

筆者の實驗裝置

ねじりの應力を石けん膜によつて 測 る 方 法

池 田 健・松 島 仁

棒をねじつたときに、その断面に生ずる剪斷應力を直接測定することは非常にむずかしいことである。ところがこの剪斷應力の分布は薄い石けん膜に壓力を加えてたわみを起させたときの状態と

相似の關係を利用して、剪斷應力の分布に相當する線に直接寫眞に撮影し應力分布をしらべる方法に成功した。

は し が き

工學の實驗は實物についての測定を行うのが望ましいが、それができない場合には模型について實驗することがしばしばある。これらの場合には實物と模型の現象を相似にするような條件を與えることは容易であるから、模型實驗によつて實物の場合の現象を十分推察することができるわけである。模型實驗がやむを得ない研究手段として許されるのと同様に、調べようとする現象と全く種類の異つた現象でもその間に相似性があれば、後者の觀察によつて前者の場合の推察を行つても一向差支えなく、むしろ實驗的研究手段として適切である場合が少なくない。一見異つたものと思われる現象でもこれを數學の式で表現した場合に同じ形になればそれらの現象の間には相似性があるとみなされる。たとえば、非壓縮性の流体の運動や電荷のない場の電壓の分布、または熱源のない物體中の溫度分布などはいずれも相似性のある現象でいわゆるポテンシャル論として數學的には同一の型式で論ずることができる。

こゝで述べようとする研究は断面一定の棒をねじつた場合にその断面内に生ずる剪斷應力を知ろうとする實驗的研究に關するものであるが、この場合直接種々の断面形の棒をねじつて各部のひずみを測定してそれから應力を推定することはあまり簡單でないばかりでなく、棒の内部のひずみの測定は不可能である。そこで、この問題を實驗的に解くのに、相似性があつて、しかも測定しやすい現象を利用しようとする試みはかなり以前から行われていた。その一つの相似現象として壓力をうける薄膜のたわみが考えられ、さらにその薄膜として石けん膜を利用すれば、かなり精度の高い相似性が得られることがわかつていた。筆者は従來行われていたこれらの實驗方法に改良を加え、比較的簡便にねじりによる剪斷應力の分布に相當する線が直接寫眞に撮影されるようくふうした。

従 來 の 研 究

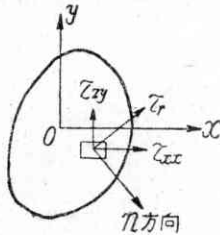
断面一定の棒のねじりによる應力と等分布壓力をうけた石けん膜の傾斜角との間の相似性のあることは、かなり古く L. Prandtl¹⁾ によつて提唱されている。この相似性の發見だけでも彈性力學の研究者および技術者は圓形以外の断面の棒のねじりの強さについての理解を深めることができた。L. Prandtl の後 A. A. Griffith および G. I. Taylor²⁾ の實驗を初め多くの人々が石けん膜の實驗を試みている。もし、このような實驗によつてねじり應力の推定が簡単にしかも精確に行われれば非常に便利である。しかし、石けん膜は長時間はつておくことは不可能であるから、これらの實驗で石けん膜の平均壽命より長い測定時間を要するような方法、たとえば各點のたわみを直接測る方法はあまり實用的でない³⁾。その點では寫眞撮影を用いるのがよいが、應力に相當する傾斜の算出に面倒な手数を要する方法はあまり好ましくない。その點では G. Salet⁴⁾ の方法は従來のものの中で最もすぐれている。すなわち、ねじりの應力に相當する石けん膜の各點の傾角が直接寫眞に撮影される方法であるから極めて便利である。しかしながら、G. Salet の方法は強い光源と感光度のよい乾板を用いなければ十分に鮮明な寫眞が得られないことが筆者の経験でわかつた。そこで筆者はこの點を改良して裝置を簡單化し普通の撮影技術で比較的弱い光源を用いても十分鮮明な寫眞が得られるようくふうした。

石けん膜の相似性

石けん膜が任意の形をしている孔にはられ、これに壓力が加わつてゐるときは膜の各部分は一様な張力をうけている。この性質を考えに入れると、そのときの石けん膜のたわみを求める微分方程式は彈性理論によつてねじりの應力函數を求める微分方程式と全く同じ形になる。これらの基礎微分方程式の誘導をこゝで説明するのは複

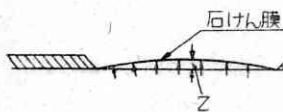
雑であるし、またすでに最近のどの弾性理論の教科書⁵⁾にもこの相似性について述べられているから、ここでは証明を省略しただこれらの二つの現象の間にどんな対応があるかを説明することにする。

いま第1圖に示すように任意の断面形をした棒がねじりモーメント M_t をうけている場合と、第2圖に示すように棒の断面形と相似の縁をもつ孔に石けん膜をはりそれに一樣な圧力が加わつてたわんでいる場合を比較してみる。



第1圖 ねじりをうけた棒の断面内に生ずる剪断応力: τ_{zx} , τ_{zy} はそれぞれ応力の x, y 成分で τ_r は合応力を示す。周辺ではこの合力は縁に平行である。

この場合、棒に加えられたねじりモーメント M_t はたわんだ石けん膜の山の體積 V の2倍に對應し、剪断應力の x, y 成分すなわち τ_{zx} , τ_{zy} はそれぞれ石けん膜のこれに相當する點における y および x 方



第2圖 石けん膜を棒の断面形と同じ形の縁をもつ孔にはり、これに圧力を加えてたわませる。

向の傾斜と對應している。また剪断應力の合應力 τ_r はこれと垂直の方向を n とすれば、石けん膜におけるこの方向の傾斜 $\partial z / \partial n$ と對應して

いる。すなわち次の式が成り立つ。

$$\tau_r / M_t = (\partial z / \partial n) / 2V \dots\dots\dots (1)$$

この関係によつて石けん膜の傾斜と膜の山の體積が測られれば、與えられたねじりモーメントに對する断面の各點の應力の値がわかることになる。次に石けん膜が一樣な圧力をうけているときは各點における x および y 方向の曲率の和 C_m は一定となる。すなわち、

$$1/\rho_x + 1/\rho_y = C_m \dots\dots\dots (2)$$

ここで ρ_x, ρ_y は x および y 方向の曲率半径である。しかるに相似の理論によれば棒の単位長さあたりのねじり角を θ_t 、剪断剛性率を G とすれば、 C_m は $2G\theta_t$ に對應している。従つて、捩れ角は次式によつて與えられる。

$$2G\theta_t / M_t = C_m / 2V \dots\dots\dots (3)$$

すなわち石けん膜のふくらんだ(またはへこんだ)體積と C_m の値がわかれば棒のねじり角もわかることになる。

以上は孔のない中實の断面の棒について述べたが、この場合石けん膜に加える圧力は、適當な大きさであればその値は特に定められたものでなくともよく、またその圧力を直接測らなくとも應力分布を知ることができる。

次に中空断面の場合の石けん膜のはり方について述べる。外周の縁は中實断面の場合と同様に一平面内($z=0$)とし、内周に相當する縁は高さ一定($z=h$)の面内にあ

るようにし、外周

と内周の間に石け

ん膜をはり、これ

に適當な圧力を加

えなければならな

い。(第3圖)弾性

理論によれば外周縁における剪断應力を外周を一周して

積分した値は $2G\theta_t A_1$ (ここで A_1 は外周によつて圍ま

れる面積)にひとしく、また同様に内周縁における剪断

應力を内周を一周して積分した値は $2G\theta_t A_2$ (ここで

A_2 は内周によつて圍まれる部分すなわち、中空部分の

面積)にひとしい。これを石けん膜の場合にうつして考

えると、剪断應力は傾斜角に $2G\theta_t$ は C_m に對應するから

次の式が成立つ。

$$\left. \begin{aligned} \int_1 (\partial z / \partial n) ds &= C_m A_1 \\ \int_2 (\partial z / \partial n) ds &= C_m A_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

および

$$\int_1 (\partial z / \partial n) ds / \int_2 (\partial z / \partial n) ds = A_1 / A_2 \dots\dots (5)$$

これらの式で $\int_1 ds$ と $\int_2 ds$ はそれぞれ中空断面の外周および内周にそつて一周する積分を示す。すなわち中空断面の場合には外周縁と内周縁の間に石けん膜をはり、その壓力はちやうど(5)式が成り立つようなふくらみを與えるものでなければならない。

實驗装置

まず著者の行つた方法は G.Salet の方法を改良したものであるが、石けん膜の上に光線を反射させて等傾斜線、

すなわち剪断應力

の等しいところの

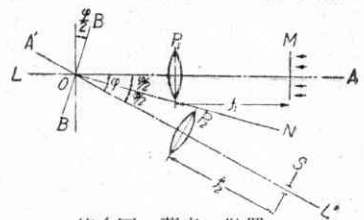
線を寫眞にとる方

法で、第4圖およ

びカット寫眞に示

すような装置で行

われる。第4圖で



第4圖 著者の装置

M は第5圖に示すような寫眞の乾板の黒地に同心圓の白色の透明部分を作つたものでレンズ P_1 の焦點(焦點距離 f_1)におき、圖の右方から250 または500 W 程度の

電球によつてコンデンサーを

通して一樣に照らされるよう

にする。このようにすれば M

は同心圓群の光源となる。BB

は石けん膜をはつた孔の面で

孔の形はねじりをうける棒の

断面と同じである。P2はAL

に φ の角をなす軸 $A'L'$ の

上におかれその焦點(焦點距

離 f_2)にピンホール S がお

かされている。BB の面は AL

と $A'L'$ をふくむ平面に垂直でその法線は角 AOL' の2



第5圖 同心圓群の光源: 寫眞の乾板に黒地に白の同心圓群をえがいたもの。

等分線の方向 ON を指すように向けられている。まず M において $r=0$ である中心の點から出る光線は、 P_1 を通過した後は AL の軸に平行に進みそれが石けん膜の傾斜のない部分にあたると、その部分の法線は ON の方向であるから、反射光線は $A'L'$ の軸に平行に進み P_2 を通過した後は S のピンホールを通ることになる。しかし M において $r=r_n$ の圓から出る光線は、 P_1 を通過したものはいずれも AL の軸と $\tan^{-1}(r_n/f_1)=2\theta_n$ をなす方向に進み BB にはつた石けん膜に入射する。そして φ の角度が小さいものとすれば、膜面の法線が ON と θ_n の角度をなす部分(すなわち傾斜が θ_n) で反射された光線のみが $A'L'$ の軸に平行となり、 P_2 を通過したのちは S のピンホールに收れんする。従つて、このピンホールを肉眼で覗けば数多くの等傾斜線を観察することができる。またこのピンホールの後方に寫眞機をおけば等剪断應力線に相當する等傾斜線を撮影することができる。なお石けん膜はふくらませるよりはへこませる方が入射光線をうけるのに都合がよい。

上の説明で $r=r_n$ の光源は石けん膜の傾斜が θ_n の部分で反射されるものがピンホールを通過するようにのべたが、それは近似的に成り立つことで次のような多少の誤差がある。石けん膜に AL の軸に $2\theta_n$ の角度で入射する光線が AL および $A'L'$ をふくむ平面内にあるときは、これが $A'L'$ に平行に反射される膜面の部分の傾斜は正確に θ_n であるが、入射光線と AL をふくむ平面が AL と $A'L'$ をふくむ平面と χ の角度をなす場合には、 $A'L'$ の方向に反射される膜面の傾斜は θ_n' となり厳密には θ_n と少し違った角度となる。光學の反射の法則に従つてその角度を近似的に求めると、

$$\theta_n' = \theta_n [1 + \varphi^2 (1 - \cos \chi) / 8]$$

となり、これを次のようにかきなおしてみる。

$$(\theta_n' - \theta_n) / \theta_n = \varphi^2 (1 - \cos \chi) / 8$$

これによると θ_n' を θ_n に等しいとおくことの誤差の割合は θ_n の値に無関係で $\chi=0$ 、すなわち入射光線が AL と $A'L'$ をふくむ面内にあるときは0で、 $\chi=\pi/2$ のとき最大でその値は $\varphi^2/8$ である。もし φ を $\pi/10$ (18°) 程度におさめればその誤差は1%程度となる。

また S にあるピンホールの直径 d は有限の大きさであるから、 BB と P_2 の間では厳密には $A'L'$ に平行な光線だけでなく $A'L'$ と $d/2f_2$ 以内の角度をしている光線はピンホールを通過する。すなわち AL に $2\theta_n$ の角をなして BB に入射する光線の中、膜面の傾斜が $\theta_n + d/4f_2$ から $\theta_n - d/4f_2$ までの傾斜の部分の反射光線はピンホールを通ることになる。従つて $d/4f_2$ に相當する誤差をできるだけ小さく $1/1000$ 程度にするよう f_2 に對して小さい d をとるのがよい。

Salet の方法との比較

Salet の方法は第6圖に示すような装置で等傾斜線を

撮影する。圖で M は同心圓の光源でレンズ P の焦點距離 f_1 の位置におかれ、 E は透明なガラス板で P の光軸に對し 45° の角度におかれている。この方法も著者の方法と同じように膜面の傾斜が

$(1/2)\tan^{-1}(r_n/f_1)$ である各第6圖 Salet の裝置點の像が寫眞に映することになる。原理においては同じであるが、Salet が 45° のガラス板を利用している點が著者と異り、そのために光源の強さはピンホールを通るまでに著しく弱められている。Salet の方法では光が光源からピンホールに達するまでの間に P を通る際約92%、 E での反射で約10%、石けん膜での反射で約3%、 E を透過する際約90%、さらに L を通る際に約92%と光の強さが弱められている。結局光源からの光の強さは最後にはこれらの積すなわち約0.23%に弱められる。著者の裝置では第4圖で光源は P_1-B-P_2 と經由することによつて、光の強さは約 $0.92 \times 0.03 \times 0.92 = 0.025$ すなわち2.5%に減ずるだけとなり、同じ光源の強さに對しピンホールを通過する光の強さはSaletの方法より約10倍以上強くなつてゐる。著者の裝置では M を照す電球は250 または500 W で十分に寫眞も鮮明である。

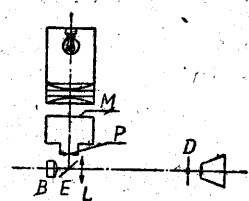
測定方法

すでにのべたように石けん膜のたわやみによつて生ずる體積 V 、傾斜 $\theta (= \partial z / \partial n)$ および C_m が測定されれば應力とねじれ角の計算ができるわけであるから、次にこれらの測定方法をのべる。

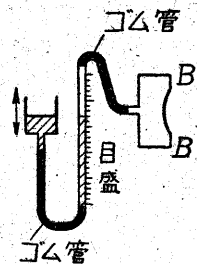
a) V の測定 第7圖に示してあるように石けん膜をはつた筒の後部はゴム管をもつて垂直におかれたガラス管の上端につながれ、ガラス管の下端はさらにゴム管によつてU字形にガラス容器の下部に導かれている。このU字形の部分に着色水を入れ、石けん膜をはつた後ガラス容器を上下すればガラス管内の水面が上下しその移動量によつて V を測定することができる。

石けん膜をたわませることに要する壓力は微少なものであるから、ガラス管およびゴム管内の空氣の體積があまり大きくなければ壓力による體積の變化は無視できる。この體積の測定誤差は2~3%以内であらう。

b) 傾斜の測定 あらかじめ光源の同心圓の間隔をかりに $1/100$ の石けん膜の傾斜の差に相當するよう選んだものとする。はじめ石けん膜がたわまないときは全面が傾斜が0で、ピンホールをのぞきながら少しづつ石



第6圖 Salet の裝置



第7圖 石けん膜のたわみの體積の測り方

けん膜をへこませると順次に等傾斜線があらわれてくるから、ある特定の点については等傾斜線が何本その点を通してかを数えればよい。また、測定例の寫眞に見られるように点となつてあらわれているところは傾斜が0の点で、光源の同心圓の中心の像があらわれたものである。次にこの点の周りに0.01, 0.02, ……の順序に等傾斜線があらわれるはずである。多くの場合、中心部から周辺に近づくに従つて傾斜が大きくなるが、たとえば矩形断面の場合のように断面形の隅の部分に近づくに従つて、途中で傾斜が減じ、周辺の隅で傾斜が0となることもある。周辺では等傾斜線が多少不規則になるのは、石けん水の小さい泡などの影響でやむを得ない。周辺における傾斜の正確な見當をつけるためには周辺にたてた法線の坐標について傾斜の値をえがき、その曲線を周辺に近い点から周辺まで延長して、周辺における値を決めると精確である。測定誤差は2~3%以内にさめ得る。

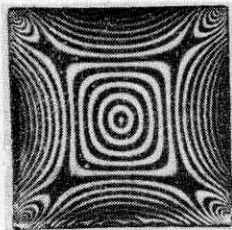
c) C_m の測定 C_m の測定は(4)式によつて等傾斜線の寫眞から計算することもできる。また、他の方法として測定例の寫眞で中心部に近いところでは $\theta = \alpha_0$ の等傾斜線は楕圓形(または圓形)に近い形をしている。その楕圓形の長径および短径をそれぞれ d_1 および d_2 とすれば簡単な幾何學的な計算から

$$C_m = 2\alpha_0(1/d_1 + 1/d_2) \dots\dots\dots (6)$$

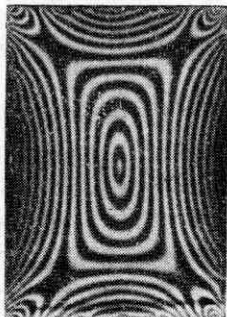
となることがわかる。いずれか精確と思われる方法を用いればよいが、誤差は5%以内におさめられる。

測定例

著者が測定した例を第8~12圖(寫眞)に示してある。正方形、矩形、および三角形などの断面については理論値が得られている。これらについては應力で3%, ねじれ角では5%以内の誤差範囲で實驗値は理論値に一致す



第8圖 正角形断面の棒のねじり應力の分布——寫眞に等應力線のしみが表れている。断面の中心と四隅で應力はなく各邊の中點で應力が大きいことがわかる。



第9圖 矩形断面の棒のねじり應力の分布——中心と四隅で應力は0で長邊の中點で應力は最大となつてゐる。

る。第11圖はキー溝のある軸の應力分布を示すが、キー溝のところに應力集中があることがわかる。中實の断面では一般に應力の最大は周辺で、しかも断面の重心から垂線を下した點に生じている。これは石けん膜の相似

から容易に想像されるところである。第12圖は中空断面の場合の1例として正方形に丸い孔のある場合を示した。石けん膜のへこみをかえて(5)式がちょうど成り立つようにした。

使用したレンズ P_1 は直徑 120 mm, 焦點距離 240 mm, レンズ P_2 は直徑 80 mm, 焦點距離 410 mm, ピンホールの直徑は 2 mm で、電球は 500 W を用いたが 250 W でも十分である。なお實驗にあつて



第11圖 キー溝のある丸棒のねじり應力の分布——キー溝の底部に應力の集中があることが解る。

注意すべきことは膜を最大傾斜 1/10 をこえてあまり大きくしないことである。大きなたわみと相

似性の精度をわるくすることが懸念されるからである。

むすび

筆者の方法は Salet の方法を改良したもので、中空断面については筆者の試みが最初のものである。ここで用いた同心圓群の光源の代りに縦横の線群を用いれば應力の x, y 成分が一定となる點の軌跡を求めることができる。またこの装置は物體の表面の等傾斜線を求めることによつて表面のなだらかな凹凸を調べることにも利用できる。

この研究は文部省科學研究費によつたもので、また杉田順三君稻葉實君などの助力もうけたことを感謝する。

文 献

- (1) L. Prandtl: Z. Physik (1903)
- (2) A. A. Griffith and G. I. Taylor: N. A. C. A., Tech. Rept., Vol. 3 (1917-1918)
- (3) A. D. Moore: Soap-film and Sand-mapper Technique; J. App. Mech. 1950/9.
- (4) G. Salet: Nouvelle méthode de mise en œuvre de l'analogie de la membrane pour l'étude de la torsion des poutre cylindriques, Bul de l'Assn Technique Maritime et Aeronautique, V. 43, 1939.
- (5) 例えは Theory of Elasticity: Timoshenko.