

# 論文の内容の要旨

論文題目 Kadanoff-Baym Theory for Thermalization of Quantum Fields  
(量子場の熱化過程のカダノフ・ベイム理論)

氏名 西山 陽大

## 1 導入

近年、Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) では、超相対論的重イオン衝突実験によって、Quark-Gluon Plasma (QGP) の生成及び研究が行われている。原子核衝突事象を理解するためには、反応の初期条件から過渡的に生成する QGP、そしてハドロン化 (QCD 相転移) およびハドロン物質の時間発展を追跡する必要がある。これまでの研究に対して、QGP の完全流体模型を用いた解析が驚くべき成功を収めている。しかしながら、流体シミュレーションを開始する前のパートン (主にグルオン) の熱化に至る過程はまだ良く理解されていない。完全流体模型を用いたデータ解析によれば、グルオンは反応の早期の段階 ( $\tau_{\text{eq}}=0.6\sim 1.0$  fm/c,  $\sqrt{s_{NN}}=200$  GeV) で既に熱化していることが示唆され、現在問題になっている [1]。この早期熱化の問題は On-shell の解析において最もエントロピーを増大させると考えられるパートンに対する非弾性衝突 ( $\tau_{\text{eq}}(gg \leftrightarrow ggg) = 2 \sim 3$  fm/c) の散乱断面積を考えても解決することができない [2]。現在、そういった状況の中、衝突実験で生成したグルオンの時間発展を追跡し、QGP の生成過程を調べる事は、近年特に重要性を帯びてきている。

QGP のような濃密な系の記述には、古典的で希薄な粒子系を扱う Boltzmann 方程式を用いることに原理的な問題がある。そこで、我々はグルオン場に対する量子論的な時間発展の記述に取り組んでいる。これは一般には Kadanoff-Baym (KB) 方程式に代表されるアプローチである。本研究の目的は、この方程式を使った数値計算を可能にし、グルオンの熱化の性質を理解することである。On-Shell の粒子の動力学を追跡するのではなく、場としての運動を記述することで、粒子の言葉で言えば、2 体散乱 ( $gg \leftrightarrow gg$ ) のみならず、粒子の生成消滅過程 ( $g \leftrightarrow gg$ ,  $g \leftrightarrow ggg$ ) を自然に含むことができる。場の理論に基づき、Off-shell の効果を考慮し、QGP 生成過程における輸送理論を扱うといった研究は、まだ開拓段階にあり、早期熱化の問題に関しても、一貫した理解を与える可能性がある。

本研究では、まず、Toy model としてスカラー理論 ( $\phi^4$ ,  $O(N)$  模型) による解析を行う。ここでは、KB 方程式に基づくエントロピーを導入し、上記の Off-shell の過程を含む衝突項に対し、H 定理を満たすことを示す。次に、実際に数値計算を行い、エントロピーが単調に増加し、系が最終的に熱平衡化することを確かめる。最後に、上記の方法をゲージ理論に拡張し、Off-shell の過程が熱化に寄与するかどうか調べる。

## 2 Kadanoff-Baym 方程式

まず簡単な場合として、スカラー理論 ( $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\hat{\phi}_a\partial^\mu\hat{\phi}_a - \frac{1}{2}m^2\hat{\phi}_a^2 - \frac{\lambda}{4!N}(\hat{\phi}_a\hat{\phi}_a)^2$ ,  $a = 1, \dots, N$ ) について考える。このラグランジアンに対し、揺らぎの情報を含む 2 点相関関数の運動方程式を導出すると Kadanoff-Baym (KB) 方程式が得られる。KB 方程式は擬粒子描像における分布  $n_{\mathbf{p}}$  の情報を持つ統計関数  $F_{ab}(x, y) = \delta_{ab}F(x, y) = \frac{1}{2}\delta_{ab}\langle\{\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)\}\rangle$  と分散関係の情報を持つスペクトラル関数  $\rho_{ab}(x, y) = \delta_{ab}\rho(x, y) = i\delta_{ab}\langle[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]\rangle$  という 2 種類の 2 点相関関数を用いて次のように表現される。

$$\begin{aligned} (\partial^2 + m^2 + \Sigma_{\text{local}}(x))F(x, y) &= \int_{t_0}^{y^0} dz \Sigma_F(x, z)\rho(z, y) - \int_{t_0}^{x^0} dz \Sigma_\rho(x, z)F(z, y) \\ (\partial^2 + m^2 + \Sigma_{\text{local}}(x))\rho(x, y) &= - \int_{y^0}^{x^0} dz \Sigma_\rho(x, z)\rho(z, y) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $\Sigma_{\text{local}, \rho, F}$  は 2 点相関関数で表現される自己エネルギーを表し、質量補正と衝突、粒子生成消滅過程の効果を含んでいる。KB 方程式では時間発展の過程は非マルコフ的なものであり、過去の記憶に依存した振る舞いを示す。分布関数とともに  $\rho(x, y)$  を同時に時間発展させることにより、スペクトラル関数の (崩壊) 幅の情報を考慮することで、2 対 2 の衝突だけでなく粒子生成消滅過程 (1 対 3, 3 対 1) もダイナミクスに貢献することになる。

## 3 H 定理の証明及びゲージ理論への応用

Kadanoff-Baym 方程式では衝突過程だけでなく粒子の生成消滅過程も考えることができるのだが、これらのプロセスが熱平衡化に寄与するのか確かめる必要がある。そこで KB 方程式に基づくエントロピーを導入し、それが単調に増加することを証明する。時空間における変化が緩やかである場合には KB 方程式において勾配展開が良い近似法になる。勾配展開を用いた場合には、展開の 1 次のオーダーにおいて次々に表される運動論的エントロピーを導出することができる。(非相対論的な場合については [3] を参照。本研究では彼らの仕事を相対論的な場合に拡張している。)

$$s^\mu = \int \frac{d^{d+1}p}{(2\pi)^{d+1}} \left[ \frac{\rho}{i} \left( p^\mu - \frac{1}{2} \frac{\partial \text{Re} \Sigma_R}{\partial p_\mu} \right) + \frac{\Sigma_\rho}{i} \frac{1}{2} \frac{\partial \text{Re} G_R}{\partial p_\mu} \right] \sigma, \quad \sigma = -f \ln f + (1+f) \ln(1+f) \quad (2)$$

$$s^\mu \rightarrow \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^\mu}{\epsilon_{\mathbf{p}}} [-n_{\mathbf{p}} \ln n_{\mathbf{p}} + (1+n_{\mathbf{p}}) \ln(1+n_{\mathbf{p}})] \quad (\text{擬粒子近似が十分成立する場合}) \quad (3)$$

図 1:  $1/N$  展開の NLO の自己エネルギーの寄与。結合定数の NLO の自己エネルギーは上図で  $\lambda_{\text{eff}}$  を  $\lambda$  に取り替えたものである。このダイアグラムは 2 対 2 の衝突に加え、1 対 3, 3 対 1 の生成消滅過程を含んでいる。

スカラー理論 ( $\phi^4$ ) において結合定数の NLO までの寄与まで考えた場合 (図 1)、 $s^\mu$  は H 定理を満たすことが確かめられる。 $O(N)$  理論の場合にも、 $1/N$  展開の NLO までの寄与を考えた場合に H 定理を満たすことが証明できる。

$$\begin{aligned} \partial_\mu s^\mu(X) &= \int \lambda^2 \times (a-b) \ln \left| \frac{a}{b} \right| \geq 0 \quad (\text{結合定数の NLO}) \\ &= \int \lambda \times \lambda_{\text{eff}} \times (a-b) \ln \left| \frac{a}{b} \right| \geq 0 \quad (1/N \text{ 展開の NLO}) \\ &\left[ = \int g^2 N_c \times (a-b) \ln \left| \frac{a}{b} \right| \geq 0 \quad (\text{結合展開の LO, TAG}) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

図 2: 結合定数の LO の自己エネルギーの寄与。(TAG) このダイアグラムは 1 対 2、2 対 1 の生成消滅過程を含んでいる。

ここで、 $a, b$  は 2 点相関関数の積を表し、KB 方程式の衝突項が零で無い場合 ( $a \neq b$ ) のあらゆる相関関数の変化に対し、右辺は正になることを意味する。(但し、勾配展開の 1 次の範囲に限る。) このように、Off-shell の効果を含む動力学において、エントロピー (2) の増大を 2 点相関関数の段階で示すことができる。さらに、ゲージ理論の場合にも結合定数の LO の寄与 (図 2) を考えた場合 (空間次元  $d \geq 2$ ) には H 定理を満たす (Temporal Axial Gauge (TAG) での結果)。この自己エネルギーは 1 対 2、2 対 1 の生成消滅過程に寄与するが、これは Off-shell の伝播を考えた場合には許される。しかし、TAG のゲージ理論の場合には、自己エネルギーが Ward 恒等式を満たすときに縦波方向の赤外領域に特異性が発生するため、扱いには注意が必要である。ちなみに LO の自己エネルギーは一般的に恒等式を満たさない。また、熱平衡状態では、或る温度に依存しない定数項を加えたエントロピーのゲージ依存性は制御されるが、非平衡の場合にはまだ、その依存性が制御されることを証明できていない。

## 4 数値計算

ここでは、最も簡単な場合として空間 1 次元のスカラー  $\phi^4$  理論 [4] での数値計算の結果を紹介する。(論文内では空間 2 次元の  $\phi^4$  理論及び空間 1 次元の  $O(N)$  理論の場合についても数値計算を行っている。) 空間的に一様、膨張のない系を考え、KB 方程式を時間発展させエントロピーの変化を調べた。図 3 に統計関数から導出される擬

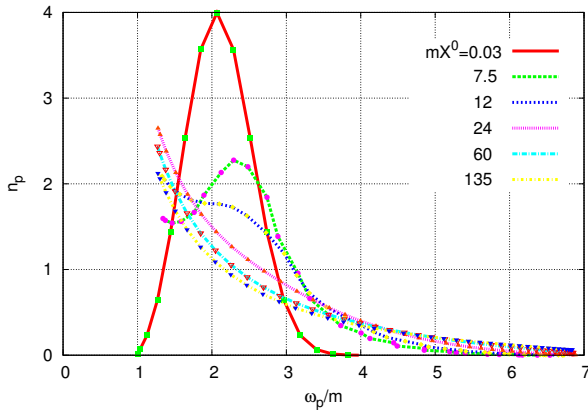


図 3: 分布関数  $n_p(\tilde{\omega}_p/m)$  の時間発展。初期条件は津波型の運動量分布を用意し、自己エネルギーとして  $\phi^4$  理論で結合定数  $\lambda/m^2 = 4$  の NLO まで考えた。

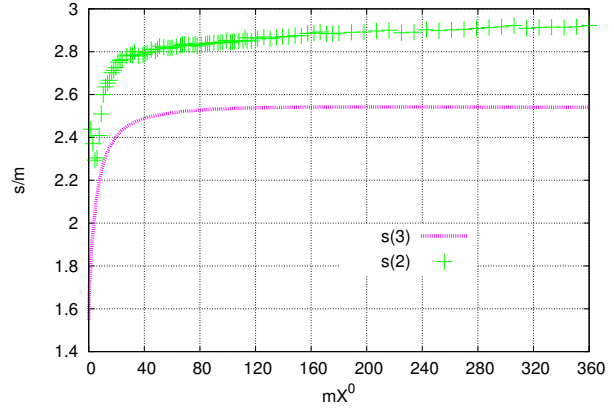


図 4: 運動論的エントロピー (2)(+) とその擬粒子近似 (3) (実線) の時間発展。(  $\phi^4$  理論:  $\lambda/m^2 = 4$  )

粒子の分布関数の時間発展の様子を示す。津波構造の頂上の部分が小さくなり、低エネルギーと高エネルギーの部分の分布が徐々に増大している。そして、最終的には熱平衡化し、エネルギー密度で決定される平衡状態に至る。

図 4 に  $\phi^4(\lambda/m^2 = 4)$  の数値計算におけるエントロピー密度 (2) とその擬粒子近似 (3) の時間発展を示す。(初期時間付近  $mX^0 \sim 1$  では勾配展開による近似が適切ではなく、エントロピーを評価できない。従って、 $mX^0 > 10$  での振舞いに注目することにする。) (2) はスペクトラル関数の幅の情報を含んでいるおり、擬粒子近似 (3) ではこの効果が無視されている。エントロピー (2) は ( $mX^0 > 10$  では) 単調に増加しており、この結果は H 定理で示されたとおりである。エントロピー (3) も単調増加し、(2) との比もほぼ一定である。従って、H 定理に基づくわけではないが (3) も、熱化を示す適切な指標になり得るかもしれない。

空間 1 次元の系では Boltzmann 方程式によるシミュレーションではエネルギーと運動量の保存則により、このような熱平衡化は起こらない。エントロピーの増大はスペクトラル関数の有限の幅の効果による。このことから、Offshell の効果がエントロピー生成に重要な役割を果たすことが分かる。

## 5 結論

Kadanoff-Baym 方程式とは分布関数の情報を含む統計関数と分散関係の情報を含むスペクトラル関数の時間発展を記述する連立方程式である。スペクトラル関数を考慮することで 2 対 2 の衝突に加え、1 対 2、2 対 1、1 対 3 及び 3 対 1 の粒子生成消滅の過程を含む過程を追跡することができる。

研究では、スカラー理論 ( $\phi^4$ ,  $O(N)$ ) に対する KB 方程式から、勾配展開により、運動論的エントロピーを導出し、結合定数の NLO 及び  $1/N$  展開の NLO までの自己エネルギーを考えた場合に、H 定理を満たすことを確かめた。同様に、ゲージ理論の場合に結合定数の LO の自己エネルギーについて、H 定理の証明を試みた。ゲージ理論の場合には Ward 恒等式が成立する場合の赤外発散と非平衡の場合でのゲージ依存性の問題が残っている。

次に、具体的な問題としてスカラー理論の場合に、KB 方程式をもちいた熱平衡化過程を数値計算で追跡し、エントロピーが増大することを確かめた。空間 1 次元の場合には Boltzmann 方程式ではこのような熱平衡化が起こらない。Off-shell の効果を考えることで初めて起こるものである。

ゲージ理論の場合には、LO の自己エネルギーは 1 対 2、2 対 1 の生成消滅過程を含むが、Off-shell の効果を考えた場合にのみ許される過程である。数値計算を行って、グルオンの熱平衡化にもこれらの効果が効くことを確かめる必要があるが、それは今後の研究に持ち越されることになるだろう。

## 参考文献

- [1] U. W. Heinz and P. F. Kolb, Nucl. Phys. **A702** (2002) 269.
- [2] R. Baier, A. H. Nueller, D. Schiff and D. T. Son, Phys. Lett. **B502** (2001) 51.
- [3] Y.B. Ivanov, J. Knoll, and D.N. Voskresensky, Nucl. Phys. **A672**, 313 (2000); T. Kita, J. Phys. Soc. Jpn. 75, 114005 (2006).
- [4] G. Aarts and J. Berges, Phys. Rev. D **64**, 105010 (2001); J. Berges and J. Cox, Phys. Lett. B **517**, 369 (2001).