

等価回路による薄膜の計算

— 私 の 夢 —

沢 木 司

— 光の波長程度の薄い透明な膜を硝子の上に多数重ねて着けその厚さ等を適当にすると光の干渉によって種々の興味ある現象を生じ、実用上にも重要な利用の途がある。この場合の計算は極めて面倒であるが、光の微分方程式と伝送回路の式に類似の関係のあることを利用し、薄膜と数学的に等価の電気回路を用いてこの問題を解決しようとした試み。—

1. 緒 言

光学の方には古来から難問とされていることは沢山ある。例えば光学硝子で種々成分を変えても屈折率と分散率の比が一定のものしか得られないが、この比のいちじるしく異なるものができればレンズが大いに改良される。このことは、比が僅かに変つた硝子（バリウム硝子）ができたということだけでドイツの光学工業がそれまで優つていた英仏のそれを一度に引き離し Jena-Zeiss の牙城を築き上げたことからわかる。ところがこの新硝子ができてから 60 年近く経つのに未だにそれ以外のものはほとんどできていない。これは原理的に不可能なのであるのか、それ共われわれの努力が足りないのであろうか。その点について明確な答がない。これは物性論の進展をまつて明かにされる問題であろうが、物性論は未だこの問題については一指も触れていないといつてよいであろう。光学工業についてもつと痛切な問題は、レンズの計算を簡単迅速にやる方法である。レンズ系の収差は、第一近似においては Seidel により完全に調べられているが、少し広角、大口径比のものになるとこの近似は役立たず、第二近似を解析的に扱ふより光線追跡という原始的の方法でやつた方がよいので、対数表を用いて多数の人と多くの時間とを費して計算を行つている。これをもつと簡単迅速に行えないものであろうか。たゞ屈折の基本式 $n \sin i = n' \sin i'$ の計算さえできればよいのである。拡大投影による作図、機械的計算機等の数種の方法が考えられているが、五桁の精度を要するためにいずれも満足でない。電子計算機の発達はこの解決に曙光を与えてくれるもので、すでに二、三の光学会社では研究に着手している。

2. 薄膜の光学

このような古来からの難問の他に、ごく最近の問題で

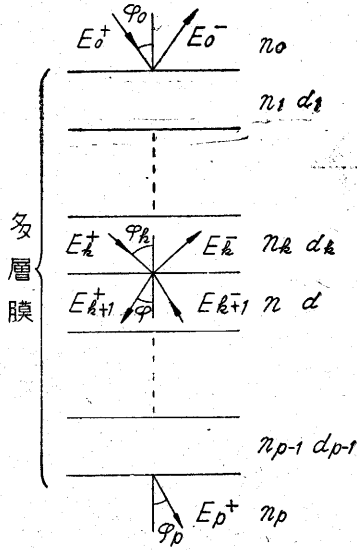
われわれが手を焼いているものに薄膜の光学がある。硝子の上に光の波長程度の薄い膜を着けて、その膜の境界面に生ずる反射光を干渉させることによつて全体としての反射並びに透過光の強さを加減することができ、すでに光学機械の反射防止膜、各種フィルター、半透明鏡等として実用化されていることはしばしば本誌にも書かれている通りである。実際に用いられているものは膜の数はすでに十数層のものまでできているが、これ等は特殊な解を用いるとか実験的の手探りで所望のものを求めているのであつて、理論的に充分論ぜられているのは精々三層までといえよう。多数の層を重ねた場合の一般解を求めて膜の厚さ、屈折率の種々の値に対してどのような分光々度曲線を与えるかの見透しをつけることが非常に難問なのである。繰返し反射を考えない場合の式は簡単にえられるが、これはレンズ系の場合の近軸光線に相当し、重要ではあるがこれだけでは役に立たない。多層膜の一般式として Vasiček, Weinstein, Schröder 等の公式が与えられてはいるが複雑なものであり、最近の学会における研究発表でも多数の研究がいかにしてこの見透しを与え、より簡単な一般式を得ることができるといふことに集注されている。

ところで、計算の基礎になるのは Maxwell の電磁方程式で、これに膜の境界の条件を入れて解くのであるが、その電場および磁場に関する微分方程式は伝送回路における電圧と電流の関係を与える式に類似して、一枚の膜は一つの四端子回路に相当し、膜を重ねることは四端子回路を直列につないでゆくことに相当する。このことを理論的に取扱つてそれまで知られてゐなかつた解を求めた研究も二三あるが、膜の数が多くなるとやはり非常に面倒なものになる。そこでわれわれが考えたのは、このことを式の上でなく実際の回路の上で行うことで、与えられた膜に相当する四端子回路網を構成してその input 及び output を測定すれば、直ちに膜の特性が解るのではないかということである。

3. 四端子回路

第 1 図に示すように屈折率 n_p なる硝子の上に $(p-1)$ 層の薄膜を重ねたとき、 k および $(k+1)$ で表わす膜の中の電磁場を $E, H; E', H'$ とすると、膜に吸収のない

場合



第 1 図
多層膜

$$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta & -i(\sin \delta)/\omega \\ -i\omega \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E' \\ H' \end{bmatrix} \quad (1)$$

の関係がある。ただし

$$\delta = (2\pi/\lambda)nd \cos \varphi$$

$$\omega = \begin{cases} n \cos \varphi: & \text{電場ベクトルが入射面に垂直な場合} \\ n/\cos \varphi: & \text{平行} \end{cases}$$

λ は考える光の真空中における波長, n は屈折率, d は膜厚を表わす。

(1) 式の右辺の初めの行列を M_{k+1} で表わすと $(p-1)$ 層全体については

$$\begin{bmatrix} E_0 \\ H_0 \end{bmatrix} = M_1 \cdot M_2 \cdots M_{p-1} \begin{bmatrix} E_p \\ H_p \end{bmatrix}$$

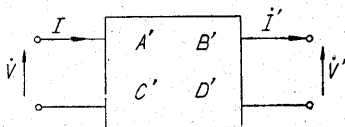
となる。いま

$$M_1 \cdot M_2 \cdots M_{p-1} = M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (2)$$

と表わすと, この多層膜の反射係数 R_0 は次のように表わされる:

$$R_0 = \frac{\omega_0(A+B\omega_p) - (C+D\omega_p)}{\omega_0(A+B\omega_p) + (C+D\omega_p)} \quad (3)$$

ところで, (1) 式は四端子回路 (第 2 図) の式



第 2 図 四端子回路

$$\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V' \\ I' \end{bmatrix} \quad (4)$$

と同じであるから, 結局, (1) と (4) の両式から導かれる関係:

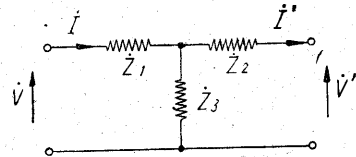
$$\left. \begin{aligned} A' &= D' = \cos \delta \\ B' &= -i(\sin \delta)/\omega \\ C' &= -i\omega \sin \delta \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

を満足するような四端子回路網 M を一つの四端子回路

と考へた場合の常数 (2) 式) を測れば, (3) 式によつて R_0 が求められる。

金属膜の場合には光の吸収があり, これは上記の電気回路の抵抗が有限の場合に相当し問題は極めて面倒になるが, われわれが今考へているのは非金属膜の場合であるから, 四端子回路は理想化された LC 回路であるとする。(5) 式に示される常数をもつた四端子回路の構成を考えると, 回路は対称であるから, 最も簡単なものとして T 型および π 型の四端子回路が考へられる。その場合各 impedance に必要な値は

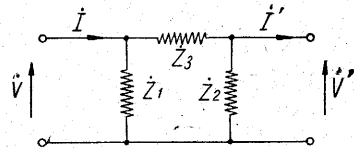
T 型 (第 3 図):



第 3 図 T 型回路

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= Z_2 = i(\cos \delta - 1)/\omega \sin \delta \\ Z_3 &= i/\omega \sin \delta \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

π 型 (第 4 図):



第 4 図 π 型回路

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= Z_2 = i(\sin \delta)/\omega(1 - \cos \delta) \\ Z_3 &= -i(\sin \delta)/\omega \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

となる。これ等の impedance が実際にどのような値をもつかをみるために $\delta = 0 \sim 2\pi$ に就いて $\omega = 1$ として計算してみると第 5 図のようになる。impedance = 0 および ∞ は共振状態を意味し種々の不利益を生ずるわけであるが, 今或る一つの膜が $\delta = \pi$ あるいは 2π ($nd = \lambda/2$ あるいは λ) であつた場合, その膜を表わす行列は (5) 式により

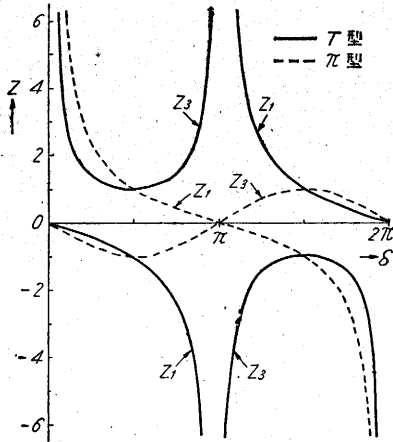
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ あるいは } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となつて, これは単位行列であるから結局その膜は考へなくてよいことがわかる。特に全部の膜が $\delta = \pi$ あるいは 2π の場合にはよく知られているように反射係数 R_0 は簡単に

$$R_0 = (\omega_0 - \omega_p)/(\omega_0 + \omega_p)$$

で与えられる。このように共振状態において測定するという必要はないわけであるが, それに近い状態でも測定が可能であるようにするために次のような切替えを行う方が適切であると考えられる:

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \delta \leq \pi/2, \quad 3\pi/2 \leq \delta \leq 2\pi & \text{ では } \pi \text{ 型回路} \\ \pi/2 \leq \delta \leq 3\pi/2 & \text{ では } T \text{ 型回路} \end{aligned} \right\}$$



第5図 各 impedance の数値

実際に回路網を作るための目安として、(5)式の \sin , \cos を 0.01 まで表わすために必要な impedance の範囲と許容誤差をあたつてみると、 $\omega=1$ として、第1表に示したようになる。

第1表 各 impedance の必要な値と許容誤差

	$\pm Z_1$	$\pm Z_3$
T 型	$(1 \pm 0.01) \sim (200 \pm 100)$	$(1 \pm 0.01) \sim (100 \pm 50)$
π 型	$(1 \pm 0.01) \sim (50 \pm 10)$	$(1 \pm 0.01) \sim (0.01 \pm 0.005)$

4. LC 回路

次に inductance L と蓄電器 C によつて所望の impedance を構成することを考えてみる。 L と C のそれぞれ1個ずつを直列及び並列につなぐことによつて、理論的には $(-\infty \sim \infty)$ の範囲の値が得られることになるが、実際に得られる L および C は限定されるので impedance の値も限りがある。又、今の目的には L, C, f (波数周) の三つの変数があるが、製作上の面倒を考えると f および L を一定に保ち C を変化させて所望の impedance を得る方法が適当である。直列接続によつて負号の側を、並列接続によつて正号の側を得ることにして検討してみると、 f, L, C に要求される値は impedance の値如何によつて相反する傾向をも示すが大体において f の大きい方が実際的に有利である。第1表に示した範囲を得るための f, L, C の組合せを選定してみると、例えば $f=10^5 \omega$, $L=10^{-6} H$, $C=10^{-5} \sim 10^{-9} F$ なるものが考えられる。($f=10^3 \omega$ のときは $L \sim 10^{-2} H$ が必要となる)。このような値は充分可能なものではあるが、それ等に要求される精度は次に述べるように非常に厳しいものになる。すなわち、 L, C, f をそれぞれ独立にとつて考えた場合、 C の最小 step ΔC 及び L, f の精度の最も厳しく要求される impedance 領域における許容誤差 $\Delta L, \Delta f$ を第1表に基いておおよそその値を計算してみる

と第2表のようになる。

第2表 L, C, f の許容誤差 ただし、 $f=10^5 \omega$, $L=10^{-6} H$, $C=10^{-5} \sim 10^{-9} F$ の場合

	直 列	並 列
$\Delta C(F)$	10^{-8}	10^{-9}
$\Delta L(H)$	10^{-3}	10^{-9}
$\Delta f(\omega)$	10^{-1}	10^{-3}

ところで、これまでに述べてきたことはすべて抵抗 r を無視しているが、実際には必ず r を伴うわけで、特に L についてはこれを無視することはできない。最も簡単に考えて r を小さくするには L は小さい方がよいから、上述の例では $L=10^{-6} H$ を選んだ。 $Q=2\pi fL/r$ はせいぜい 100 の程度であるから、これを 100 としてみると $r=0.006 \Omega$ である。このような r が実際にどのような影響をおよぼすかということを十分に検討することはなほ面倒なので、一応 reactance に許される誤差と同程度に押えたわけである。

5. 結 論

以上に述べた事柄を総合して考えてみるとこの計算機の実現の可能性は極めて薄いようである。 L および f に要求される精度が極めて大きく、これを満足させることは経済的にも極めて困難なことと思われ、さらに又 L に伴う抵抗 r の影響の検討はなほ面倒なことで、従つて r による誤差の補正計算も又複雑であることが想像される。しかも実際に多くの膜を重ねたものに対して使用するためには、その膜の数だけの四端子回路がいるわけで、必要な L, C の個数は非常に多く、これを数回に分けて行えば、それだけ回路数は少なくて済むわけであるが、測定の面倒と誤差を伴つてくることは当然覚悟しなければならない。又、LC 回路を構成することのみでなく周波数の発生装置、および電圧・電流・位相の測定装置をも必要とするわけで、多くの労力と費用を要することになる。

結局それだけの費用と時間を費して試みるよりは普通の計算機を廻して地道に行つた方が早いというわけである。米国等で電子計算機を利用して同じ薄膜の問題を取扱つているとのうわさを聞くが、われわれがそれを利用し得るようになるのは未だかなり先のことであろう。ここに述べたことは私達の「破れた夢」であるが、電気学には門外漢であるのでいささか醒めきれない気持である。専門の方で名案を授けて下さつて、これを正夢にして下さる方があれば幸である。なお、以上の考察は筆者が大学院特別研究室生としてその後引き続き技術研究生として久保田研究室に在籍して行つたものである。

(1952.11.)