

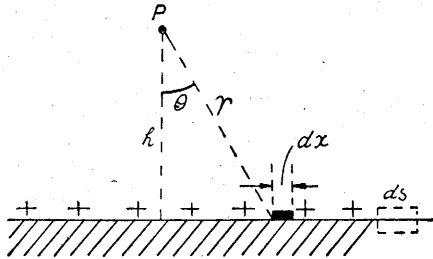
電気磁気学の迷理と 未解決の難題

後藤以紀

1. 電気磁気学における迷理の例

迷理といえ、亀を追いかけても永久に追いつかない鬼の話のように、級数の収束の理論から容易に解決されるものもあるが、電気磁気学の複雑な問題になると専門家でも一杯食わされる場合がある。そのうちでも簡単な例を挙げると、

[1] 第 1.1 図に示すように、表面が平面な半無限導体の表面に電荷密度 σ が一様に分布している場合の表面より h だけ上部の任意の点 P の電界の強さを求めよ。ただし導体外は真空とする。



第 1.1 図

解 これをまずクローンの法則で求めてみる。第 1, 1 図により

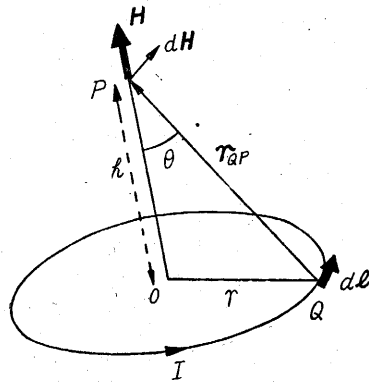
$$\begin{aligned}
 E &= \int \frac{\sigma \cos \theta}{K_0 r^2} dS \\
 &= \frac{\sigma}{K_0} \int_0^\infty \frac{2\pi x h}{r^3} dx \\
 &= \frac{\pi \sigma h}{K_0} \int_0^\infty \frac{2x dx}{\sqrt{(h^2 + x^2)^3}} \\
 &= \frac{\pi \sigma h}{K_0} \int_0^\infty \frac{d(x^2 + h^2)}{(h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{2\pi \sigma}{K_0} \tag{1.1}
 \end{aligned}$$

と成る。しかるに有名なガウスの定理を使つて、第 1.1 図の破線のような微小直六面体を表面に想像すると、これより出る電気力束は $4\pi \sigma ds / K_0$ だけ上方に向つて出るはずである。ここに ds は直六面体の上側の面の面積である。従つて電気力束を面積 ds で割れば、表面上の電界の強さが

$$E = 4\pi \sigma / K_0 \tag{1.2}$$

と出る。この場合は一様な電界と成るべきだから、どこでも同じであつて、ちょうど (1.1) 式の倍である。はて、クローンの法則とガウスの定理といずれが正しいのか？ しかし、ガウスの定理もクローンの法則に基づいたものだから矛盾するはずは無いのだが、不思議！

[2] 真空中において、第 1.2 図のように、半径 r の円周形の回路に、時間 t に比例する電流 $I = tJ$ を流す場合に、中心より高さ h の点 P の磁界の強さ H を求めよ。



第 1.2 図

解 よく知られたビオ・サバールの法則は

$$H(\mathbf{r}_P) = \int dH = \frac{1}{4\pi\Gamma} \oint I(\mathbf{r}_Q) d\mathbf{l} \times \frac{\mathbf{r}_{QP}}{r_{QP}^3} \tag{1.3}$$

である、ことに $d\mathbf{l}$ は回路の微小距離ベクトル、 \mathbf{r}_{QP} は $d\mathbf{l}$ の有る点 Q より点 P までの距離ベクトル。X はベクトル積を表す。Γ は単位系で定まる定数で、M.K.S. 有理単位系では 1, C.G.S. 電磁単位では $1/(4\pi)$ である。 \mathbf{r}_P , \mathbf{r}_Q はそれぞれ点 P, Q の位置ベクトル。

これを、そのまま適用すると、P 点の磁界の強さ $H(\mathbf{r}_P)$ は

$$\begin{aligned}
 H(\mathbf{r}_P) &= \frac{tJ}{4\pi\Gamma} \oint d\mathbf{l} \times \frac{\mathbf{r}_{QP}}{r_{QP}^3} \\
 &= \frac{tJ}{4\pi\Gamma} \oint \frac{dl}{r_{QP}^2} \sin \theta
 \end{aligned}$$

$$= \frac{tJr^2}{2\Gamma\sqrt{(h^2+r^2)^3}} \quad (1.4)$$

と成る。すなわち磁界 H は電流 $I=tJ$ に比例して同時に増大する。しかし、(1.4) 式は、元來、定常状態 (すなわち I —定) に対して適用す可き公式であるから、電流が変化すれば、作用が光速 c_0 で伝達する時間だけ遅れて変化するはずだと考えられる。そこで

$$H(r_P, t) = \frac{(t-r_{QP}/c_0) Jr^2}{2\Gamma\sqrt{(h^2+r^2)^3}} \quad (1.5)$$

としたがどうか？

これを確かめるために、マックスウェルの基本方程式

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{1}{\Gamma} \left(\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right), \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

に入れてみて、審判を仰ぐこととする。

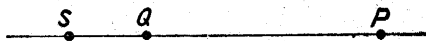
まず、(1.4) 式のように、定常状態のビオ・サバールの法則そのままを用いて磁界 H を計算すると、 H は時刻 t に比例して増すことと成るのであるから、(1.6) 第 2 式から、 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ は t について一定である。換言すれば変位電流は存在しない。従つて第 1 式では

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i} / \Gamma \quad (1.7)$$

と成つて、電流不変の場合の式と成り、ビオ・サバールの法則で差支ないことになる。

しかしこれでは直達作用と同じ結果である。電流は増大しつつあるのだから、作用の伝播による遅れがありそうなのである。なぜか。

[3] 真空中において直線上に等速度 u で走る点電荷 Q がある。その直線上の他の任意の点 P における電位 (Q に因る) を求めよ。



第 1.3 図

解 もし、作用の伝達時間を無視すれば

$$V_P = \frac{Q}{K_0 r_{QP}} \quad (1.8)$$

である。ここに r_{QP} は現在の時刻における Q と点 P との間の距離である。

しかし、作用の遅れがあるはずだから、点 P に達する作用は、光の伝達時間 τ だけ以前の Q の位置 S より発したはずで、 SP 間の距離 r_{SP} は

$$\tau = r_{SP}/c_0, \quad u\tau = r_{SQ} \quad (1.9)$$

$$\therefore r_{SQ}/r_{SP} = u/c_0 \equiv \beta \quad (1.10)$$

$$\therefore \frac{r_{QP}}{r_{SP}} = \frac{r_{SP} - r_{SQ}}{r_{SP}} = 1 - \beta \quad (1.10)'$$

よつて

$$V_P = \frac{(1-\beta) Q}{K_0 r_{QP}} ? \quad (1.11)$$

と成るのではないか。

2 正解

前節の迷理を解明する。

[1] これはガウスの定理より導いた (1.2) 式が正しい。しからばクーロンの法則に基づき計算にどうして矛盾を生じたか。

われわれは有限の範囲の物体に対してクーロンの法則を適用できる訳である。無限大の大きさの物体は、有限の大きさの物体の極限として計算に使用するのみである。それ故に、第 1.1 図の場合は、平行板蓄電器内の下方の電極に近い所の電界を考え、全体を無限大に拡大したとすればよい。あるいは又、球状導体の半径を無限大に拡大したとしてもよい。

例えば、平行板蓄電器の極限と見なすと、クーロンの法則を適用するには、上方の電極の下側に分布する電荷に因る電界を加えねばならない。それでちょうど、下方電極の電荷による電界の 2 倍と成るのである。すなわち前の計算式 (1.1) は無限遠にある無限大の電荷に因る電界を忘れたために $1/2$ と成つたのであつた。無限大は曲者である。

[2] マックスウェルの式において、時刻 t における任意の点 $Q(r_Q)$ の電流密度 $\mathbf{i}(r_Q, t)$ が与えられているときには、それによる磁界の強さ $\mathbf{H}(r_P, t)$ は

$$\mathbf{H}(r_P, t) = \frac{1}{4\pi\Gamma} \int_{\infty} \left[\mathbf{i}(r_Q, t - \frac{r_{QP}}{c_0}) \times \frac{r_{QP}}{r_{QP}^3} + \frac{\partial \mathbf{i}(r_Q, t - \frac{r_{QP}}{c_0})}{c_0 \partial t} \times \frac{r_{QP}}{r_{QP}^2} \right] dv_Q \quad (2.1)$$

で表わされるのである。ここに r_{QP} は点 $Q(r_Q)$ から点 $P(r_P)$ までの距離ベクトル。

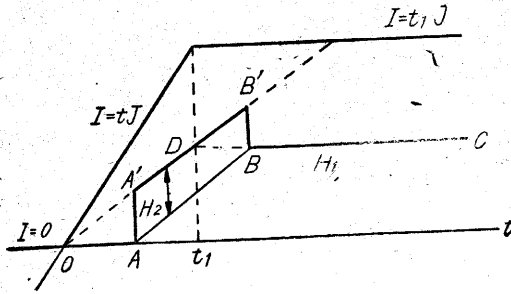
従つて、問題 [2] においては、電流が時間 t に比例するのであるから

$$idv_Q = tJdl_Q \quad (2.2)$$

とすることができる。そこで、これを (2.1) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(r_P, t) &= \frac{J}{4\pi\Gamma} \oint_l \left[\left(t - \frac{r_{QP}}{c_0} \right) dl_Q \right. \\ &\quad \left. \times \frac{r_{QP}}{r_{QP}^3} + dl_Q \times \frac{r_{QP}}{c_0 r_{QP}^2} \right] \\ &= \frac{tJ}{4\pi\Gamma} \oint_l dl_Q \times \frac{r_{QP}}{r_{QP}^3} \quad (2.3) \end{aligned}$$

(2.1) 式の第 1 項はビオ・サバールの法則と同じである。 $\mathbf{i}(r_Q, t)$ の代りに $\mathbf{i}(r_Q, t - r_{QP}/c_0)$ と成つているのは、 r_{QP} の距離を作用の伝達するに要する時間 r_{QP}/c_0 だけ前の時刻の値を採るべきことを表わしている。すなわち、これによると (1.5) 式に成るのであるが、マックスウェルの式の正解によると、更に第 2 項が存

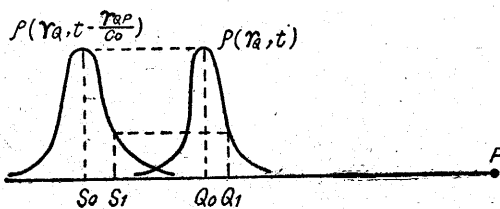


第 2.1 図

在する。これが第 1 項の時間遅れを表わす項を打消してしまつたのである。第 2.1 図に示すように、電流 I を単に tJ とせず、 $t=0$ まで電流 I は 0 で、それから tJ と成り、 $t=t_1$ よりは一定値 t_1J に成るとすると、最初、伝達時間 \overline{OA} の間は、作用伝達の遅れで磁界 H は零であるが、時刻 A より (2.3) 式第 2 項すなわち第 1.4 図の H_2 が突如として現われて $\overline{AA'}$ だけ急増する。これは dI/dt が零でなくなつたための磁界 H_2 が伝達してきたのである。それより第 1 項 H_1 も現われて、丁度 $t=0$ から磁界が電流 I に比例して増したかのような観を呈するのである。次に $t=t_1$ 以後は電流 I を一定値 t_1J に保つことにすると、その影響は伝達時間 \overline{DB} ($=\overline{OA}$) を要してから現われるから、それまでは磁界は変化を知らずに増して行くが、 B に至つて始めてそれを知り、あわてて H_2 の分だけ急減して、以後は、その時の H_1 の値を保つて行くのである。すなわち、作用の伝達は確かに存在するのだが、 $\frac{\partial I}{\partial t}$ に比例する磁界が存在するために、直達作用の値と一致するのである。前に述べたように、変位電流がちょうど零に成つたために、直達作用と同じ式で表わされるのである。

[3] この場合にもマックスウェルの式にもどつて考えねばならない。マックスウェルの式から求めた電位 $V(r_P, t)$ は

$$V(r_P, t) = \int_{\infty} \frac{\rho(r_Q, t - r_{QP}/c_0) dv_Q}{K_0 r_{QP}} \quad (2.4)$$



第 2.2 図

で表わされる。ここに $\rho(r_Q, t - r_{QP}/c_0)$ は任意の点 Q の電荷密度で、点 Q より点 P に至る距離 r_{QP} を作用が伝播するに要する時間 r_{QP}/c_0 だけ以前の値を採るべきことを意味する。

これを用いて第 1.3 図のように点電荷 Q がある場合を計算せねばならない。点電荷といつても、実際は或る小さい広さの電荷分布を便宜上点と見なしたのであるから、(2.4) 式を適用するためには、例えば第 2.2 図のように任意の分布を仮定する必要がある。その中に Q_0, Q_1 なる任意の 2 点を採ると、作用が伝達する時間を要するため、 Q_0 点が少し以前の位置 S_0 点にあつたときに、電磁波が出發して、 P 点に達するには $\overline{S_0P}/c_0$ だけの時間が経過し、その間に S_0 点が Q_0 点に移動したはずである。従つて

$$\frac{\overline{S_0Q_0}}{\overline{S_0P}} = u/c_0 \equiv \beta > 0 \quad (2.5)$$

同様に Q_1 点に相当する S_1 点についても

$$\frac{\overline{S_1Q_1}}{\overline{S_1P}} = \beta \quad \therefore \frac{\overline{Q_1P}}{\overline{S_1P}} = \frac{\overline{S_1P} - \overline{S_1Q_1}}{\overline{S_1P}} = 1 - \beta \quad (2.6)$$

と成る可きである。従つて、

$$\frac{\overline{Q_0Q_1}}{\overline{S_0S_1}} = \frac{\overline{Q_0P} - \overline{Q_1P}}{\overline{S_0P} - \overline{S_1P}} = 1 - \beta \quad (2.7)$$

と成る。これは第 2.2 図に示すように $\rho(r_Q, t - r_{QP}/c_0)$ の分布が、 $\rho(r_Q, t)$ の分布をちょうど $1/(1-\beta)$ 倍に引延ばしたものであることを示している。ここに特に注意すべきは、 ρ の値を $(1-\beta)$ 倍に減らして引延ばしたのではなく、そのままの値で分布を引延ばした形になるのである。それであつても Q が $1/(1-\beta)$ 倍に大きくなつたのと同じであつて、距離 $\overline{S_0P}$ も $\overline{Q_0P}$ の $1/(1-\beta)$ 倍に大きくなつているのでちょうど両者が消し合つて、

$$\frac{\rho(r_S, t - \frac{r_{SP}}{c_0}) dv_S}{r_{SP}} = \frac{\rho(r_Q, t) \frac{dv_Q}{1-\beta}}{r_{QP}(1-\beta)} \quad (2.8)$$

と成り、直達作用と同じに

$$V(r_P, t) = \frac{Q(1-\beta)}{K_0 r_{QP}(1-\beta)} = \frac{Q}{K_0 r_{QP}} \quad (2.9)!!$$

と成るのが正しいのである。

3. 未解決の難問

これまで、マックスウェルの式にあてはめて解決のつく迷理の例をあげたのであつたが、未解決の難問題を列べれば限りが無い。しかし、そのうちには、基本法則はわかつていても、それに基づいて解くことが数学的に困難だとか、又は実験が困難で未解決のもの、基本法則そのものがわからないのがある。前者のうちにも、数値計算を自動計算機等で強引に行えば解けるが、解析的に解くのが困難なものがある。任意の形をした境界面を

有する導体又は絶縁体がある場合の電磁界を求めることは、これに属する。又、非線型回路で、非線型要素の特性は与えられている場合の非線型振動の算等も機械による数値計算は可能の範囲に在る。

原子核の変換に関係する現象でなく外部の電子に關係する現象ならば、量子力学のシュレーディンガーの波動方程式を解けば求められるはずであるが、それもあまり複雑な組み合わせに成る場合には事実上困難であり、又取扱うべき物の分子構造又はその配列が不明だと直接計算もできないから、基本法則不明の場合と似た結果になる。複雑な化合物の場合はこれに相当する。実用上の問題には、この種のものもきわめて多い。

基本法則のわからない問題のうち、素粒子論等に関連する問題は物理学で盛んに研究されている。

量子力学で取扱う微視的現象では測定のために使用する電子とか、光とかが、測定しようとする現象そのものに大きな影響を与えるので不確定な結果を得るが、近頃は生命現象の研究に際しても、物理、化学的の解析を進めると、その影響でかえつて生命現象そのものが失われるために或程度以上明確には、それを捕えることはできないといわれている。

更に進んで、心靈現象の研究になると、測定方法だけでなく、測定者自身の精神作用が現象に影響を与えるから実験は容易でない。精神作用が空間を伝わつて他人に感ずるといふ現象は、思念伝達 (telepathy) と称して心理学者によつて沢山実験されている。その一例を挙げるとウィーンの心理学者ウィルフリード・ダイム博士は、1, 2 の友人乃至は助手と共に実験を行つている。思念の発信者は二つの封筒を用意し、その一つには赤、黄、青、緑等の色紙が入つており、他の封筒には丸や四角や三角等を切り抜いた黒色の紙が入れてある。発信者は、二つの封筒よりそれぞれ一種づつの資料を随意に採り出して、その組み合わせの色紙に 5 分ないし 30 分間位精神集中を行う。精神集中が終ると、発信者は助手に命じて受信者を眼からさまたせる。受信者は眼をさますと発信者と顔を合わせる前に、見た夢の記録をする。発信者も受信者に会う前に、実験の最後の模様を詳細に記録する。発信者と受信者との距離は 90 フィートから 3.8 マイルまでやつており、その間には通常壁とかその他の物理的障害物がある。次の記録は、そのうちの一つである。

発信者の記録「1948 年 3 月 14 日午前 6 時起床。2 枚の封筒から実験色紙を採出し、赤の地紙の上に、正三角形の穴をあけた黒い紙をおき、三角形の頂点を真上に

する。これに精神集中を行う。6 時 30 分再び強度の精神集中を行う。名状し難い思念伝達の反応を自覚する。助手に受信者を起すように命ずる。

受信者の記録「1948 年 3 月 14 日午前 6 時 35 分眼をさまたされる。これより少し前、或る夢を見る。夢の内容は、有名な女流ピアニスト、音楽、非常に力強いメロディー。一人の兵士が私と家族を拘留に来る。馬の疾走する足音楽器。すべてが非常に力動的である。突然、騒がしい夢の中に三角形の赤々と輝いたもみの木が現われ、2, 3 秒静止する。もみの木は自然木というよりはむしろ子供の絵本によくあるものである。幹は黒く、くつきりしている。夢の他の部分は無色に近い薄灰色、2, 3 分の後もみの木は消え、やがて他の夢も消える。眼をさます。」

このような実験は 30 回中 75% 成功している。その他、思念伝達や、遠隔透視の実験は沢山あるが、これに対して、まず誰でも考えるのは、脳波に関連して電磁波が出るとか、特殊な不可視光線を感じるとか想像するのであるが、実用上ほとんど距離に無關係な結果を得るので、電磁波ではなく、中性微子だろうという説が出た。昔は不思議な現象を皆エーテルのしわざと考えた。光や電磁波をエーテルの弾性波と考えたと同様に、精神現象の媒質もエーテルと考えたり、幽霊はエーテルでできていると説いた人もあつた。近頃はエーテルの存在が否定されたので、中性微子が代りに候補者になつた訳である。しかし実際には、中性微子以外の未発見の微粒子も有るかも知れないから、この機構の窮明はおそらく相当の時間を要する難問題であろう。

かように、根本的に正体不明の現象の研究には、実験の際の条件の定め方が先ず非常にむづかしいのである。例えば、透視の実験でも、透視者が厚い眼かくしをするのと、被透視物を包んで見えなくすると、常識的には同じように思うが、透視機構によつて大いに異なることになり、実験結果でも異なるものであるから面白い。もつと具体的にいうと、透視能力なるものが、普通に考えるように透視者個人の能力ではなく、主として、第三者(人間か霊か)の能力に依存するもので、その指示又は補助によつて透視ができるのかも知れないのである。電磁気学や物理学ないし心理学等の生半可の常識にとらわれず、種々の機構を予想して実験条件を考えて行かねば容易に正体を捕えることはできない。群盲象を評するの愚に陥らないように注意せねばならぬ。(1952・10・10)