

講座 微分解析機(II)

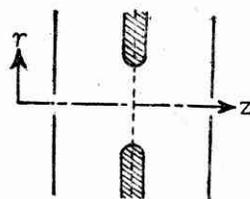
渡邊 勝・三井田純一(應数)

前號に引きつづいて應用例を述べます。以下おのおの表題をかかげましたが、これは無味乾燥を避け、いまままでのような分野に活用されてきたかを示すため、主眼は微分方程式が與えられた時 Analyzer をどのように結線するかを實例によつて示すことにあるのでそのつもりで読んでいただきたい。

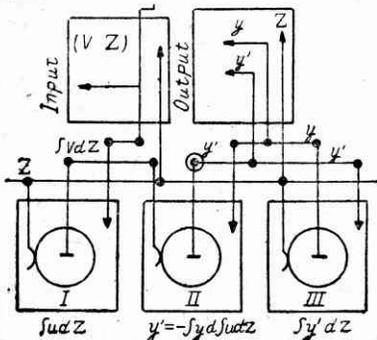
(2) 靜電型電子レンズの電子軌道⁽⁴⁾

第 13 圖のような圓孔を持つ三枚の極板を組合せ、外第 3 表

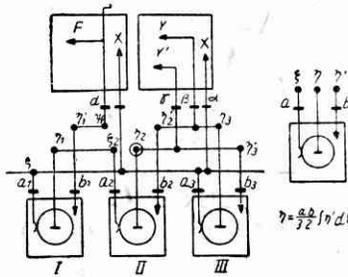
(A)	(1)	(B)	(2)	(C)
Z	m_X	X	$\frac{1}{2a}$	ϵ
y	m_Y	Y	$\frac{1}{2\beta}$	η
$\frac{dy}{dz}$	$m_{Y'}$	Y'	$\frac{1}{2r}$	η'
U	m_F	F	$\frac{1}{2d}$	ϕ



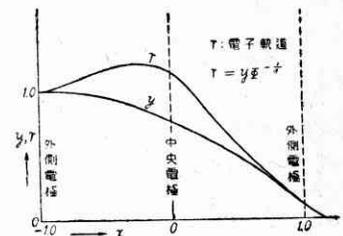
第 13 圖



第 14 圖 (a)



第 14 圖 (b)



第 15 圖

側の二枚はアースされ中央に負の電位を持つ電子レンズにおいて電子の軌道方程式は近軸軌道に對して次の形になる。

$$\frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{\phi'}{2\phi} \frac{dr}{dz} + \frac{\phi''}{4\phi} r = 0$$

ここに ϕ は Z 軸上の電位、 $\phi' = d\phi/dZ$ を表わす。簡單のため $y = r\phi^{1/2}$ と置けば y についての式

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = -Uy \dots (1) \quad \text{ただし } U = \frac{3}{16} \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2$$

となる。これを Analyzer で解く場合前號で述べたように次の形

$$y = -\int [\int y d\{Udz\}] dz \dots (2)$$

にして解き、この結線圖は第 14 圖 (a) のようになります。この圖でわかる通り I の積分機で $\int Udz$ を行いこの出力軸で II の積分機の獨立變數軸を回轉し被積分軸に y を入れることにより $\int y d\{Udz\}$ の積分を行つております。

次に Analyz r により解をうる時間と、精度に大きな影響を持つ縮尺 (scale factor) を決定することについて少し詳しく説明しましょう。ここにいう縮尺とは方程式中の變數の單位量がグラフの上に表わされるとき長さ(耗單位)で、第 3 表の (A) 欄は方程式に現われる變數、(B) は出力卓及び入力卓において (A) の變數に對應

する量で耗単位, (1) 欄がいわゆる縮尺で (B)=(1)×(A) の関係があり, (C) 欄傳導軸において回軸數を單位として讀まれる量で (C)=(2)×(B) の関係があり (2) 欄はギヤ比で定まる量で第 14 圖(b) においてこれらの量がそれぞれ對應する位置に記入してあります. ここに a, b, c, d, a, β, r はすべてギヤ比を表わします. また各積分機において成立つ關係は $\eta = (ab/32) \int \eta' d\xi$ (第 14 圖(b) の右圖參照) で 32 という數は積分機常數です. いまの場合各積分機についてこれらの關係を書き下せば,

$$\eta_1 = (a_1 b_1 / 32) \int \eta_1' d\xi, \quad \eta_2 = (a_2 b_2 / 32) \int \eta_2' d\xi, \\ \eta_3 = (a_3 b_3 / 32) \int \eta_3' d\xi$$

となり結合圖からわかる通り $\eta_1 = \xi_2, \eta_2 = -\eta_3', \eta_3' = \eta_3, \eta_1' = \phi$ であるからこの關係を上の上の三式に入れれば,

$$\eta_3 = - (a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 / 32^3) \iint \phi \eta_3 d\xi d\xi$$

すなわち $d^2 \eta_3 / d\xi^2 = - (a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 / 32^3) \phi \eta_3$ これは (C) 欄の量の關係で, (B) 欄の量に移れば

$$d^2 Y / dX^2 = - (a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 / 32^3) F Y$$

さらに (A) 欄の量に移れば

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 m X^2 m F U \cdot y}{32^3 (2a)^2 \cdot 2d}$$

となりこれは (1) 式と等價であるから,

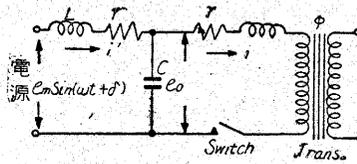
$$\frac{a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3}{32^3 (2a)^2 \cdot 2d} = 1 \dots \dots \dots (3)$$

でなければなりません. (3) 式中の諸量を定めるには (A) 欄の量が取る最大値を考慮して (B) 欄の量がスケールアウトしないように定めます.

第 15 圖はこのようにして解いた解の一例で, y は (1) 式の解で, r は實際これから計算した電子軌道を示します.

(3) 變壓器電流の計算⁽⁵⁾

長距離送電線に連る變壓器において, スイッチを入れたときの電流を第 16 圖に示される回路についての計算を行い, 實驗と比較されました. この回路において次の式が成り立ちます.



第 16 圖

$$L \cdot di'/dt + r'i' + ri + d\phi/dt = e_m \sin(\omega t + \delta), \\ i' = i + dq/dt, q = c(d\phi/dt + ri)$$

上の三式を ϕ について整理すれば,

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{d}{dt} \left(ri + \frac{r'}{L} \phi \right) = - \frac{e_m}{\omega CL} \cos(\omega t + \delta) \\ - \left[\left(\frac{1}{C} + \frac{rr'}{L} \right) i + \frac{\phi}{CL} \right] - \frac{r+r'}{CL} \int i dt \dots \dots \dots (4)$$

となり, ここに $i = i(\phi)$ でヒステリシスループから知ら

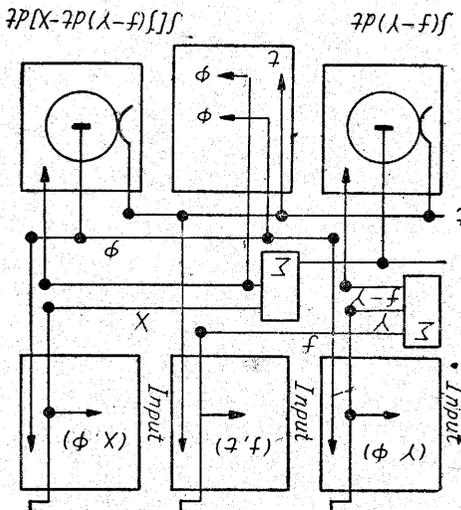
れるものですから $\phi = \phi(t)$ を定める非線型の微分方程式となります. ここで

$$X(\phi) = -ri(\phi) + (r'/L)\phi, \quad Y(\phi) = [1/C + rr'/L] \times i(\phi) + \phi/CL,$$

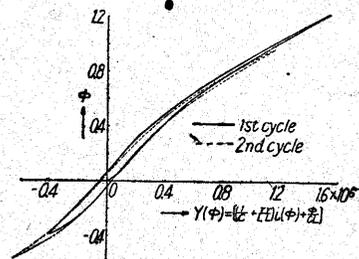
$$f_0(t) = - (e_m / \omega CL) \cos(\omega t + \delta) \text{ とおけば (4) 式は}$$

$$d^2 \phi / dt^2 + dX(\phi) / dt = f_0(t) - Y(\phi) - (rr' / CL) \int i dt \dots (5)$$

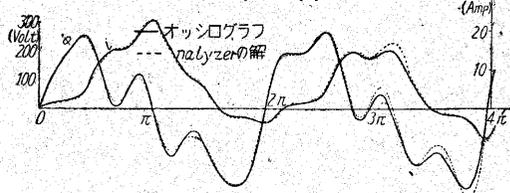
となり Analyzer に入れるに都合のよい式です. 加算機の數の不足のために右邊第三項を省略して第 0 近似 ϕ_0 を定め, これを右邊の第三項に入れて Analyzer で計算し第 1 近似式として f_0 の代りに $f_1 = f_0 - \{(r+r')/C\} \int i_0 dt$ とおいてつぎつぎと近似を進める方法をとりました. 第 0 近似式は $\phi_0 = \int [(f_0(t) - Y(\phi_0)) dt - X(\phi_0)] dt \dots (6)$ となり, (6) 式の結線圖は第 17 圖のようになり, $Y(\phi), f(t), X(\phi)$ の三つの圖を入力卓に入れ積分機は二臺用います. 計算は第二近似まで行いオシログラフとの差は測定の誤差程度の一致を示しました. この結果の一部は第 19 圖に示されるようなものです.



第 17 圖



第 18 圖



第 19 圖

(4) 土中に入る物体の運動(6)

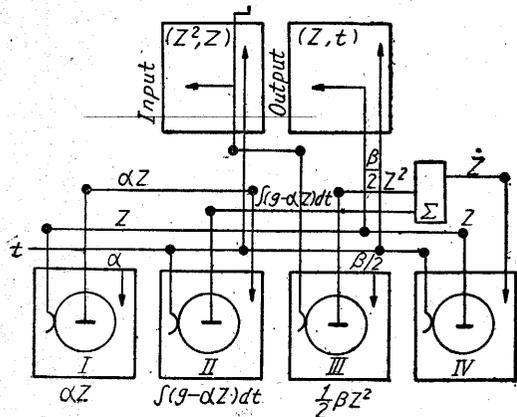
圓筒状物体が地表面から入った深さを Z とするとき土が物体に及ぼす抵抗として深さ Z に比例する項と、速度 \dot{Z} と接觸面積の積に比例する $Z\dot{Z}$ の項の和と假定してその解を實驗結果と比較してこれらの比例係数を定める計算が行われました。すなわち運動方程式として次の式を假定します。

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = g - \alpha Z - \beta Z \frac{dZ}{dt} \dots\dots\dots (7)$$

ここに g は重力の加速度で、 α, β を種々變えて解を求めます。(7) 式を Analyzer に入れるために次の形に變形します。

$$Z = \int \int \{ (g - \alpha Z) dt - \beta Z^2 / 2 \} dt \dots\dots\dots (8)$$

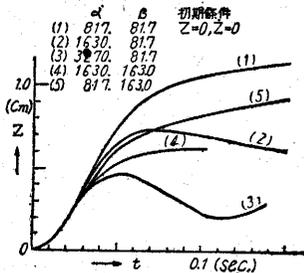
この結線圖は第 20 圖のようになります。



第 20 圖

(8) 式中の二つの積分は積分機 II, IV で行いパラメーター α, β を乗ずるために積分機 I, III を用います。

α, β を種々な値に變えて解くには I, II の臺の移動を變えるだけです。種々變化する定数を掛ける操作はこの方法がよく用いられます。第 21 圖はその解の一例です。



第 21 圖

(5) 路面突起による車體の上下振動(7)

緩衝器がクーロン摩擦 F と速度に關係する摩擦力 $C(\dot{Z})\dot{Z}$ を持つ車體が $A/2(1 - \cos \omega t)$ なる突起を乗越える場合の振動を種々なパラメーターについて解かれました。運動方程式は整理すれば結局次の形にまとめられま

す。

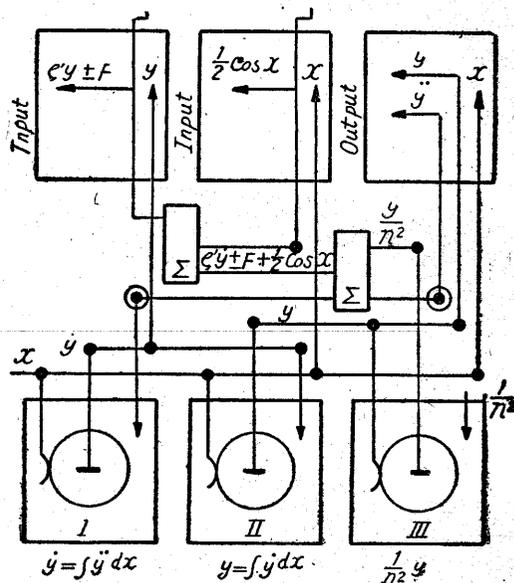
$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + c \left(\frac{dy}{d\tau} \right) \frac{dy}{d\tau} + y \pm F = -\frac{n^2}{2} \cos n\tau$$

y 及び τ はそれぞれ變位及び時間に比例する量で $\pm F$ の符號はそれぞれ $dy/d\tau$ の正負に對應する。これを解くには次の形に變形する。

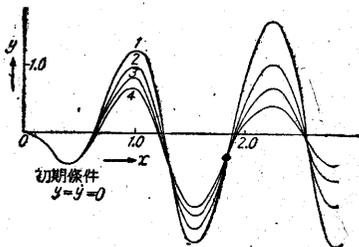
$$y = -\int \int \left\{ c' \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{y}{n^2} \pm F' + \frac{1}{2} \cos x \right\} dx dx$$

ただし $n\tau = x, c'(dy/dx) = c(dy/d\tau)/n, F' = F/n^2$

この結線圖は第 22 圖に示される。III の積分機は y に $1/n^2$ を掛ける操作を行い、 $\pm F$ の不連続點では一度機械の回轉を止めて左の input を與えます。第 23 圖は解の一例です。



第 22 圖



第 23 圖

(6) 固有値問題(8)

固有値問題を解いた例として、中性子と陽子から成る重水素の結合エネルギーを與えて、二つの粒子の間のポランシャル Ae^{-kr}/r の深さ A を決める計算を述べましょう。結局數學的には

$$d^2u/dx^2 + (a - \beta e^{-x}/x)u = 0 \dots\dots\dots (9)$$

において a が與えられたとき $x \rightarrow \infty$ で u が有限にな

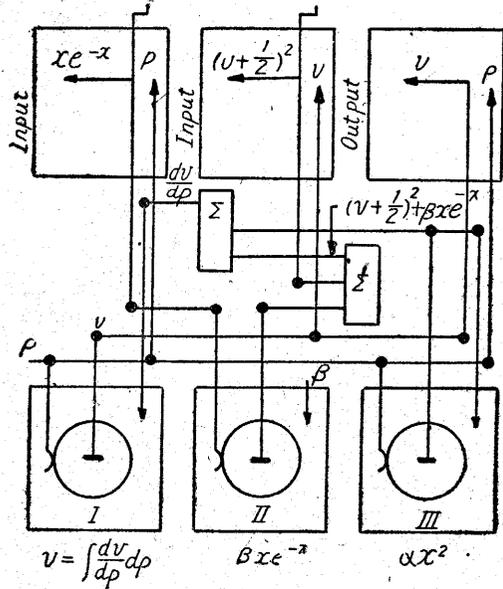
るような β を決定することです。このためには $x=0$ からの解と $x=\infty$ からの解とがあるところで滑らかにつながるように β を決めます (すなわち u'/u が等しくなる。) $x=\infty$ から解くには $-\frac{du}{dx}/u=y$ とおけばは (9) 式は

$$dy/dx = -y^2 + (-a + \beta e^{-x}/x)$$

となります。積分誤差を少くするためには、 $\rho = \log x$, $xy = -v$ と変換して、

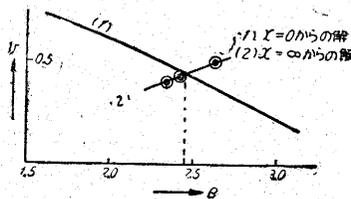
$$dv/d\rho = (v+1/2)^2 + (ax^2 - \beta \cdot e^{-x} - 1/4)$$

として解くのが便利です。第 24 圖、第 25 圖の (2) が



第 24 圖

この方法により解かれたものでこれは $x=0.5$ における値を示します。(1) は $x=0$ から級数解で解いたものです。(1) と (2) との交点が決める β として決定されます。



第 25 圖

(7) 代數方程式への應用(9)

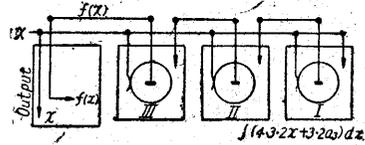
Analyzer の主目的である微分方程式を解くことの外に變つた用い方として代數方程式を解くことができます。例えば四次方程式

$$f(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

を例にとりましょう。これを

$$f(x) = \int \int \int (4 \cdot 3 \cdot 2x + 3 \cdot 2a_2) dx + 2a_2 dx + a_1 dx + a_0 \dots (10)$$

と變形して第 26 圖のようにして Analyzer で曲線 $f(x)$ を書かせます。根は $f(x)=0$ から讀みとります。第 4 表



第 26 圖

はこの方法で解いた根の一例で、I は Analyzer によるもの II は Horner の方法によつて近似を高めたものです。この結線は一度行えば、 a_0, a_1, a_2, a_3 を變えて幾通りでも解くことができ多数の式を解く場合に有力です。

第 4 表

a_3	a_2	a_1	a_0	I	II
-1,887	0.6084	$-5.944 \cdot 10^{-2}$	$9.775 \cdot 10^{-4}$	1.50	1.510
-1,558	0.3773	$-2.606 \cdot 10^{-2}$	$2.555 \cdot 10^{-4}$	1.27	1.279
-1,272	0.2230	$-9.386 \cdot 10^{-3}$	$3.666 \cdot 10^{-5}$	1.06	1.072
-1,026	0.1248	$-2.033 \cdot 10^{-3}$	$-2.634 \cdot 10^{-6}$	0.908	0.8881
-0,8233	0.0708	$-4.802 \cdot 10^{-4}$	$-1.432 \cdot 10^{-6}$	0.718	0.7246

以上はわれわれの研究した中から代表的なものを拾い上げたつもりです。

Analyzer の應用されてもつとも有効な分野は非線形の電氣的機械的振動、過渡的な現象、自動制御系の諸問題等で、最近米國において解かれた興味あるものは物體にあたる壓縮性流れ (ホドグラフ法) マグネトロン内部の電子軌道等ででしょう。積分機の臺數さえあれば多自由度の振動等も連立方程式のまま取り扱えるでしょう。

偏微分方程式、積分方程式への應用等も考究中であり、今後の發展應用等に関して各方面の助言と協力を得たいと思います。紙面の都合で粗雑な文章となりましたが、以上の意味において關心を持たれる方々の御参考になれば幸であります。

註：(4) 東芝マツダ研、若木

(5) 電氣試驗所、乗松、茂松、電氣彙報、第14卷、8,9號

(6) 理工研、最上、渡邊

(7) 理工研、橋村

(8) Prog. of Theor. Phys. Vol. 5, No. 2

(9) 末岡助教授

(上記諸氏名は題目提出者を示す)