、入力卓、出力卓はクロスシャフトに直結されているから、パスシャフトにギヤボックス(第9図)によってつながれる。

3. 微分解析機による方程式の解法及び記号について
方程式を実際に機械で解く準備過程は三つの段階に分

れる。その第 1 段階は与えられた方程式を機械で容易に操作できるように変形する。第 2 段階はこれらの形をもとにして、記号を用いて概念図いわゆるブロックダイアグラム (以下 B. D. と略記する) に相当するものを作る。これができるると第 3 段階として実際の変数の値の変域、符号等を考慮に入れて、スケールファクター、ギャ比、積分機常数等を含めた式を導く。実際にはこの間に起りやすい誤りを除くために統一した記号により殆んど機械的に行われる。これらの式からスケールファクター、ギャ比等を具体的に決定し、機械の結合を詳細に記述した結線図を作りあげる。この図面をもとにして機械の実際の結線を行う。前に述べたように本文の目的からして、第一第二の過程を次に簡単に述べることにとどめよう。



第 10 図 微分解析機各ユニットの記号

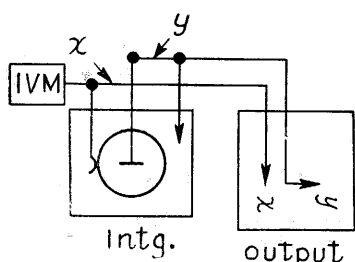
第 10 図に現在実用している記号をかかげる。今これらを用いて一つの実例を示そう。今次の微分方程式:

$$dy/dx = y \quad \dots\dots\dots(3.1)$$

を解くとする。微分解析機では、積分機を用いて微分方程式を積分によって解くのであるから、(3.1) 式を次の形にする。

$$y \leftarrow \int y dx \quad \dots\dots\dots(3.2)$$

(3.2) 式の積分を積分機で行うとすれば、左辺の y は積分機から出てくる量 (いわば Source に相当する、かんたんのため今後 (S) と略記する)、一方右辺にある積分される量は外から積分機に入ってくる量 (Sink, 以下 (I) と略記) である。したがって積分機の U -軸を x に



第 11 図 $dy/dx = y$ を解く結線図

つなぎ、 W -軸が y をあらわすとして、これを V -軸につなげば (3.1) 式を解く B. D. として第 11 図を得る。ここに x は

独立変数をあらはす (S) であり、実際には独立変数軸モーター (I. V. M.) により駆動される。解を記録したい場合には出力卓の横軸を x に、縦軸を y につなげばグラフの形で y が x の函数として記録される。

4. 微分解析機の精度

(4.1) 積分機の精度、積分機の (第 1 図参照) U, V, W の諸軸の間に成立する関係は

$$W = \frac{1}{G \cdot R} \int V dU \quad \dots\dots\dots(4.1.1)$$

ここに第 1 図における K を $K = G \cdot R$ としてある。 R は積分機ローラーの半径である。積分機の精度をしらべる場合には V を一定にしておき U を一定量まわしてそのときの W の回転角を読みその誤差をしらべる。したがって $V = (\text{定数})$ とすると

$$W = \frac{1}{G \cdot R} V \cdot U \quad \dots\dots\dots(4.1.4)$$

となる。今 R (ローラー半径) 及び V (送りねちの送りの長さ) の工作上の誤差を $\Delta R, \Delta V$ としそれにもとづく W の誤差を ΔW とすると、

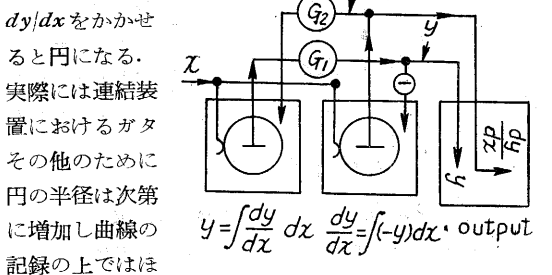
$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\Delta V}{V} - \frac{\Delta R}{R} \quad \dots\dots\dots(4.1.3)$$

$\Delta W/W$ を相対誤差という。したがってこの値は右辺の量、つまり工作上の精度によってきまってしまう。現在の積分機の具体的数値を示すと $\Delta R \leq 5 \times 10^{-3} \text{mm}$, $R = 30 \text{mm}$ したがって $\Delta R/R \leq 1.6 \times 10^{-4}$, $\Delta V \leq 3 \times 10^{-3} \text{mm}$, $V > 10 \text{mm}$ として $\Delta V/V \leq 3 \times 10^{-4}$ となり $V > 10$ の範囲で用うる限り相対誤差は $3 \times 10^{-4} = 0.03\%$ 以下となる。実際に V の更に大きな所を用いれば相対誤差ははるかに小さくなる。実験の結果によると相対誤差は 3×10^{-4} の程度である。更に精度を向上することは可能であるが、そのためには、送りねちの温度による伸縮、すなわち ΔV の誤差を小さくするため機械を恒温に保つとか、組立上の精度に注意を払う必要がある。

(4.2) 次に積分機による総合精度を調べる方法に Circle Test という方法を行う。この方法は次の方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y \quad \dots\dots\dots(4.2.1)$$

を適当な初期条件のもとで解き (第 12 図) 出力卓で横軸に y , 縦軸に、



第 12 図 $\frac{d^2y}{dx^2} = -y$ (circle test) の結線図

とんどわからないが、ラセン状になる。この詳細の読みはカウンターによって読む。この半径の増加の状態を測定したものが第2表である。

第2表 Circle test の結果及び G. E. 社の微分解析機との比較

振幅	平均振幅増加(1サイクル)	平均振幅増加率(%)	ギヤ比 (G ₁ , G ₂)	G. E. 社の平均振幅増加率
90	0.12	0.13	1	0.23%
90	0.06	0.07	1/4	0.20%
90	0.03	0.033	1/16	0.14%

5. 微分解析機の実用例

微分解析機によって今迄解かれた問題や現在計画されている問題をあげて具体的な実例を提供することにしよう。機械的微分解析機はその一種であるが、Analog Computer の中に Electronic Analog Computer (3) という電子管を用いた計算機があるが、これはここにのべた機械式微分解析機に比べて精度はやや落ちるが計算速度が著しく速いことと式の中のパラメーター等を変えながら解の様子をしらべることができるので、目的に応じてはこの種の計算機によるのがよい問題があることをつけて加えておこう。

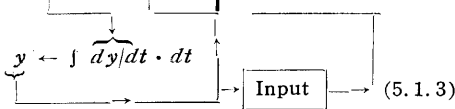
(5.1) 非線型振動方程式 (同期電動機の振動)

方程式は次のようである。

$$d^2y/dt^2 + k dy/dt + \sin y = A \quad (5.1.1)$$

ここに k, A は定数である。この式を積分して

$$dy/dt \leftarrow -ky + \int (A - \sin y) dt \quad (5.1.2)$$



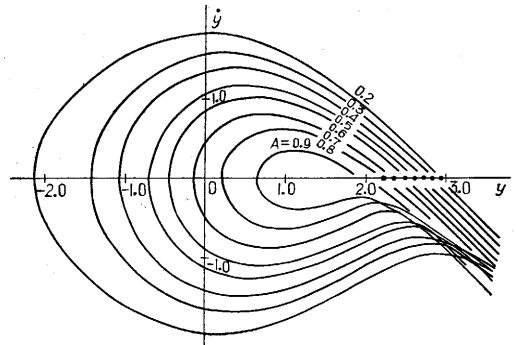
(5.1.2), (5.1.3) の積分はそれぞれ各一台の積分機を用い、 $\sin y$ は入力卓一台によって作り出す。結線図を示すと第13図の如くなる。実際に得られた結果の一例を第14図に示す。ここで出力卓の横軸に y を縦軸に \dot{y} をつないである。今迄文献(4)に理論的に取扱われていたものが、正確な数値解が得られた点で興味深い。

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k \frac{dy}{dt} + \sin y = a$$

の結線図 第13図

(5.2) コバルト原子のハートレ場の計算(5)

ある境界条件を満足する方程式の中の固有値を求めた



$$\frac{d^2y}{dt^2} + k \frac{dy}{dt} + \sin y = A \text{ の解の一例}$$

第14図

問題の一例を示す。波動函数 y を満足する方程式は

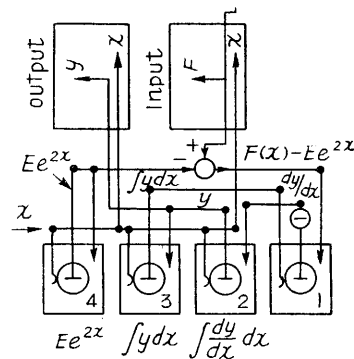
$$\frac{d^2y}{dx^2} + [F(x) - Ee^{2x} + c]y = 0 \quad (5.2.1)$$

ここに $F(x)$ は与えられた x の函数で原子のポテンシャル場に関係した函数で、 c は定数、 E はエネルギーの値で、未知のパラメーターである。 $x=0$ と $x=\infty$ で $y=0$ なる境界条件を満足するように E の値と y を定める。実際に解を求めるには E を適当に与えて x の小さい値から出発して解を求め、条件を満足するまで E をかえて解を繰返し求めることになる。(5.2.1) を積分して適当に式を変形して、

$$\frac{dy}{dx} = - \int [F(x) - Ee^{2x} + c] dy dx \quad (5.2.2)$$

$$y = \int \frac{dy}{dx} dx \quad (5.2.3)$$

(5.2.2) 式で3台の積分機を用いてある。一台は e^{2x} を自動的に作り出すのに用いる。これは(3.1)式を解いて求まる。第15図で No. 4 の積分機を用いている。 E を



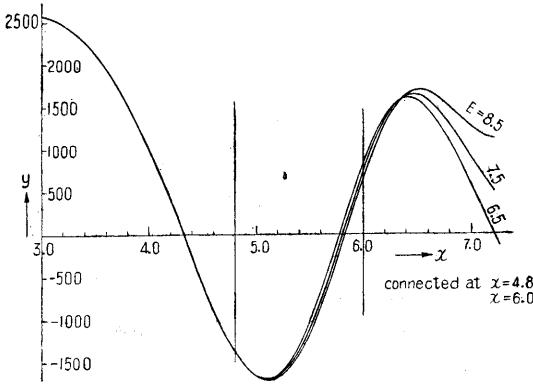
$$\frac{d^2y}{dx^2} + [F(x) - Ee^{2x} + c]y = 0$$

の結線図

第15図

が求まるからあと一台の積分機 (No. 2) で積分をして y を求めている。 $F(x)$ は入力卓一台を用いて機械に入れる。詳細は第15図を参照されたい。

実際にはスケールファクターの関係その他から、一度に全領域の解を求めることは不可能でもちろん数区域に x を区切って次々に解いて、つないで行く方法がとられる。第 16 図はその解の一例であって全部同一スケールに直されている。



$\frac{d^2y}{dx^2} + (F + Ee^{2x} + c)y = 0$ の解の一例

第 16 図

(5.3) ベータトロンの電子軌道の計算

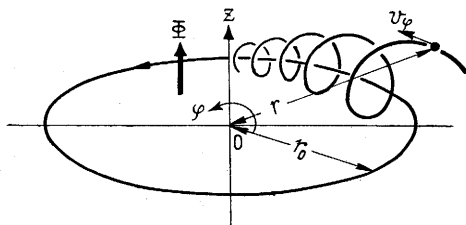
当研究所内で工業的応用を目的とするベータトロンの作る準備研究が行われているが、その際に設計した磁場の中で電子が安定に軌道を走るか、それとも不安定で途中から外にはじき出されるか、を見きわめるために電子の軌道を計算する必要がおこってくる。今迄計算の準備が行われただけでまだ実際には解かれていないが、かなり複雑な方程式を解く実例としてここにあげることにする。今電子の座標を第 17 図の如くとすると電子の基礎運動方程式は次の如くなる。(もちろん空間荷、と相電対論の影響は考慮しない)

$$m\dot{r} = m \frac{v_\varphi^2}{r} + \frac{e}{c} v_\varphi B_{mz}(r, z) \omega t \quad (5.3.1)$$

$$m\dot{z} = -\frac{e}{c} v_\varphi B_{mr}(r, z) \omega t \quad (5.3.2)$$

$$m\dot{v}_\varphi = \frac{e\omega}{c} \left\{ \frac{1}{2\pi r} \Phi_m(r, z) + (\dot{r} B_{mz}(r, z) - \dot{z} B_{mr}(r, z)) t \right\} \quad (5.3.3)$$

ここに $B_{mz}(r, z)$ 及び $B_{mr}(r, z)$ は磁束密度の z, r 成分の時間による項を落したものであり、 Φ_m は時間による項をおとした磁



第 17 図 ベータトロンの電子の座標

束である。磁束及磁束密度の振動の時間による項 $\sin \omega t$ は ωt とおいてあるが、これは十分よい近似である。 m, e, c は定数である。ここでかんたんなため一定の係数を落して考える、これは微分解析機の B. D. を画く上に一般性を失わないからである。したがって次の諸式を得る。

$$\dot{r} = \frac{v_\varphi^2}{r} + v_\varphi B_{mz}(r, z) t, \quad (5.3.1')$$

$$\dot{z} = -v_\varphi B_{mr}(r, z) t, \quad (5.3.2')$$

$$\dot{v}_\varphi = \frac{1}{r} \Phi_m(r, z) + \{\dot{r} B_{mz}(r, z) - \dot{z} B_{mr}(r, z)\} t \quad (5.3.3')$$

ここで入力卓から入れなければならないのは $B_{mz}(r, z)$ $B_{mr}(r, z)$, $\frac{1}{r} \Phi_m(r, z)$ であるが t^2 も入力卓で入ると便利である。今 $2Gz = \int B_{mz}(r, z) dt(t^2)$,

$$2G_r = \int B_{mr}(r, z) dt(t^2), \quad F(r, z) = \frac{1}{r} \Phi_m(r, z) \quad \text{と定義して}$$

(5.3.1') (5.3.2'), (5.3.3') を積分して

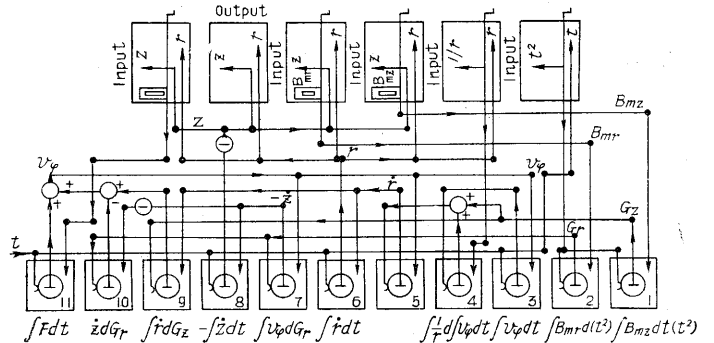
$$r = \int dt \left\{ v_\varphi dt \left[\int \frac{1}{r} dt \int v_\varphi dt + Gz \right] \right\} \quad (5.3.4)$$

$$Z = -\int dt \int v_\varphi dG_r \quad (5.3.5)$$

$$v_\varphi = \int F(r, z) dt + \int \dot{r} dG_z - \int \dot{z} dG_r \quad (5.3.6)$$

なる式をうる。これをもとにし B. D. をかくと第 18 図を得る。少し複雑になるがたんに念に図をたどってもらえばわかると思う。 G_z, G_r を作るために積分機を各一台用いる式を積分するのに全部で 11 台の積分機を必要とし、入力卓で $B_{mz}, B_{mr}, t^2, F, 1/r$ を入れるために 5 台用いている。 B_{mz}, B_{mr} は電解槽によって求めた図形を用いる。

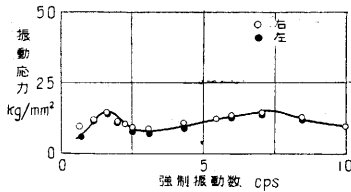
以上のべた所は積分機の数及び入力卓の数が十分



第 18 図 ベータトロンの電子軌道を求める結線図

あると仮定して基礎式を忠実に解くことを考えたが、実際には現在の容量ではこの式を解くことは不可能なので、 r, z に関係する項を平均な安定軌道 $r=r_0, z=0$ の近傍で展開し、その第一項のみを残し $r=r_0+\rho, z=z$ において新しい変数 ρ, z についてとき、基礎式の第三式の第二項、第三項を省略し v_φ が t に比例するとして $v_\varphi = \alpha \cdot t$ として解く。こうすれば積分機台数を 4 台に減らすことができ、現在の状態で解くことは可能である。

たや走行中の動的な応力の予想などが問題になるが、そのためにはばねだけの要素のほかに自動車の振動を考えた設計⁽⁶⁾が必要になる。たとえば当所の試験合による第7図に示した場合のばねの振動応力と強制振動数との関係を示すと第9図のようになるが、もしショックアブソーバがなければこの応力はかなり大きくなり、とくに共振点では大きな値となる。



第9図

ショックアブソーバの大部分のものは、油圧式でその減衰力が振動速度に比例する形式のものが多い。また減衰力の与えかたとしていわゆる両効きのものと片効きのものがある。国産車では片効きのものを用いているが、外国車では両効きのものがかなり多く、懸架ばねが軟くなるほど両効きのショックアブソーバを使用する傾向のようである。ショックアブソーバの設計には第6図の振動系でダッシュポットは粘性減衰(粘性減衰係数 c)を与えるものと考え、すでに述べたばね上質量の加速度がいろいろな強制振動数に対してなるべく小さな値をとるように

$$k_B/k_T = m_B/(m_T + 2m_B),$$

$$c = \sqrt{2m_B k_T m_B / (m_T + 2m_B)}$$

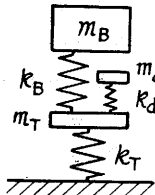
と選ぶとよい。現状ではこの中のばね定数比に対する条件をみたくタイヤを求めることが困難なことがあるので、そのような場合には

$$c = \sqrt{m_B k_B} \sqrt{1 - (k_B/k_T)(m_T/m_B)}$$

と採ればよいようである。最近シトロエン2cvでは動吸振器を用いているが、動吸振器を普通の懸架方式に適用することの可否は別として、もし第5b図のような振動系のばね下質量に第10図のような動吸振器(質量 m_d 、ばね定数 k_d)を取り付けるとすれば、動吸振器の固有振動数を近似的に

$$k_d/m_d = (k_B + k_T)/m_T$$

となるようにするとよい。こうするとはじめに述べた2次共振点ではばね上ばね下質量とも加速度は0になる。しかし動吸振器を取り付けたために新しい共振点がはじめの2次共



第10図

(7ページから続く)

この方法による解法が現在進められている。紙数の関係でこれらの詳細の記述は割愛することにする。

6. むすび

以上生産技術研究所に建設された高精度大型微分解析機についてかんたんにその構造、原理、得られた精度、主として実際の問題への応用に関連してのべた。精度の調査結果は所期の計画を満足するものが得られ、米国のG.E.社の研究所の微分解析機の精度についての発表と比較すると、より精度の高いものが得られた。ここに紹介した微分解析機は、大部分生産技術研究所中間試作研

振点をはさんで生ずる(共振点のはじめの1次共振点近くと合計3個になる)ので、動吸振器だけではじめの2次共振点の近くだけが改良されるに過ぎない。したがってこの考えを応用するにも何らかの減衰がどこかに必要になる。

5. 路面の性質と自動車の振動

これまで路面の形状として、一つだけの段があるとか正弦波状の起伏がつづくなどの単純な形状を仮定してきているが、いうまでもなく実際の路面の形状はきわめて不規則でありまた複雑である。もしもこの不規則な路面の形状を何らかの理論である程度まで的確にとらえることができれば、自動車や道路の問題を取り扱う上に大に寄与するであろう。自動車が路面を走行するときは不規則な起伏によって車体加振されるが、この状況は不規則なシグナルを受けながら動作するサーボ系と似ているので、サーボ機構の手法をこの問題に適用することが考えられる。こんな見地からもし路面の起伏状況を統計的にスペクトル密度によって表現することができれば、このスペクトル密度と自動車の振動特性及び走行速度とから走行時の上下振動を推定することができ、また車体の振動を測定すると逆に路面の状況を推定することも可能となろう。(6)

6. むすび

当所の自動車試験合を中心とする自動車の研究について簡単に紹介してみた。これらの詳細は当所の報告として纏める予定である。終りにこの研究に関して当所の中間試験研究費及び文部省科学試験研究費の援助を受けていること、試験合について国鉄加藤一郎氏、試験車についてトヨタ自動車工業株式会社、実験に関して自動車技術会及び鉄研車両運動研究室の御好意を得ていることに対して厚く感謝の意を表す。(1954.7.12)

文 献

- (1) R. N. Janeway, S. A. E., J., 8/1948
- (2) 自動車技術会乗用車性能試験, 1954
- (3) 高橋, 平尾, 互理, 生産研究, 4-7, 7/1952
同 上 機械学会誌, 55-403, 8/1952
- (4) Auto. Engr., 7/1953
互理, 自動車技術, 7-11~12, 12/1953
- (5) 互理, 機械学会誌, 56-410, 3/1953
互理, 機械学会誌, 57-423, 4/1954
- (6) 高橋, 自動車技術, 7-11~12, 12/1953
高橋, 第3回 NCTAM 論文集, 1954

究費と、その他文部省科学試験研究費によって作られた。設計製作は微分解析機委員会と有限会社東京計測機製作所、及び当研究所試作工場の協力によるものである。すでに実用の域に入っているが、なお二、三の点に関して今後更に改良の余地が残されている。また積分機を若干増設する計画も進められている。(29.7.10)

文 献

- (1) 三井田: 生産研究, 昭和27年4月
- (2) 渡辺, 三井田: 理工研報告, 3, (1949), 4, (1949)
- (3) 野村: 生産研究, 27年4月, 28年5月
- (4) たとえばJ. Stoker: Non-Linear Vibrations, P.70 (Interscience Publishers, Inc, New York)
- (5) 理学部小谷研究室によって行われたもの