水力学一圧力の問題

宮　津　純

誤った静圧原動機　粘性のある流体が流れているときの圧力と　何か　その測定にはどういう誤差を伴うか　それはなぜか

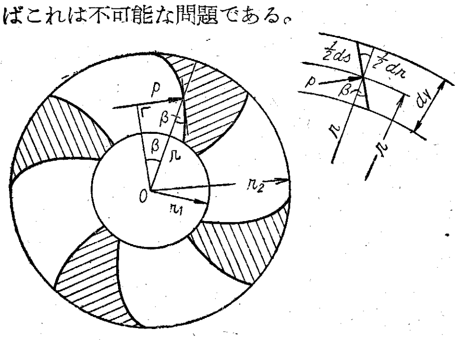
1. は し が き

水力学の研究と講義をはじめて 25 年余，その間に，他から説明を求められたもの，必要に迫られて解決したものなどを，二三取りあげて解説することとした。

いずれも，液体の圧力に関するもので，難問というほどのものではない。ただ，微積分に慣れていないと，あるいは難問になるかも知れないが，それでも，数学の遊びではない。水力学の基本的な問題である。

2. 静 圧 原 動 機

水の静圧力を利用して，車軸をまわし，仕事をさせるもので，その要図は第1図のようである。二つの同心円筒の間に形の対称でない羽根を並べ，それらが一体となつてまわるようにし，それと車軸とを連ねておく。羽根の両面を適当な形にすれば，そこに作用する圧力のモーメントの差で羽根車がまわる，というのである。ただし流体の動的な力は考えず，静圧のみを考えるものとする。これは実現可能であるかという問題。結論からいえばこれは不可能な問題である。



第1図　静圧原動機説明図（鉛直軸）

まず回転軸を鉛直におくとする。この状態では，羽根の両面に作用する圧力の，回転中心に関するモーメントは，羽根の形に関係せず，つねに等しくて向きだけ反対となり，和は0となる。それは次のようにしてわかる。

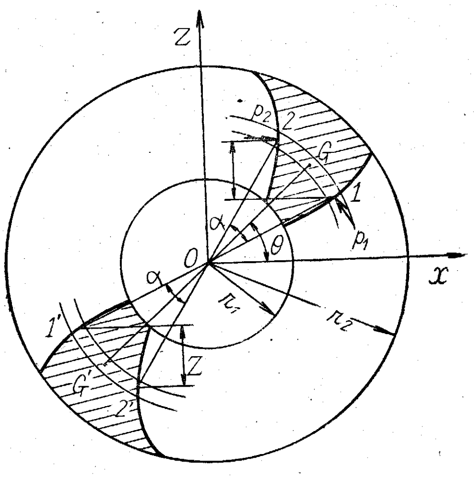
羽根と羽根との間では圧力 p は一定である。曲面羽根の微小長さ ds に作用する全圧力は pds（羽根の厚さは単位長さで考える）で，これは ds に直角に向く。ds と半径とのなす角を β とする。中心0に関する pds のモーメントは $dM=(pds)r\cos\beta=pr(ds)\cos\beta$，しかるに $(ds)\cos\beta=dr$ であるから（第1図），$dM=prdr$，よつて全面に関するモーメントは

$$M=\int_{r_1}^{r_2}pr\,dr=p\int_{r_1}^{r_2}r\,dr=\frac{1}{2}p\,(r_2^2-r_1^2)$$

これは表面の形に関係なく，つねに一定である。よつてこの面と対向する，隣の羽根の面に関するモーメントも，これとひとしくて向きだけ反対となり，対向する二つの面の合成モーメントは，形に関係なく0である。従つて羽根車に関するモーメントは存在しない。

回転軸を水平におくとする。第2図において x 軸を水平に，z 軸を鉛直にとる。半径 r と $r+dr$ との間の羽根の両面 1，2 を考え，圧力をそれぞれ p_1, p_2 とする。

回転の中心0に関して，これと対称の羽根をとり，対応する記号には ′ をつけると，図からみて



第2図　静圧原動機説明図（水平軸）

$$p_2'=p_1+\gamma(2z_1+Z),\quad p_1'=p_2+\gamma(2z_1+Z)$$

ただし，γ は流体の単位体積の重さ，z_1 は x 軸からの点1の高さ，Z は点1から2までの高さをあらわす。

対向する面1と $2'$ に関するモーメント dM_1 は

$$dM_1=(p_1-p_2')rdr=-\gamma(2z_1+Z)rdr$$

対向する面2と $1'$ に関するモーメント dM_2 は

$$dM_2=(p_1'-p_2)rdr=\gamma(2z_1+Z)rdr$$

$dM_1+dM_2=0$ で，この関係はすべての半径で成り立つ。従つて二個あるいは偶数個の羽根の場合には，羽根車としてのモーメントは存在しない。

奇数個の羽根の場合で，まず一個だけの例を考えると，微小半径のところの，両面に関するモーメントは $dM=\gamma Zrdr$（第1図）で与えられる。円弧12の中点を G，OG と x 軸とのなす角を θ，12の中心角を α とすれば，$Z=2(\sin\alpha/2)(\cos\theta)r$，従つて微小部分のモーメントは，一回転中に反対の向きとなる。一つの羽根の全面に関するモーメントは

$$M=2\gamma\int_{r_1}^{r_2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)(\cos\theta)r^2dr$$

ただし，α も θ も r の函数である。

かんたんな例として，放射状の羽根とすれば，α も θ もそれぞれ一定で

$$M=\frac{2}{3}\gamma\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)(\cos\theta)(r_2^3-r_1^3)$$

となる。このモーメントは θ にたいして余弦曲線状に変化する。羽根の最初の位置によつては，モーメントの存在することはたしかであるが，それで羽根が回つても，いずれ静止するか動揺するかで，自身で回転をつづけることはできない。ちようど，釣合のとれていない車が，自重で支え軸のまわりに動揺するのと似ている。三個以上の奇数個の羽根の場合も同様である。羽根数が増せば，一回転中，モーメントの0となる回数は増す，けつきよく問題の原動機は実現不可能である。

しかし，水の重さを利用する原動機が存在することは事実である。初期の水車は正にそれである。水の重さはすなわち，水底が底面（羽根の面）をおす静圧であるから，この水車は静圧原動機といえなくもない。この種の水車では，水は羽根車を通りぬけ，しかも羽根車へは入り，またこれを去るときの水の高さには差がある。これに比べると，今の問題は，閉じ込めた液体の圧力を原動力にしようとするもので，ちようど，流量も水頭もない流体（回転の平均状態で考えるとき）に仕事をさせようとするもので，不可能なことは明かである。

3. 流体の応力と圧力

流体が静止する場合には，内部の圧力は，考える面に直角に向き，また一点の圧力は，どの方向にも同じ大きさである。それは粘性があつても変らない。流体の粘性は静止状態では作用しないからである。

流れている状態でも，粘性がなければ同じである。すなわち，粘性のない流体の圧力は，つねに面に直角に向き，どの方向にも同じ強さである。流管の壁面はこの圧力でおされ，流体とともに動く物体でも，この圧力は感得する。

粘性のある流体が流れているときにも，圧力と通称されるものがある。それが何であるかを知ることは，流れている状態の圧力を測定するときに必要である。粘性のある流体の内部の一点には，流動状態では，9個の応力成分があり，その中の三つは直応力，六つはせん断応力で，後者は二つづつひとしく，三つが独立である。このことは固体の場合も変らないが，異るのは，流体は必ず速度勾配をもつて流れている，ということである。

流体の圧力を p とすれば，一点における，応力成分と圧力とには，一般に次の関係がある。

$$f_{xx}=-p+\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial u}{\partial x},$$

（f_{yy}. f_{zz} は略す）

$$f_{yz}=f_{zy}=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right),$$ （f_{zx}，f_{xy} は略す）

x，y，z は直線直交座標，u，v，w はその流速成分，μ は粘性係数である。また同接字の f は直応力，異接字の f はせん断応力をあらわし．第1の接字は考える面を，第2の接字は応力の方向を示す。上式から

$$p=-\frac{1}{3}(f_{xx}+f_{yy}+f_{zz})$$

となる。すなわち，粘性のある流体の圧力とは，その点における，直交3軸方向の平均圧力である。この平均値は．どういう向きの直交3軸についても一定(一点では)である。

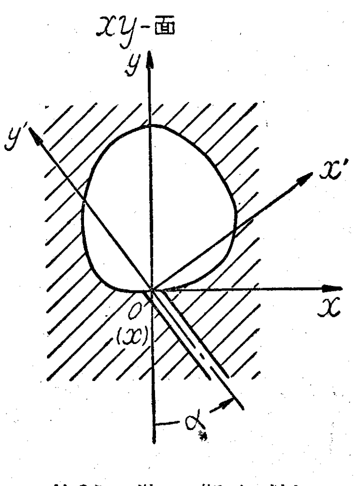
ある流れの状態の圧力 p を求めるには，理論的には，基本となる運動方程式を解いて求めることになるが，一方また実測したいこともある。それには，圧力 p を外部にみちびくことが必要であるが，それは可能であるか。ここでは，じつさい上問題となりやすい，比較的かんたんな場合をとつて，その間の関係を考えることとする。

ちぢまない液体とすれば

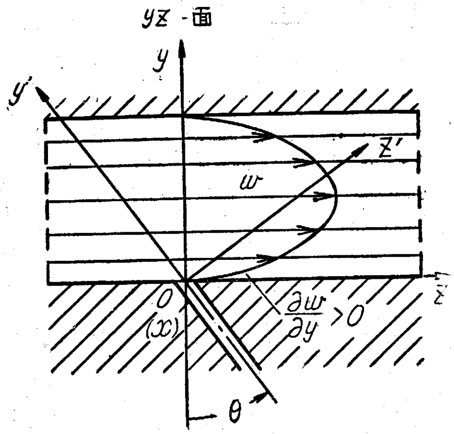
$$f_{xx}=-p+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}.\quad f_{yy}=-p+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$f_{zz}=-p+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}$$

さらに一様な断面をもつ管の平行流れとし，流れに沿つて z 軸を，管の横断面内に x．y 軸を第3，4図のようにとると，$u=0$，$v=0$，$w=\varphi(x,y)$ 従つて



第3図　流れの断面に軸を有する壁孔



第4図　流れの面に軸を有する壁孔

$$f_{xx}=f_{yy}=f_{zz}=-p,\quad f_{yz}=\mu\frac{\partial w}{\partial y},$$

$$f_{zx}=\mu\frac{\partial w}{\partial x},\quad f_{xy}=0$$

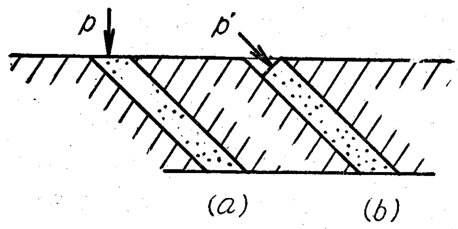
となる。$-f_{xx}$ も $-f_{yy}$ も流線をよこにおす圧力ではあるが，管壁にはかならずしも直角に向いてはいない。$-f_{zz}$ は流れの横断面をおす圧力である。従つて，こういう平行流れの圧力とは，流線を横におす圧力であり，流れの横断面をおす圧力である。

4. 壁 孔 の 示 圧

流れをよこにおす圧力は，管壁にあけた孔から外へみちびくことができる。しかしこの時，正しい圧力があらわれるであろうか。もし孔口に沿う流れに変化がなく，孔の内部の水が静止していれば，孔は孔口に作用する圧力をそのまま伝える。しかし，こういう状態は，粘性のない流体で許されるだけである。しかもその状態では，孔軸の傾斜は示圧に関係しないはずであり，孔は壁面に直角にあけるべきである，という理由もない。しかしじつさいには，孔の傾斜は示圧に影響をもつている。それは孔口の流れが変化するからと考えられる。

粘性がある場合には，かりに孔口の流れが変らなくても，孔の内部で静止するということは許されない。少くも，速度勾配が0となるところ迄は，静止していないはずである。その範囲は，孔の大きさおよび傾斜によるであろうから，それらが示圧に影響することは考えられるし，またじつさいに影響する。

いま孔口の大きさの問題は別にして，孔軸傾斜の影響を考えよう。孔の内部で静止状態にあるところを，どうとつたらよいのであろうか。孔の内部の等圧線分布の問題になるが，ごく大体においては，第5図のような二つの状態が考えられる。第5図(a) は，内部至るところ静止するとするもの，第5図(b) は，孔口近くで静止しないとするもので，この二つの比較では，考え方として，後者がじつさいの状態により近いと思われる。これなら



第5図　孔の内部の静止部分

壁孔の示す圧力は p でなくて p' である。孔を小さくした状態では，p' は $-f_{y'y'}$ に近ずく。ゆえに壁孔の示す圧力は，圧力 p でなく，むしろ孔軸方向の直応力であるとするが適当と考えられる。この考え方は，実験結果の傾向を説明し，また壁孔は流れに直角にあけるべきである，ということの一応の理由にもなる。

5. 示 圧 の 誤 差

壁孔の示す圧力が，孔軸方向の直応力であるとすれば，壁孔で正しい圧力を示すには，孔軸の傾斜が問題になる。

まず，流れの横断面内に孔軸を有する場合を考える。かような孔では，孔軸が管壁にたいしてどんな傾き方をしても，流れにたいしてはつねに直角である。従つて，その孔軸にそう直応力は，$-p$ にひとしくなる。このことは x, y 軸（第3図）にたいして角 α だけ傾く x', y' をとり，x', y', z 軸方向の直応力を求むれば明かで計算の結果は α に無関係に

$$f_{x'x'}=-p,\quad f_{y'y'}=-p,\quad f_{zz}=-p$$

となる。これより，圧力測定上，孔軸の傾斜に一つの指示が得られる。それは

孔軸が流れの横断向内にある場合には，管壁がどんな傾きをしてもその断面の圧力を示す，ということである。

次に，流線をふくむ平面内に孔軸を有する場合を考える。第4図をこの平面とすれば，前に求めたように $f_{yy}=-p$ である。従つて p は y 軸に平行な孔を通して示される。その孔軸は流線（管軸）に直角である。更に孔軸を y の方向にたいして角 θ だけ傾け，その方の直応力を求める。その孔軸にそつて y' をとり，y, z と y', z' との関係から $f_{y'y'}$ を求めると

$$f_{y'y'}=f_{yy}\cos^2\theta+f_{zz}\sin^2\theta-f_{yz}\sin 2\theta$$
$$=-(p+f_{yz}\sin 2\theta)=-(p+\mu\frac{\partial w}{\partial y}\sin 2\theta)$$

すなわち，このような孔は圧力 p を示すことはない。示圧の誤定を Δp とすれば

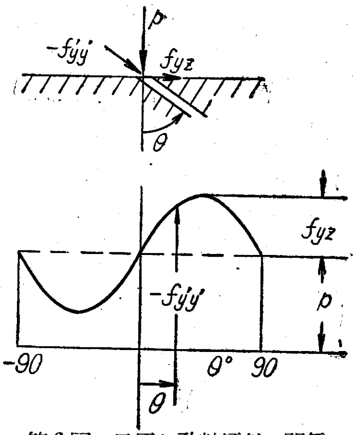
$$\Delta p=(f_{y'y'})-p=f_{yz}\sin 2\theta=\mu\frac{\partial w}{\partial y}\sin 2\theta$$

となる。$\theta=0$ のとき $\Delta p=0$ である。また流れの向きに z をとり，内部に向けて y をとつているから，ここ

では $\partial w/\partial y>0$ となる。従つて Δp の正負は θ の正負と一致する。これから孔軸のとり方に第二の指示が得られる。それは次のようである。

壁孔は，その孔軸が流れに直角であるとき正しい圧力を示す。孔口附近で，孔軸が流れに向き合う状態のときに，より大きい圧力を，また，流れと同じ方を向くときに，より小さい圧力を示す。正しい圧力と示圧との差は孔口のせん断応力と，孔軸の傾斜角による。(第6図)

じつさいの壁孔は，線でなくて一定の大きさをもつているから，流れに直交する壁孔でも正しい圧力は示さない。孔径に比例する誤差を伴うし，また孔の長さにも制限がある。これは，孔口近くの孔の内部に，流体の静止しないところができ，それが孔径によつて変ることと関連している。

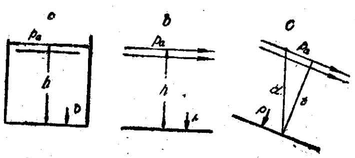


第6図　示圧と孔軸傾斜の関係

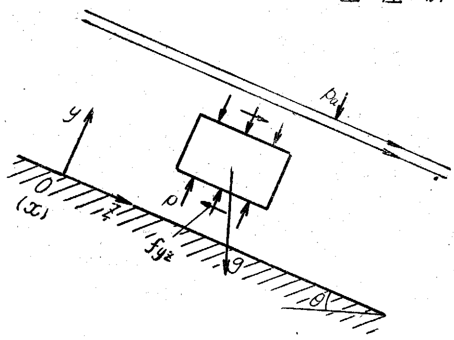
6. 傾斜流の圧力

静止する流体の圧力（p）が深さ（h）に比例することはよく知られている（$p=\gamma h$, γ は流体の単位体積の重さ）。流れていても，どこも水平面内で流れる場合には，やはり同じ法則に従い，しかもそれは，粘性のあるなしに無関係である。しかし，水平面に傾いて流れるときには，平行な流れでも，そうはならない。

すなわち，第7a, b図の状態では，底面の圧力はともに $p_a+\gamma h$ であるが，第7c図の場合には $p_a+\gamma d$ でなく，また $p_a+\gamma t$ でもない。以下に，その圧力がどうなるかを考え，また，圧力と壁孔による示圧との関係をしらべることとする。


第7図　深さと圧力説明図

水平面にたいする斜面の傾斜角を θ とし，z 軸を，斜面に沿い流れの向きにとる。z 軸をふくむ鉛直面を yz 面とし，y の正を上側にとる(第8図)。x 軸は水平で紙面に直角である。外力としては重力のみ作用する。流速，圧力，せん断応力はすべて，y 方向には変るが，流れの方向には変らない。よつて微小な流管部分に関する釣合いの式はつぎのようになる。


第8図　傾斜流の釣合

$$\frac{dp}{dy}=-\gamma\cos\theta\cdots(1)\qquad \gamma\sin\theta+\frac{df_{yz}}{dy}=0\cdots(2)$$

γ は流体の単位体積の重さである。

(1) を積分し，水面 ($y=t$) の圧力を p_a とすれば

$$p=p_a+\gamma(t-y)\cos\theta$$

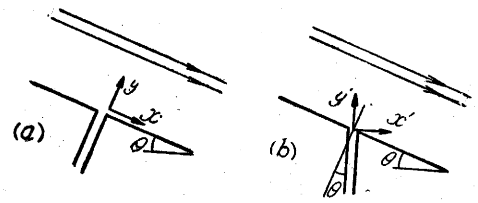
(2) を積分し，水面のせん断応力を0とおけば

$$f_{yz}=\gamma(t-y)\sin\theta$$

よつて一般に $f_{yz}/(p-p_a)=\tan\theta$ となることがわかる。とくに，斜面 ($y=0$) 上の圧力 p_0, せん断応力 f_{yz0} を考えると

$$p_0=p_a+\gamma t\cos\theta,\ f_{yz0}=\gamma t\sin\theta$$

第9a図からわかるように，斜面上では

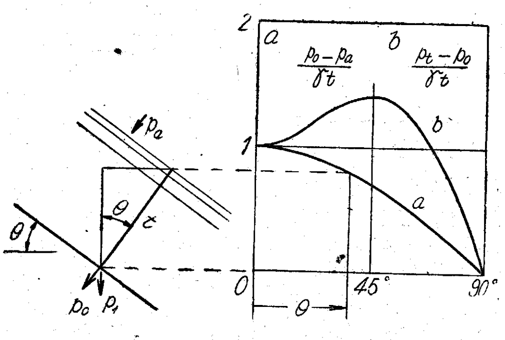

第9図　垂直孔と鉛直孔

$$-f_{yy}=p_0=p_a+\gamma t\cos\theta\ .$$

孔を斜面に直角にあける場合の示圧は $-f_{yy}$ であり，それは求める圧力 p_0 である。水頭で示せば

$$\frac{p_0}{\gamma}=\frac{p_a}{\gamma}+t\cos\theta$$

これは第10図の曲線 a のごとくなる。a は p_0-p_a



第10図　傾斜流の圧力と鉛直壁孔による示圧

に相当する水頭と，流れの幅 t との比を示している。

次に鉛直に y' 軸をとり $f_{y'y'}$ を求むれば

$$-f_{y'y'}=p+f_{yz}\sin 2\theta$$

$$=p_a+\gamma t(2-\cos 2\theta)\cos\theta$$

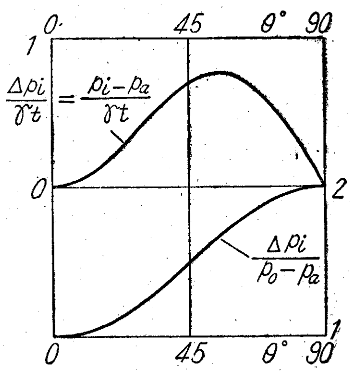
y' に沿つて鉛直の孔をあけると，その示圧は $-f_{y'y'}$ である。これを p_i とおき，水頭で示せば

$$\frac{p_i}{\gamma}=-\frac{f_{y'y'}}{\gamma}=\frac{p_a}{\gamma}+t(2-\cos 2\theta)\cos\theta$$

これは第 10 図の曲線 b のごとくなる。b は p_i-p_a に相当する水頭と，流れの幅 t との比を示している。この鉛直壁孔の示圧誤差 Δp_i は

$$\frac{\Delta p_i}{\gamma}=\frac{p_i-p_0}{\gamma}=t(1-\cos 2\theta)\cos\theta$$

これと t との比を示せば，第11図の上の曲線のようになる。これは第 10 図中の曲線 b と a との差を示したものに他ならない。



第 11 図　示圧誤差の図示

また鉛直壁孔の示圧誤差と，正しい壁圧（p_0-p_a）との比は

$$\frac{\Delta p_i}{p_0-p_a}=1-\cos 2\theta$$

で，第 11 図の下の曲線のごとくなる。

要するに，このような開いた傾斜流の底面における圧力は（水頭で）$t\cos\theta$，せん断応力は $t\sin\theta$ である。図示すれば，第 10 図中の直角三角形の，鉛直および水平の二辺によつてあらわされる。斜辺が t である。

7．結　び

水の圧力に関する問題で，今までに関心をもつたり，持たされたりしたものの中から，一つ二つ取り出して解説してみた。

初めにあげた静圧原動機の問題は，微積分のわからないと思われる人の出したもので，じつさいの話は，軸が鉛直の場合だけですんだ。水平軸の場合は，参考のため本文でとくに加えたものである。器壁の一部または全部に加わる，静水圧力の総和や，そのモーメントの総和を求める計算は，水力学における基本的な，また普通の問題に過ぎないが，これを積分ぬきの話にしようとするとむずかしくなる。

流動中の流体の圧力を測定するには，壁孔のない状態の圧力を，壁孔でみちびくのであるから，示圧に誤差をともなうことは当然考えられる。まず孔の示圧を考察するには，粘性のある流体の圧力がどういうものであるかを，たしかめておく必要がある。それを応力と圧力の項で述べた。

次に孔の指示するものが，孔口の位置の（孔がないときの）圧力であるかどうかに問題がある。孔口の圧力でなく，むしろ，孔軸方向の直応力を示すとみる方が妥当であること，実験結果も，それで一部説明がつくことを述べた。

この考えに基く示圧誤差を，数学的に示す例として，開放された傾斜流の，圧力とせん断応力との関係を求めた。この流れは，圧力とせん断応力とが，かんたんな関係にむすばれる，都合のよい例であるからである。

しかし，壁孔の示圧誤差はその大きさこそ知り度いことで，数字的に解決する必要がある。とくに孔の，大きさや長さの影響は，実験でたしかめるより他ない事項である。この研究でも，実用に役立つ資料をうるため，けつきよく実験を併用して結末をつけたのであるが，その点はここでは述べない。機械学会論文集 2 巻 8 号（昭和 11―11）を見ていただきたい（この内容はドイツの Ing. Arch. Bd. VII, Ht. 1 (1936) に発表したが，その全文は英国でも訳された）。本文には，この実用的な成果を省き，つけたりとも見えそうなことだけ記してきたが，研究の途上考えあぐねたことを書いてみるのも，別の意味で参考になるだろうと思つたからである。(1952・9・4)