

機 械 式 微 分 解 析 機

三 井 田 純 一

機械式微分解析機は各種の微分解析機の元祖をなすもので、電気式、電子管式等の解析機が生れた今日でも、それに劣らないよい點を備え、もつとも廣い應用分野を有している。これは最初の考案者 Bush が長年苦勞し、しかも彼が電気屋であるにもかかわらず、機械式を採用したという深いイワクが物語る通りである。この微分解析機を數年間使用して、しみじみ思うことは、計算機としてもつべき條件を實によくそろえているものだという點につきる。

1. 微分解析機

微分解析機は微分方程式の解を求める目的で作られた計算機械で、1925⁽¹⁾年にはじめて米國 M.I.T で V. Bush をはじめとする一群の研究者達により多年の試作研究の結果 Lord Kelvin の着想を生かして作られた。これを用いて理學、工學の多くの分野で多數の問題が解かれ、それだけでなくこの機械の偉大な能力はこれまでの解析的方法では多くの時間と勞力と費用をかけなければ問題の解明されなかつた分野における研究活動に刺戟をあたえた。

一方この機械に關する研究は英⁽²⁾獨⁽³⁾ソ連⁽⁴⁾その他の諸國で進められ第二次大戰前に少くとも世界で5臺建設されたと報ぜられている。MIT ではさらに高精度の包容度の大きな機械が自國ばかりでなく諸外國の研究者にも使用できるといふ國際的規模で 1935 年に5年の繼續事業として試作研究が開始され、1942 年に全計畫の半分(積分機 18 臺)を完成⁽⁴⁾しその後絶えず改良研究が行われている。General Electric 社⁽⁵⁾でも別個に積分機 14 臺の機械を完成した。

日本では 1949 年に理工學研究所において積分機 4 臺の機械式微分解析機⁽⁶⁾が完成され、これらの研究をもととしてさらに高精度の積分機の數 20 を目標とする機械が生産技術研究所で現在作られつゝある。また同研究所で電子管式微分解析機⁽⁷⁾が別個に試作されているし、電気試験所田無分室では電気式微分解析機⁽⁸⁾が完成された。以上三つの方式がわが國における代表的な方式である。

さて微分解析機はどうして方程式を解くかという問題

に入ろう。上に述べられた三つの代表的な方程式はそれぞれ別にくわしく本號に紹介されているから、ここにこれらをまとめる意味でそれらに共通な部分だけを説明しよう。そのまえに三つの方程式に便宜的に與えられた名稱は後にわかるように積分操作を行う部分、すなわち積分機の形式によつてつけられたものである。第1表を参照されれば理解が容易である。例えば(1)の項は積分機の形式が全く機械的であるために表記のような名稱になっているので、他の部分が電氣的裝置になつているかどうかは問題にしない。その他の方式も同様である。方程式の中に現れてくる變數の値は微分解析機の上ではいろいろな物理的な量によつて代表されている。このために Analogue Computer とよばれる一群の計算機の一つで電子計算機のような Digital Computer と區別される。

第1表 微分解析機の三方式の比較

	(1) 機械式	(2) 電気式	(3) 電子管式
積分機の形式	Wheel-Disk 型 (Kelvin 型)	Velodyne (Velocity-Servomechanism)	電子管回路
變數を代表する量	角 度	電壓、電流、角度等	電壓、電流

これらの變數を代表する量は方程式の中に含まれる變數の函數關係と全く同じ關係を保つように微分解析機上で適當に組合されるわけである。

n 階の常微分方程式は一般に次の形にかゝれる。

$$F(y(n), y(n-1), \dots, y(1), y, x) = 0 \quad (1)$$

最高次の微係數について解けるとすれば* (1) 式は

$$y(n) = f(y(n-1), y(n-2), \dots, y(1), y, x) \quad (2)$$

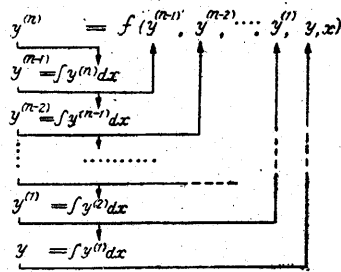
となる。この最高次の微係數について解いて(2)式の形にするかんたんな操作が微分解析機の上で方程式を解く基礎式となる。 $(n-1)$ 次以下の微分係數は $y(n)$ を次々に積分することにより同時に得られる。(2) 式を解くために機械化して行く過程を第1圖および第2圖を對照して理解されたい。

第2圖を見れば機能の上から微分解析機に必要な裝置が明瞭となる。

(1) 積分機と稱せられる部分は二つの input と一つ

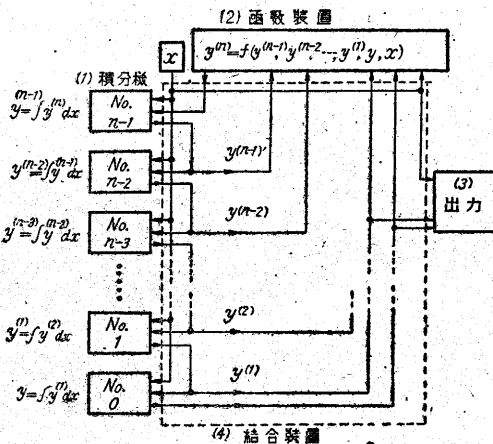
* (2) 式の形に解けない場合、例えば $y(n)$ について超微分方程式の形の場合も微分解析機により解くことは可能であるが、ここではそこまで立入らない。

の output をもつ。二つの input は積分変数と被積分変数に對應し、output は積分された値に對應する。積分機は次々に低次の微係数を作り出すために用いられる。



第1圖 微分解析機における変数の傳達

(2) 函数裝置の部分は一つの固定された裝置となつていないでいろいろな裝置の組合せによつて構成される部分で、解こうとする



第2圖 微分解析機の構成

る問題に應じてそれぞれ變つてくるわけで、主として入力裝置(函数を外から入れる裝置)、加算裝置等から構成されるが、時として積分機等を含む場合もある。そして $(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y^{(1)}, y, x)$ を受けとつて $y^{(n)}$ を算出し、これを No. 1 の積分機の被積分軸に送りこむ役をする。

(3) 出力は解を記録する裝置である。

(4) 結合裝置は以上三つの重要な裝置をつなぎ合わせる役をする。第2圖の結合により (2) 式を満足する閉じた回路が作られたことになり、獨立變數 x (電子管式の場合は時間 t となる) を入れれば (2) 式を満足する解を自動的に求めることになる。

解く問題により種々技巧を要するであらうが、どんな形式の微分解析機でも上に述べた原理にしたがつて働くわけである。

第2圖からわかる通り n 階の微分方程式を解くためには少なくとも n 臺の積分機を必要とすることがわかる。 $y^{(n)}$ から次々に $y^{(n-1)}, \dots, y$ を作り出すために n 臺の積分機を必要とする外に場合によつては函数裝置の中に積分機を加えなければならない場合も生ずる。例えば、積分機によつて函数を自動的に作り出す場合、その他積分機を作り出す場合等である。したがつて包容度を増すため

に微分解析機はできるだけ多くの積分機を持つことが望ましいが、積分機の数によつて解き得る方程式の階数は一義的にはきまらない。例えば四臺の積分機だけの場合ならば三階の方程式の解ける場合もあるし、二階の方程式しか解けない場合も生ずる。したがつて機械で解く場合方程式の複雑さを示す指標として解き出すに必要な積分機の数で示すのが妥當であるように思われる。

2. 機械式微分解析機つてきるまで

1949 年に一號機とでも稱すべき積分機4臺を持つ機械式微分解析機を理工學研究所で完成⁽⁹⁾し、これを用いて多くの問題を一通り解くことができた。これらの研究結果と經驗を生かして、さらにずつと複雑な問題の取扱える、精度の高い簡単に操作できる大型高精度微分解析機を作つて學問技術の進歩に役立てたいという希望が當然起つてきた。そこで第2號機の計畫に取りかゝることになり、これを生産技術研究所に設置することにきめられた。この第2號機はその一部を完成して今建設途上にあるが、こゝでは主として第2號機について説明しよう。

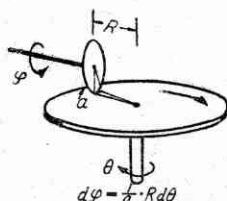
もちろん第1號機によつて得た研究と經驗が基礎となるけれども、今迄の方式にとらわれなくて、新しい要求をみたすためにすぐれた方式があればそれを取り入れるということを考慮して設計の方針が次の諸點にをかけた。

- (a) 複雑な問題もかんたんに操作できること、すなわち flexibility を増すこと。
- (b) 精度を上げること。
- (c) 速度を上げること。
- (d) 故障率を下げること、および誤差の起つた場合簡単に探知できること。
- (e) 經費および完成期間が適當になること。

これらの要求がどこまで満たされ得るか、またどの方式が最もすぐれているかをくわしく検討しなければならなかつた。その基礎となつたのは第一に第1號機研究結果であり、第二に主として生産技術研究所内の關係した諸分野の専門の方々の御教示、第三には諸外國における新しい進歩を示す文献の調査による結果、第四には二、三の點において近い將來の研究により解決しようという見通しがついたこと等であつた。

前にのべた設計方針 (a) を満たすためには積分機の数 を 20 とし、これらを結びつける結合裝置は十分な包容度を持つた機械的裝置を用うることになつた。積分機数を 20 とした理由は 20 あれば一通り複雑な問題を處理できるということと、10 臺で別々に運轉して二つの問題を別個に併行して取り扱えるという理由からである。積分機数は微分解析機の包容度を示す一つの指數と考えられるが、これらとバランスを取つた數の附屬裝置が

に $d\varphi = \frac{1}{a} R d\theta$ なる関係があることがわかる。この原理は今から約75年前英國の Lord Kelvin によつて提案されたもので、この原理によつて働く積分機を Kelvin 型積分機とよんでいる。第5圖に見られるような機構によりこの R



と U とを連動させれば、(5) 式の関係を持つ積分機が作られることは容易にわかる。ここに k は便宜のため $1/100$ ととつてある。(ただしこの場合 U, V, W の単位は 360° を1とする)。第5圖の構造を説明すれば、圓板はその中心軸を臺 A により支えられ、 A は Lead Screw により水平に Screw 軸に平行に滑ることができる。一方圓板の軸は V 軸とスパイラルギヤによりかみあつて、このギヤはキー溝のある V 軸とキーによつてかみあつているため V 軸上を A と共に自由に動きうる。圓板の

第2表 積分機の諸常数

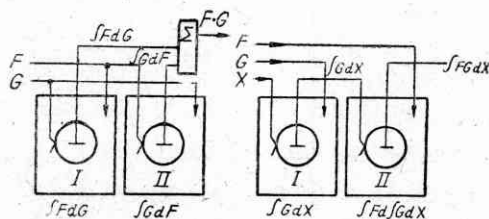
圓板直徑	200 mm
ローラー直徑	60 mm
Lead Screw Pitch	2 mm
積分機常数 k	1/100
出力軸最大速度	10000 RPM

上で回転しているローラーは圓板との非常に弱い摩擦力だけで動かされているから、この回転を外部に伝えるために直接つなぐことはできない。そこでこのローラーの角度を各瞬間に正しく、大きな回転力をもつて外部へ伝える別個の装置トルク増幅機または追従性能の非常に高いサーボ機構を必要とする。この部分の性能は他の部分の機械的精度と相俟つて機械全體の速度および精度を支配する。現在の装置は機械的トルク増幅機⁽⁹⁾を用いている。積分機の諸常数は第2表に示される。

微分方程式を解く場合に積分機を用いて最も有効に用い得る二つの方法がある。それは二つの函数の積を作る場合である。第一の方法は

$$F \cdot G = \int F \cdot dG + \int G \cdot dF \quad (6)$$

を機械的に作り出すことである。これには二つの積分機を必要としその結線圖は第7圖に示される。積分機 I の U, V 軸に F, G を入れ、積分機 II の U, V 軸に G, F を

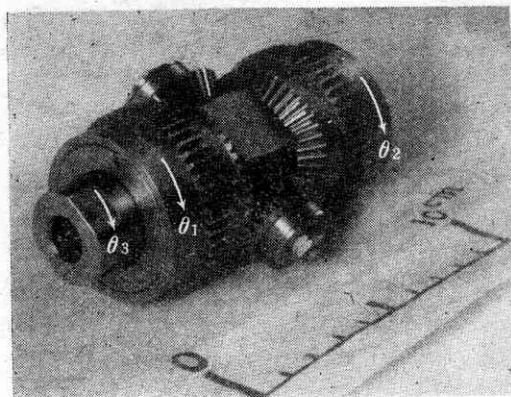


第7圖 $FG = \int F dG + \int G dF$ を作る結線圖

第9圖 $\int FG dX$ を作る結線圖

入れて、おのおの W 軸を加算機により加えその第三軸より $F \cdot G$ をとり出すことができる。

ここに出した加算機は加へ算を行う装置で、第8圖は完成した加算機の寫眞で圖に示される $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ の間に $\theta_3 = 1/2(\theta_1 + \theta_2)$ の関係がある。回転方向の正負を適當にとることにより差も取り出すことができる。



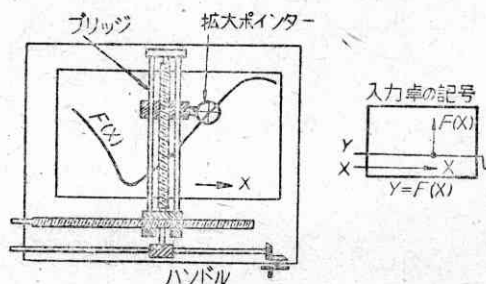
第8圖 加算機

第2の方法は二つの函数の積の積分にしてしまう方法である。この方法は有効でしばしば用いられる。それは

$$\int F \cdot G dX = \int F d \left\{ \int G dX \right\} \quad (7)$$

の関係により右邊の積分を機械で行うことで、やはり積分機二臺を必要としその結線圖は第9圖に示される。

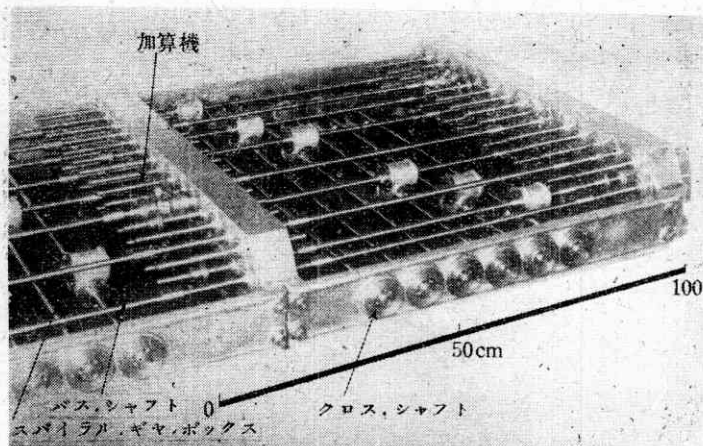
次に数値の表として知られた函数を機械に導入する必要がある場合にはその表を直角座標の上に適當なグラフとして方眼紙にかき、これを入力卓の上においてこの曲線を追跡する。第10圖はこの機構の概要を示している。



第10圖 入力卓の構造

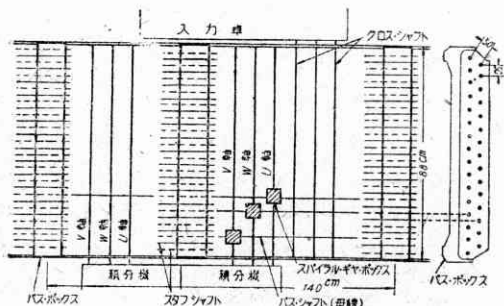
X 軸の回転によりブリッジは X 方向に自由に移動させることができ、 Y 軸はハンドルとギヤで結合されていてこれを回転することにより擴大ポインターを X 方向と直角に移動させることができる。ブリッジが X 方向に X 軸の回転により動かされるに従つて擴大ポインターを常に曲線上に保持するようにハンドルを回転すれば X に對應する $F(X)$ を機械に入れることができる。

第11圖は結合装置の圖面である。結合装置は積分機入力卓、出力卓等各ユニットをたがいに自由に結びつける装置であるからかんたんに結合を行うことができ、し

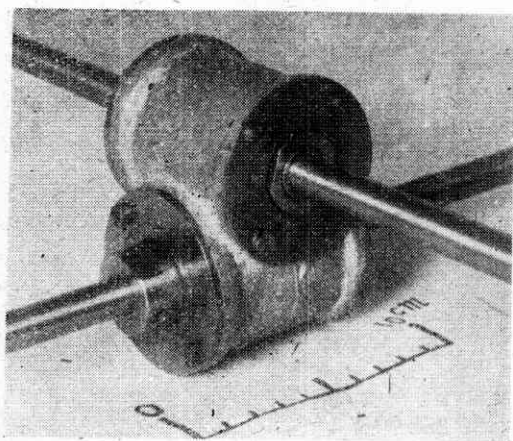


第 12 図 完成した結合装置

かもこれらの間で生ずる誤差を少くして角度の傳達を行はなければならない。バスボックスとよばれる一種の細長い箱は 31 本(上 15 本, 下 16 本)のスタッフシャフトをボールベアリングにより支持し, これらのスタッフシャフトはバスシャフト(母線)を結びつけていく役目をする。一方各ユニットが出たクロスシャフトはバスシャ



第 11 図 結合装置概略図



第 13 図 スパイラル・ギヤ・ボックス

フトと立體的に交叉しスパイラルギヤボックスにより希望するシャフトに結合することができる。このようにして一つのユニットの一つの軸と他の任意のユニットの軸とも自由に結合させることができる。その場合角度をそのまま傳達しないである回転比率をもつて傳達することが望まれる場合がある。このためにスタッフシャフトの間に適当な比率をもつたスパイラルギヤが挿入される。これらのギヤの組合せにより 0.1 より 0.1 とびに 1.0 までおよび 1 より 1 とびに 10 までの比を作り出すことができる。

次に提出された問題を機械の上で解くことに移ろう。微分方程式の分類および種々な用語等は解析の取り扱いから生じてきたものであるが、機械で解く場合は事情が全く異なる。機械で解く場合のい

ちじるしい特徴はその操作が理論的に全くかんたんであるということである。例えば解析の方法では線型と非線型とでは取り扱いが全く別であるのに反して機械の場合には全く一同に取り扱えるということである。その場合の一般的原則は特殊な場合を除いて前にのべられた方法をふめばよい。すなわち次の二つの過程が重要である。

- (1) 最高次の微係数について解きこれを次々に積分して行き, それらの各演算操作を各ユニットにあてがう。
- (2) 各ユニットの相対應する變數を方程式を満足するようにつなぐ。

かんたんな一例によつてこれを示さう。例えば

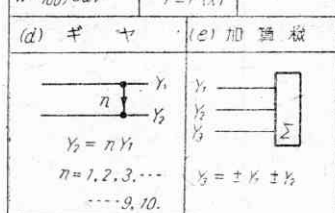
$$y' + f(y) = 0$$

を解こうとする場合 $y' = -f(y)$ とをき両邊を次々に積分して $y' = \int (-f) dx$, $y = \int dx \int (-f) dx$ を得るがこの二つの積分操作を二つの積分機に行わ

せ $f(y)$ を作るために一つの入力卓を用う。これらの操作を紙の上で設計する場合第 14 図に示されるような略號を用いて図にかきあらわして行くと便利である。(1) の過程は第 15 図に示され最後の完成された

図として第 16 図

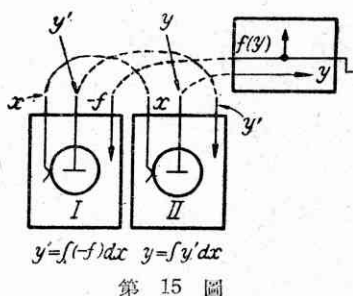
を得る。この場合例えば初期条件として y_0 と y'_0 を與えた場合は積分機 II の最初の移動を y'_0 とし, 積分機



第 14 図 微分解析機各ユニットの記號

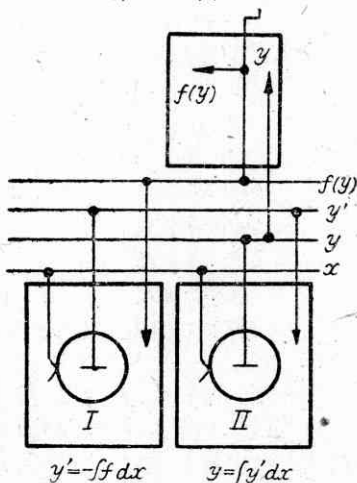
を與えた場合は積分機 II の最初の移動を y'_0 とし, 積分機

I の移動は $f(y_0)$ により與えられるからすべて最初の條件は機械の上でできる。この状態で、軸の回轉をはじめれば初期條件 y_0, y'_0 を持つた解が得られる。



第 15 圖

以上で第2號機を中心として機械式微分解析機の大要を説明した。近く積分機4臺までの機械が完成される豫定であるが、一號機にくらべてはるかに優秀な成果が期待されるであろうが、完全と云うるまでにはなお多くの時日をかけた研究を必要とするであろう。

第 16 圖 $y'' - f(y) = 0$ 解く結線圖

なお一方積分機の追従装置に高性能のサーボ機構を用うことや、入力卓を数表の形で送りこめるような Interpolator を持つた装置を作ること等その他多くの残された問題があるが、これらは現在および近い將來の研究として残されている。米國の MIT, Pennsylvania, 英國の Cambridge, Manchester 等の各大學における多年の研究成果を見てもローマは一日にしてならずという感を深くする。敗戦後の貧弱な經濟狀態の中でこのような研究が各所で行われていることは喜ばしいことである。

この研究の完成までに瀬藤, 兼重, 山内諸先生より激勵をいただいたこと、設計に關して特に河村, 高橋 (安人), 澤井諸先生その他委員會の方々より教えていただいた所が多い。むしろ共同研究の結果であるような色彩がつよいことを附記しておく。(27.2.11)

文 献

- (1) V. Bush, H. L. Hazen: J.F.I., 203 (1927) p. 575
- (2) D. R. Hartree, A. Porter: Nature, 135 (1935) April.
- (3) R. Sauer, H. Pösch: VDI-Zeit., 87 (1943) 231~224
- (4) V. Bush, S. H. Caldwell: J.F.I., 240 (1945) p. 255
- (5) H.P. Kuehni, H.A. Peterson: Trans. A.I.E.E., 63 (1944) May. p. 221~228
- (6) 渡邊, 三井田: 理工研報告, 3, (1949) p.
- (7) 本號に野村氏により紹介されている
- (8) 本號に伊藤, 栗松, 松野氏により紹介されている
- (9) 渡邊, 三井田: 生産研究, 昭 25 年 6 月, 7 月

計算機械は近代工學にどんな重要な貢獻をしているか——カ大工學部長ベルター博士はこういつている。

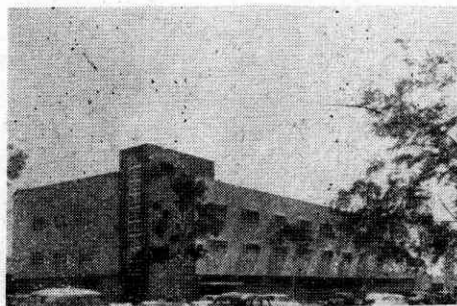
——カリフォルニア大學計算研究所要覽序文から——

計算機械は今では設計, 試作, 研究, 教育などの補助手段として廣く利用され, その應用分野も日に月にひろがつている。近代工學における多くの重要な問題の解決に役立っていることはよく知られている通りで, その價值も高く評價されている。

計算機械の試作および應用の副産物として得られた大切な教訓がある。計算機の試作の歴史をふりかえつて, 大きな進歩がなしとげられたのは物理學, 數學, 工學などの分野の間にそびえ立つた高い障壁が打破られた時であるという事實である。同様に實際に計算機を應用する場合にも, 計算機がその全能力を發揮するのは, 工學, 數學, 物理學などに共通な基本原理やこまかい技術を十分にのみこんでいる人によつて使用されるという時である。これらの教訓は, 形にはあらわれないが, 計算機が科學の分野に果たした大きな貢獻であるともいえる。

しかし全般的な見方をすれば, 計算機の果すべき最大の仕事は知識を整理し, 總合する場合の助けになるという點であろう。工學の廣い分野にわたる考え方ととりまとめて, いつでも手軽に利用でき, またおたがいに知らせ合うことができるような形にする。これが科學の進歩の土台をなすものである。

同大學(ロサンジェルス市)には微分解析機として機械式(寫眞, G.E. 製)と電子管式(フィルブリック社製),



カリフォルニア大學工學部



同大學機械式微分解析機

交流計算盤(グラビヤ), 熱傳導計算盤などのアナログ, コムピュタがあり, またこれに NBS の電子計算機, IBM 計算機(別文参照)をあわせてアメリカ西部全體の計算のサービスが行えるようになっている。