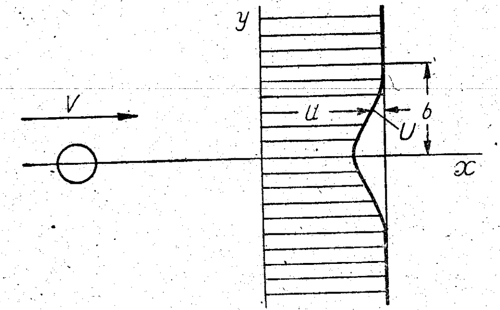
自由亂流の問題について

谷　一郎・小橋安次郎

固體の境界を持たぬ亂流を自由亂流という．靜止流體中へひろがる噴流（ジェット），靜止流體中を動く物體の後に生ずる伴流（ウェイク）などの現象であつて亂流の擴散作用のために，次第に速度差が減少し，流れの幅が增加する．伴流は物體の受ける抵抗と深い關係を持ち，また噴流は各種の機械に用いられる意味で實際問題として重要であるが，それと同時に，現象の基礎を明らかにすることは，亂流擴散の機構を理解する意味からも望ましいわけである

從來の研究

まず二次元的な伴流の場合について，問題の所在を説明しよう．物體を一點と見てよい程度に下流の部分を考えるとすれば，平均の流れは x 方向だけにあり，それに垂直の y 方向には，壓力が變らぬものと考えてよい．伴流の外側では壓力は一定であるから，結局壓力勾配は x 方向にも存在しない．物體の動く速度を V とすれば，伴流の速度 $U=V-u$ は V にくらべて小さい(第１圖)．代表



第　1　圖

的な長さがないので，y 方向の速度分布は相似に保たれると考えてよい．つまり伴流の幅を $2b$，伴流の中心（$y=0$）における U の値を U_0 とすれば，速度分布は

$$U=U_0(x)F(Y),\quad Y=y/b(x) \tag{1}$$

の形で表わされる．いま

$$U_0(x)=AVx^m,\quad b(x)=Bx^n \tag{2}$$

とおき，物體の單位幅についての抵抗を運動量の變化に等しくおくときは

$$D=\rho\int_{-b}^{b}U(V-U)dy$$

$$\fallingdotseq \rho V^2ABx^{m+n}\int_{-1}^{1}FdY \tag{3}$$

となり，從つて $m+n=0$ となる必要がある．運動の方程式は近似的に

$$V\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}; \tag{4}$$

ただし ρ は流體の密度，τ は亂流混合による見かけの剪斷應力である．もし運動量が輸送されて應力が生ずると考えてよいならば，擴散係數を ε とするとき

$$\tau/\rho=-\varepsilon(\partial U/\partial y); \tag{5}$$

さらにプラントル(文獻 1) は混合距離 l を用いて

$$\varepsilon=l^2|\partial U/\partial y| \tag{6}$$

とおき，l は伴流の幅 b に比例する（$l=Cb$）と考えた．これらの假定を (4) に入れるときは，左邊は x^{m-1} に，右邊は x^{2m-n} に比例することになり，結局 $-m=n=1/2$ とならねばならない．さらに方程式を積分すれば $Y=t(18C^2A/B)^{\frac{1}{3}}$ とおくとき，速度分布を定める函數として

$$F=(1-t^{\frac{3}{2}})^2 \tag{7}$$

が得られる．

もし物體が加熱されて，伴流の中で熱の擴散も行われ

第 3 卷　12 月號　目　次　第 12 號

るものとすれば，溫度 T（伴流外の溫度との差）の分布は

$$V\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\frac{\partial T}{\partial y}\right) \tag{8}$$

で與えられる．方程式は (4)＋(5) と同形であるから，速度分布の場合と同じように

$$T=T_0x^{-\frac{1}{2}}G(Y) \tag{9}$$

とおけば，G は F に等しくなるはずである．

これらの結論は，大體において實驗の結果と一致するが，なお次のような點で滿足とはいえない．

a)　伴流の中心速度 U_0 は $\sqrt{x}$ に逆比例するはずであるのに，實際にはそれよりも減少がいちじるしい．

b)　溫度分布 G は速度分布 F と一致せず，それよりも幅が廣い．つまり熱の擴散は運動量にくらべていちじるしい．

c)　速度分布 (7) は中心の近くで一致しない．實驗値にくらべて尖り過ぎる．

軸對稱的な伴流についても同樣である（U_0 は $x^{-\frac{2}{3}}$ に比例するはずであるのに，實際にはほぼ x に逆比例して減少する）．なお (b) および (c) は，噴流についてもいわれることである．

亂流には壓力の變動が存在するので，運動量の輸送が應力を生ずることを式に表わす點には疑問がある．テイラー（文献 2）は，運動量の代りに渦度の輸送を考えるのが正しいことを證明し，その場合には (4)＋(5) の代りに

$$V\frac{\partial U}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \tag{10}$$

を用いればよいことを示した．この場合にも，(6) を用いて同じように計算すれば

$$F=(1-t^{\frac{3}{2}})^2,\quad G=1-t^{\frac{3}{2}} \tag{11}$$

が得られる．つまり速度分布は變らないが，溫度分布がそれより肥えた形になつて，(b) の缺點を救うことができる．もつとも軸對稱的な場合には，結果は必らずしも良好とはいえない．

プラントル（文献 3）は戰時中に，(c) の缺點を補うために，(6) に代る假定として

$$\varepsilon=kbU_0 \tag{12}$$

を用いた．l が b に比例し，$\partial U/\partial y$ が U_0/b に比例することから當然考えられるわけであるが，この假定によつて計算は極めて簡單になり，$Y=u(2kA/B)^{\frac{1}{2}}$ とおくとき速度分布として

$$F=\exp(-u^2/2) \tag{13}$$

が得られる．(6) によれば，中心で $\varepsilon=0$ となり，それが速度分布を尖らせることになるのであるから，新しい假定が (c) の缺點を救うのは當然であろう．ただ ε は y 方向には變らぬことになり，その結果，たとい渦度輸送の假定を用いるとしても，F と G とは一致して，再び (b) の缺點が問題になる．プラントル（文献 4）はこれに對して，熱擴散に對する係數 ε が運動量擴散に對するものより大きいと考えればよいと說明している．

この考え方は簡單であり，しかも軸對稱的な場合においても，また噴流の場合においても，解が容易に閉じた形で求められるという利益がある．特に軸對稱的な空氣の噴流においては，熱の擴散係數を運動量の擴散係數の 1.4 倍とすれば實驗値とよく一致する（文献 5, 6）．もつともこの比率は流れの狀態によつて異なり，例えば二次元伴流ではこれよりも大きくなるようである（文献 2）．

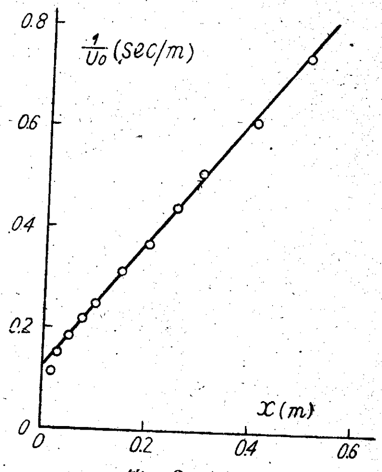
新しい研究

さて筆者は，この問題を再吟味するに當つて，渦度輸送理論の立場を採ることにしたい．いうまでもなく，運動量輸送にくらべて，力學的に合理的な根據を持つと思われるからである．そして擴散係數は，渦度に對しても熱に對しても，同じ値を使用する．從來の渦度輸送理論が必らずしも滿足な結果を與えぬ理由は，計算を容易にするための他の假定にあると考えられるからであつて，少くともその假定を改良して計算を繰返すまでは，對象によつて擴散係數を區別するような複雜性を避けたいと思う．

まず擴散係數 ε に對して，(6) または (12) の代りに

$$\varepsilon=kxU_0P(Y) \tag{14}$$

とおき，k は定數，P は Y の適當な函數とする．(12) の b を x に代えることは，次元の考えからは同じことであるけれども，これを (4) に入れて兩邊を比較するとき，$-m=n=1/2$ の代りに $-m=n=2/3$ となり，中心速度 U_0 は $x^{\frac{2}{3}}$ に逆比例することになる．また軸對稱的な伴流の場合には，U_0 は x に逆比例して減少する．これは (a) の缺點を救うものである．



第 2 圖

第 2 圖は軸對稱的な伴流に對する筆者の測定結果で，物體 ($x=0$) の近くをのぞけば，$1/U_0$ はほぼ x に比例して增加している．

次に函數 $P(Y)$ は，プラントルの新らしい假定によれば一定であるが，(b) の缺點を消すためには，Y によ

つて變るものと考えねばならない．もし大體において(12)が正しいならば

$$P=1-\alpha(dF/dY); \tag{15}$$

逆に大體において(6)が正しいならば

$$P=-(dF/dY)+\beta \tag{16}$$

とおいてよいであろう．αもβも1にくらべて小さい數で，まずそれを省略して第0近似解を求め，次にはその二乘以上を省略して第1近似解を求めることが許されるとする(いわゆる攝動法)．この場合に(15)による方が計算が容易であるが，それはすでに述べたように，第0近似解が簡單な閉じた形で見出されるからである．二次元伴流では

$$\left.\begin{aligned} F&=\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\left[1+\frac{\alpha}{2}\left(\frac{2kA}{B}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{-u\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)+\int_0^u\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)dv\right\}\right],\\ G&=\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\left[1+\alpha\left(\frac{2kA}{B}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{-u\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)+\int_0^u\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)dv\right\}\right]\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

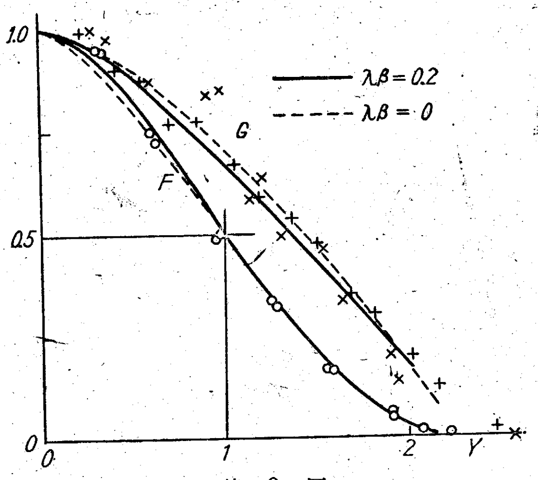
となり，明らかにGの方が大きい．しかもその傾向は，實驗の結果とよく一致するが，ただそのためには，αに3に近い値を與えなければならない．このことは，軸對稱的な伴流においても，また噴流においても，ほぼ同じようである．これはαが小さいという條件に反するから，傾向は正しくても，計算の方法として適當とはいえない．つまり(12)が大體において正しいと考えるよりも，(6)が大體において正しいと考える方がよいのであろう．

(16)によつて計算を行えば，$Y=\lambda s$，$\lambda^3=27kA/4B^2$とおいて

$$\left.\begin{aligned} F&=(1-s^{\frac{3}{2}})^2+\lambda\beta(1-s^{\frac{3}{2}})\int_0^s\frac{dt}{1-t^{\frac{3}{2}}},\\ G&=(1-s^{\frac{3}{2}})+\frac{1}{6}\lambda\beta\left\{(2+s^{\frac{3}{2}})\int_0^s\frac{dt}{1-t^{\frac{3}{2}}}-2s\right\}\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

が得られる．この結果も實驗の示す傾向を與え，特に$\lambda\beta$を0.1～0.2と採るときは，第3圖に示すように，文獻2の實驗結果と大體において一致する．伴流の境界は定め難いので，$y=b(Y=1)$を第1圖のように$U=0(F=0)$となるところとせず，$F=1/2$に相當する値を採ることとし，それに應じて未定係數λを定める．破線は$\beta=0$，すなわち從來の計算によるものである*．

結局，最後に述べた方法［假定(14)＋(16)］は，大體において良好な結果を與える．ただそれにしても，溫度分布Gの計算値は測定値に比べていくらか小さい．これ



第　3　圖

は二次元噴流の場合においても同樣である，また軸對稱的な場合には，第0近似解が簡單な閉じた形で得られないので，攝動法を用いずに，方程式を數値的に解いて行かねばならないが，そのようにして計算を實行してみると，やはり同じような傾向が見出される．ただ種々の場合を通じて共通なことは，(16)のβに一定の値0.2を與えるとき，Gの計算値が測定値に比べてほぼ一定の割合だけ低いということである．これは，熱の擴散にあずかる擴散係數が(14)＋(16)で與えられる値よりもおよそ10%だけ大きいことに相當する．この結論は，流れの狀態によつて擴散係數の比率に異なる値を假定する現在の段階をいくらか改良するように考えられる．

バチェラー(文獻7)は新らしい論文の中で，熱の輸送はいわゆる小さい渦の擴散作用による他に，大きい渦の對流的な作用に基づく部分があるのではないかと述べている．これはまだ一つの想像に過ぎない．しかし筆者の到達した結論は，このことと何等かの關係をもつのではないかと考えられる．

文　　獻

1) Prandtl, Z.A.M.M. 5 (1925), 136.
2) Taylor, Proc. Roy. Soc. A 135 (1932), 685.
3) Prandtl, Z.A.M.M. 22 (1942), 241.
4) Prandtl, Führer durch die Strömungslehre (1949), 114.
5) Corrsin & Uberoi, N.A.C.A. Tech. Rep. No. 998 (1948).
6) Forstall & Shapiro, J. App. Mech., A.S.M.E., 17 (1950), 399.
7) Batchelor, J. Aero. Sci. 17 (1950), 441.

谷一郎教授は今年度の文部省在外研究員として約1年間アメリカ合衆國に滯在することになつた．同教授と同じように境界層・亂流などの問題を專攻している W.R. Sears 博士から勸誘があり，客員教授の資格で，Cornell 大學工學部 (New York 州 Ithaca 市) 大學院におけるセミナールに參加する．出發は12月末の豫定である．

* (2) における m および n の値が變つても，F および G の函數形には影響がおよばない．