

# 高速度で動くジャイロスコープの力學的研究

末 岡 清 市

航海中の船舶にとっては目とも耳ともいふべき役目をもっている羅針儀の原理はいたつて簡単な力學の例題で、角運動量と力の能率との關係から理解される。この羅針儀を非常に早く地球上で動かすとき、例えば航空機にのせるときにどういう運動が考えられるであろうか？ この問題も上の觀點からみると一つの相對運動の例として、あざやかな一般化が行えるのである。

## 1. 緒 言

剛體の力學において空間的の運動を行う最もよい例題としてジャイロスコープの運動がどの教科書を開いて見てもあげられている。それほどこのジャイロスコープの運動は剛體の三次元運動の特長をよく表わしている典型的な模型である。この一見あまりにも簡単に作爲的にすら見える例題の原理が非常に大きな實用性をもっているのにおどろくと同時に、大げさにいつて理論と實際とはなすことのできない密接な關係を示す具體的な一つの例をこのジャイロスコープに見出すことができるということによからう。

航海計器として船舶の運行に缺くことのできない羅針儀がこのジャイロスコープの端的な應用であることはあまねく知られているが、航空機の發達に伴つて航空計器として種々の應用面を有していることも忘れることはできない。レーダーの發達する以前は轉輪羅針儀が航海計器としてほとんど獨占的地位を確保してきたものであるから、もちろん羅針儀は簡単なジャイロスコープだけではなく實際の要求に應じて種々の技術的改良が加えられまたその改良型式も二三には止まらない。しかしこれらについて詳述するのは筆者の任でもないから省くこととして<sup>1)</sup>、すべてを包括する意味で簡単な力學的模型で話を進めることとしよう。

ところでジャイロスコープの力學として從來展開されている理論は航海計器としての羅針儀だけを對象としたせいもあつて、ジャイロスコープを地球上の一地點に固定して考え、地球の自轉による角速度 ( $\sim 7.27 \times 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$ ) だけを考えに入れている<sup>1)</sup>。この場合船の航行速度は單なる補正として考慮されたのに過ぎず、航行速度の大きなき従つて地球面上を航行するために生ずる角速度(航行速度毎時 100 海里で  $8.08 \times 10^{-6} \text{ sec}^{-1}$  程度、毎時 900 海里で上記の  $7.27 \times 10^{-6} \text{ sec}^{-1}$  に達する)が地球自轉の角速度に比してそれほど小さくないときには從來の理論では不充分であることは明らかであろう。この點を根本的に考えなおし、航行速度による角速度を無視しないで、さらにまた補正というような姑息な手段に

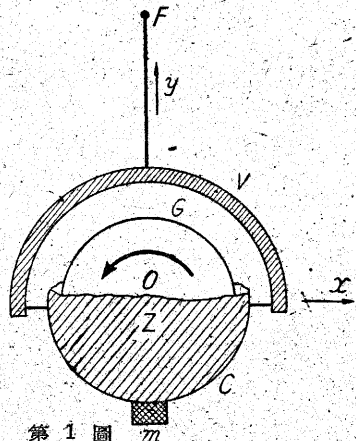
頼らずにこれを理論の正面に持ち出し改めてジャイロスコープの理論を考えなおしたらどうなるであろうか。この考えでわれわれの理論を組立てよう<sup>2) 3)</sup>。従つて從來の理論は特別な場合としてこの中にふくまれてしまうから、必要に應じてその點をものべていくつもりである。

## 2. ジャイロスコープの運動方程式

ジャイロスコープの大體の構造は第1圖の通りである。

ジャイロ (轉輪)  $G$  はジャイロ筐  $C$  の中にあり、ジャイロ軸  $Oz$  (紙面に直角) のまわりに高速度で廻轉している。この廻轉は通常電動機で與えられる。 $C$  は通常水平である  $Ox$  軸のまわりに自由に廻轉する。

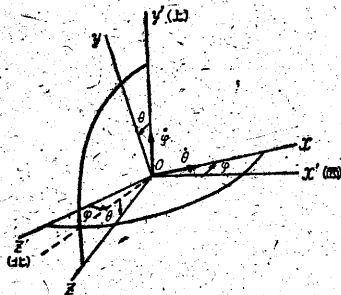
$Ox$  軸によつて  $C$  および  $G$  を支えている鉛直環  $V$  は  $O$  から  $Oy$  軸で支えられ、この  $Oy$  軸のまわりの廻轉は自由である。原點  $O$  はジャイロスコープの重心にとる。従つてジャイロスコープは重心で支えられていることになる。この構造から考えてジャイロ軸  $Oz$  は空間内のどんな方向をとることもできることは明らかである。このジャイロの運動ははなはだ天邪鬼 (アマノジャク) であつて、 $Oz$  軸を鉛直面内で傾けようとして力を加えると  $Oz$  軸は  $xy$  面内で廻轉していわゆる歳差運動を起すのである。この意味でジャイロの運動はわれわれの普通の直観では割り切れない。しかしこれも力學的に考えれば當然のことである。なお筐  $C$  の下方に重錘  $m$  を付けておく、この型は通常重錘型とよばれるものであるが、その他の型も單純化して考えると



第1圖

上記のものと力学的には大體同等であるのが知られるから、これからはこの模型で調べていくことにする。

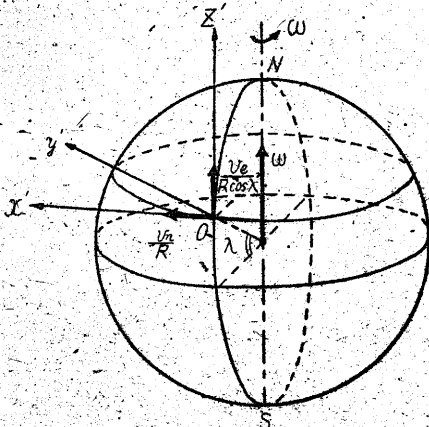
すでに述べたようにジャイロスコープの運動では角運動量がその基礎であるから、上の装置を地球表面の上で動かすときどのような角運動量が得られるかを調べる必要がある。この角運動量はジャイロ軸が静止座標系（ニュートン力学でいう慣性座標系のこと）に對してもつてゐる角速度ベクトル  $\vec{\omega}$  が知れば容易に求められるから、まず  $\vec{\omega}$  を求めてみよう。ジャイロ軸に固定した座標  $Oxyz$  (第1圖) の慣性系に對する相対角速度を求めるには中間に地球上のジャイロスコープのある地點に固定した座標系  $O-x'y'z'$  を媒介として考えると考えやすい。  $O-x'y'z'$  系では  $x', y', z'$  の正の方向をそれぞれ西方、鉛直上方、北方にとることにし、便宜上ジャイロ筐に固定して考える。  $Oxyz$  系の  $O-x'y'z'$  系に對する相対角速度は次のようになる。すなわち第2圖のようにジャイロ軸 ( $Oz'$ ) が北から西へ  $\theta$  だけ傾き、水平面より下方に  $\phi$  だけ傾いたとすると  $Oxyz$  系の成分で  $(\dot{\theta}, \dot{\phi} \cos \theta, -\dot{\phi} \sin \theta)$  である。



第2圖

ただし、は時間微分を表わす。次に  $O-x'y'z'$  系の慣性系に對する運動によつて生ずる角速度を考えなければならない。この角速度は二部分からなる。第一の部分は地球の自轉によつて生ずるもので、それは地球自轉の角速度を  $\omega$  とし、  $O$  のある地點の緯度を  $\lambda$  とするとき  $O-x'y'z'$  系の成分で  $(0, \omega \sin \lambda, \omega \cos \lambda)$  で與えられる。

第二の部分はこゝで新しく考慮する部分で、  $O$  點あるいはジャイロスコープが球面である地表面を運動することによつて生ずる部分である。  $O$  點のもつ速度を  $\vec{v}$  とし、その北方および東方への成分をそれぞれ  $v_n, v_e$  とす



第3圖

る。従つて、  $v^2 = v_n^2 + v_e^2$ 。第3圖から明らかなように  $\lambda$  なる緯度線を  $O$  が動くのであるから、半徑  $R \cos \lambda$  なる圓上を  $v_e$  で東へ動くため北方に向う  $v_e/R \cos \lambda$  なる角速度を生ずる。ただし  $R$  は地球の半徑とする。次に  $v_n$  なる速度で北方に向つて経度線上を動くために西方に向う  $v_n/R$  なる角速度を生ずる。(こゝで  $v_n = R \dot{\lambda}$  なる關係が成立する)。この二つを一緒にして  $O$  が動くために生ずる解速度ベクトルは  $O-x'y'z'$  系の成分で  $(v_n/R, (v_e/R \cos \lambda) \sin \lambda, (v_e/R \cos \lambda) \cos \lambda)$  となる。この第一、第二の部分を一緒にしてかくと  $O-x'y'z'$  系が慣性系に對してもつ角速度ベクトルは  $O-x'y'z'$  系の成分で  $(\dot{\theta}, \dot{\omega} \sin \lambda, \dot{\omega} \cos \lambda)$  の形にかくことができる。こゝで  $\dot{\omega} = v_n/R = \dot{\lambda}$ ,  $\dot{\omega} = \omega + v_e/(R \cos \lambda)$  とかいたのである。これを  $Oxyz$  系の成分で表わすには  $Oxyz \rightarrow O-x'y'z'$  なる座標變換

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ \sin \phi \sin \theta & \cos \theta & \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta & -\sin \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (1)$$

を用いればよい。これで變換したものに初めの  $(\dot{\theta}, \dot{\phi} \cos \theta, -\dot{\phi} \sin \theta)$  を加えたものが  $\vec{\omega}$  の  $xyz$  成分で

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \dot{\theta} - \dot{\omega} \cos \lambda \sin \phi + \dot{\omega} \cos \phi \\ \alpha_y &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\omega} \cos \lambda \cos \phi \sin \theta + \dot{\omega} \sin \lambda \cos \theta + \dot{\omega} \sin \phi \sin \theta \\ \alpha_z &= -\dot{\phi} \sin \theta + \dot{\omega} \cos \lambda \cos \phi \cos \theta - \dot{\omega} \sin \lambda \sin \theta + \dot{\omega} \sin \phi \cos \theta \end{aligned}$$

なる形で與えられる。このようにして角速度がきまれば角運動量は容易に求められる。すなわちジャイロ筐をふくめてジャイロのもつ主慣性能率を  $x, y, z$  方向につきそれぞれ  $A, B, C$  とし、さらにジャイロは  $z$  軸のまわりに電動機によつて廻轉しているからその廻轉による角運動量を  $H$  と表わすことにすると、このジャイロスコープのもつ角運動量の  $Oxyz$  系での成分は  $(A\alpha_x, B\alpha_y, C\alpha_z + H)$  で與えられる。

これらの量を用いると剛體力學の基礎の方程式である Euler の運動方程式を用いて運動を調べることができる。いま角運動量ベクトルを  $\vec{M}$ , ジャイロスコープに働く力の能率のベクトルを  $\vec{N}$  で表わすと、  $\vec{M} = (A\alpha_x, B\alpha_y, C\alpha_z + H)$  であつて Euler の運動方程式は

$$\frac{d\vec{M}}{dt} + [\vec{\alpha}, \vec{M}] = \vec{N}$$

で與えられる。  $[\vec{\alpha}, \vec{M}]$  は  $\vec{\alpha}$  と  $\vec{M}$  とのベクトル乗積を與えるものである。すでにのべた  $\vec{M}$ ,  $\vec{\alpha}$  の成分を用いて上の式を分解して考えればよいのであるが、このまゝでは複雑に過ぎるから妥當と考えられる近似をとつて考えよう。まず  $\vec{M}$  の項はジャイロ軸のすでにのべた歳差運動に比してさらに一次高い精度の運動を表わすもので通常羅針儀としてジャイロスコープを用いる範圍では問題になくてもよいものであるから今は省略して考える。また Euler の方程式の  $z$  方向の成分の式は運動自體には關係がない、というのは元來剛體として3自由

をもつていたものを2自由度として  $\theta, \varphi$  だけで記述したのであるから、このために制限が加わっている。すなわち  $Ox$  軸が常に水平面にあるという仮定がそれで、この仮定を成立せしめるための条件があるはずである。この条件は  $N_x$  が任意ではないことによつて表わされるので、その値を與える式が Euler の  $z$  成分の式であると解してよい。従つてこゝではこれを省いてしまう。次に  $[a, M]$  の  $x, y$  成分はそれぞれ  $H\alpha_y + (C-B)\alpha_z\alpha_x - H\alpha_z + (A-C)\alpha_x\alpha_z$  で與えられるが、 $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$  は木體  $\omega$  の程度の量であり、 $\omega$  に比しジャイロの廻轉ははるかに大きくしてあるから  $H$  は  $A\alpha_x, C\alpha_x, B\alpha_z, C\alpha_z$  に比べてはるかに大きい量であると考えてよいので、 $[a, M]$  の  $x, y$  成分をそれぞれ  $H\alpha_y, -H\alpha_z$  で置きかえてもよいことになる。こうすると運動方程式では

$$\left. \begin{aligned} \cos\theta \cdot \dot{\varphi} + \bar{\omega} \cos\lambda \cos\varphi \sin\theta + \bar{\omega} \sin\lambda \cos\theta \\ + u \sin\varphi \sin\theta = N_x/H, \\ \dot{\theta} - \bar{\omega} \cos\lambda \sin\varphi + u \cos\varphi = -N_y/H \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

という簡単な形の聯立微分方程式となる。

次に求めなければならないものは力の能率  $N_x, N_y$  である。ジャイロスコープは重心を支えていると假定しているから能率をとるべき力はすべて  $C$  に附けてある重錘に働くものだけを考えればよい。今の場合ジャイロスコープの横縦のユレは考えず、ただ全體が地球表面上を併進運動(實際には球面運動)をしているものと假定すると重錘に働く力は重力とジャイロスコープの運動による慣性力とだけである。慣性力としては加速度による力の他に球面運動をするために生ずる遠心力、Coriolis の力等があるが、簡単のため後の二つは省略することにする。従つて働く力は  $x'$  方向に  $m\ddot{v}_x$ ,  $y'$  方向に  $-mg$ ,  $z'$  方向に  $-m\ddot{v}_z$  だけとしてよい。この  $x'y'z'$  系の成分で  $(m\ddot{v}_x, -mg, -m\ddot{v}_z)$  で與えられる力のベクトルを (2) の變換を用いて  $xyz$  系の成分で表わし、次に第1圖で  $O_m$  の距離を  $l$  とすると重錘の位置は  $xyz$  系で  $(0, \gamma l, 0)$  となるから力の能率の成分は容易に求められる。その形は

$$\left. \begin{aligned} N_x &= -b \sin\theta + \frac{b}{g} \cos\theta (\ddot{v}_x \cos\varphi - \ddot{v}_z \sin\varphi), \\ N_y &= 0, \quad \text{ただし } b = mgl. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(3) を (2) に代入すればジャイロスコープが高速度で動いているときにも用いることのできる基本の方程式が得られるのである。これをもとにして色々のことを調べることができる。

### 3. 自由振動

まず第一にジャイロスコープの自由振動をもとめて見よう。自由振動の意味は次節で述べる制振すなわち減衰振動に對しての言葉である。簡単な場合としてジャイロスコープ、あるいは  $O$  の運動は等速運動であるとし  $v_n, v_e$  は一定の場合をとる。(加速度のある場合は5節で考慮する)。この場合は  $\ddot{v}_n = \ddot{v}_e = 0$  であるから、(2), (3)

は

$$\left. \begin{aligned} \cos\theta \cdot \dot{\varphi} + \bar{\omega} \cos\lambda \cos\varphi \sin\theta + \bar{\omega} \sin\lambda \cos\theta \\ + u \sin\varphi \sin\theta = -\frac{b}{H} \sin\theta, \\ \dot{\theta} - \bar{\omega} \cos\lambda \sin\varphi + u \cos\varphi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

となる<sup>2)</sup>。もちろんこの方程式はとけるものではないが、 $\lambda$  を通しての時間的變化は歳差運動の週期の程度の間ではあまり大きくないと考えられ、その間では  $\lambda$  をほとんど一定と見てよい。一定の  $\lambda$  に對する振動の中心を  $\varphi_0, \theta_0$  とすると、それは  $\dot{\varphi} = \dot{\theta} = 0$  から求められる。すなわちそれらは

$$\tan\varphi_0 = \frac{u}{\bar{\omega} \cos\lambda}, \quad \tan\theta_0 = \frac{\bar{\omega} \sin\lambda}{b/H + \sqrt{\bar{\omega}^2 \cos^2\lambda + u^2}} \quad (5)$$

で與えられる。しかしこゝで注意を要することはこの中心が  $\lambda$  の時間的變化に應じて變化していくことで、従つてゆるやかに變る振動中心の周りに歳差運動が行われるのである。(5) の振動中心を考えよう。 $v_n = 0$  とすると明かに  $\varphi_0 = 0$  で、これが指北原理とよばれることを表わし、ジャイロスコープが方向指示器として用いられるゆえんである。従來の理論ではこゝで速度によつて起る誤差として航路誤差とよばれる  $\varphi_1$  を  $\tan\varphi_1 = u/a \cos\lambda$  の形で補正している<sup>1)</sup>。われわれの理論ではこの形が最初から無理なく導入され、しかもそれが一般化された形で得られている。すなわち (5) では  $\varphi_1$  の  $\omega$  の代りに  $\bar{\omega}$  が取られていることがそのことを表わしている。以下この  $\varphi_0$  を一般化された意味で航路誤差とよぶことにする。 $v_n, v_e \rightarrow 0$  では  $\theta_0$  は  $\tan\theta_0 = H\omega \sin\lambda/b$  となり、従來のものに一致する。(こゝで  $b/H$  は  $\omega$  に比して充分大きいとする)。次に歳差運動を求めるにはこの歳差振動の週期に比べてゆるやかに變る振動中心の周りに展開をする。すなわち  $\theta = \theta_0 + \xi, \varphi = \varphi_0 + \eta$  として  $\xi, \eta$  の一次の量だけを残すと

$$\eta + \frac{b}{H} \xi = 0, \quad \xi - \sqrt{\bar{\omega}^2 \cos^2\lambda + u^2} \cdot \eta = 0 \quad (6)$$

となり、これから歳差運動の週期  $T_0$  は

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{H}{b\sqrt{\bar{\omega}^2 \cos^2\lambda + u^2}}}$$

の形で得られる。こゝでも  $v_n, v_e \approx 0$  とすれば従來の値  $2\pi\sqrt{H/b\omega \cos\lambda}$  に一致することが知られる。

### 4. 減衰振動の検討

すでに述べたようにジャイロ軸は  $\lambda$  を通して時間と共にゆるやかに變る  $\theta_0, \varphi_0$  を中心として振動を行う。時間の初めにジャイロ軸を  $\theta_0, \varphi_0$  の方向に向け、かつ  $\lambda$  の變化に應ずるようにその方向を調節していくとすれば原理的には振動はなくなるはずであろう。しかし實際にはたとえ上のことが可能であつたとしても非常に不安定なもので、ごくわずかの擾亂のためにその平衡は破られて振動を引き起してしまう。従つて實際的要求としてはこゝ

の振動が起きている状態のまゝでできるだけ早くその振動を人為的に減衰させて平衡の位置にもつてくることが望ましい。この見地から制振の方法として種々の減衰方法がとられている。この減衰方法のいかんによつて羅針儀がいろいろの型式に分類される。しかしこれも純力學的見地から見ると (3) の  $N_x, N_y$  の他に新しい  $N_z'$  を加えるか、 $N_x'$  を加えるかの相異に歸着する。自由振動の式 (6) から明かなように歳差運動を減衰させるには  $N_y' \propto \xi$  または  $N_x' \propto \eta$  なる能率を加えなければならない。確かに既存の減衰形式はこのいずれかの方法をとっている。たとえば初期の Anschütz 式および Sperry 式は前者に屬する。

初期の Anschütz 式では筐中に風を出入させ、ジャイロの廻轉によつて強い風として筐下の重錘の兩側の出口に導く。ジャイロ軸が傾くと出口が非對稱になつて風の反作用により、 $N_y' = rb \sin \theta$  なる偶力を生じさせる。Sperry 式では重錘を用いないで筐の兩側に對稱に容器をおき、兩者を連結して中に水銀を入れた装置をおく。この装置によつて重錘の作用と減衰の能率とを同時に與えている。すなわち鉛直面と  $\gamma$  なる小さい角をなす面内に偶力を生ずるようになってあり、これによつて水平成分として  $N_x = -b \sin \theta$ 、鉛直成分として  $N_y' = b \tan \gamma \cdot \sin \theta = rb \sin \theta$  を同時に與えるのである。この二つの方法は本質的には全く同じである。これに對して後期の Anschütz 式は  $N_x' \propto \eta$  を與える形に屬する。その形式は重錘の他に筐の頂上にパイプで連結した同大の二容器を取りつけてあつて、中に粘性流體が入れてある。ジャイロ軸が傾くとき流體は低い方に流れ込むが粘性のあるため傾斜に對して流れが時間的後れをもち、 $N_x'$  の能率を生ずるのである。しかしこの場合は流體の流れがもう一つの自由度として入るので (6) 式の他にその流動を表わす式を加えて考えなければならない。この大別して二つの減衰形式をわれわれの理論の中に取り入れて見るとどうであらうか<sup>3)</sup>。

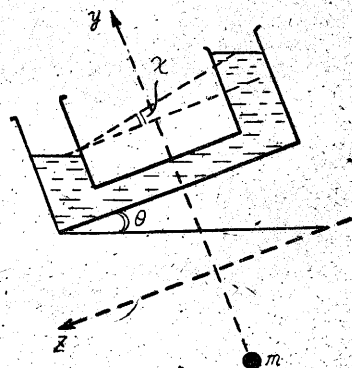
最初の形式では  $N_y' = rb(\sin \theta_0 + \xi \cos \theta_0)$  を加えるため (6) 式は

$$\ddot{\eta} + \frac{b}{H} \xi = 0, \quad \ddot{\xi} - \sqrt{\omega^2 \cos^2 \lambda + u^2} \cdot \eta = \frac{rb}{H} (\sin \theta_0 + \xi \cos \theta_0) \quad (7)$$

なる形となり、振動中心は  $\xi = 0, \eta = \eta_0$  となる。この  $\eta_0$  は  $\eta_0 = -r\omega \sin \lambda / \sqrt{\omega^2 \cos^2 \lambda + u^2}$  で與えられるもので、制振の目的で導入した減衰装置  $N_y'$  のため平衡位置が  $\varphi = \varphi_0, \theta = \theta_0$  から  $\varphi = \varphi_0 + \eta_0, \theta = \theta_0$  へと必然的に移つたことを意味する。これは  $v_n = v_e = 0$  とすると  $-r \tan \lambda$  となるから、從來よんでいた減衰誤差の一般化を表わしている。 $\eta_0 = -r \tan \lambda'$  とかくと、 $\lambda'$  の  $x'y'z'$  系の幾何學の意味は ( $u, \omega \sin \lambda, \omega \cos \lambda$ ) なるベクトルが  $xz$ -面となす角であるのに對して、 $\lambda$  は  $xy$  面内のベクトル ( $0, \omega \sin \lambda, \omega \cos \lambda$ ) が  $x$  軸となす角である。これによつ

て兩者の相互關係はばつきをつけるであらう。さらに (7) によつて歳差運動の様子も知られる。たとえば減衰の度合としての半減週期は  $2H \log 2 \times (rb \cos \theta_0)^{-1}$ 、減衰振動の週期  $T$  は自由振動の  $T_0$  と  $T^{-2} = T_0^{-2} - r^2 b^2 \times (16\pi^2 H^2)^{-1}$  の關係で與えられる。

第4圖 角速度ベクトルの方向なお減衰誤差をなくすための Anschütz の考案をわれわれの場合にあてはめるためには簡単な計算の結果により  $N_x'' = H\omega \sin \lambda$  を加えればよいことが知られる<sup>3)</sup>。このもう一つの利點は  $N_x''$  によつて引き起こされる  $\theta$  方向のズレがちやうど  $-\theta_0$  となることで、このためジャイロ軸はまた水平面内に戻つてくることになる。



第5圖 粘性流體による減衰装置の模型

第二の粘性流體を用いる減衰方法は W. Geckeler<sup>4)</sup> の結果を一般化すればよいのであつて、筐 C の上に取りつけてある減衰装置の模型圖は第5圖の通りである。流體による複雑な運動を省略して、ただ液面の差によつて生ずる能率を靜的にだけとることにすると、少し長い計算により

$$N_x = -b \sin \theta + \frac{b}{g} (\dot{v}_n \cos \varphi - \dot{v}_e \sin \varphi) \cos \gamma - c \sin \chi \cos \theta - \frac{c}{g} (\dot{v}_n \cos \varphi - \dot{v}_e \sin \varphi) \sin \chi \sin \theta,$$

$$N_y = \frac{c}{g} (\dot{v}_n \cos \varphi - \dot{v}_e \sin \varphi) \sin \chi$$

という結果をうる。ここで  $\chi$  は兩容器の液面の中心を結ぶ方向と  $x$  方向との角、 $c$  は流れによつて起される能率に關する常數を表わしている。この  $N_x, N_y$  を (2) 式に用いればよい。しかしこの場合  $\chi$  なる變數が導入され、これに對應する方程式として流れを表わす式を追加しなければならない。そのため流體の流れの速度に關係する  $\dot{v}$  が兩液面の高さの差に比例するという假定を入れる。しかし重要なことはこの差は水平面  $-xz$  面に對する

$\sin(\theta+\lambda)$  ではなくて、ジャイロスコープが加速度をもつことを考慮して見掛けの水平面に對してとるとのことである。従つて  $xyz$  系から加速度  $\dot{v}_n, \dot{v}_e$  によつて生ずる見掛けの水平面を  $XZ$  面としてもつ如き座標系へもう一度變換を考える必要がある。このようにして流れに關する式として

$$\ddot{\lambda} + \frac{F}{\sqrt{g^2 + \dot{\rho}^2}} [g \sin(\theta + \lambda) + (\dot{v}_n \cos \varphi - \dot{v}_e \sin \varphi) \cos(\theta + \lambda)] = 0$$

が得られる。この式と前の二式とを聯立させればこの形式による減衰の様子が知られる。たとえば  $\dot{v}_n = \dot{v}_e = 0$  の場合をとると、Geckeler の結果の一般化が容易に得られるが、繁雜になるので省くことにする<sup>3)</sup>。

### 5. 加速度の影響

3, 4 節では特に加速度のないときだけについて平衡位置を求めたのであるが、加速度のあるときも  $\dot{v}_n, \dot{v}_e$  が時間の函数として知られば同様の方法で平衡位置を求めることは原理的にできるが、しかしそれは容易ではない。ところで實際に加速度が問題となるのはそれが衝撃的に働くことによつて方向指示を破壊する場合である。このように衝撃的に働く加速度から平衡位置を保護するには加速度に對して自動調節を行う Schuler の条件を用いることである<sup>5)</sup>。いま加速度がない場合の平衡位置(特に航路誤差)は 3, 4 節の結果から明かなように  $\dot{v}_n, \dot{v}_e$  の函数になつてゐる。従つてある時期に加速度が働くと、それに應じて平衡位置も變化するはずである。もし加速度による偶力のために起される歳差運動が上の平衡位置の變化に追いつくことが自動的にできれば航路誤差の値は變つても  $\tan \varphi_0 = u/\omega \cos \lambda$  なる形を保てるであろう。この自動調節を可能ならしめる条件を Schuler の条件というのである。従つて Schuler の条件は次のように表わすことができる。すなわち加速度を考慮したときの  $\varphi$  の初期値(この値は (2) 式の  $\bar{N}$ 、さらに減衰の場合には  $\bar{N}'$  を加えるが、それが  $\dot{v}_n, \dot{v}_e$  の函数として與えられているから簡単に求めることができる)が加速度がないとして得られた航路誤差  $\varphi_0$  より求めた  $\varphi_0$  に等しいとすればよい。 $\varphi$  の初期値は  $\eta$  であり、これを與える式は減衰のための能率を  $N_x', N_y'$  とすると (2), (4), (6) により

$$\begin{aligned} \eta + \frac{b}{H} \xi + \frac{b}{Hg} (\dot{v}_n \sin \varphi_0 + \dot{v}_e \cos \varphi_0) \eta \\ = \frac{b}{Hg} (\dot{v}_n \cos \varphi_0 - \dot{v}_e \sin \varphi_0) \\ + \frac{N_x'}{H \cos \varphi_0} (1 + \xi \tan \theta_0), \end{aligned}$$

$$\xi = \sqrt{\omega^2 \cos^2 \lambda + u^2} \cdot \eta = -\frac{N_y'}{H}$$

である。自由振動では  $N_x' = N_y' = 0$  であるから (4)  $\xi = \eta = 0 = (\dot{v}_n \cos \varphi_0 - \dot{v}_e \sin \varphi_0) b/Hg$  となり、Schuler の条件 ( $\eta$ )  $\xi = \eta = 0 = \varphi_0$  は

$$\frac{b}{H} = R \sqrt{\omega^2 \cos^2 \lambda + u^2}$$

と選べば満足される<sup>2)</sup>。従つて加速度に對する自動調節を行うときの自由振動週期  $T_0$  は  $T_0 = 2\pi \sqrt{R/g} \sim 84$  分となつて從來の結果と同じものとなる。

減衰振動で第一の方法では

$$N_x' = 0, N_y' = \varphi b \left[ \sin \theta - \frac{\cos \theta}{g} (\dot{v}_n \cos \varphi - \dot{v}_e \sin \varphi) \right]$$

と與えられるが、これに對しては Schuler の条件は成立しない。しかし特にすでに述べた Anschütz の考案である  $N_x'' = H \omega \sin \lambda$  を加えると上の自由振動と同じ形の条件がえられる。この場合の週期は  $T = T_0 [1 + r^2 g/8R \times (\omega^2 \cos^2 \lambda + u^2)^{-1}]$  の形をもつことが示される。第二の制振方法では Schuler の条件は ( $\varphi$ )  $\varphi_0, \theta_0, \lambda_0 = \varphi_0$  で與えられる。こゝで  $\varphi_0, \theta_0, \lambda_0$  は加速度のないときの平衡位置である。これも自由振動と同じ形にえらべば満足されることは容易に証明される<sup>3)</sup>。

### 6. むすび

以上高速度で動くジャイロスコープの力學の考へのすじみちとおもなる結果とを從來の理論と對比しつゝ述べたつもりであるが、これはあくまで純力學的の考察に適さず、技術的改良はこれを土臺にしたとしても、また別の觀點を必要とするは論をまたない。また加速度に對する自動調節を行わせると週期は 84 分以上となるわけである。従つてこの週期を短くするための工夫を必要とすることは明らかで、これは組合せジャイロによつて果されることを示すことができるが<sup>6)</sup>、それは次の機会にゆずらう。

この研究は渡邊馨博士との共同研究の一部で同博士の研究結果に買ふところが多いことを記して謝意を表したい。

### 文 献

- 1) L. Rawlings: The Theory of the Gyroscopic Compass (1929) にくわしい説明がある。
- 2) 渡邊馨: 轉輪報告 (I), (1944)
- 3) 末岡清市: 轉輪報告 (II), (1944); 應用力學會講演 (1949, 1月)
- 4) W. Geckeler: Ing. Arch. IV (1933), 66~83; 127~132.
- 5) M. Schuler: Z.A.M.M. II (1922), 233~250; Phys. Zeits. XXIV (1923), 344~350.
- 6) 末岡清市: 應用力學連合會講演 (1951, 11月)