電子管式微分解析機

野村民也

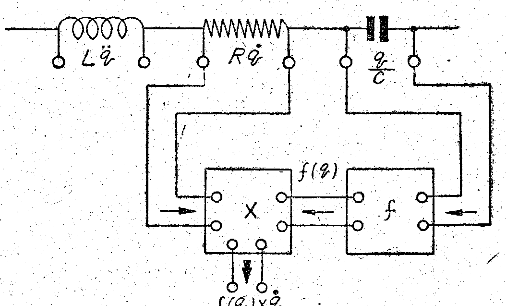
この微分解析機は電子管を用いた積分回路，加算回路など基本とする純電氣的微分解析機である．取扱いが簡單で，解答が手取り早く得られ，價格が安いなどという點で普及型の計算機として有望である．將來，工學の諸分野や數學の講義などで大いに活用されるものと豫想される．

1. 緒言

電氣回路を構成する要素のうち，誘導，容量の逆起電力が，電源の時間的微分または積分に比例することは，周知の通りである．從つてこうした要素を組合せた閉回路の諸現象を決定するものは，一つの微分方程式になることが容易に理解される．この回路に起る電壓や電流の時間的變化は，この微分方程式を解いた結果に他ならない．もし各部の特性や定數を必要に應じて，自由に與えうるとすれば，現象を支配する微分方程式を，任意に合成できるわけである．しかしてその時間的變化を記錄すればその結果は，方程式を電氣的に，自動的に解いたことになる．つまり一種の微分解析機を作りうるわけで，各部の機能を電子管回路の組合せによつて營ませれば，電子管式微分解析機ができるのである．

2. 電子管式微分解析機の原理

電子管式微分解析機の構成方法は，大別して二通りある．一つは機械的や電氣—機械的(電試型)微分解析機と同樣に，積分を與える電子管回路をもとにして，和を與える加算回路や，積を作るための掛算回路を組合わせる方法である．もう一つは電氣回路に特有の性質を利用するもので，構成原理が多少異るので一應說明をする．



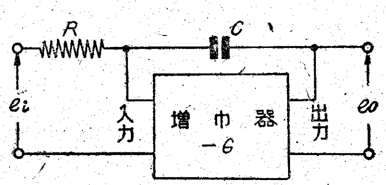
第1圖 L, C, R をもととする微分解析機の原理
$f(q)\times\dot{q}$ を作つている例を示す

第1圖は L, R, C の直列回路である．電荷を q とすれば前述の通り各端子電壓はそれぞれ $L\ddot{q}, R\dot{q}, Cq$ となり，二次迄の微係數に比例する量がえられる．與えられた微分方程式が，例えば $\dot{q}\times f(q)$ といつた量を含むものとすれば，C の端子電壓を f という任意函數を發生する回路で（機械的の場合の入力卓と同じ役目をする）に加え $f(q)$ を作り，その出力と R の端子電壓を掛算回路に加えてやれば，$\dot{q}\times f(q)$ に比例する量ができる．これは一例を示したにすぎないが，同樣の考えで，二階迄の任意常微分方程式が含むどのような項にでも，比例する量を第1圖をもとにつくれるので，それ等を組合わせて原方程式と相似的な關係を滿足する回路ができるわけである．積分回路を主體とする場合には，例えば二次の微係數は，二度續けて積分することの逆演算として與えるのであるが，この方法ではただ L があればよいのでいちじるしく簡略である．しかし二階以上の微分方程式を扱おうとすると，實用的な制約が少くないように思われる．その點からは積分回路をもとにする方式の方が一般性が高いので，以下その方を中心として解說することにしたい．

3. 演算回路

(1) 積分回路

第2圖で增幅器の入力端と出力端は容量 C で結合されており，一つの饋還增幅器となつている．時間函數としての信號 e_i を，抵抗 R を通してこの回路に加えると，出力電壓 e_0 は (1) 式を滿足する．



第2圖 積分回路
出力電壓 e_0 は入力電壓 e_i の時間積分になる

$$\frac{de_0}{dt}+\frac{1}{(1+G)CR}\cdot e_0=-\frac{G}{1+G}\cdot\frac{1}{CR}\cdot e_i \quad (1)$$

從つて增幅度 G が極めて大きいとすれば，左邊第2項が無視できて，

$$\frac{de_0}{dt}\fallingdotseq-\frac{G}{1+G}\cdot\frac{1}{CR}\cdot e_i\fallingdotseq-\frac{1}{CR}\cdot e_i \quad (2)$$

$$\therefore\ e_0\fallingdotseq-\frac{1}{CR}\int e_i\cdot dt \quad (3)$$

となり，e_i を時間について積分したものが，出力になることがわかる．すなわち，機械的その他の微分解析機に

おけると同様の積分回路ができるわけであり，$1/CR$ がその場合の Scale factor になつている．

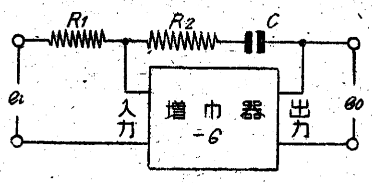
第3圖の回路構成では

$$e_0 \fallingdotseq -\left(\frac{R_2}{R_1}e_i \pm \frac{1}{CR_1}\int e_i\,dt\right) \quad (4)$$

(4) 式を變形すれば

$$e_0 = -\int\left(\frac{R_2}{R_1}\frac{de_i}{dt} + \frac{1}{CR_1}e_i\right)dt \quad (5)$$

となる．微分方程式で $(\dot{y}+ky)$ という組合せの項を含むことが多いが，(5) 式は正にこの形になつており，そのような方程式に對して，この回路は都合がよい．こうしたことが簡單にできる點は，電子管式微分解析機のもつ利點の一つである．



第3圖 $(\dot{y}+ky)$ を作る回路

積分回路の基本式 (1) において，入力電壓 e_i を單位函數とすれば，$e_0]_{t=0}=0$ として

$$e_0 = -G\{1-\varepsilon^{-\frac{t}{(1+G)CR}}\} \quad (6)$$

$$= -\frac{t}{CR}\left(1-\frac{t}{2GCR}+\frac{t^2}{6G^2C^2R^2}-\cdots\right) \quad (7)$$

(7) 式の右邊第2項以下が積分の誤差を與える．積分に要する時間を t_0 とすると，誤差 ε を小なりとして，

$$|\varepsilon| \fallingdotseq \frac{t_0}{2\cdot GCR} \quad (8)$$

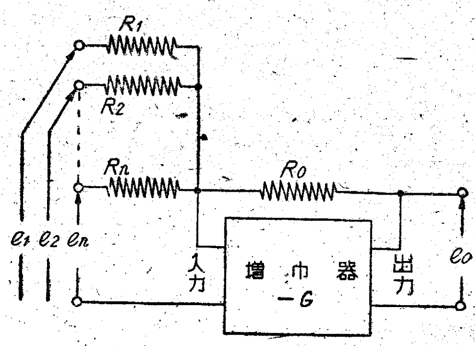
t_0 を小さく撰ぶことによつて誤差を輕減できるが，一方に反比例して増幅度の平坦部を，高い周波數の領域に迄擴げなくてはならない．しかし増幅器として抵抗—容量結合の交流増幅器が使えるので，回路構成は簡略にできる利點がある．ただし，饋還増幅器としての安定性の點から，到達しうる精度に制限を生ずる．一方，t_0 を大きく選んでも，GCR さえ十分大きくすれば誤差を小さくできるが，増幅器は必然的に直流増幅器にせざるをえないので，その安定度が問題になる．また，饋還容量自體の時定數も極めて大きい必要があり，絶緣材料の吟味が難かしくなる．

實際問題として，t_0 を短かくとつて交流増幅器を用いるか，長くとつて直流増幅器にするかという點は，いろいろと議論のわかれるところであろう．この點に關しては，後に改めて觸れることにしたい．

(2) 加算回路

第4圖に示すように，抵抗 R_0 をもつて饋還を行い，入力信號 $e_1, e_2, \cdots\cdots e_n$ をそれぞれ $R_1, R_2, \cdots\cdots R_n$ を通して加えると，出力電壓 e_0 は，増幅度 G が十分高いとして，

$$e_0 \fallingdotseq -\sum_{i=1}^{n}\frac{R_0}{R_i}e_i \quad (5)$$

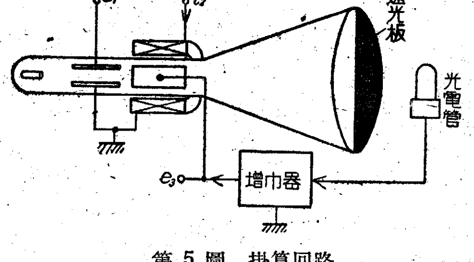


第4圖 加算回路
出力電壓 e_0 は入力電壓 $e_1 \sim e_n$ の和をあたえる

となり，和をつくることができる．R_0/R_i はその場合の Scale factor である．一般に電子管回路では，電壓を大地を基準として測る．つまり微分解析機で扱う從屬變數は一線(大地)を共通とする信號であるから，このように和を作るのに，信號を並列に加えられることは，極めて好都合なことである．

(3) 掛算回路

電子管式微分解析機では，獨立變數は時間しかとれないし，從屬變數も電壓そのものである．變數の積，すなわち電壓の積に比例する電壓を發生する回路が掛算回路になるわけであるが，ディメンションの異る二つの量の間に比例關係をもたせなければならない點で，機械量の介在する機械的や電氣—機械的微分解析機のような，安定かつ高精度の掛算は難かしく，電子管式の誤差を規定する一つの要素がある．幾つかの方式が具體化しているが，際立つて良いといえるものはないようである．一例として第5圖の回路方式をあげることとする．



第5圖 掛算回路
e_3 は $e_1 \times i_2$ に比例する

第5圖において，積をつくるべき一方の電壓 e_1 はブラウン管の縦軸偏向板に加えられ，もう一方の電壓に比例する電流 i_2 は，管軸上に卷いた線輪に流れるものとする．電子ビームは縦軸偏向板の間を通る時，e_1 に比例する縦軸方向の分速度をうるので，i_2 による軸方向の磁界により，$i_2 \times e_1$ に比例する横軸方向の力を受ける．螢光面の半面は，圖示のように遮光板で掩つてあり，輝點の横軸方向の變位は，光電管に對する入射光量を變化する．この變化に伴う増幅器の出力 e_3 は，横軸偏向板に加えられていて，輝點の變位を矯正するようになつてい

る．すなわち，輝點が遮光板の方にかくれようとすれば e_3 は輝點を遮光板の方から押し出そうとし，逆に出てこようとすれば，かくすようになつている．從つて，平衡の位置は，常に遮光板の境界線上にくることになり，前記の $i_2 \times e_1$ に比例する力は，e_3 による逆方向の力と平衡するわけである．よつて

$$e_3 = k \cdot e_1 \times i_2 = k' e_1 \times e_2 \qquad (6)$$

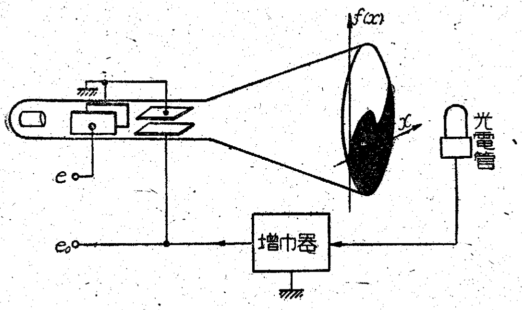
となり，二つの變數の積に比例する電壓をつくりうる．

この方法は一見極めて迂遠なようであるが，次に述べる任意函數發生回路が，ほぼ似たような回路構成なので相互の流用ができ，比例係數が電子ビームの速度以外はほとんど幾何學的量で決まるので，安定性が良い點等，幾つかの特徴をもつている．誤差は，磁界，縦，横三軸の非直交性，螢光體の殘光時間，磁界の端効果等に起因する．

(4) 任意函數發生回路

獨立變數および從屬變數に對する任意の函數を與えうる必要がある．いくつかの方式があるが，代表的一例について說明する．

第6圖に示すように，ブラウン管の螢光面上に，縱，横兩軸と平行に $f(x)$ の直交軸グラフに沿つて切抜かれた遮光板をおく．掛算回路と同じく，光電管と增幅器を



第6圖　任意函數發生回路

e_0 は $f(e)$ に比例する

通して縱軸偏向板に加わる電壓 e_0 は，輝點を遮光板の境界線上に常に位置させるよう働らくから，橫軸に加わる電壓 e によつて，輝點は左右に，境界線に沿つて移動する．規準の位置から測つた遮光板の高さは，ちようどそれだけの偏向に必要な縦軸偏向板に加わる電壓に比例することになり，

$$e_0 = kf(e) \qquad (7)$$

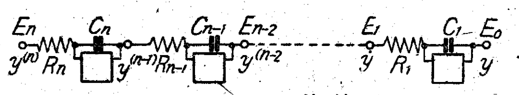
横軸の電壓として鋸歯狀波を用いれば，時間（獨立變數）に對する任意函數發生回路になる．

誤差としては，兩軸の直交性，螢光體の殘光特性，偏向感度の非一樣性，パララックス，輝點の大きさ等が原因であり，到底機械的入力卓に見られるような精度をうることは困難である．掛算回路と共に，電子管式微分解析機の綜合誤差を大きく左右する要因となつている．

電子管式微分解析機では，積分回路，加算回路等は比較的廉價にでき，また精度も或程度期待できる設計が可能である．從つて獨立變數に對する任意函數が，常係數の微分方程式で與えられるような場合は，別にその微分方程式を解いて，その結果を用いる方がよい．三角函數指數函數等はこのような取扱いに好適である．また，冪級數の數項をもつて近似しうる函數も同樣である．

4. 使用法

第7圖に示すように，n 組の積分回路を縱續に接續す



第7圖　基本接續

n 個の積分回路によつて，n 次までの微係數を作ることができる

ると，各接續點の電壓 E_i は

$$E_n = \frac{d^n e}{dt^n} \qquad (8)$$

として

$$E_i = (-1)^{n-i} \cdot K_n \cdot K_{n-1} \cdot \cdots\cdots \cdot K_{i+1} \cdot \frac{d^i e}{dt^i} \qquad (9)$$

ただし　$i = 0, 1, \cdots\cdots, n$　$K_i = \dfrac{1}{C_i R_i}$

となるから，n 次迄の各微係數に比例する電壓をつくることができる．これ等に演算回路を組合わせて，與えられた方程式の analogy を作るのである．

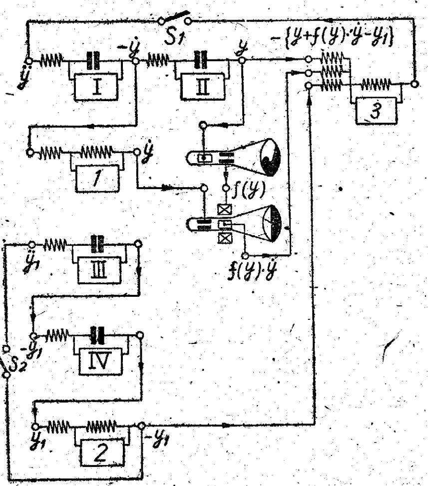
一例として

$$\ddot{y} + f(y) \cdot \dot{y} + y = \sin(\omega t + \theta) \qquad (10)$$

を解く回路を說明する．$\sin \omega t$ は $f(y)$ と同じく第6圖の回路で作つてもよいが，こゝでは

$$\ddot{y}_1 + \omega^2 \cdot y_1 = 0 \qquad (11)$$

の解であることを利用して，積分回路，加算回路の組合わせで作つている．第8圖が解法の結線圖である．積分



第8圖　$\ddot{y} + f(y) \cdot \dot{y} + y = \sin(\omega t + \theta)$ の結線圖

解は必要な個所に記錄裝置を接續して記錄する

回路 III の入力電壓を $\ddot{y}_1$ とすると，IV の出力は y_1 に比例する．加算回路2を一度通すことにより，符號が反

轉し，$-y_1$ となる．S_2 を閉じれば，III－IV－2 の回路では，$\ddot{y}_1=-ky_1$ の關係が成立していることになるから，(10) 式の右邊の正弦振動の項がつくれる．一方，積分回路 I の入力電壓を $\ddot{y}$ と考えると，II の出力は y. これを f という任意函數發生回路に入れて，$f(y)$ を作る，積分回路 I の出力は $-\dot{y}$ であり，加算回路1を通して符號を變えて $\dot{y}$ を作り，前の $f(y)$ と共に掛算回路に入れれば，$f(y)\cdot\dot{y}$ ができる．これと II の出力 y，および III－IV－2 で作つた $-y_1$ を，加算回路3で加えると，その出力は $-\{y+f(y)\cdot\dot{y}-y_1\}$ である．S_1 を閉じればこの出力は I の入力 $\ddot{y}$ と等しいという條件が成立する．すなわち

$$\ddot{y}=-\{f+y(y)\cdot\dot{y}-y_1\} \qquad (12)$$

y_1 は (11) の解であるから，(12) と (10) は全く同形になることが分るであろう．すなわち，第8圖で回路を閉じれば，電壓變化を時間に對して記録することによつて，(10) の解が自動的に求まるのである．

5. 實用化に對する諸問題

電子管式微分解析機の各部の構造と原理の大要は以上のようであるが，少なくとも汎用を目的とすると，種々な方面から考察を加える必要があるように思われる．もとより限られた紙面で詳細はつくし難いが，筆者の見解を述べることにする．大方の御批判を仰げれば幸いである．演算回路を直流增幅器にするか，交流增幅器式にするかの問題がある．前者は精度を期待し，後者は計算速度と，取扱いの簡便さをねらつている．しかし，前者によつて總合精度を期待するならば，純電氣的な掛算回路を採用することは無意味であり，電試型に見るような，電位差計を用いた方式等によらざるをえない．このことは一方に計算速度の低下を招き，一方には記錄裝置その他機械的な部分の使用が多くなるので，經費もかさむ結果となろう．とは申すものの，機械的乃至は電氣—機械的微分解析機にくらべれば，尙價格は低いと思われるが特に後者と比較すると，構造上の差異が積分裝置にあるだけであり，機能的な違いはほとんどなくなる．安定度その他の點で電子管式には缺點があり，結局，その選擇の基準は經濟的であるいう一點にかかつている．

電子管式微分解析機は，計算速度が早いこと，取扱いが簡便で，特に係數その他，パラメータを數多く取換えて見る必要がある時等に，簡單にできること等の點が遺憾なく行えてこそ，意味のあるものと考える．例えばある現象を支配する微分方程式の形だけわかつており，實験的觀測をもととして，その方程式の各項を定めたいというような問題は，多くの cut-and-try を必要としよう．機械的のように一回の演算に要する時間が長くかゝるのでは具合が悪いが，電子管式では比較的容易に扱うことができる問題である．精度の點は云々されるが，適當な設計をすれば，1～5% 程度にはできる．もちろん工學的問題に，この程度の精度で十分な場合も多いであろうし，特に精度が必要であれば，機械的その他の微分解析機にかけ直すか，逐次計算法等を適用すればよい．この場合にも，電子管式によつて，解の必要範圍や變域を知つておれば，以後の手續においてむだな勞力をはぶくことになろう．このような，より精度の高い解析への補助の役割も大切な點で，筆者がこの方式の實現を意圖しているのも，一方に機械的微分解析機ができていることが，一つの理由になつている．以上のように考えてくれば，電子管式微分解析機は，交流增幅器式にして十分その特徴を生かしうるものといえるのである．

前述の通り交流增幅器式の解に要する時間は短かいから，適當な繰返し周波數で回路を斷續し，ブラウン管上に解の靜止圖形の現われるようにする必要がある．こうすると，初期條件や係數の變化は，ただちに解の形狀の變化になり，上に述べたような問題に對して好適であることがわかろう．ブラウン管自體の記錄精度は低いが，適當な手段によつて，輝點の大きさ，軸の非直交性，偏向感度の不一樣性などが直接精度に影響しないようにもできるから，心配はない．

交流增幅器式として，回路を斷續する場合，增幅器の容量の電荷を，解を求める初期において一定の狀態に保つ工夫をしないと，一回々々初期條件が違う結果になる．そのために，ある期間で解を出し，次に各電荷が定常に達する時間回路を切り，ついでまた解を出すという風にしている．筆者の試作裝置では，50 サイクルの半周期に解を描き後の半周期で初期條件を整えている．

6. 結　語

以上電子管式微分解析機の原理と，構造の大要を御紹介し，特にその特徴を明らかにする點に重きをおいた．實際に使用するに當つては，例えば發散項を含む場合，特異點のある場合等，數學的考慮を必要とする點も殘つているが，こゝでは原理的な內容にのみにとどめておくことにする．詳細については文献を參照していただきたい．研究に當つては星合教授初め第3部の教官各位，工學部山下教授，渡邊，三井田の諸氏，試作に對し黑川兼行，城水元治郎の諸君の御援助によるところが大きい．記して謝意を表する次第である．なお，文部省總合研究費の補助によつて研究が進められていることを附記する．(27.2.1)

文　　献

(1) A.B. Mcnee: I.R.E. 37, pp. 1315-1323 (Nov. 1949)
(2) D. McDonald: R.S.I. 21, pp. 154-157 (Feb. 1950)
(3) MIT. Rad. Lab. Series: 21, part I (McGraw-Hill Co. 1948)
(4) C. D. McCann, C. H. Wilts, B. N. Locanthi: I.R.E. 37, pp. 954-961 (Aug. 1949)
(5) R.L. Garwin: R.S.I. 21, pp. 411-416 (May 1950)
(6) D. L. Whitehead: Westinghouse Eng. 10, (No. 6. Nov. 1950)
(7) 野村，黑川：電氣三學會第 25 回大會豫稿 13. 25. 昭26年5月
(8) 野村：電氣三學會東京支部大會 13. 14. 昭和 26 年 11 月