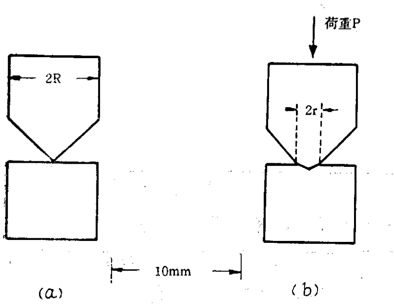
# 繰返し衝撃による円錐のつぶれ

鈴　木　寛　文

## ま　え　が　き

同一材質で作った円錐と，平盤を第1図aのように重ね，円錐の軸方向に力をかけると，第1図bのように円錐の尖端がつぶれると同時に平盤にくぼみ痕が残る。この種の塑性変形については既に研究が行われた[1)]。つぶれた部分の形状は，その半径$r$が円錐底部の半径$R$の約 ½ 以内のところでは荷重$P$の如何にかかわらず常に相似を保ち，$P=\alpha r^2$の関係が成立する。この場合$\alpha$はその材質についての常数であり，円錐頂角 $\theta$ の大きさには関係しないことが知られている[2)]。但し$\theta$が30°位に小さくなると，加圧方向と円錐軸とが僅かに違っても，円錐の先が曲るのでこの場合の変形機構と異っている。実用的には $\theta=90°$ にするのが便利である。以上の関係が成り立つための最も重要な条件は，円錐と平盤とが全く同一材質から作られていることであって，銅のように熱処理の影響が鋭敏に現われるものについては，一本の長い引き抜き丸棒の一方の端から円錐を，他の端から相手の平盤を作って組合せたような場合には塑性変形部分の形状も第1図bとは全く異なり，$r^2$ と $P$ とは比例しなくなる。しかし市販のアルミニウム棒，真鍮棒，軟鉄棒等では，円錐と平盤とが，一本の棒からならば，どの部分から切り取ったものを組合せても上記の関係は成立し，$\alpha$は同一棒からのものについては一定である。けれども，鉛，錫のように結晶粒の大きなものでは，つぶれた部分がきれいな円形とならないので測定が困難である。




第　1　図

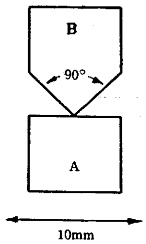
この関係を逆に利用して，未知の連続的荷重操作中における最大荷重値を簡単に求めることができる[2)]。これは従来の銅柱圧縮法と同じであるが，銅柱高さ減少と荷重との間の検定曲線を求めるのには，非常な手間がかかり，この円錐と平盤との方法では同一試験片の中から，場合によっては唯1回の検定によって上記の$\alpha$を求めておけばよいという利点がある。

円錐に加える力が，例えばアムスラー試験機で与えるときのように static である場合，何度か荷重を繰り返して与えても，それによって生ずる最後のつぶれの面積$a$は，それらの荷重の中の最大なものに相当する。もし繰返す荷重が等しければ，最後のつぶれの面積$a$は第1回目のものと同一に止まっている。又，かける圧力が液圧或は空気圧である場合には，昇圧速度が大で，且つそれを何回も繰返して与えても円錐のつぶれは，それら繰返し過程の最大圧力以上にはならない。ところが円錐の上から一定の重錘を落下させて衝撃する場合には，それを繰返えす度毎に$a$は大きくなる。

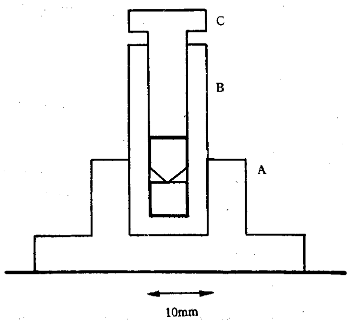
そこで，繰返し落下させたとき，この$a$の大きくなる様子を，同一重錘を同一高さからについて験べた結果を以下に報告する。

## 装置及び実験方法

試験片は，第2図に示したA，Bを1本のアルミニウム棒，エボナイト棒，或はハンダ（錫7，鉛3）から削り出したものである。円錐頂角は 90°，BのAと接する面は砥石で平面に磨いたものである。これを第3図に示すBなる真鍮製シリンダーに入れ，上からピストンCでおさえておく。衝撃を与える為の落錘はCの上に落下するようにした。中の円錐を出し入れするのに便利なようにBを机に固定したAに挿入する。落錘が落下の途中で横にそれないように三方から支柱でかこみ，その中を落下するようにした。




第2図



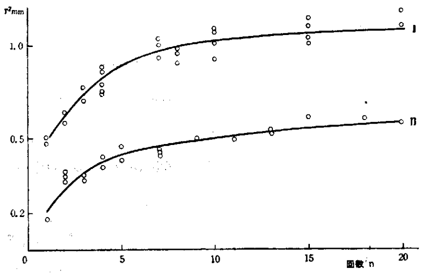

第　3　図

円錐のつぶれた部分を軸方向から見ると円形をしているが，多少ひずみもあるので，十字方向に2ケ所測り，これから平均直径2 $r$ を求めて，$r^2$ と落した回数 $n$ との関係を求めた。この場合一度平均直径を測定したものを再び組合せて，実験をつづければよいのであるが，完全に前と同じ状態に，円錐のつぶれた尖端を平盤のくぼみ

にあてることがむつかしいので，更に大きい衝撃回数のものについては同一の棒からとった他の試料について，改めて第1回の衝撃からはじめて行った。

## 実 験 結 果

上記の如くして，アルミニウム円錐について得られた結果を，各種の落錘重量，及び落差の組合せについてまとめたものを第4図～第7図に示す。第8図はハンダ円錐を，第9図はエボナイトをそれぞれ使用したものである。何れも，円錐の変形部分の面積は衝撃回数と共に，はじめは急激に，後は極めて緩やかに増加して行くことが認められる。




第4図 アルミニウム，落差10cm，落錘(Ⅰ)2000g，(Ⅱ)460g

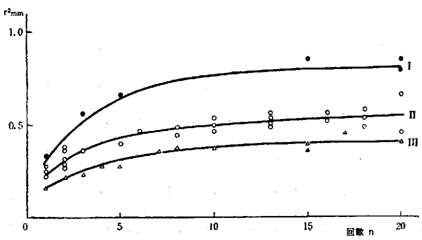
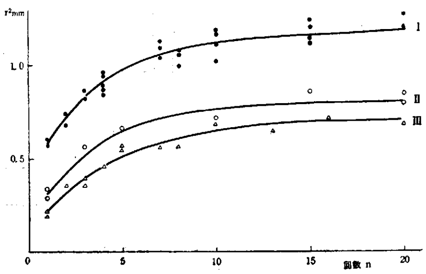
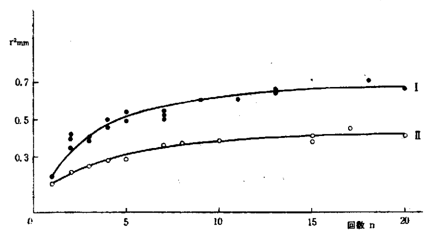


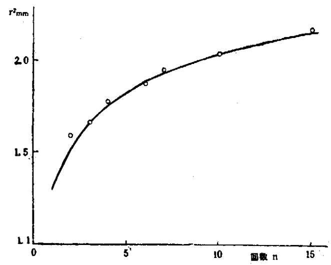

図5第 アルミニウム．落差5 cm．落錘(Ⅰ) 2000g，(Ⅱ) 1460g，(Ⅲ) 460g



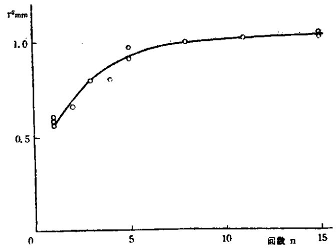

第6図 アルミニウム，落差（Ⅰ）10cm（Ⅱ）5 cm，（Ⅲ）4 cm，落錘 2000g




第7図 アルミニウム，落差（Ⅰ）10cm（Ⅱ）5 cm，落錘 460g




第8図 ハンダ，落差1 cm，落錘 2000g




第9図 エボナイト，落差5 cm，落錘 1.083g

## 考 察

この実験においては，一定速度を以て円錐に衝突する重錘を急激に停止させるための抗力の大部分は，円錐の変形によって与えられるものであり，いわばつぶれがクッションの役目をしているのである。従って，一定重錘を一定落差で落下させた場合でも，そのクッションの如何によって，すなわち円錐が，重錘落下直前に，どれだけ変形しているかによって，衝撃過程中の最大圧力は異なる筈である。重錘とピストン，ピストンと円錐底部との接触も当然問題になる筈であるが，その影響は，円錐のつぶれに比べれば無視できるものとして，第1回目の落錘による衝撃過程から考察しよう。

重錘及びピストンの質量をそれぞれ $m_1$，$m_2$ とし円錐の質量はそれに比べて無視しうるものとする。実際に使用したものは，$m_2$=30gr.，円錐質量は 1.5～3 gr である。更に $m_1$ が $m_2$ に衝突する瞬間の速度を $v_1$，その直後 $m_1$ と $m_2$ とは一体となって，$v_0=m_1v_1/(m_1+m_2)$ なる速度をもつものと仮定する。その後は，円錐変形部分の半径 r に対して絶えず $\alpha r^2$ の上向きの力が作用し始める。円錐頂角は 90° にとってあるから，衝突開始のときを時間の原点に，かつ重錘，ピストン系の重心Gの位置を座標の原点にとれば，Gに関する運動方程式は次のようになる。

(1) $$M\frac{d^2Z}{dt^2}=-\alpha Z^2+Mg$$ $M=m_1+m_2$，g，重力による加速度

ここで M・g の項は，極めて初期の状態を除けば $\alpha Z^2$ に比べて無視できるから，上式を解けば次の如くなる。

$$(2)\qquad \frac{dZ}{dt}=\left\{A-2\frac{\alpha}{M}\int_0^Z Z^2 dZ\right\}^{\frac{1}{2}} =\left\{A-\frac{2}{3}\frac{\alpha}{M}Z^3\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$t=0$，$Z=0$ では　$dZ/dt=v_0$　であるから

$$(3)\qquad \frac{dZ}{dt}=\left\{v_0^2-\frac{2}{3}\frac{\alpha}{M}Z^3\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Z は $dZ/dt=0$　になるときまで増加してゆく。すなわち，第１回の衝撃によってつぶれる面積の半径 $r_1$ は次のようになる。

$$(4)\qquad r_1=Z_1=\left(\frac{3}{2}\frac{v_0^2M}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}$$

このことは，衝突初期に待つ重錘，ピストン系の運動エネルギーの全部が，円錐の塑性変形に消費されるとしても簡単に説明することができる。すなわち，

$$(5)\qquad \frac{1}{2}Mv_0^2=\int_0^Z \alpha Z^2 dZ=\frac{1}{3}\alpha Z_1^3$$

次に，このようにして第１回の衝撃につづいて更に第２回目の衝撃を与える場合を考えよう。衝突のはじめにおける重錘，ピストン系に対する反抗力は $\alpha Z_1^2$ の大きさから出発することに注意して，前と同様な計算を行うと，つぶれの円の半径 $r_2$ は次のようになる。

$$(6)\qquad r_2=Z_2=2^{\frac{1}{3}}\left(\frac{3}{2}\frac{v_0^2M}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}$$

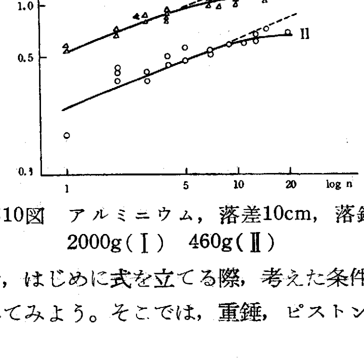
以下同様にして一般に $n$ 回目の衝撃で得られるつぶれの円の半径 $r_n$ は，

$$(7)\qquad r_n=n^{\frac{1}{3}}\left(\frac{3}{2}\frac{v_0^2M}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}$$

となる。或は，両辺を自乗して対数をとれば

$$(8)\qquad \log r^2{}_n=\frac{2}{3}\log n+\frac{2}{3}\log\frac{3v_0^2M}{2\alpha}$$

となる。そこで，アルミニウム円錐について得られた第４図Ｉ，IIの結果を両対数目盛に書き直してみると第10図の如くなる。すなわち，$n$ の小さいところでは上式の結果と大体うまく一致するが，$n$ が大きくなると喰いちがいが大きくなる。




第10図　アルミニウム，落差10cm，落錘 2000g(Ｉ)　460g(II)

そこで，はじめに式を立てる際，考えた条件をもう一度吟味してみよう。そこでは，重錘，ピストン系の運動エネルギＩの全部が円錐をつぶす仕事にのみ消費されたと仮定した。しかし，実際に重錘落下の状況を観察すると，多少の弾性変形のために重錘，ピストン共に，極く僅かであるが跳ね上る‘その高さは衝撃回数を増すほど大きくなることが観察される。跳ね上ったものは再び落下するが，それによって円錐のつぶれが更に増す分量は極めて僅かであって，エネルギーの大部分は磨擦，接触部における発熱等に費やされると考えてよいであろう。要するに，重錘，ピストン系の運動エネルギーは，円錐の塑性変形の外に，反跳のためにも使われる。その分量は恐らく，円錐材質の弾性係数E，及びその時の円錐のつぶれた部分の大きさの函数として定まるものであることが予想される。この函数形は，仮りにディメンシン解析の観点から想像して，$a$ を常数とすれば，$aEZ^3$ で与えられるものとする。このように考えると，第１回の衝撃過程については，前の (5) 式は，

$$(9)\qquad \frac{1}{2}Mv_0^2=\frac{1}{3}\alpha Z_1^3+\gamma Z_1^3 \qquad \gamma=aE,\quad 0<\frac{3\gamma}{\alpha}<1$$

と修正されるべきだと考えられる。同様に第２回の衝撃においては，

$$(10)\qquad \frac{1}{2}Mv_0^2=\frac{1}{3}\alpha(Z_2^3-Z_1^3)+\gamma Z^3{}_2$$

とすれば，

$$(11)\qquad r_2^3=Z_2^3=\frac{3Mv_0^2}{2\alpha}=\left\{\frac{1}{1+3\frac{\gamma}{\alpha}}+\frac{1}{\left(1+3\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2}\right\}$$

となり，更に一般に $n$ 回の衝撃による円錘のつぶれの大きさ $r_n$ は，

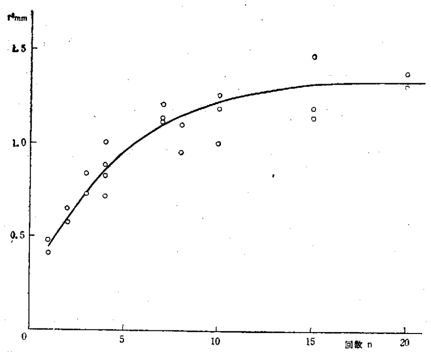
$$(12)\qquad r_n^3=\frac{3Mv_0^2}{2\alpha}\left\{\frac{1}{1+\varepsilon}+\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(1+\varepsilon)^n}\right\} =\frac{3Mv_0^2}{2\alpha}\left\{1-\frac{1}{(1+\varepsilon)^n}\right\} \qquad \varepsilon=3\frac{\gamma}{\alpha}=3\frac{aE}{\alpha}$$

となる。すなわち，$n$ が非常に大きくなれば，$r_n$ は一定値，$3Mv_0^2/2\alpha\varepsilon$　に漸近する。もし $\varepsilon$ が非常に小さい場合，すなわちEの小さな塑性物質の場合には，(12) 式は(7)式と一致する。

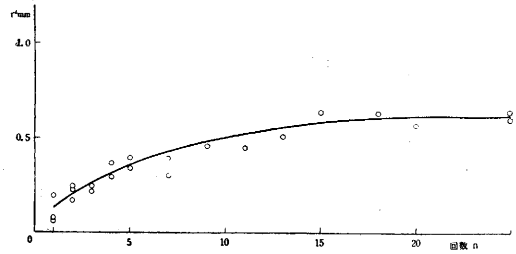
(12)式は又，A，Bを重錘，落差，円錐材質によって定まる常数とすれば，次のように書きかえられる。

$$(13)\qquad A-r_n^3=B^n$$

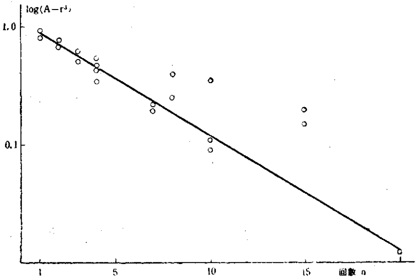
そこで，第４図Ｉの場合について，$r^3\sim n$ 図表に書き直してみると第11図の如くなる。$n\to\infty$ における $r_n^3$ の漸近直線を推定し，それから $r_n^3$ を差し引いたものの対数を縦軸に，n を横軸にとつたものが第 13 図である。同様に第４図IIについては，第 12 図及び第 14 図が得られた。第 11 図，第 12 図において漸近直線を引くとき，$r^3$ が，この直線より大きい値をとっていることもあり得るが，その点に対応する $\log(A-r^3)$ の点は，第 13 図, 第 14 図に示してない。このことを考慮に入れれば (13)式が実際に成り立っていると考えてよいであろう。



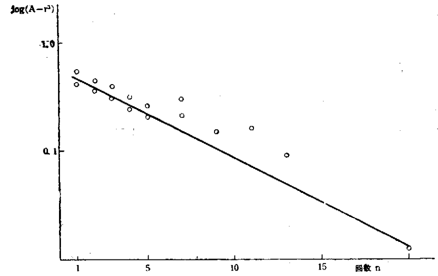

第11図 アルミニウム，落差 10cm. 落錘 2000g




第12図 アルミニウム，落差 10cm. 落錘 460g




第13図 アルミニウム，落差 10cm. 落錐 2000g




第14図 アルミニウム，落差 10cm. 落錐 460g

以上の結果は，同一材質で作った円錐と平盤の組合せに荷重をかけた場合，その荷重が静的であっても，又，かなりの高速度であっても，よく比例するということを示している。ところが，始めにも示したように，一般に，重量物を高速度で或る物質に衝突させるような場合，両物体の弾性及び塑性の如何によって，その衝突過程中に及ぼされる最大抗力の大きさはちがってくる。すなわち，衝突する双方が，上の円錐と平盤そのものであるような場合には，その円錐と平盤の材質によって衝突中の最大抗力が決定される。従って，そのような衝突を何回も繰返した後，最後に残った，つぶれの大きさだけからは，その一連の衝撃の中での最大荷重を求めることはできない。このことは，この種の検圧器を重量物の繰返し衝撃による最大抗力の検出に適用しようとする場合には十分に注意しなければならない。

なお本実験，並びに本原稿をまとめるに当って多大の御指導を戴いた平田森三先生に謝意を表する。

(1954. 1. 7)

## 文 献

1) 平田森三，髙木 豊，長崎誠三 昭和19年10月21日 日本数学物理学会 学会講演

2) 平田森三 捕鯨船舶装備改善委員会報 1951. 5. 21日号，12。 1951. 10. 16日号 6。 1953. 5. 6 日号 4，10。

＊ (16ページよりつづく)

しかし反射型が透過型の目的に使われることも勿論ある。この方が感度が高い場合があるからである。何れの測定の場合にも Ionization chamber を用いている。第10図に反射型厚み計を示してある。放射線源の容器は使用中以外はシャッターを閉じて，常時は安全放射線許容量内に抑えてある。この容器から被測定物を経て検出器に入った放射線は直流出力に変換される。この出力のスケールは，一台で希望する厚さに対す変動率を＋，－何れの方に示すことも可能であり，また厚みを直接指示することも可能である。なお電子管によって構成されているために，5乃至8時間おきに零点調整を行う必要があるまた放射線源が減衰するため，年一回程度の補正が必要である。

こうした調整の面倒さはあるが，物質の単位当りの重量に比例した指示量を示し，直接に接触しないで厚さを測定しうる特徴がある。現在では 0.005mm のプラスチックを測定したり 0.001mm の鋼材の厚さを測りえて，しかもその誤差は1～2％である。この測定装置は劃一的なものではなく，個々の要求に応じて設計をする方がより有効である。

## 5. 結 言

以上で最近多方面に亘って利用されて来た，核放射線による測定装置の一分野である厚み計について述べたが現在わが国においても数工場において，現場生産の品質管理のために，透過型および反射型の$\beta$線厚み計を使用あるいは試作研究している。そこで今後この方面に興味をもつ人々に対して，本稿が核放射線厚み計の理解に少しでも役立つことがあれば望外の幸である (1954. 3. 1)