

亂流のスペクトルについて

佐 藤 浩

亂流は飛行機、化學工業、氣象學などに深いつながりを持つている。それをくわしく調べるには風洞で實驗するのが一番いゝし、亂流の細かな構造を問題にするにはスペクトルを知らねばならぬ。

1. はしがき

流體が管の中や壁に沿つて流れるとき、或條件の下に層流から亂流に移ることは古く Reynolds の實驗以來よく知られたことがらである。この遷移は現象それ自體としても面白いし、實用の面からもいろんな意味で重要なので多くの研究が行われてきた。例えば飛行機の翼でこの遷移がおきると急に抵抗がふえるので、翼の表面のなるべく廣い部分を層流にしておくために、いわゆる層流翼が考案された。一方、發生した亂流それ自體にもいろんな問題がある。化學工業における反應室の中の流體、低氣壓や高氣壓を含んで地球を覆つている大氣などいずれも亂流にほかならない。これらについての研究は昔から數知れず行われてきたにもかかわらず、亂れて細かいメカニズムについては知るすべがなかつた。しかし最近の實驗技術の進歩はこのことを可能にし、理論的成果と相俟つて亂流の研究はいちじるしい發展を遂げつつある。

さて亂流とはどんなものかということはわかつていようでよくわからない。抽象的な定義はさておき卑近な例を見よう。

水の流れの中に棒を立てるとその後渦ができる。渦は生れては流れ、流れてはまた生れるが、ずつと下流へ行くと消えてしまう。これは一種の亂流で、この渦は亂流のモデルの一つになる。空氣の場合は渦は見えないが、氣流が亂れていればその中にいろんな大きさの渦があるだろうということは充分想像できる。次には茶碗に水を入れて箸でかきまわしたときを考えてみよう。水は不規則に運動をして、はつきりした渦は見えず水面にはいろんな形の波が立つ。この波も亂流のモデルなのである。渦にしる波にしる長い時間の後には亂れはおさまつて、その運動のエネルギーはすべて熱になる。Joule が熱力學の第一法則を實驗で確めた有名な裝置——容器の中の水をかきまわして温度上昇を測定した——あの實驗は或意味では亂流の研究の草分けともいえるものである。われわれは水車からどのようにして亂れが發生し、それがどのような過程で熱になるのかを知りたいのである。

この課題を分子論的にいつてみよう。氣體分子の一集團が或方向に平均速度を持ち、それに直角な方向に速度の勾配があるとき、いわゆる粘性力がはたらく。その力は或面を境にして速度のちがう分子が交換されるからおきると説明されている。氣體は粘性力に對して仕事をす。そしてその仕事は結局熱になる。これは層流の場合だが、或條件の下では分子の交換が個々に行われるだけでなく、多くの分子が集團を作つて距離的な規模で移動するようになる。これが亂れのそもそもの發生である。この集團は團結して整然とは行動しなくて、その中にまた小さい集團、またその中にさらに小さな集團という風に分派を作つている。これが亂れの構造である。こうしてできた亂れはもとの原因の速度勾配がなくなつても、かなりの時間存在を續け、いわゆる減衰しつつある亂流場ができる。これらの集團の運動エネルギーはやはり粘性によつて熱になり、長い時間の後には集團は全部消えてしまつて流れは層流に歸るか靜止する。

このような過程は渦というモデルでも表現できる。速度勾配から大きな渦ができ、それからだんだんに小さな渦ができる。或は小さな渦は大きな渦からエネルギーを貰うといつてもよい。これらの渦のうちどの大きさのものがどれ程エネルギーを持つていのかというのが亂れのスペクトルである。數學的にはスペクトルは不規則な速度變動の Fourier 變換として定義され、或波長のエネルギー成分はいくらといわれる。亂れのスペクトルは熟擾亂の雜音のように周波數に無關係なものではない。また成分の間のエネルギーのやりとりでスペクトルの形は變化するのである。

2. 等方性亂流

亂れという現象は相當に複雑なので、そのいろんな場合をひとまとめにして一般的な理論で扱うことはむづかしい。今のところごく簡単な場合のことだけしかわかつていないがその一つに等方性亂流の理論がある。この理論で假定する等方性とは、亂れについてのいろんな統計量が方向性を持たない、また場所的に一様で均一である、ということ、むづかしくいえば運動方程式と連續の式とから作られる統計量は座標の回轉、鏡映、平行移動に對して不變であるということである。こんな假定は實際の亂流とはかなりかけ離れているように見えるが、亂れは發生して時間が経つと等方性に近くなつてゆくことが實驗で確められているし、あとでわかるように複雑な亂れの中にも局所的に等方と考へてよい部分があるのでこ

の理論もかなり役に立つのである。

さて流體運動の基礎式, Navier-Stokes の式は

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i \dots\dots\dots (1)$$

(u は速度, p は壓力, 脚符 i は座標軸の方向)

であり, 流體の連続の式は

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

である。Kármán と Howarth はこの二つの式に或假定を入れて, 等方性亂れの運動エネルギーが時間的に減少する法則として

$$\bar{u}^2 \sim 1/t \dots\dots\dots (3)$$

を導いた。(1)

またこれをスペクトルの形に變えると

$$\frac{\partial \bar{u}^2 F(k)}{\partial t} = -2(\bar{u}^2)^{3/2} W(k) - 2\nu \bar{u}^2 \times \{k^2 F(k) + 4 \int_k^\infty F(k) k dk\} \dots\dots (4)$$

となる。(2) ここでいうスペクトルは空間的な波のモデルによるもので, 便宜上波長の代りにその逆数の波数かとつてある。 $F(k)$ は波数 k におけるスペクトルの値である。 $W(k)$ は實は長い式を一まとめにしたもので, エネルギーの遷移函数と呼ばれる。そのわけは (3) 式は或波数におけるエネルギーの平衡をあらわして、左邊はスペクトルの時間的變化, 右邊の第 2 項は粘性で熱になってしまうエネルギー, W を含む第 1 項は他の波数にあるエネルギーが流れ込む, 或は他へ流れ去ることを意味しているからである。この項があるためにスペクトルの扱いは非線型になり面倒になるが, この $W(k)$ こそは亂流の本質を代表するものといつてよいのである。

(4) 式から $W(k)$ 或は $F(k)$ を計算するには假定がもう一つ要る。そこで議論がいろいろに分れることになるが, 今粘性の影響を無視して $\nu=0$ といった場合には, $W(k)$ によほど變な假定をしない限り $F(k) \sim k^{-5/3}$ という結果が出る。粘性を零とすることは結局大きな渦だけに目をつけることで, この結果は波数のそれ程大きくない範圍のスペクトルに適用できるはずである。

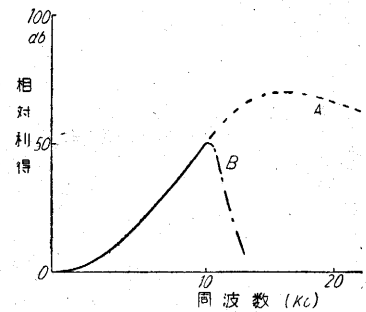
粘性のことを考えると $W(k)$ にどんな假定をおくかによつて $F(k)$ はいろんな形になる。例えば Heisenberg は大きな k に對して $F(k) \sim k^{-7}$ を與え, Kovasznyai は或大きさの k で成分がなくなつてしまうようなスペクトルを提案している。いずれにせよ今のところ $W(k)$ に對する假定は誰にでも納得できるというものではなく, スペクトルの全域が理論的にはつきりするまでにはまだ間があるようである。

3. 實驗裝置

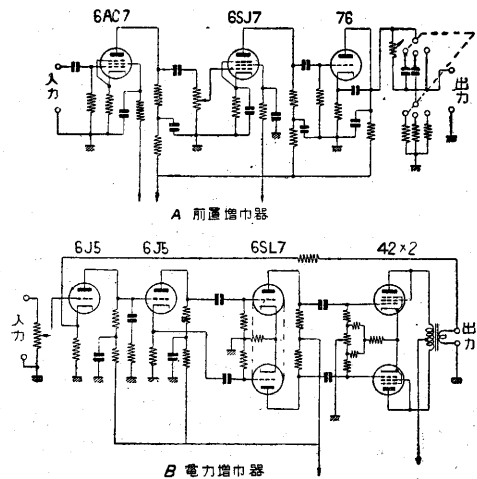
上に述べたような等方性亂流を作るのには風路の中に

十文字に組んだ格子をおいて風を吹かす。格子のすぐうしろでは速度勾配があり亂れが作られているから非常にこみ入つているが格子の目の大きさの 15~20 倍のうしろになると亂れの發生は止み, いわゆる減衰しつある等方性亂れ場ができる。これが理論で假定されるように完全なものかどうかはわからないからその亂れを測つた結果が理論と喰違つていたとしても或は一致したとしてもそこから急いで結論を引き出すことはできない。特に普通の風洞實驗では Reynolds 数が小さすぎるのが不満で, 計算の檢證を宇宙の星雲に求めようという雄大な考を持つ人もある。そして亂流理論は星雲の發達の歴史について一つの解釋を與えているが, こゝでは對象を風洞の中の亂れだけに限ることにしよう。われわれが生産技術研究所で使つてゐる風路は斷面 60 cm × 60 cm, 長さ 2.5 m というもので, 亂れの實驗にはこの程度のものが手頃である。

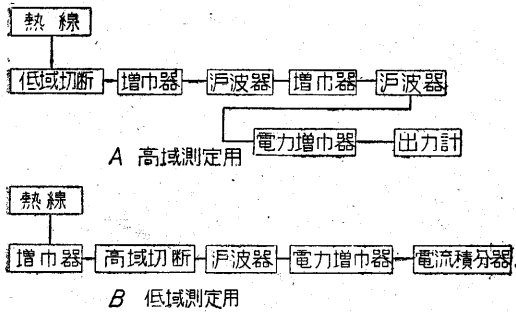
風速變動を測るには熱線風速計が使われる。ピトー管と U 字管とを組合せた風速計は慣性が大きくて役に立たないからである。白金の細い線を直流の電流で熱して氣流の中に入れる。風速によつて冷され方がちがうから白金線の温度もそれに應じて變化し, それと一緒に電氣抵抗が變る。これが熱線風速計の原理で, 氣流が亂れていれば熱線の両端には變動電壓が現われる。線が太いと熱容量が大きいので早い風速變動に追隨できないから, 直径 4~5 ミクロンのものがよく使われる。この程度のもので周波数 1 kc の風速變動に對しては感度は 0 c/s のときの 20% に低下する。熱線の出力は風速 10 m/s, 亂れの強さ ($=\sqrt{\bar{u}^2} U$, U は主流の速度) が 1% のとき約 1 mV であつて周波數域は 10 c/s ~ 10 kc である。この程度の入力に對する増幅器は割合簡単に作れるが, 熱線の周波數特性を補償するために高い周波數の部分で強調しなくてはなら



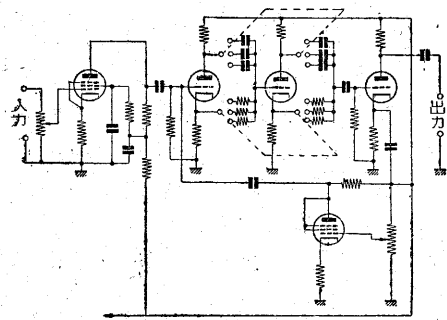
ず, それが 10 kc で 50 db にも達する (第 1 圖)。そこで實際の増幅器の帶域はいちじるしく廣くなり信號對雜音比が悪くなる。それで 10 kc の高域切斷濾波器 第 1 圖 増幅器に必要な周波數特性を組合せて B のような特性にする必要がある。亂れの周波數は大部分が audio frequency の中に含まれるので増幅して耳で聞くとカサカサと枯葉の落ちるような音がする。第 2 圖は増幅器の一例で筆者が今使つてゐるものである。小さな亂れを測るときは A と B の間に増幅器と高域切斷とを入れる。B は電力増幅器でいわゆる Williamson の饋還をかけて特性をよくする。



第2圖 増幅器



第3圖 ブロック・ダイアグラム



第4圖 移相帯域濾波器

スペクトルを測るには増幅器の途中に帯域濾波器を入れればよい。しかしスペクトルの形は周波数の高い所で急に小さくなるし、熱線の感度の低下が一段とこのことに拍車をかけるので、高低二種の周波数成分の測定に對して別々の考慮が必要である。第3圖は装置のブロック・ダイアグラムで、このように注意しても高い周波数の成分を良い精度で測ることは相當むづかしい。第4圖は濾波回路の一例で、この回路で饋還が適當に調節されれば $Q=50$ 程度の尖鋭さが得られる。このような濾波器回路では Q が大きくなると出力がゆるやかに變動する。特に低い周波数の成分の變動は非常に遅いのでメーターが讀めない。これは従來の實驗者のなやみの種であつた。そ

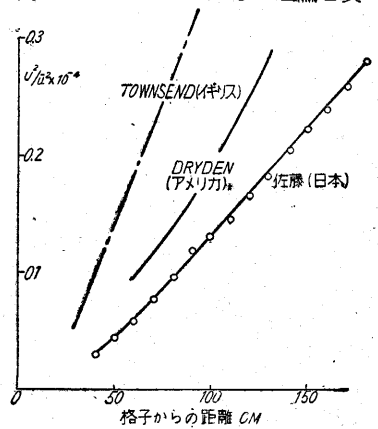
の對策としては時定数の大きな出力計を使うことが唯一の手段であつたが筆者は電流積分器を好んで用いる。⁽³⁾ これならどんなに變動する出力に對しても平均値がとれる。

電源はA電源は大體6V バッテリー、B電源には自動電壓調整器と安定率100位の電子管定電壓整流装置を組合せて使う。

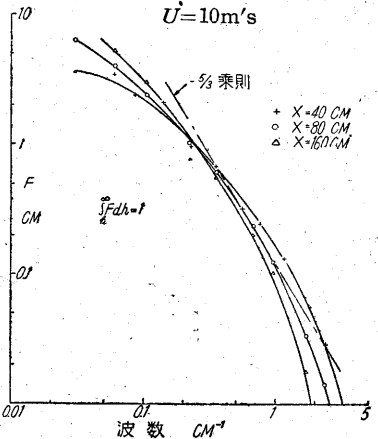
4. 實驗結果

以上のような装置で亂れのエネルギーを測つた結果は第5圖のようになる。これを見るとエネルギーは大體格子からの距離に逆比例して Kármán らの理論を裏書きしている。アメリカイギリスで得られた結果と値がちがうのは格子の形のせいである。

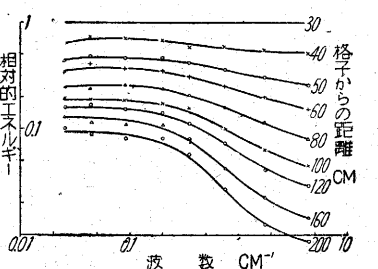
スペクトルは第6圖のようになる。横軸は波数でとつてある。波数とはこの場合 $k=f/U$ の關係で與えられ、空間的な波が主流に乗つて流れ、それが熱線に時間的な變動電壓を發生するものと考へたときの波長の逆数というやゝこしいものである。測定結果を見るとスペクトルはいわゆる $-5/3$ 乗則に對し一部分では肯定的だがその範圍は廣くない。Townsend らは同じような測定から $-5/3$ 乗則は風洞の中の亂れには通用しないと、きめつけている。三本の曲線を比較してわかることは、うしろの方にゆくほど高い波数の成分



第5圖 亂れエネルギーの減衰, $U=10\text{m/s}$



第6圖 エネルギー・スペクトル

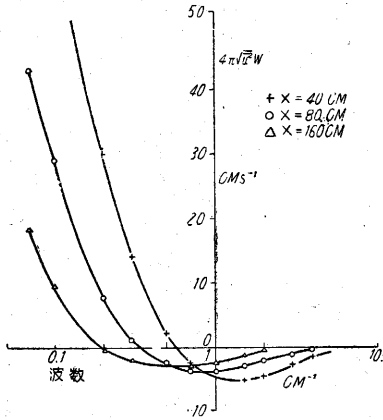


第7圖 エネルギー・スペクトル成分の減衰

が瘦せてくることである。このことをもつとはつきり見るためにスペクトルの成分別々の減衰を測定した。その結果は第7圖のようで $x=30\text{ cm}$ のときの値を1にとつてある。高い波数でエネルギーは急激に減つている。

スペクトルの形とこの成分の減衰との結果から(4)式を使つて波数の間のエネルギーの遷移が求まる。その結果が第8圖で、 W の正の値はエネルギーの流出を、負の値は流入をあらわしている。圖からもわかるように波数の小さい部分はエネルギーの源で自らは粘性によつて失うところは少くエネルギーをより高い波数の成分に與える。波数が大きいほど失う量が多くなり與える量は少くなる。或波数ではエネルギーを與えなくなり ($W=0$) さらに大きな波数では受取る側にまわり、エネルギーの消費は受取る量を上廻るようになる。このことをもつと類推的にいえば、見榮坊の細君を持つた安サラーマンに似ている。エネルギーの源は會社であつて彼は月給を貰い自分はほとんど使わなくて細君に渡すが彼女は受取つたものだけでは足りないので持つているものも賣拂つて費つてしまふ、

家の中にはだんだん物がなくなり主人公も細君もすつからかんになつておしまい、という過程である。第8圖を見ると格子から遠くなる程受取る側にまわる範圍が廣くなり、それと共に授受の規模自體も小さくなつて落ちぶれてゆく様子がよくわかる。



第8圖 波数間のエネルギー遷移

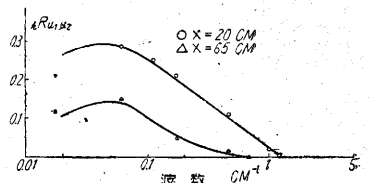
5. 非等方性亂流

等方性亂流の中に入らないいろいろな亂れ、例えば速度勾配から發生したばかりの亂れ、等方性になるまでの過渡的な亂れ、管の中や壁に沿つた亂流、これらは一まとめにして非等方性亂流と呼ばれる。等方から非等方になるところからは一段とこみ入つてくる。波数の間のエネルギー遷移だけでなく、空間的に異なる方向の速度成分の間にもエネルギーの授受があるからである。亂れが等方性になろうとするのはこの第二の作用によるもので、速度勾配から發生したばかりの亂れは非等方性だが、速度勾配がなくなつて發生が止むのとほとんど同時に亂れは等方性になるように見える。

非等方性亂流はこのように複雑なので、従來は亂れの擴散能力にだけ注目して、いろんな亂流場が研究されてきた。層流よりも亂流の方が熱や物質を擴散しやすいこ

とは當然で、コーヒー茶碗の中の角砂糖はスプーンで亂流が作られなければ中々溶けるものではない。いろんな亂流場について個々の知識は年と共にふえていつたが非等方性亂流の本質に迫ることはできなかった。有名な數學者 A.N. Kolmogoroff によつて提出された局所等方性の理論はこれに對する一つの解答である。(4) その骨子は非等方性亂流でも或尺度より小さい渦だけを考えると、それらは等方性であるというのである。この論文は戦後になつて急に注目を浴び、それに對する實驗が續々と發表された。Corrsin はこの局所等方性を確めるの一點における二方向の速度の積を時間的に平均した量 $u_1 u_2$ を提案した。これは等方性亂流においては零になるものである。もし局所等方性が成立つならば $u_1 u_2$ のスペクトルは或大きさの波数で零になるはずである。この方法で

Corrsin は噴流の中で、Laufer は二次元的な管の中で、局所等方性を實證した。筆者も風路の中に平行棒をおいてそのう



第9圖 局所等方性の驗證

ろに非等方性亂れを作り同様な測定を試みた。第9圖はその結果で $k=1\text{ cm}^{-1}$ の近くで $kR u_1 u_2$ すなわち $u_1 u_2 / \sqrt{u_1^2} \sqrt{u_2^2}$ のスペクトルは零となり局所等方性を示している。亂れの等方化の過程とはこの部分が高い波数からだんだん低い波数にまで及んできて遂に全域が等方性になる過程をいうものであることがわかつた。エネルギースペクトルの方は等方性のものでもそうでないものでも大體の形はちがわない。

6. むすび

亂れの細かい構造について主としてエネルギースペクトルの考え方によつて述べた。表現としてはほかに例えば二點の間の速度相關を使う方法もあるが、いずれにせよ今まで實用の方面で亂流擴散係數とか、亂れの尺度とか呼ばれていたものに對する基礎づけの努力にちがいはない。それが成功するまでにはまだ長いみちのりが必要である。當面の問題としても、亂れ發生の機構、異種の亂れの混合、自由表面を持つ亂れなど大きなものが残つている。しかし實驗技術の進歩によつて今後數年間のこの方面の成果は目覺しいものになるであろう

(1952・6・21)

文 献

- (1) Th. v. Kármán and L. Howarth: Proc. Roy. Soc. A 164, 192-215 (1938)
- (2) 谷一郎: 亂流理論 (克誠堂 1950)
- (3) H. Sato: J. Phys. Soc. Japan 7 (1952)
- (4) A.N. Kolmogoroff: Doklady Akad. Nauk SSSR 30 301-305 (1941)