

土の三軸試験と塑性力学

星 埜 和

1. 土の力学の根本問題

土の力学は近年異常なほどめざましい発達を遂げ、その内容は物理、化学、地質、水理の諸科学分野と密接なつながりを有し、工学上の応用範囲も著しく拡張されるに至っているが、その中心課題は、いぜん土が応力をうけ変形し破壊する現象を解明し力学の法則を立てることにある。

今日の土の力学は2の大きな支柱によって組み立てられているといつてよい。その1は弾性理論であり、他の1は破壊の極限における内部摩擦の法則である。前者はフックの法則に基いて弾性変形を弾性係数Eとポアソン比 ν の2常数によって理論化したものであり、後者は土の剪断試験による実験的事実をクーロンが粘着力Cと内部摩擦角 ϕ の2常数によって法則化したものであることは周知の通りである。

しかるに地盤支持力とか擁壁に加わる土圧のような土の力学の重要問題を解くに当って、地盤を構成する土あるいは壁の背後にある土が応力によって変形する状態を見ると当初はいくぶん弾性的であると見ることができても、応力が増すに伴って塑性的な性質が支配的になり局部的な破壊が発生して進行し、遂には全体的な安定を失って破壊を来すようになる。その間に応力と歪の関係は土体内の各点で異なった経過をたどり、しかも弾性から塑性へ、塑性から破壊に至るあらゆる中間の過渡的な状態を経ることは明かである。

このような弾性域を越えた土の力学的性質を追及しようとすると、今日までの土の力学は不完全で、ある場合には全く無力であるとさえいえるであろう。上に述べた2の大支柱も応力のかかり始めにおける弾性限界以下の部分と応力が終点に達し破壊を生ずる極限の部分の両極を支えているにすぎず、その中間領域は空白のままに放り出されている現状にある。

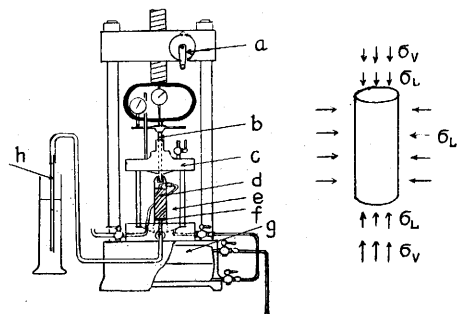
この巨大な空白を埋めため、弾性理論と破壊(降伏)の法則とを結びつけ、土の力学の基礎をもっと確固としたものにし、その土合の上にとって土の力学をさらに発展させたいというのが、著者の長い間の念願であって、戦前から直接剪断試験、一軸圧縮試験、圧密試験などの実験結果を参照して研究を進め、土の塑性変形と破壊に関して1の基本理論を組み立てたのである⁽¹⁾が、その実験的裏付けが不十分であったため1の仮説であるにとどまった。戦後になって各方面の援助と協力により3軸試

験機を試作し、各種の土について多数の実験を繰返すことができるようになったので、その結果を整理し、前に提案した基本理論と比較対照を行なったところ、両者の間にいくつかの一致点を見出すことができたのであるが同時に2、3の本質的な相違点があることも分った。これらの不一致を取り除いて導かれた新しい土の塑性理論は筋の通った原理から出発しており3軸試験結果を巧みに説明できるように思われるので、以下その概要を解説しよう。まず今まで行なってきた3軸試験について説明する。

2. 3軸試験の原理と方法

従来土の力学常数を決定する試験として一般に用いられてきた方法は、円筒供試体を軸方向に圧縮する一軸圧縮試験と剪断箱に詰めた試料を平面に沿って滑らせる直接剪断試験を主とし、これに引張り試験や圧密試験が併用されることがあるが、対象とする土は同一でも得られる常数は独立したもので相互の関係はほとんど明かでないばかりか、応力と歪の関係を追求する手がかりを得るのには適していなかった。これらの欠点を除き、土の力学常数をより合理的に決定できる望みのある方法として新しく登場してきたのが3軸試験であって、戦後各国とも競ってこの研究に努力しているが、多くの研究すべき余地がまだ残されており、実験結果の満足すべき解析方法もまだ明かにされていない状態である。

3軸試験の原理は極めて簡単なものであって、土の円筒供試体の周囲に任意の液圧を加えながら軸方向に圧縮して軸方向の変形、体積変化、極限強度などを測定しこれから土の力学常数を決定するのである。(第1図) 実験



a. 載荷装置 b. 加圧用ピストン c. 上蓋
d. 試料 e. 圧縮室 f. 底板
g. グリセリタンク h. 容積変化測定用ビューレット

第 1 図

技術 においていくつかの難点があるのであるが、今日では追々解決できるようになっている。3 軸試験の特色は応力状態が既知であってしかも色々に変えることができる点にあり、加えて体積変化の測定、供試体内部における空隙圧の影響を観測できることなどがあげられる。なおこの装置を応用して圧密試験、透水試験、振り試験などを行なうことも可能で、その一部はすでに試みられている。

当研究所で試作した 3 軸試験機は標準型と小型の 2 種類ある。標準型の供試体は径 70mm、高 200mm で、装置は実験室内に設置される。小型は供試体の径が 35mm、高さ 80mm で、装置の全量 60kg で容器とともに可搬式となっており、ボーリング現場などに持ちこみ、コアをその場で試験することができる。側圧はグリセリン溶液を用い、いずれも最大 7 kg/cm² の設計であるが、3 kg/cm² 以下を常用する。軸圧力は歪リングで測りその容量は 30kg/cm² 程度である。供試体に薄いゴムスリーブを被せ、上下端に多孔質支持板をおき加圧ヘッドにかたく結んでその外側から側圧を加える。供試体の体積変化は下端の多孔板を通じて排出される水と空気

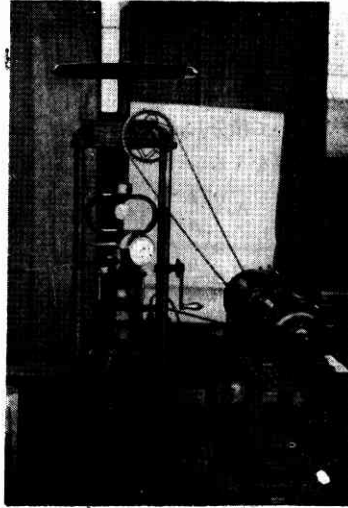


写真 1 標準型 3 軸試験機

の量を測定して求める。このように供試体の含有する水と空気を自由に排出させる型の試験を圧密排水型の試験 (Consolidated-drained test) といい、これに対して自由な排水を妨げ水と空気間に空隙圧を発生させる方法を非圧密非排水型の試験 (Unconsolidated-undrained test) といっている。当所では今まで前者の試験だけを行ってきたのである

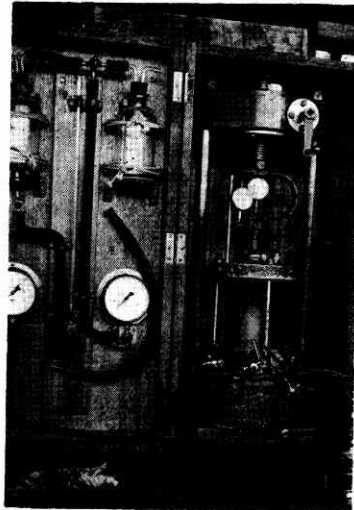


写真 2 小型 3 軸試験機

が、昭和 28 年度中間試験研究費の援助をうけて、後者の試験設備を整えることができた。空隙圧が土の極限強度や変形に及ぼす影響は極めて大きく破壊の危険を著しく高めることが予想されるので、後者の型の試験が重要性を帯びてきたし、また 2 の型の試験相互の関連性についても研究が必要である。

これまでの試験に用いた供試体は砂利、砂のような粗粒材料からかなり軟弱な粘土質材料まで 80 種以上に達し、ボーリング孔または試掘孔から採取した自然状態のサンプルと一たんかきまぜた土を突き固めて成型しなおしたサンプルとがある。一つの試料について 3 個以上の供試体を準備し、側圧をかえて試験をくりかえし、得た結果を整理して、著者の理論と対比して力学常数を決定することができた。

次に著者の塑性理論の概要を述べよう。

3. 塑性理論の概要

金属材料の塑性理論において有名な von Mises-Hencky の降伏条件は次のように表わされている。(2)

$$\tau_m = \text{一定} \quad (1)$$

ここに τ_m は微小正八面体の表面に働らく剪断応力で、3 主応力を $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ とすれば

$$\tau_m = \frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2} \quad (2)$$

土の場合は内部摩擦角 ϕ が 0 でないから降伏条件式 (1) の右辺は一定ではなく、

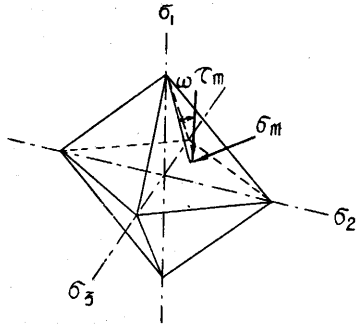
$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (3)$$

の函数として表わされなければならない。式 (1) の条件は剪断エネルギーが降伏時に一定の値をとることを意味すると説明されているが、著者は物体に作用する諸力によるエネルギーは、極限における降伏ないしは破壊を支配するだけでなく、そこに至る道程における変形をも支配すると考えて理論を組み立てた。すなわち土においては一律な圧縮 (静水圧) をうける時体積が収縮して固まり変形しにくくなるが、引張り応力や剪断応力をうける時は変形が増大し遂に破壊することは実験的に知られた事実であるから、この事実を説明しよう、一律な圧縮によるエネルギーに比例して変形係数が増大し、剪断または引張りによるエネルギーによって変形係数が減少するような仮定をした。理論の組立てを順を追って説明すると、まず 3 主応力を次のように表わす。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_m + \sqrt{2} \cos \omega \cdot \tau_m \\ \sigma_2 &= \sigma_m + \sqrt{2} \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \omega \right) \cdot \tau_m \\ \sigma_3 &= \sigma_m + \sqrt{2} \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \omega \right) \cdot \tau_m \end{aligned} \right\} (4)$$

式中 σ_m は式 (3) で、 τ_m は式 (2) で与えられ、 ω は微小正

八面体の表面において τ_m が第1主軸の投影線となす角であって (第2図), 次式で与えられる.



第 2 図

$$\cos 3\omega = \frac{\sqrt{2}}{\tau_m^3} (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m) \quad (5)$$

これに対し主歪の微小変化は次のように表わされる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\epsilon_1}{1-\epsilon_2} (\doteq d\epsilon_2) &= \frac{d\sigma_m}{3V} + \sqrt{2} \cos \omega \frac{d\tau_m}{3U} \\ \frac{d\epsilon_2}{1-\epsilon_2} (\doteq d\epsilon_2) &= \frac{d\sigma_m}{3V} + \sqrt{2} \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \omega\right) \frac{d\tau_m}{3U} \\ \frac{d\epsilon_3}{1-\epsilon_3} (\doteq d\epsilon_3) &= \frac{d\sigma_m}{3V} + \sqrt{2} \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \omega\right) \frac{d\tau_m}{3U} \end{aligned} \right\} (6)$$

ここに V 及び U は変形係数であって, 圧縮応力及び圧縮歪みをそれぞれ正とする.

応力の変化に伴うエネルギーの変化は, (4), (6)式を用いると次式で与えられる.

$$\begin{aligned} dA &= \sigma_1 d\epsilon_1 + \sigma_2 d\epsilon_2 + \sigma_3 d\epsilon_3 \\ &= \frac{\sigma_m}{V} d\sigma_m + \frac{\tau_m}{U} d\tau_m \end{aligned} \quad (7)$$

応力変化が微小な間は V, U が V_0, U_0 に等しくなりかつ弾性理論に一致するとすれば, 次の関係が得られる.

$$\left. \begin{aligned} V_0 &= \frac{E}{3(1-2\nu)} \\ U_0 &= \frac{E}{3(1+\nu)} \end{aligned} \right\} (8)$$

次に2の変形係数 V, U をエネルギー従って応力の函数として表わそうとするのであるが, 第1に様な圧縮を受ける場合を考えると,

$$\tau_m = 0, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_m$$

したがって式(7)から

$$dA_N = \frac{\sigma_m}{V} d\sigma_m$$

ここで変形係数 V がエネルギー A_N に比例して増減するものとして

$$V = \frac{V_0}{A_N} A_N$$

とおいて積分し, $\sigma_m = 0$ において $A_N = 0, \sigma_m = \sigma_0$ において $A_N = A_{N0}$ とすると, 次の関係をうる.

$$A_N = \frac{\sigma_0}{V_0} \sigma_m, \quad V = \frac{V_0}{\sigma_0} \sigma_m \quad (9)$$

第2に純粋な剪断の場合を考えると $\sigma_m = \text{一定}$ となりしたがって, 式(7)から

$$dA_S = \frac{\tau_m}{U} d\tau_m$$

ここで変形係数 U は剪断抵抗エネルギー A_R とともに増し, 剪断エネルギー A_S がませば減少するものとして,

$$U = \frac{U_0}{A_{R0}} (A_R - A_S)$$

とおき,

$$\left. \begin{aligned} A_R &= \lambda^2 A_N \\ A_{R0} &= \lambda^2 A_{N0} \end{aligned} \right\} (10)$$

$$\text{かつ } U_0 = \mu^2 V_0 \quad (11)$$

とおいて積分し, $\tau_m = 0$ において $A_S = 0$ とすると次の関係をうる.

$$\left. \begin{aligned} A_S &= \frac{\lambda}{\mu} \frac{\sigma_0}{V_0} \left\{ \lambda \mu \sigma_m - \sqrt{(\lambda \mu \sigma_m)^2 - \tau_m^2} \right\} \\ U &= \frac{\mu V_0}{\lambda \sigma_0} \sqrt{(\lambda \mu \sigma_m)^2 - \tau_m^2} \end{aligned} \right\} (12)$$

式(11)から式(8)を用いると

$$\mu^2 = \frac{U_0}{V_0} = \frac{1-2\nu}{1+\nu} \quad (13)$$

第3に圧縮と剪断が同時におこる一般の場合には, エネルギーが応力の変化する経路の如何によらないで最終の応力状態だけからきまる値をとるという原理を適用すると, 全エネルギーは,

$$A = A_N + A_S$$

これに式(9)と(12)を代入すると

$$A = \frac{\sigma_0}{V_0} \left\{ (1+\lambda^2) \sigma_m - \frac{\lambda}{\mu} \sqrt{(\lambda \mu \sigma_m)^2 - \tau_m^2} \right\} \quad (14)$$

これから

$$dA = \frac{\partial A}{\partial \sigma_m} d\sigma_m + \frac{\partial A}{\partial \tau_m} d\tau_m$$

と, 式(4)とくらべて次の関係をうる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_m}{V} &= \frac{\partial A}{\partial \sigma_m} = \frac{\sigma_0}{V_0} \left\{ (1+\lambda^2) - \frac{\lambda}{\mu} \frac{(\lambda \mu)^2 \sigma_m}{\sqrt{(\lambda \mu \sigma_m)^2 - \tau_m^2}} \right\} \\ \frac{\tau_m}{U} &= \frac{\partial A}{\partial \tau_m} = \frac{\sigma_0}{V_0} \frac{\lambda}{\mu} \frac{\tau_m}{\sqrt{(\lambda \mu \sigma_m)^2 - \tau_m^2}} \end{aligned} \right\}$$

したがって V, U は次のように求められる.

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{V_0}{\sigma_0} \frac{\sigma_m \sqrt{(\lambda \mu \sigma_m)^2 - \tau_m^2}}{(1+\lambda^2) \sqrt{(\lambda \mu \sigma_m)^2 - \tau_m^2} - \lambda^2 \mu \sigma_m} \\ U &= \frac{V_0}{\sigma_0} \frac{\mu}{\lambda} \frac{\tau_m}{\sqrt{(\lambda \mu \sigma_m)^2 - \tau_m^2}} \end{aligned} \right\} (15)$$

σ_m と τ_m の関係が与えられ, かつ ω が不変な場合は

$$\left. \begin{aligned} e = 3\epsilon_m &= \int \frac{d\sigma_m}{V} = \frac{\sigma_0}{V_0} \left[(1+\lambda^2) \ln \sigma_m - \lambda^3 \mu \int \frac{d\sigma_m}{\sqrt{(\lambda \mu \sigma_m)^2 - \tau_m^2}} \right] + C \\ d = 3\delta_m &= \int \frac{d\tau_m}{U} = \frac{\sigma_0}{V_0} \frac{\lambda}{\mu} \int \frac{d\tau_m}{\sqrt{(\lambda \mu \sigma_m)^2 - \tau_m^2}} \end{aligned} \right\} (16)$$

を計算することができるから、主歪量はそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= 1 - \exp[-\epsilon_m - \sqrt{2} \cos \omega \cdot \delta_m] \\ &= \epsilon_m + \sqrt{2} \cos \omega \cdot \delta_m \\ \epsilon_2 &= 1 - \exp[-\epsilon_m - \sqrt{2} \cos(\frac{2\pi}{3} - \omega) \\ &\quad \cdot \delta_m] = \epsilon_m + \sqrt{2} \cos(\frac{2\pi}{3} - \omega) \cdot \delta_m \\ \epsilon_3 &= 1 - \exp[-\epsilon_m - \sqrt{2} \cos(\frac{2\pi}{3} + \omega) \\ &\quad \cdot \delta_m] = \epsilon_m + \sqrt{2} \cos(\frac{2\pi}{3} + \omega) \cdot \delta_m \end{aligned} \right\} (17)$$

土が降伏あるいは破壊する時の条件として、

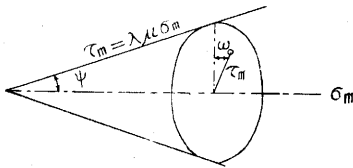
$$\frac{\partial A}{\partial \sigma_m} = -\infty, \quad \frac{\partial A}{\partial \tau_m} = \infty$$

とおくと、次の関係が得られる。

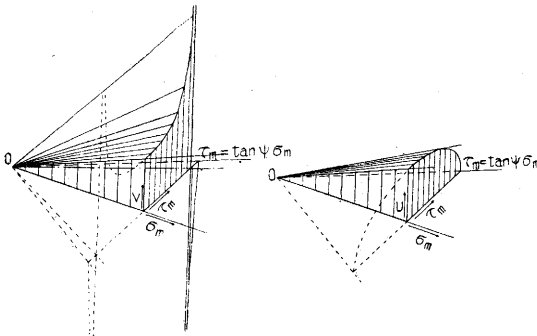
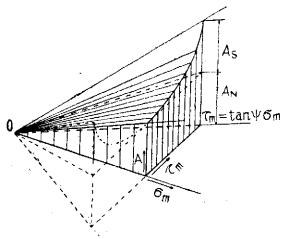
$$\tau_m = \lambda \mu \sigma_m \quad (18)$$

この関係は金属の降伏条件式(1)と異なり、右辺に σ_m がふくまれておるから、内部摩擦角が 0 でない土のような材料に適用できるものである。

今横軸に σ_m の値をとり、これと直交する平面上に τ_m の値をとり、基線となす角を ω とすると、すべての応力状態はこの空間上の 1 点に対応させて表わすことができる、式 (18) の降伏条件はこの空間において原点を通る円錐面で表わされる (第 3 図)。



第 3 図 降 伏 条 件



第 4 図

全エネルギー、及び 2 変形係数 V 、 U はこの空間において軸対称分布を示す (第 4 図)。

4. 3 軸試験へ理論の適用

側圧を一定に保って行なう圧密排水型の 3 軸試験では、側圧を δ_l 、上下圧を δ_v とすると

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \sigma_l + \sigma_v, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0 + \sigma_l$$

となるから、 $\omega = 0$ であり、かつ

$$\sigma_m = \sigma_0 + \sigma_l + \frac{\sigma_v}{3}$$

$$\tau_m = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_v$$

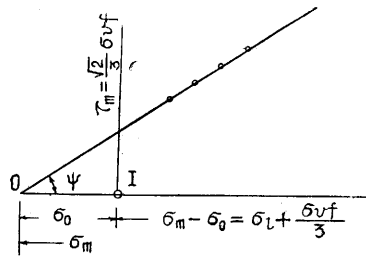
したがって降伏時の σ_{vf} を求め、降伏条件式 (18) に代入すると、

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{vf} = \lambda \mu \sigma_0 + \lambda \mu \left(\sigma_l + \frac{\sigma_{vf}}{3} \right)$$

をうるから、側圧 σ_l を 3 回以上かえて σ_{vf} を求め、

$\left(\sigma_l + \frac{\sigma_{vf}}{3} \right)$ に対して $\frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_{vf}$ をプロットして、第 5 図

のように直線を決定すると



第 5 図

$$\overline{OI} = \sigma_0, \quad \text{直線の勾配} = \lambda \mu = \sqrt{2} \alpha \quad (19)$$

が求められる。あるいは上式から、

$$\sigma_{vf} = \frac{3 \lambda \mu}{\sqrt{2} - \lambda \mu} (\sigma_0 + \sigma_l)$$

をうるから、 σ_l に対して直接 σ_{vf} をプロットし、第 6 図のように直線を決定すれば、

$$\overline{OI} = \sigma_0, \quad \text{直線の勾配} = m = \frac{3 \lambda \mu}{\sqrt{2} - \lambda \mu}$$

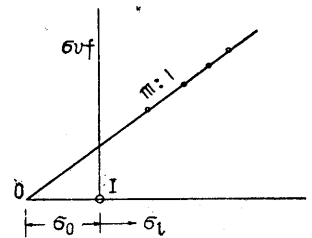
$$\therefore \lambda \mu = \sqrt{2} \alpha = \frac{\sqrt{2} m}{3 + m} \quad (20)$$

をうる。

次に側圧 σ_l を加えて一様な圧縮を行なう時(9)式から

$$V = \frac{V_0}{\sigma_0} \sigma_m$$

体積変化度 e は式(10)の第 1 式において $\tau_m = 0$ $\sigma_m = \sigma_0$ において $e = 0$ として



第 6 図

$$e = 3 \epsilon_m = \int \frac{d\sigma_m}{V} = \frac{\sigma_0}{V_0} \ln \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_0} \right)$$

$\sigma_m = \sigma_0 + \sigma_l$ であるから、

$$\xi = \frac{\sigma_l}{\sigma_0}, \quad \phi = \ln(1 + \xi) \quad (21)$$

とおけば上式から、

$$e = \frac{\sigma_0}{V_0} \phi \quad \therefore \frac{\sigma_0}{V_0} = \frac{e}{\phi} \quad (22)$$

実験から求まる e の値を、式(21)で計算した ϕ に対してプロットし(第7図)、得られる直線の勾配から(22)式の右辺が決定される。

終りに上下圧を加えた時の上下方向歪 ϵ_v と体積変化度 e_s を測定した結果から、

$$d = \frac{1}{\sqrt{2}} (3 \epsilon_v - e_s) \quad (23)$$

を求めておく。この関係は式(17)の第1式において

$$\epsilon_1 = \epsilon_v, \quad 3 \epsilon_m = e_s, \quad \omega = 0, \quad 3 \delta_m = d$$

とおけば得られる。 e_s は上下圧を加え始める時を原点とした体積変化量を原体積で割ったものである。

式(16)の第2式において

$$\xi = \frac{\sigma_v}{3(\sigma_0 + \sigma_l)} \quad (24)$$

とおき、したがって

$$\sigma_m = (1 + \xi)(\sigma_0 + \sigma_l)$$

$$\tau_m = \sqrt{2} \xi (\sigma_0 + \sigma_l)$$

として積分し、 $\xi = 0$ において $d = 0$ とし、かつ、式(19)または式(20)の α を用いて

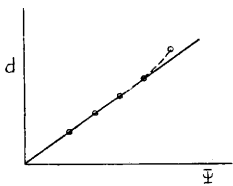
$$\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \left\{ \sin^{-1} \alpha - \sin^{-1} \left(\alpha - \frac{1-\alpha^2}{\alpha} \xi \right) \right\} \quad (25)$$

とおくと、結局、

$$d = \frac{\lambda^2}{\sqrt{2} \alpha} \frac{\sigma_0}{V_0} \psi$$

をうるから、これから λ を求めると

$$\lambda^2 = \sqrt{2} \alpha \frac{\left(\frac{d}{\psi} \right)}{\frac{\sigma_0}{V_0}} = \lambda \mu \frac{\left(\frac{d}{\psi} \right)}{\left(\frac{e}{\phi} \right)} \quad (26)$$



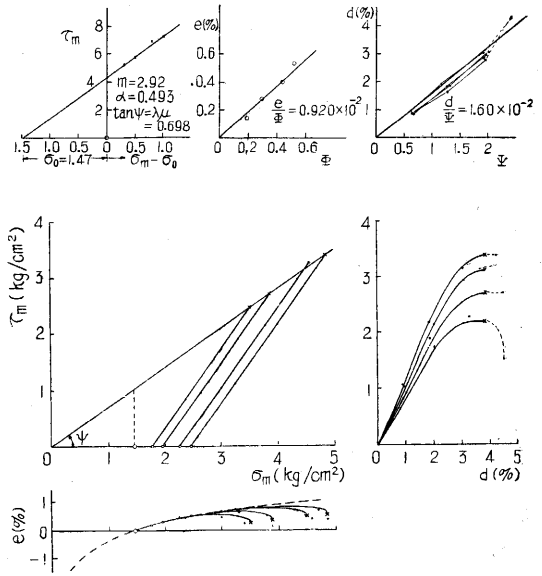
第 8 図

降伏条件から求めた α に対し ψ を式(25)で計算し、 ψ と d との関係プロットして(第8図)得た直線の勾配を求めると、上式右辺の分子を求めることができ、係数と分母は既知であるから λ を決定することができる。

以上で塑性変形と破壊を支配する力学常数をすべて決定することができたことになる。

このような理論的方法を3軸試験結果に適用して見る

と、少数の例外はあるが、一般によくその傾向を説明し、時には量的にはほぼ完全に一致する結果を得た。その1例を第9図に示しておいた。



第 9 図 3 軸試験結果の一例

5. 結 び

3軸試験の研究は、圧密排水型の試験についてようやく解決の糸口が見出されたにすぎず、今後非圧密非排水型の試験によって間隙圧の影響を追及しなければならず、さらに圧密透水現象や粘性流動、繰返し荷重の影響、動力学的現象など極めて重要かつ困難な問題を解決を待っている。またこの方法をアスファルト混合物のような舗装材料の安定性の判定に応用する研究も進められなければならない。

今までこの研究に各方面から強力な援助をうけることができたが、昭和28年度中間試験研究費の援助によりさらに上述の研究を推進するための設備が充実できたことは感謝に耐えない。実験の技術と実施については交通研究室の榎本、金子、鶴沢、長瀬の諸君の努力にまつ所が多かったことを記して深謝の意を表する。

文 献

- (1) 星壁和：土のような塑性材料の変形と破壊についての基礎理論，土木学会論文集第4号，昭一24，89—100頁
Hoshino, K.: A Fundamental Theory of Plastic Deformation and Breakage of Soils. Proc. Second. Intern. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng., Ie-10, Vol. I, pp. 93—100 (1948)
- (2) Hill, R.: The Mathematical Theory of Plasticity. 1950. 20頁参照。