

単木の求積法に関する研究

講師 前 沢 完 次 郎

Kanjiro MAEZAWA:

A Study on Cubing Method of Single Tree

目	次
まえがき	77
第I部 求積法の理論	79
第1章 移動平均法	79
1.1 数値積分	79
1.2 求積式の誘導	85
1.2.1 等間隔の場合	85
1.2.2 不等間隔の場合	117
第2章 直交多項式の数表を利用する方法	127
2.1 直交多項式	127
2.2 求積式の誘導	133
2.2.1 $r^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$	133
2.2.2 $r = ax + bx^2 + cx^3$	139
2.2.3 梯形則, Simpson 則	146
2.2.4 附 記	148
第3章 平均値法	148
3.1 原 理	148
3.2 求積式の誘導	150
3.2.1 Newton-Cotes の方式	150
3.2.2 Gauss の方式	153
第4章 補 注	155
第II部 実験結果	156
第5章 実測結果	157
5.1 供 試 木	157
5.2 各種求積式による実測結果	159
5.2.1 対象木材積が根元附近をふくまない場合	159
5.2.2 全樹幹材積を対象とした場合	164
第6章 各種求積式のもつ誤差	166
6.1 移動平均法における誤差	166
6.1.1 [0.3m以上], $b=0.10$ の場合	166
6.1.2 [0.3m以上], $b=0.20$ の場合	170
6.1.3 [0m以上], $b=0.10$ の場合	172
6.1.4 [0m以上], $b=0.20$ の場合	174
6.1.5 [$b=0.05$], $b=0.15$ の場合	177
6.1.6 [不等] の場合	178
6.2 直交多項式の数表を利用する方法および平均値法における誤差	178
6.3 誤差上の順位	180
6.4 許 容 限 界	182
6.5 対象木の大きさと誤差率との関係	183
考 察	184
適 応 実 験	190
摘 要	197
文 献	204
Résumé	206

ま え が き

樹幹の形状は、その内在的素質あるいは外部的生育条件の如何によって、一般に多種多様である。そして、それは、針葉樹に多くみられるような比較的規則的な形状を呈するもの、および、簡単な幾何学的形状とは看做しえないような不規則な樹幹におけるものと2大別することができるが、なお、些細に検討すると、前者に属するものといえども、部分部分における変化が大きい場合が多い。

幹材積の推定に当っては、通常、前者に対しては数学的な求積法が、また、後者に対しては物理的な求積法がそれぞれもちいられるが、前者における数学的な手法として、今日迄に提案されたものの多くは、幹曲線の想定にもとずいた解析的な解法であった。

幹曲線方程式に準拠した求積法においては、まず、なんらかの幹曲線式が想定され、そのもとに必要とされる半径（あるいは直径）測定値をもちいて、方程式中の未知係数が決定され、そのうちに、その方程式より転換された材積式にもとづいて幹材積が算出される。解法として、このような手法をもちいる以上、正確な求積をおこなうためには、想定される幹曲線方程式は、幹形の不規則さからどうしても高次のものとなり、したがって、転換される材積式は、いきおい複雑な形をとらざるをえない。

区分求積法は、このような手法によって生ずる測定手続きおよび計算上の煩雑さをさけるために考案されたものであるが、その区分求積法が、今日広くもちいられている実状から、幹材積の推定に当っては、いま1つの数学的な解法、すなわち、数値積分法の利用が考えられてくる。なぜならば、数値積分法のもつ特徴は、解析的に解ける場合でも解けない場合でも、一律にその解の数値をしることができ、しかも、実行に要する労力は、多くの場合、解析的な解式から数値を計算する労力に比してはるかに少いからである。

Huber 式あるいは Smalian 式等の区分求積法は、元来、簡単な幹曲線式にもとづく求積式を、長材に対してたくみに適用したものであるが、Smalian 式区分求積法はまた、数値積分法における梯形公式を求積上応用したものと看做すこともできる。梯形公式は、内挿法による積分法の1つの場合であるが、この他数値積分の分野においては、ふるくからもちいられる Chebyshev 公式あるいは Gauss 公式等の平均値法による積分法、あるいはまた、近年考えられ、測定誤差をも考慮に入れてその応用範囲をより広いものにした最小2乗法にもとづく移動平均法等がある。梯形公式を単木の求積にあてはめたものが Smalian 式区分求積法であるのと同様に、このような各種の数値積分公式にもとづいて多くの求積式をもとめることができる。

また、解析的な解法のもつ欠点を緩和する方法として、直交多項式の数表を利用する方法も考えられる。直交展開を応用すると、解式は表の係数をもちいて直接的にあたえられ、その解法は、数値積分にもとづく場合と同じようにしてあつかうことができる。方程式中の未知係数決定のための困難も、あるいはまた、高次の材積式算定のための数値計算上の煩雑さも相当に緩和される。

本文は、このようにして考えられた3つの手法をことにする求積方法——移動平均法、直交多項式の数表を利用する方法、平均値法——を、最も有用と考えられる移動平均法による場合を主体として記したものである。

数学的にいえば、本文にしめたような数値解法は、解析的な解法ほどのうつくしさはないかもしれない。しかし、その活用の範囲ははるかに広いものになる。幹材積の推定に当っては、数

学は手段であって目的ではない。その手段として幾通りもの方法が考えられた場合、そのうちで最も求積の目的に合う方法をえらぶことが肝要である。

本研究を進めるあいだ、懇切なる御指導と御鞭撻を賜った、吉田正男名誉教授、島田錦蔵教授、嶺一三教授、永田竜之助教授、荻原貞夫教授、野口泰雄助教授、特に本研究の全般にわたって適切なる御指示と終始懇切なる御指導、御鞭撻を賜った、扇田正二教授、増山元三郎講師、電気通信研究所田口玄一博士にこころから御礼申し上げる。また、種々有益なる御指導を頂いた、平田種男助教授、山陽パルプ芳賀敏郎氏、資料の蒐集に御高配を賜った、渡辺資仲教授、高橋延清教授、朝日正美助教授、佐藤修講師、林野庁子幡弘之技官、取りまとめに御協力を頂いた演習林のかたがたに厚く御礼申し上げる。

第 I 部 求 積 法 の 理 論

第 I 部においては、本文において提案する 3つの手法をこととした求積方法について詳述する。

すなわち、第 1 章に移動平均法、第 2 章に直交多項式の数表を利用する方法、第 3 章に平均値法が示されるが、各章において、各求積法の理論上の背景およびそれらにもとづく求積式の誘導法、そして、実用にきようされる数多くの求積式が記載される。

第 1 章 移 動 平 均 法

1.1 数 値 積 分

変数 x の函数 y を、 $y=f(x)$ として、 D をつぎのような微分記号とする。

$$Df(x) = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x)$$

一般に

$$D^n f(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = f^{(n)}(x), (n=1, 2, \dots)$$

であり、また $D^0=1$ と約束する。

したがって、たとえば、 D の函数 $\varphi(D)$ が h をある常数として

$$\varphi(D) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n D^n}{n!}$$

ならば、 $f(x)$ に $\varphi(D)$ を演算したものは

$$\varphi(D) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n D^n}{n!} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} D^n f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x)$$

テーラー展開の定理から、上式は

$$\varphi(D) f(x) = f(x+h)$$

となるから、上の演算記号 $\varphi(D)$ は、 $f(x)$ を h だけ推進する演算記号ということになる。

上記の $\varphi(D)$ は、指数函数の展開式から、形式的に

$$\varphi(D) = e^{hD} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(hD)^n}{n!}$$

とおくことができるから

$$e^{hD} f(x) = f(x+h)$$

つぎに、 $f(x)$ の区間 (a, b) における積分を考察する。いま、 $a=x_1$ とおき、 $b=x_1+h$ として、上記の演算記号をもちいると

$$\int_b^a f(x) dx = \int_{x_1}^{x_1+h} f(x) dx = \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} e^{(x-\bar{x})D} f(\bar{x}) dx$$

ここに、 $t=x-\bar{x}$ とおくと、上式は

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e^{tD} f(\bar{x}) dt = \frac{1}{D} \left[\left(e^{\frac{h}{2}D} - e^{-\frac{h}{2}D} \right) f(\bar{x}) \right. \\ &= \frac{1}{D} \left[\left\{ 1 + \frac{h}{2} D + \frac{\left(\frac{h}{2} D\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{h}{2} D\right)^3}{3!} + \dots \right\} - \left\{ 1 - \frac{h}{2} D + \frac{\left(-\frac{h}{2} D\right)^2}{2!} + \frac{\left(-\frac{h}{2} D\right)^3}{3!} \right. \right. \\ &\left. \left. + \dots \right\} \right] f(\bar{x}) = \left\{ h + \frac{h^3}{24} D^2 + \dots \right\} f(\bar{x}) \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

つぎに、函数 $f(x)$ にある線形演算 $\varphi(D)$ をほどこしたものを、 x の x_1, x_2, \dots, x_k における $f(x)$ の観測値 y_1, y_2, \dots, y_k で推定する問題を考える。観測値 y_i は、互に独立でかつ同じ精度で測定されているものとし、その共通の分散を σ^2 として、 y_i の線形式で $\varphi(D) f(x)$ を推定するものとする。

統計量を

$$W = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_k y_k \quad (1.1.2)$$

とすれば、 $E\{y_i\} = f(x_i)$ であるから

$$\begin{aligned} E(W) &= E\left\{ \sum_i c_i f(x_i) \right\} = \sum_i c_i e^{(x_i-\bar{x})D} f(\bar{x}) = \sum_i c_i \left\{ 1 + (x_i-x)D + \frac{(x_i-x)^2}{2!} D^2 + \dots \right\} f(\bar{x}) \\ &= \left[\sum_i c_i + \left\{ \sum_i c_i (x_i-x) \right\} D + \left\{ \frac{\sum_i c_i (x_i-x)^2}{2!} \right\} D^2 + \dots \right] f(\bar{x}) \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

いま、 h_1, h_2, \dots を h に対する比の値として、 $x_2=x_1+h_1, x_3=x_2+h_2, x_4=x_3+h_3, \dots$ とおけば

$$x_1 - \bar{x} = -\frac{h}{2}$$

$$x_2 - \bar{x} = -\frac{h}{2} + h_1$$

$$x_3 - \bar{x} = -\frac{h}{2} + h_1 + h_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$x_{k-1} - \bar{x} = \frac{h}{2} - h_{k-1}$$

$$x_k - \bar{x} = \frac{h}{2}$$

したがって, (1.1.1) 式, (1.1.3) 式より

$$\left. \begin{aligned} f_1: c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_{k-1} + c_k &= h \\ f_2: \left(-\frac{h}{2}\right) c_1 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right) c_2 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right) c_3 \\ &+ \cdots + \left(\frac{h}{2} - h_{k-1}\right) c_{k-1} + \left(\frac{h}{2}\right) c_k = 0 \\ f_3: \left(-\frac{h}{2}\right)^2 c_1 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)^2 c_2 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)^2 c_3 \\ &+ \cdots + \left(\frac{h}{2} - h_{k-1}\right)^2 c_{k-1} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 c_k = \frac{h_3}{12} \\ f_4: \left(-\frac{h}{2}\right)^3 c_1 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)^3 c_2 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)^3 c_3 \\ &+ \cdots + \left(\frac{h}{2} - h_{k-1}\right)^3 c_{k-1} + \left(\frac{h}{2}\right)^3 c_k = 0 \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned} \right\} (1.1.4)$$

をうるが, x についての4次以上の項は無視することにし, 一方, W の分散

$$\text{Var.}\{c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_k y_k\} = (c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_k^2) \sigma^2 \quad (1.1.5)$$

を最小ならしめるという条件を考慮すれば, C についての一般的な解法は, f_i にラグランジュの未定係数 λ_i ($i=1, 2, 3, 4$) をかけて, (1.1.5) 式に加えたものを, C_1, C_2, \dots, C_k で微分して (1.1.4) 式と連立させればよい。

すなわち

$$Q = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_k^2 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 \quad (1.1.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial c_1} &= 2c_1 + \lambda_1 + \left(-\frac{h}{2}\right)\lambda_2 + \left(-\frac{h}{2}\right)^2\lambda_3 + \left(-\frac{h}{2}\right)^3\lambda_4 = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial c_2} &= 2c_2 + \lambda_1 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)\lambda_2 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)^2\lambda_3 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)^3\lambda_4 = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial c_3} &= 2c_3 + \lambda_1 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)\lambda_2 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)^2\lambda_3 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)^3\lambda_4 = 0 \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial c_{k-1}} &= 2c_{k-1} + \lambda_1 + \left(\frac{h}{2} - h_{k-1}\right)\lambda_2 + \left(\frac{h}{2} - h_{k-1}\right)^2\lambda_3 + \left(\frac{h}{2} - h_{k-1}\right)^3\lambda_4 = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial c_k} &= 2c_k + \lambda_1 + \frac{h}{2}\lambda_2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2\lambda_3 + \left(\frac{h}{2}\right)^3\lambda_4 = 0 \end{aligned} \right\} (1.1.7)$$

(1.1.7) 式より

$$\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{1}{2} \left\{ \lambda_1 + \left(-\frac{h}{2}\right) \lambda_2 + \left(-\frac{h}{2}\right)^2 \lambda_3 + \left(-\frac{h}{2}\right)^3 \lambda_4 \right\} \\
c_2 &= -\frac{1}{2} \left\{ \lambda_1 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right) \lambda_2 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)^2 \lambda_3 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)^3 \lambda_4 \right\} \\
c_3 &= -\frac{1}{2} \left\{ \lambda_1 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right) \lambda_2 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)^2 \lambda_3 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)^3 \lambda_4 \right\} \\
&\vdots \\
c_{k-1} &= -\frac{1}{2} \left\{ \lambda_1 + \left(\frac{h}{2} - h_{k-1}\right) \lambda_2 + \left(\frac{h}{2} - h_{k-1}\right)^2 \lambda_3 + \left(\frac{h}{2} - h_{k-1}\right)^3 \lambda_4 \right\} \\
c_k &= -\frac{1}{2} \left\{ \lambda_1 + \frac{h}{2} \lambda_2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \lambda_3 + \left(\frac{h}{2}\right)^3 \lambda_4 \right\}
\end{aligned} \tag{1.1.8}$$

(1.1.8) 式の各値を (1.1.4) 式に代入して

$$\begin{aligned}
&k\lambda_1 + \left\{ \left(-\frac{h}{2}\right) + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right) + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right) + \cdots + \left(\frac{h}{2} - h_{k-1}\right) + \left(\frac{h}{2}\right) \right\} \lambda_2 \\
&\quad + \left\{ \left(-\frac{h}{2}\right)^2 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)^2 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)^2 + \cdots + \left(\frac{h}{2} - h_{k-1}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right\} \lambda_3 \\
&\quad + \left\{ \left(-\frac{h}{2}\right)^3 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)^3 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)^3 + \cdots + \left(\frac{h}{2} - h_{k-1}\right)^3 + \left(\frac{h}{2}\right)^3 \right\} \lambda_4 \\
&\hspace{15em} = -2h \\
&\quad \left\{ \left(-\frac{h}{2}\right) + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right) + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right) + \cdots + \left(\frac{h}{2} - h_{k-1}\right) + \left(\frac{h}{2}\right) \right\} \lambda_1 \\
&\quad + \left\{ \left(-\frac{h}{2}\right)^2 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)^2 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)^2 + \cdots + \left(\frac{h}{2} - h_{k-1}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right\} \lambda_2 \\
&\quad + \left\{ \left(-\frac{h}{2}\right)^3 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)^3 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)^3 + \cdots + \left(\frac{h}{2} - h_{k-1}\right)^3 + \left(\frac{h}{2}\right)^3 \right\} \lambda_3 \\
&\quad + \left\{ \left(-\frac{h}{2}\right)^4 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)^4 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)^4 + \cdots + \left(\frac{h}{2} - h_{k-1}\right)^4 + \left(\frac{h}{2}\right)^4 \right\} \lambda_4 = 0 \\
&\quad \left\{ \left(-\frac{h}{2}\right)^2 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)^2 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)^2 + \cdots + \left(\frac{h}{2} - h_{k-1}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right\} \lambda_1 \\
&\quad + \left\{ \left(-\frac{h}{2}\right)^3 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)^3 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)^3 + \cdots + \left(\frac{h}{2} - h_{k-1}\right)^3 + \left(\frac{h}{2}\right)^3 \right\} \lambda_2 \\
&\quad + \left\{ \left(-\frac{h}{2}\right)^4 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)^4 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)^4 + \cdots + \left(\frac{h}{2} - h_{k-1}\right)^4 + \left(\frac{h}{2}\right)^4 \right\} \lambda_3 \\
&\quad + \left\{ \left(-\frac{h}{2}\right)^5 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)^5 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)^5 + \cdots + \left(\frac{h}{2} - h_{k-1}\right)^5 + \left(\frac{h}{2}\right)^5 \right\} \lambda_4 \\
&\hspace{15em} = -\frac{1}{6} h^3 \\
&\quad \left\{ \left(-\frac{h}{2}\right)^3 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)^3 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)^3 + \cdots + \left(\frac{h}{2} - h_{k-1}\right)^3 + \left(\frac{h}{2}\right)^3 \right\} \lambda_1 \\
&\quad + \left\{ \left(-\frac{h}{2}\right)^4 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)^4 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)^4 + \cdots + \left(\frac{h}{2} - h_{k-1}\right)^4 + \left(\frac{h}{2}\right)^4 \right\} \lambda_2 \\
&\quad + \left\{ \left(-\frac{h}{2}\right)^5 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)^5 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)^5 + \cdots + \left(\frac{h}{2} - h_{k-1}\right)^5 + \left(\frac{h}{2}\right)^5 \right\} \lambda_3 \\
&\quad + \left\{ \left(-\frac{h}{2}\right)^6 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)^6 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)^6 + \cdots + \left(\frac{h}{2} - h_{k-1}\right)^6 + \left(\frac{h}{2}\right)^6 \right\} \lambda_4 = 0
\end{aligned} \tag{1.1.9}$$

いま, $a \sim b$ 間に等間隔の 5 点 ($k=5$) をとった場合を考えると, その間隔 h_i ($i=1, 2, 3, 4$) を 1 としても一般性は失わないから

$$\begin{aligned} \left(-\frac{h}{2}\right) &= -2 & \left(\frac{h}{2} - h_4\right) &= 1 \\ \left(-\frac{h}{2} + h_1\right) &= -1 & \frac{h}{2} &= 2 \\ \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right) &= 0 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \left(-\frac{h}{2}\right) + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right) + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right) + \left(\frac{h}{2} - h_4\right) + \left(\frac{h}{2}\right) &= 0 \\ \left(-\frac{h}{2}\right)^2 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)^2 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)^2 + \left(\frac{h}{2} - h_4\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 &= 10 \\ \left(-\frac{h}{2}\right)^3 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)^3 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)^3 + \left(\frac{h}{2} - h_4\right)^3 + \left(\frac{h}{2}\right)^3 &= 0 \\ \left(-\frac{h}{2}\right)^4 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)^4 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)^4 + \left(\frac{h}{2} - h_4\right)^4 + \left(\frac{h}{2}\right)^4 &= 34 \\ \left(-\frac{h}{2}\right)^5 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)^5 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)^5 + \left(\frac{h}{2} - h_4\right)^5 + \left(\frac{h}{2}\right)^5 &= 0 \\ \left(-\frac{h}{2}\right)^6 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)^6 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)^6 + \left(\frac{h}{2} - h_4\right)^6 + \left(\frac{h}{2}\right)^6 &= 30 \end{aligned}$$

これらの値を (1・1・9) 式に代入して

$$\left. \begin{array}{rcl} 5\lambda_1 & +10\lambda_3 & = -8 \\ & 10\lambda_2 & +34\lambda_4 = 0 \\ 10\lambda_1 & & +34\lambda_3 = -\frac{32}{3} \\ & 34\lambda_2 & +130\lambda_4 = 0 \end{array} \right\} (1 \cdot 1 \cdot 10)$$

上式から

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{248}{105} & \lambda_3 &= \frac{8}{21} \\ \lambda_2 &= 0 & \lambda_4 &= 0 \end{aligned}$$

をうるから, これらの値を (1・1・8) 式に代入して

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{44}{105} & c_4 &= \frac{104}{105} \\ c_2 &= \frac{104}{105} & c_5 &= \frac{44}{105} \\ c_3 &= \frac{124}{105} \end{aligned}$$

がもとめられる。

これらの値が, (1・1・2) 式にもちいられる係数であり, いま, あらためて分子のみを C_i とし, 共通の分母を D として表示したものが表 1・1 における $k=5$, 3 次, $(\alpha, \beta) = (-2, 2)$ の場合である。

上記の係数は, 5 点 3 次のある場合についての結果であったから, 全く同様な方法によって,

いろいろな場合についての値をもとめることができる。 k の値を 3, 4, 5 とし, 近似する曲線の次数を 1 次, 2 次, 3 次としたいいくつかの場合についての値を示すと表 1・1 のとおりであり, これが移動平均法にもとづく数値積分用係数である。

表 1・1 数値積分用係数
 $k=3$ (等間隔 3 点) 2 次

(α, β)	$(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$	$(-1, 1)$	$(-1, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, 1)$	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$	一般式 $(0, \beta)$
C_{-1}	25	1	8	1	-1	1	$\beta(-3\beta + 2\beta^2)$
C_0	-2	4	5	22	5	-2	$\beta(12 - 4\beta^2)$
C_1	1	1	-1	1	8	25	$\beta(3\beta + 2\beta^2)$
D	24	3	24	24	24	24	12

$k=4$ (等間隔 4 点) 2 次

(α, β)	$(-4, -1)$	$(-3, -1)$	$(-3, 3)$	$(-1, 0)$	$(-1, 1)$	$(0, 1)$	$(1, 3)$	$(1, 4)$	一般式 $(0, \beta)$
C_{-3}	9	61	3	2	-1	-7	-11	0	$\beta(-15 - 18\beta + 5\beta^2)$
C_{-1}	3	47	9	34	13	31	23	0	$\beta(135 - 6\beta + 5\beta^2)$
C_1	0	23	9	31	13	34	47	3	$\beta(135 + 6\beta - 5\beta^2)$
C_3	0	-11	3	-7	-1	2	61	9	$\beta(-15 + 18\beta + 5\beta^2)$
D	4	60	4	60	12	60	60	4	240

$k=4$ (等間隔 4 点) 3 次

(α, β)	$(-4, -1)$	$(-3, -1)$	$(-3, 3)$	$(-1, 0)$	$(-1, 1)$	$(0, 1)$	$(1, 3)$	$(1, 4)$	一般式 $(0, \beta)$
C_{-3}	147	9	3	-9	-1	-7	1	-3	$\beta(-12 + 2\beta + 4\beta^2 - \beta^3)$
C_{-1}	39	19	9	155	13	53	-5	9	$\beta(108 - 54\beta - 4\beta^2 + 3\beta^3)$
C_1	9	-5	9	53	13	155	19	39	$\beta(108 + 54\beta - 4\beta^2 - 3\beta^3)$
C_3	-3	1	3	-7	-1	-9	9	147	$\beta(-12 - 2\beta + 4\beta^2 + \beta^3)$
D	64	12	4	192	12	192	12	64	192

$k=5$ (等間隔 5 点) 1 次

(α, β)	$(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$	$(-2, -\frac{1}{2})$	$(-2, 2)$	$(-1, 0)$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(0, 1)$	$(\frac{1}{2}, 2)$	$(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$	一般式 $(0, \beta)$
C_{-2}	10	1	54	4	6	1	2	-6	-2	$\beta(4 - 2\beta)$
C_{-1}	7	1	39	4	5	1	3	9	1	$\beta(4 - \beta)$
C_0	4	1	24	4	4	1	4	24	4	$\beta(4)$
C_1	1	1	9	4	3	1	5	39	7	$\beta(4 + \beta)$
C_2	-2	1	-6	4	2	1	6	54	10	$\beta(4 + 2\beta)$
D	10	1	80	5	20	5	20	80	10	20

k=5 (等間隔5点) 2次

(α, β)	$(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$	$(-2, -\frac{1}{2})$	$(-2, 2)$	$(-1, 0)$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(0, 1)$	$(\frac{1}{2}, 2)$	$(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$	一般式 (O, β)
C_{-2}	70	178	174	44	26	-62	-58	-36	-2	$\beta(-36-42\beta+20\beta^2)$
C_{-1}	37	163	144	104	155	283	113	39	1	$\beta(144-21\beta-10\beta^2)$
C_0	14	158	99	124	184	398	184	99	14	$\beta(204-20\beta^2)$
C_1	1	163	39	104	113	283	155	144	37	$\beta(144+21\beta-10\beta^2)$
C_2	-2	178	-36	44	-58	-62	26	174	70	$\beta(-36+42\beta+20\beta^2)$
D	60	168	280	105	420	840	420	280	60	420

k=5 (等間隔5点) 3次

(α, β)	$(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$	$(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$	$(-2, -\frac{1}{2})$	$(-2, 2)$	$(-1, 0)$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(0, 1)$	$(\frac{1}{2}, 2)$	$(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$	一般式 (O, β)
C_{-2}	271	178	3783	44	-99	-62	-29	633	1	$\beta(-144+70\beta+80\beta^2-35\beta^3)$
C_{-1}	166	163	8178	104	1026	283	46	-2322	-14	$\beta(576-560\beta-40\beta^2+70\beta^3)$
C_0	56	158	3168	124	736	398	736	3168	56	$\beta(816-80\beta^2)$
C_1	-14	163	-2322	104	46	283	1026	8178	166	$\beta(576+560\beta-40\beta^2-70\beta^3)$
C_2	1	178	633	44	-29	-62	-99	3783	271	$\beta(-144-70\beta+80\beta^2+35\beta^3)$
D	240	168	8960	105	1680	840	1680	8960	240	1680

1.2 求積式の誘導

1.2.1 等間隔の場合

1.2.1 a [aH, bH] 型の求積式, その1

前節に示した数値積分の理論から, 等間隔の k 個の点 $x, x+h, x+2h, \dots, x+(k-1)h$ における観測値 $y_1, y_2, y_3, \dots, y_k$ によって, つぎのような積分値を推定することができ, それに必要な係数は表1.1に示された。

$$I_{ah}^{\beta h} = \int_{ah}^{\beta h} f(x) dx \equiv \frac{h}{D} (C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_k y_k) \tag{1.2.1}$$

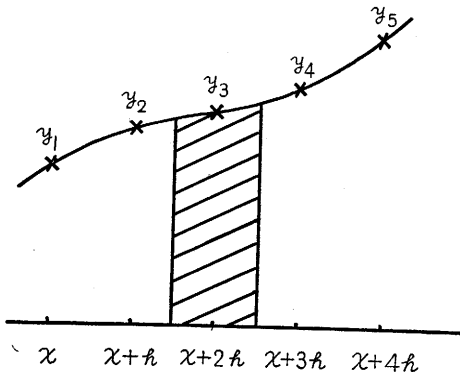


図 1.1

ここに, $f(x)$ は局部的に適当な次数の多項式で近似でき, しかも, y_1, y_2, \dots, y_k の間に相関々係はないものとする。

したがって, たとえば, $k=5$ とした場合,

$(\alpha, \beta) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ は, 図1.1の斜線の部分の面積をしめすことになり, その積分値は, もし3次曲線近似を仮定すれば

$$I \cdot \frac{1}{2} = \frac{h}{D} \{ C_{-2}y_1 + C_{-1}y_2 + C_0y_3 + C_1y_4 + C_2y_5 \} = \frac{h}{840} \{ -62y_1 + 283y_2 + 398y_3 + 283y_4 - 62y_5 \}$$

としてあたえられる。

さて、樹幹の横断面を正円と仮定すれば、幹材積は幹曲線が幹軸のまわりを1回転した場合の回転体の体積と考えることができるから、 x を樹幹の一端よりの距離、 r を x の部位における半径、 H を全長として、幹曲線の方程式を $r=f(x)$ とすれば、もとめる幹材積 V は、次式によってあたえられる。

$$V = \int_0^H \pi r^2 dx$$

したがって、いま、 $2r=d$ としてあらわせば、上式は $V = \int_0^H \frac{\pi}{4} d^2 dx$ であり、 d^2 をあらためて y とおけば

$$V = \frac{\pi}{4} \int_0^H y dx$$

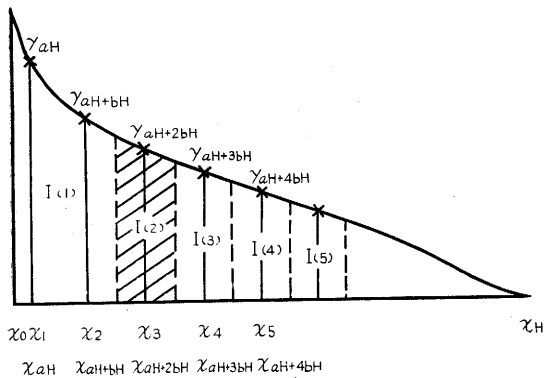


図 1.2

図 1.2 において、対象の基部 x_0 より x 軸上 aH はなれた部位を x_{aH} とし、以下 $h=bH$ 間隔にとられた点 $x_{aH}, x_{aH+bH}, x_{aH+2bH}, \dots$ における直径を $d_{aH}, d_{aH+bH}, d_{aH+2bH}, \dots$ 、その2乗を $y_{aH}, y_{aH+bH}, y_{aH+2bH}, \dots$ とする。また、便宜上、全長 H をこえる x を考え、それらの点における d 、したがって y の値を 0 としよう。

いま

$$I = \int_{x_0}^{x_H} y dx$$

とにおいて

$$V = \frac{\pi}{4} \int_{x_0}^{x_H} y dx = \frac{\pi}{4} I \tag{1.2.2}$$

なる値を移動平均法をもちいて推定する方法を考える。

まず、 $x_{aH+\frac{3}{2}bH}, x_{aH+\frac{5}{2}bH}, x_{aH+\frac{7}{2}bH}, \dots$ を分岐点として I を図示したような小面積に分割し、それぞれの小面積を $I(1), I(2), I(3), \dots$ とすれば

$$I = I(1) + I(2) + I(3) + \dots$$

ここに

$$I(1) = \int_{x_0}^{x_{aH} + \frac{3}{2}bH} y \, dx, \quad I(2) = \int_{x_{aH} + \frac{3}{2}bH}^{x_{aH} + \frac{5}{2}bH} y \, dx, \quad I(3) = \int_{x_{aH} + \frac{5}{2}bH}^{x_{aH} + \frac{7}{2}bH} y \, dx,$$

$I(1), I(2), I(3), \dots$ の分割面積をもとめるのに、近接する5個の測点における観測値をもちいることにすれば、まず、 $I(2)$ に対しては $x_{aH}, x_{aH+bH}, x_{aH+2bH}, x_{aH+3bH}, x_{aH+4bH}$ の5点をもちいて

$$I(2) = \frac{bH}{D} \left\{ C_{-2}y_{aH} + C_{-1}y_{aH+bH} + C_0y_{aH+2bH} + C_1y_{aH+3bH} + C_2y_{aH+4bH} \right\}$$

$I(3)$ については、 $x_{aH+bH}, x_{aH+2bH}, x_{aH+3bH}, x_{aH+4bH}, x_{aH+5bH}$ の5点もちいられるから

$$I(3) = \frac{bH}{D} \left\{ C_{-2}y_{aH+bH} + C_{-1}y_{aH+2bH} + C_0y_{aH+3bH} + C_1y_{aH+4bH} + C_2y_{aH+5bH} \right\}$$

以下同様にして、順次 $I(4), I(5), \dots$ をもとめると

$$I(4) = \frac{bH}{D} \left\{ C_{-2}y_{aH+2bH} + C_{-1}y_{aH+3bH} + C_0y_{aH+4bH} + C_1y_{aH+5bH} + C_2y_{aH+6bH} \right\}$$

$$I(5) = \frac{bH}{D} \left\{ C_{-2}y_{aH+3bH} + C_{-1}y_{aH+4bH} + C_0y_{aH+5bH} + C_1y_{aH+6bH} + C_2y_{aH+7bH} \right\}$$

⋮

⋮

したがって

$$I_{aH + \frac{3}{2}bH}^H = I(2) + I(3) + I(4) + \dots$$

$$= \frac{bH}{D} \left\{ \begin{aligned} &C_{-2}y_{aH} + (C_{-2} + C_{-1})y_{aH+bH} + (C_{-2} + C_{-1} + C_0)y_{aH+2bH} \\ &+ (C_{-2} + C_{-1} + C_0 + C_1)y_{aH+3bH} + (C_{-2} + C_{-1} + C_0 + C_1 + C_2)y_{aH+4bH} \\ &+ (C_{-2} + C_{-1} + C_0 + C_1 + C_2)y_{aH+5bH} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (1 \cdot 2 \cdot 3)$$

つぎに、最初の5点における観測値をもちいて $I(1) = I_0^{aH + \frac{3}{2}bH}$ をもとめると、この場合の係数を D', C' としてあらわせば

$$I(1) = \frac{bH}{D'} \left\{ C_{-2}'y_{aH} + C_{-1}'y_{aH+bH} + C_0'y_{aH+2bH} + C_1'y_{aH+3bH} + C_2'y_{aH+4bH} \right\} \quad (1 \cdot 2 \cdot 4)$$

すなわち、全体の面積 I は、(1・2・3)式、(1・2・4)式によって

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{aH + \frac{3}{2}bH} + \int_{aH + \frac{3}{2}bH}^H \\ &= bH \left[\left\{ \frac{1}{D}C_{-2} + \frac{1}{D'}C_{-2}' \right\} y_{aH} + \left\{ \frac{1}{D}(C_{-2} + C_{-1}) + \frac{1}{D'}C_{-1}' \right\} y_{aH+bH} \right. \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{D}(C_{-2} + C_{-1} + C_0) + \frac{1}{D'}C_0' \right\} y_{aH+2bH} \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{D}(C_{-2} + C_{-1} + C_0 + C_1) + \frac{1}{D'}C_1' \right\} y_{aH+3bH} \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{D}(C_{-2} + C_{-1} + C_0 + C_1 + C_2) + \frac{1}{D'}C_2' \right\} y_{aH+4bH} \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{1}{D}(C_{-2} + C_{-1} + C_0 + C_1 + C_2) \right\} y_{aH+5bH} \right] \end{aligned}$$

$$+ \left\{ \frac{1}{D} (C_{-2} + C_{-1} + C_0 + C_1 + C_2) \right\} y_{aH+6bH} + \dots] \quad (1.2.5)$$

としてしめされる。

$I(1), I(2), I(3), \dots$ の分割面積を推定するのにもちいた $x_{aH+ibH} (i=0, 1, 2, \dots)$ の各 5 個の中央の点を 0 として, その両側の 4 点を $-2, -1, 1, 2$ とおけば, $I(2), I(3), \dots$ の積分に対しては表 1.1, $k=5, (\alpha, \beta) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ の係数が使用できるから, 3 次曲線近似を仮定すれば

$$\begin{aligned} D &= 840 & C_0 &= 398 \\ C_{-2} &= -62 & C_1 &= 283 \\ C_{-1} &= 283 & C_2 &= -62 \end{aligned}$$

また, $I(1)$ の積分に対する係数は, 一般式をもちいて つぎのようにもとめられる。

x_{aH+2bH} を 0 とおき, 間隔 bH を単位の長さにとれば, x_0 は $-(2 + \frac{aH}{bH})$ に対応するから, $I(1)$ の積分に対しては $(\alpha, \beta) = \left\{ -\left(2 + \frac{a}{b}\right), -\frac{1}{2} \right\}$ の係数が使用されることになるが, 一般式は $(0, \beta)$ の形であたえられているので, まず $I(1)$ の積分を変換して

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_{aH+\frac{3}{2}bH}} y dx &= \int_{x_0}^{x_{aH+2bH}} y dx - \int_{x_{aH+\frac{3}{2}bH}}^{x_{aH+2bH}} y dx \\ &= -\int_{x_{aH+2bH}}^{x_0} y dx + \int_{x_{aH+2bH}}^{x_{aH+\frac{3}{2}bH}} y dx \quad (1.2.6) \end{aligned}$$

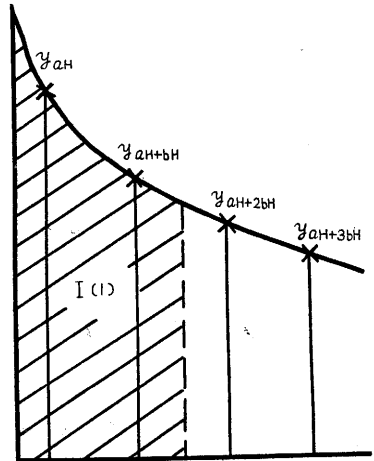
ここに, $2 + \frac{a}{b} = Z$ とおき

$$\int_{x_{aH+2bH}}^{x_0} y dx = I(A), \quad \int_{x_{aH+2bH}}^{x_{aH+\frac{3}{2}bH}} y dx = I(B)$$

とすれば

$$I(A) = \int_0^{-Z} y dx, \quad I(B) = \int_0^{-\frac{1}{2}} y dx$$

したがって, $I(A)$ については $(0, -Z)$, また, $I(B)$ については $(0, -\frac{1}{2})$ の係数が使用できる。



	x_0	x_{aH}	x_{aH+bH}	x_{aH+2bH}	x_{aH+3bH}	
		2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1
		$-(2 + \frac{a}{b})$				

図 III 元供試木と新供試木 (ヒノキ) の幹形

$I(A)$ については, $(\alpha, \beta) = (0, -z)$ であるから 3 次曲線近似を仮定すれば

$$\left. \begin{aligned} C_{-2}(A) &= -z(-144 - 70z + 80z^2 + 35z^3) \\ C_{-1}(A) &= -z(576 + 560z - 40z^2 - 70z^3) \\ C_0(A) &= -z(816 - 80z^2) \\ C_1(A) &= -z(576 - 560z - 40z^2 + 70z^3) \\ C_2(A) &= -z(-144 + 70z + 80z^2 - 35z^3) \\ D(A) &= 1680 \end{aligned} \right\} (1.2.7)$$

$I(B)$ については, $(\alpha, \beta) = (0, -\frac{1}{2})$ であるから

$$\left. \begin{aligned} C_{-2}(B) &= -\frac{1}{2} \left\{ -144 + 70 \left(-\frac{1}{2} \right) + 80 \left(-\frac{1}{2} \right)^2 - 35 \left(-\frac{1}{2} \right)^3 \right\} = 77.3125 \\ C_{-1}(B) &= -\frac{1}{2} \left\{ 576 - 560 \left(-\frac{1}{2} \right) - 40 \left(-\frac{1}{2} \right)^2 + 70 \left(-\frac{1}{2} \right)^3 \right\} = -418.6250 \\ C_0(B) &= -\frac{1}{2} \left\{ 816 - 80 \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \right\} = -398 \\ C_1(B) &= -\frac{1}{2} \left\{ 576 + 560 \left(-\frac{1}{2} \right) - 40 \left(-\frac{1}{2} \right)^2 - 70 \left(-\frac{1}{2} \right)^3 \right\} = -147.3750 \\ C_2(B) &= -\frac{1}{2} \left\{ -144 - 70 \left(-\frac{1}{2} \right) + 80 \left(-\frac{1}{2} \right)^2 + 35 \left(-\frac{1}{2} \right)^3 \right\} = 46.6875 \\ D(B) &= 1680 \end{aligned} \right\} (1.2.8)$$

したがって, $(-z, -\frac{1}{2})$ に対する係数は, (1.2.6) 式より

$$\left. \begin{aligned} C_{-2}' &= z(-144 - 70z + 80z^2 + 35z^3) + 77.3125 \\ &= \left(2 + \frac{a}{b} \right) \left\{ -144 - 70 \left(2 + \frac{a}{b} \right) + 80 \left(2 + \frac{a}{b} \right)^2 + 35 \left(2 + \frac{a}{b} \right)^3 \right\} + 77.3125 \\ &= 709.3125 + 1656 \frac{a}{b} + 1250 \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 360 \left(\frac{a}{b} \right)^3 + 35 \left(\frac{a}{b} \right)^4 \\ C_{-1}' &= z(576 + 560z - 40z^2 - 70z^3) - 418.6250 \\ &= \left(2 + \frac{a}{b} \right) \left\{ 576 + 560 \left(2 + \frac{a}{b} \right) - 40 \left(2 + \frac{a}{b} \right)^2 - 70 \left(2 + \frac{a}{b} \right)^3 \right\} - 418.6250 \\ &= 1533.3750 + 96 \frac{a}{b} - 1360 \left(\frac{a}{b} \right)^2 - 600 \left(\frac{a}{b} \right)^3 - 70 \left(\frac{a}{b} \right)^4 \\ C_0' &= z(816 - 80z^2) - 398 \\ &= \left(2 + \frac{a}{b} \right) \left\{ 816 - 80 \left(2 + \frac{a}{b} \right)^2 \right\} - 398 \\ &= 594 - 144 \frac{a}{b} - 480 \left(\frac{a}{b} \right)^2 - 80 \left(\frac{a}{b} \right)^3 \\ C_1' &= z(576 - 560z - 40z^2 + 70z^3) - 147.3750 \\ &= \left(2 + \frac{a}{b} \right) \left\{ 576 - 560 \left(2 + \frac{a}{b} \right) - 40 \left(2 + \frac{a}{b} \right)^2 + 70 \left(2 + \frac{a}{b} \right)^3 \right\} - 147.3750 \end{aligned} \right\} (1.2.9)$$

$$C_{-2}' = 709.3125 + 1656(0.2) + 1250(0.2)^2 + 360(0.2)^3 + 35(0.2)^4 = 1093.4485$$

$$C_{-1}' = 1533.3750 + 96(0.2) - 1360(0.2)^2 - 600(0.2)^3 - 70(0.2)^4 = 1493.2630$$

$$C_0' = 594 - 144(0.2) - 480(0.2)^2 - 80(0.2)^3 = 545.3600$$

$$C_1' = -435.3750 + 96(0.2) + 880(0.2)^2 + 520(0.2)^3 + 70(0.2)^4 = -376.7030$$

$$C_2' = 118.6875 - 24(0.2) - 290(0.2)^2 - 200(0.2)^3 - 35(0.2)^4 = 100.6315$$

これらの値を (1・2・11) 式に代入すれば

$$\begin{aligned}
 V = 0.7854 \cdot 0.1H \{ & 0.5771y_{0.02H} & & = H \{ 0.04533y_{0.02H} \\
 & + 1.1518y_{0.02H+0.1H} & & + 0.09046y_{0.02H+0.1H} \\
 & + 1.0615y_{0.02H+0.2H} & & + 0.08337y_{0.02H+0.2H} \\
 & + 0.8496y_{0.02H+0.3H} & & + 0.06673y_{0.02H+0.3H} \\
 & + 1.0599y_{0.02H+0.4H} & & + 0.08324y_{0.02H+0.4H} \\
 & + 1.0000y_{0.02H+0.5H} & & + 0.07854y_{0.02H+0.5H} \\
 & + \quad \quad y_{0.02H+0.6H} & & + \quad \quad y_{0.02H+0.6H} \\
 & + \quad \quad y_{0.02H+0.7H} & & + \quad \quad y_{0.02H+0.7H} \\
 & + \quad \quad y_{0.02H+0.8H} & & + \quad \quad y_{0.02H+0.8H} \\
 & + \quad \quad y_{0.02H+0.9H} \} & & + \quad \quad y_{0.02H+0.9H} \} \quad (1 \cdot 2 \cdot 12)
 \end{aligned}$$

上式が、この場合の求積式であり、 y の単位を m^2 とし、 H を m とすれば、 V は m^3 単位でもとめられる。

上記のとおり、幹材積 V は、所定の測定部位における観測値と、それに対応した求積用係数との積和としてあたえられるが、同様にして、適宜 a, b の値をかえた場合の求積式をもとめることができる。いま、 a, b について下記のような組合せをつくり、それぞれの場合についての求積式を誘導すると、つぎのとおりである。

$$\begin{array}{cccc}
 \left(\begin{array}{l} a = 0.00 \\ b = 0.05 \end{array} \right. & \left(\begin{array}{l} a = 0.02 \\ b = 0.05 \end{array} \right. & \left(\begin{array}{l} a = 0.00 \\ b = 0.10 \end{array} \right. & \left(\begin{array}{l} a = 0.04 \\ b = 0.10 \end{array} \right. \\
 \left(\begin{array}{l} a = 0.01 \\ b = 0.05 \end{array} \right. & \left(\begin{array}{l} a = 0.03 \\ b = 0.05 \end{array} \right. & \left(\begin{array}{l} a = 0.02 \\ b = 0.10 \end{array} \right. & \left(\begin{array}{l} a = 0.06 \\ b = 0.10 \end{array} \right.
 \end{array}$$

[1 ・ 1]

$$\left(\begin{array}{l} a = 0.00 \\ b = 0.05 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 V = H \{ & 0.01368y_0 \\
 & + 0.04617y_{0.05H}
 \end{aligned}$$

[1 ・ 2]

$$\left(\begin{array}{l} a = 0.01 \\ b = 0.05 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 V = H \{ & 0.02266y_{0.01H} \\
 & + 0.04524y_{0.01H+0.05H}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+0.04282 y_{0.10H} \\
 &+0.03199 y_{0.15H} \\
 &+0.04204 y_{0.20H} \\
 &+0.03927 y_{0.25H} \\
 &+ \quad " \quad y_{0.30H} \\
 &\vdots \\
 &+ \quad " \quad y_{0.95H} \\
 &+ \quad " \quad y_H \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} &+0.04282 y_{0.10H} \\ &+0.03199 y_{0.15H} \\ &+0.04204 y_{0.20H} \\ &+0.03927 y_{0.25H} \\ &+ \quad " \quad y_{0.30H} \\ &\vdots \\ &+ \quad " \quad y_{0.95H} \\ &+ \quad " \quad y_H \end{aligned}} \right\}
 \end{aligned}$$

[1 · 3]

$$\begin{cases}
 a = 0.02 \\
 b = 0.05
 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 V = H \left\{ \begin{aligned}
 &0.03440 y_{0.02H} \\
 &+0.04105 y_{0.02H+0.05H} \\
 &+0.03950 y_{0.02H+0.10H} \\
 &+0.03700 y_{0.02H+0.15H} \\
 &+0.04042 y_{0.02H+0.20H} \\
 &+0.03927 y_{0.02H+0.25H} \\
 &+ \quad " \quad y_{0.02H+0.30H} \\
 &\vdots \\
 &+ \quad " \quad y_{0.02H+0.95H}
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

[1 · 5]

$$\begin{cases}
 a = 0.00 \\
 b = 0.10
 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 V = H \left\{ \begin{aligned}
 &0.02736 y_0 \\
 &+0.09235 y_{0.1H} \\
 &+0.08565 y_{0.2H} \\
 &+0.06398 y_{0.3H} \\
 &+0.08408 y_{0.4H} \\
 &+0.07854 y_{0.5H} \\
 &+ \quad " \quad y_{0.6H} \\
 &+ \quad " \quad y_{0.7H}
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+0.04169 y_{0.01H+0.10H} \\
 &+0.03336 y_{0.01H+0.15H} \\
 &+0.04162 y_{0.01H+0.20H} \\
 &+0.0392 y_{0.01H+0.25H} \\
 &+ \quad " \quad y_{0.01H+0.30H} \\
 &\vdots \\
 &+ \quad " \quad y_{0.01H+0.95H} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} &+0.04169 y_{0.01H+0.10H} \\ &+0.03336 y_{0.01H+0.15H} \\ &+0.04162 y_{0.01H+0.20H} \\ &+0.0392 y_{0.01H+0.25H} \\ &+ \quad " \quad y_{0.01H+0.30H} \\ &\vdots \\ &+ \quad " \quad y_{0.01H+0.95H} \end{aligned}} \right\}
 \end{aligned}$$

[1 · 4]

$$\begin{cases}
 a = 0.03 \\
 b = 0.05
 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 V = H \left\{ \begin{aligned}
 &0.04935 y_{0.03H} \\
 &+0.03283 y_{0.03H+0.05H} \\
 &+0.03636 y_{0.03H+0.10H} \\
 &+0.03724 y_{0.03H+0.15H} \\
 &+0.03815 y_{0.03H+0.20H} \\
 &+0.03927 y_{0.03H+0.25H} \\
 &+ \quad " \quad y_{0.03H+0.30H} \\
 &\vdots \\
 &+ \quad " \quad y_{0.03H+0.95H}
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

[1 · 6]

$$\begin{cases}
 a = 0.02 \\
 b = 0.10
 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 V = H \left\{ \begin{aligned}
 &0.04533 y_{0.02H} \\
 &+0.09046 y_{0.02H+0.1H} \\
 &+0.08337 y_{0.02H+0.2H} \\
 &+0.06673 y_{0.02H+0.3H} \\
 &+0.08324 y_{0.02H+0.4H} \\
 &+0.07854 y_{0.02H+0.5H} \\
 &+ \quad " \quad y_{0.02H+0.6H} \\
 &+ \quad " \quad y_{0.02H+0.7H}
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+0.07854 y_{0.8H} \\ &+ \quad " \quad y_{0.9H} \\ &+ \quad " \quad y_H \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} &+0.07854 y_{0.8H} \\ &+ \quad " \quad y_{0.9H} \\ &+ \quad " \quad y_H \end{aligned}} \right\}$$

[1 · 7]

$$\begin{cases} a = 0.04 \\ b = 0.10 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V = H \left\{ \right. &0.06880 y_{0.04H} \\ &+0.08209 y_{0.04H+0.1H} \\ &+0.07912 y_{0.04H+0.2H} \\ &+0.07400 y_{0.04H+0.3H} \\ &+0.08083 y_{0.04H+0.4H} \\ &+0.07854 y_{0.04H+0.5H} \\ &+ \quad " \quad y_{0.04H+0.6H} \\ &+ \quad " \quad y_{0.04H+0.7H} \\ &+ \quad " \quad y_{0.04H+0.8H} \\ &+ \quad " \quad y_{0.04H+0.9H} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} &0.06880 y_{0.04H} \\ &+0.08209 y_{0.04H+0.1H} \\ &+0.07912 y_{0.04H+0.2H} \\ &+0.07400 y_{0.04H+0.3H} \\ &+0.08083 y_{0.04H+0.4H} \\ &+0.07854 y_{0.04H+0.5H} \\ &+ \quad " \quad y_{0.04H+0.6H} \\ &+ \quad " \quad y_{0.04H+0.7H} \\ &+ \quad " \quad y_{0.04H+0.8H} \\ &+ \quad " \quad y_{0.04H+0.9H} \end{aligned}} \right\}$$

$$\begin{aligned} &+0.07854 y_{0.02H+0.8H} \\ &+ \quad " \quad y_{0.02H+0.9H} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} &+0.07854 y_{0.02H+0.8H} \\ &+ \quad " \quad y_{0.02H+0.9H} \end{aligned}} \right\}$$

[1 · 8]

$$\begin{cases} a = 0.06 \\ b = 0.10 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V = H \left\{ \right. &0.09870 y_{0.06H} \\ &+0.06567 y_{0.06H+0.1H} \\ &+0.07272 y_{0.06H+0.2H} \\ &+0.07448 y_{0.06H+0.3H} \\ &+0.07630 y_{0.06H+0.4H} \\ &+0.07854 y_{0.06H+0.5H} \\ &+ \quad " \quad y_{0.06H+0.6H} \\ &+ \quad " \quad y_{0.06H+0.7H} \\ &+ \quad " \quad y_{0.06H+0.8H} \\ &+ \quad " \quad y_{0.06H+0.9H} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} &0.09870 y_{0.06H} \\ &+0.06567 y_{0.06H+0.1H} \\ &+0.07272 y_{0.06H+0.2H} \\ &+0.07448 y_{0.06H+0.3H} \\ &+0.07630 y_{0.06H+0.4H} \\ &+0.07854 y_{0.06H+0.5H} \\ &+ \quad " \quad y_{0.06H+0.6H} \\ &+ \quad " \quad y_{0.06H+0.7H} \\ &+ \quad " \quad y_{0.06H+0.8H} \\ &+ \quad " \quad y_{0.06H+0.9H} \end{aligned}} \right\}$$

1.2.1 b [aH, bH] 型の求積式, その2

本項 a) にしめした求積式は, 測点数 n が10程度以上に大きい場合についてのものであったが, つぎに, n がそれよりも小さい場合における求積式をもとめてみよう。

測定部位については前の場合と同様に x_0 より aH はなれた点を x_1 とし, 以下 bH 間隔に x_2, x_3, \dots をとることとする。Iの分割については, 図1.4にしめされるように, 分岐点を $x_{aH+\frac{1}{2}bH}, x_{aH+\frac{3}{2}bH}, \dots$ として, 各分割面積の推定には近接する3個の観測値をもちい, 観測値間をとる

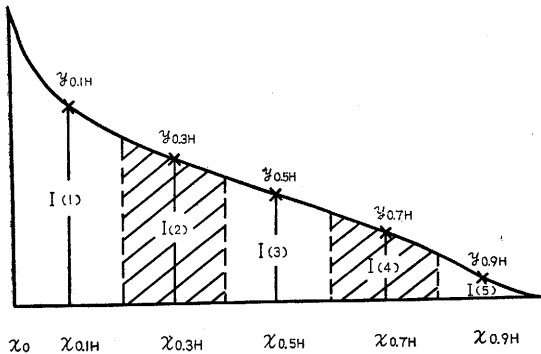


図 1.4

曲線としては2次曲線を仮定することにする。前の場合においては, 各分割面積の推定に5個の測点における観測値をもちい3次式を近似させたが, この場合には, 測点の総数が5あるいは6というようなすくない場合であるから, $k=5$ として前と同様の分割をおこない3次式を近似させることは無意味であろう。全長 H をこえる測点は便宜上想定することであるから, そのよう

な想定の場合が大きいことはこのましいとはおもわれぬし、また、 H 内の測点のみをもちいるように考慮すると、分割自体の意味がなくなってしまう。

すなわち

$$I = \int_{x_0}^{x_H} y dx = I(1) + I(2) + I(3) + \dots$$

として、 I の各分割面積を

$$I(1) = \int_{x_0}^{x_{a+\frac{1}{2}bH}} y dx, \quad I(2) = \int_{x_{aH+\frac{1}{2}bH}}^{x_{aH+\frac{3}{2}bH}} y dx, \quad I(3) = \int_{x_{aH+\frac{3}{2}bH}}^{x_{aH+\frac{5}{2}bH}} y dx, \dots$$

とし、それぞれの分割面積をもとめるのに、 $k=3$ として2次曲線を近似させることにすれば

$$I(2) = \frac{bH}{D} \left\{ C_{-1} y_{aH} + C_0 y_{aH+bH} + C_1 y_{aH+2bH} \right\}$$

$$I(3) = \frac{bH}{D} \left\{ C_{-1} y_{aH+bH} + C_0 y_{aH+2bH} + C_1 y_{aH+3bH} \right\}$$

⋮

⋮

したがって

$$I_{aH+\frac{1}{2}bH}^H = I(2) + I(3) + I(4) + \dots$$

$$= \frac{bH}{D} \left\{ C_{-1} y_{aH} + (C_{-1} + C_0) y_{aH+bH} + (C_{-1} + C_0 + C_1) y_{aH+2bH} + (C_{-1} + C_0 + C_1) y_{aH+3bH} + \dots \right\} \quad (1 \cdot 2 \cdot 13)$$

また、 $I(1)$ は

$$I(1) = \frac{bH}{D'} \left\{ C_{-1}' y_{aH} + C_0' y_{aH+bH} + C_1' y_{aH+2bH} \right\} \quad (1 \cdot 2 \cdot 14)$$

としてしめされるから、全体の面積 I は、(1・2・13)式、(1・2・14)式によって

$$I = bH \left[\left\{ \frac{1}{D} C_{-1} + \frac{1}{D'} C_{-1}' \right\} y_{aH} + \left\{ \frac{1}{D} (C_{-1} + C_0) + \frac{1}{D'} C_0' \right\} y_{aH+bH} + \left\{ \frac{1}{D} (C_{-1} + C_0 + C_1) + \frac{1}{D'} C_1' \right\} y_{aH+2bH} + \left\{ \frac{1}{D} (C_{-1} + C_0 + C_1) \right\} y_{aH+3bH} + \left\{ \begin{array}{c} // \\ \dots \end{array} \right\} y_{aH+4bH} + \dots \right] \quad (1 \cdot 2 \cdot 15)$$

としてしめされる。

各分割面積を推定するのにもちいた、それぞれ3個の測点の中央の点を0として、その両側の2点を-1, 1とおけば、 $I(2), I(3), \dots$ の積分に対しては表1・1の $k=3$, 2次, $(\alpha, \beta) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ の係数が使用できるから、

$$\begin{aligned} D &= 24 & C_0 &= 22 \\ C_{-1} &= 1 & C_1 &= 1 \end{aligned}$$

また、 $I(1)$ に対する係数 D', C' は、前の場合と同様に一般式をもちいてつぎのようにもとめられる。

x_{aH+bH} を0とおき、 bH を単位の長にとれば、 x_0 は、 $\Rightarrow (1 + \frac{aH}{bH})$ に対応するから

$$(\alpha, \beta) = \left\{ -\left(1 + \frac{a}{b}\right), -\frac{1}{2} \right\}$$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_{aH+\frac{1}{2}bH}} ydx &= \int_{x_0}^{x_{aH+bH}} ydx - \int_{x_{aH+\frac{1}{2}bH}}^{x_{aH+bH}} ydx \\ &= -\int_{x_{aH+bH}}^{x_0} ydx + \int_{x_{aH+bH}}^{x_{aH+\frac{1}{2}bH}} ydx \end{aligned}$$

(1・2・16)

ここに、 $1 + \frac{a}{b} = z$ とおき

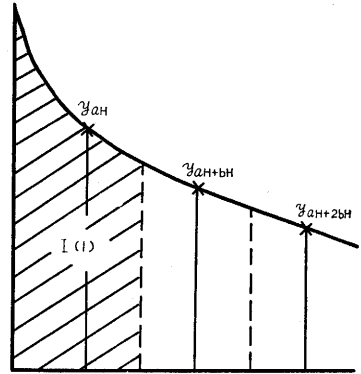
$$\int_{x_{aH+bH}}^{x_0} ydx = I(A), \quad \int_{x_{aH+bH}}^{x_{aH+\frac{1}{2}bH}} ydx = I(B)$$

とすれば

$$I(A) = \int_0^{-z} ydx, \quad I(B) = \int_0^{-\frac{1}{2}} ydx$$

すなわち、 $I(A)$ については $(0, -z)$, $I(B)$ については $(0, -\frac{1}{2})$ の係数が使用できるから

$$\begin{aligned} C_{-1}(A) &= -z(3z + 2z^2) \\ C_0(A) &= -z(12 - 4z^2) \\ C_1(A) &= -z(-3z + 2z^2) \\ D(A) &= 12 \end{aligned}$$



$x_0 \quad x_{aH} \quad x_{aH+bH} \quad x_{aH+2bH}$

$-(1 + \frac{a}{b}) \quad -1 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad 1$

図 1・5

$$C_{-1}(B) = -\frac{1}{2}\left\{-3\left(-\frac{1}{2}\right)+2\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right\} = -1.0$$

$$C_0(B) = -\frac{1}{2}\left\{12-4\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right\} = -5.5$$

$$C_1(B) = -\frac{1}{2}\left\{3\left(-\frac{1}{2}\right)+2\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right\} = 0.5$$

$$D(B) = 12$$

したがって、 $(-z, -\frac{1}{2})$ に対する係数は

$$\begin{aligned} C'_{-1} &= z(3z+2z^2) - 1 \\ &= \left(1+\frac{a}{b}\right)\left\{3\left(1+\frac{a}{b}\right)+2\left(1+\frac{a}{b}\right)^2\right\} - 1 \\ &= 4+12\frac{a}{b}+9\left(\frac{a}{b}\right)^2+2\left(\frac{b}{b}\right)^3 \\ C'_0 &= z(12-4z^2) - 5.5 \\ &= \left(1+\frac{a}{b}\right)\left\{12-4\left(1+\frac{a}{b}\right)^2\right\} - 5.5 \\ &= 2.5-12\left(\frac{a}{b}\right)^2-4\left(\frac{a}{b}\right)^3 \\ C'_1 &= z(-3z+2z^2) + 0.5 \\ &= \left(1+\frac{a}{b}\right)\left\{-3\left(1+\frac{a}{b}\right)+2\left(1+\frac{a}{b}\right)^2\right\} + 0.5 \\ &= -0.5+3\left(\frac{a}{b}\right)^2+2\left(\frac{a}{b}\right)^3 \\ D' &= 12 \end{aligned} \quad (1 \cdot 2 \cdot 17)$$

としてしめされるから、上記の各値を(1・2・15)式に代入すれば

$$\begin{aligned} I &= bH \left\{ \left(\frac{1}{24} + \frac{C_{-1}'}{12} \right) y_{aH} \right. \\ &\quad + \left(\frac{1}{24} + \frac{22}{24} + \frac{C'_0}{12} \right) y_{aH+2bH} \\ &\quad + \left(\frac{1}{24} + \frac{22}{24} + \frac{1}{24} + \frac{C'_1}{12} \right) y_{aH+3bH} \\ &\quad + \left(\frac{1}{24} + \frac{22}{24} + \frac{1}{24} \right) y_{aH+3bH} \\ &\quad + (\quad // \quad) y_{aH+4bH} \\ &\quad + \quad \dots \quad \left. \right\} \end{aligned} \quad (1 \cdot 2 \cdot 18)$$

したがって、(1・2・2)式によって、この場合のVはつぎのようにあたえられる。

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{bH}{24} \left\{ \begin{aligned} &(1 + 2C_{-1}') y_{aH} && + 24 && y_{aH+3bH} \\ &+ (23 + 2C_0') y_{aH+bH} && + 24 && y_{aH+4bH} \\ &+ (24 + 2C_1') y_{aH+2bH} && + \dots && \end{aligned} \right\} \quad (1 \cdot 2 \cdot 19)$$

すなわち、上式が x_{aH} を基点として、以下 bH 間隔に測点を取り、各分割面積の推定に(3点、2次)の積分用係数をもちいた場合の求積の一般式である。

(1・2・19)式によって、前の場合と同様、適宜 a, b の値をかえた求積式をつくることができる。いま、 a, b について下記のような組合せをつくり、それぞれの場合についての求積式をもとめるとつぎのとおりである。

$\begin{pmatrix} a = 0.00 \\ b = 0.15 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a = 0.06 \\ b = 0.15 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a = 0.00 \\ b = 0.20 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a = 0.06 \\ b = 0.20 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a = 0.02 \\ b = 0.15 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a = 0.08 \\ b = 0.15 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a = 0.02 \\ b = 0.20 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a = 0.08 \\ b = 0.20 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a = 0.04 \\ b = 0.15 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} a = 0.04 \\ b = 0.20 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a = 0.10 \\ b = 0.20 \end{pmatrix}$

[1 ・ 9]

$$\begin{pmatrix} a = 0.00 \\ b = 0.15 \end{pmatrix}$$

$$V = H \left\{ \begin{aligned} &0.04418 y_0 \\ &+ 0.13745 y_{0.15H} \\ &+ 0.11290 y_{0.39H} \\ &+ 0.11781 y_{0.45H} \\ &+ \quad \quad y_{0.60H} \\ &+ \quad \quad y_{0.75H} \\ &+ \quad \quad y_{0.90H} \end{aligned} \right\}$$

[1 ・ 10]

$$\begin{pmatrix} a = 0.02 \\ b = 0.15 \end{pmatrix}$$

$$V = H \left\{ \begin{aligned} &0.06150 y_{0.02H} \\ &+ 0.13526 y_{0.02H+0.15H} \\ &+ 0.11347 y_{0.02H+0.30H} \\ &+ 0.11781 y_{0.02H+0.45H} \\ &+ \quad \quad y_{0.02H+0.60H} \\ &+ \quad \quad y_{0.02H+0.75H} \\ &+ \quad \quad y_{0.02H+0.90H} \end{aligned} \right\}$$

[1 ・ 11]

$$\begin{pmatrix} a = 0.04 \\ b = 0.15 \end{pmatrix}$$

$$V = H \left\{ \begin{aligned} &0.08225 y_{0.04H} \\ &+ 0.12832 y_{0.04H+0.15H} \\ &+ 0.11537 y_{0.04H+0.30H} \end{aligned} \right\}$$

[1 ・ 12]

$$\begin{pmatrix} a = 0.06 \\ b = 0.15 \end{pmatrix}$$

$$V = H \left\{ \begin{aligned} &0.10670 y_{0.06H} \\ &+ 0.11608 y_{0.06H+0.15H} \\ &+ 0.11887 y_{0.06H+0.30H} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &+0.11781 y_{0.04H+0.45H} \\
 &+ \quad // \quad y_{0.04H+0.60H} \\
 &+ \quad // \quad y_{0.04H+0.75H} \\
 &+ \quad // \quad y_{0.04H+0.90H} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} &+0.11781 y_{0.04H+0.45H} \\ &+ \quad // \quad y_{0.04H+0.60H} \\ &+ \quad // \quad y_{0.04H+0.75H} \\ &+ \quad // \quad y_{0.04H+0.90H} \end{aligned}} \right\}
 \end{aligned}$$

[1 · 13]

$$\left(\begin{aligned} a &= 0.08 \\ b &= 0.15 \end{aligned} \right)$$

$$\begin{aligned}
 V = H \left\{ \begin{aligned} &0.13512 y_{0.08H} \\ &+0.09798 y_{0.08H+0.15H} \\ &+0.12426 y_{0.08H+0.30H} \\ &+0.11781 y_{0.08H+0.45H} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

[1 · 14]

$$\left(\begin{aligned} a &= 0.00 \\ b &= 0.20 \end{aligned} \right)$$

$$\begin{aligned}
 V = H \left\{ \begin{aligned} &0.05891 y_0 \\ &+0.18326 y_{0.2H} \\ &+0.15054 y_{0.4H} \\ &+0.15708 y_{0.6H} \\ &+ \quad // \quad y_{0.8H} \\ &+ \quad // \quad y_H \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

[1 · 16]

$$\left(\begin{aligned} a &= 0.04 \\ b &= 0.20 \end{aligned} \right)$$

$$\begin{aligned}
 V = H \left\{ \begin{aligned} &0.09524 y_{0.04H} \\ &+0.17656 y_{0.04H+0.2H} \\ &+0.18164 y_{0.04H+0.4H} \\ &+0.15708 y_{0.04H+0.6H} \\ &+ \quad // \quad y_{0.04H+0.8H} \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+0.11781 y_{0.06H+0.45H} \\
 &+ \quad // \quad y_{0.06H+0.60H} \\
 &+ \quad // \quad y_{0.06H+0.75H} \\
 &+ \quad // \quad y_{0.06H+0.90H} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} &+0.11781 y_{0.06H+0.45H} \\ &+ \quad // \quad y_{0.06H+0.60H} \\ &+ \quad // \quad y_{0.06H+0.75H} \\ &+ \quad // \quad y_{0.06H+0.90H} \end{aligned}} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+0.11781 y_{0.08H+0.60H} \\
 &+ \quad // \quad y_{0.08H+0.75H} \\
 &+ \quad // \quad y_{0.08H+0.90H} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} &+0.11781 y_{0.08H+0.60H} \\ &+ \quad // \quad y_{0.08H+0.75H} \\ &+ \quad // \quad y_{0.08H+0.90H} \end{aligned}} \right\}
 \end{aligned}$$

[1 · 15]

$$\left(\begin{aligned} a &= 0.02 \\ b &= 0.20 \end{aligned} \right)$$

$$\begin{aligned}
 V = H \left\{ \begin{aligned} &0.07582 y_{0.02H} \\ &+0.15095 y_{0.02H+0.2H} \\ &+0.15232 y_{0.02H+0.4H} \\ &+0.15708 y_{0.02H+0.6H} \\ &+ \quad // \quad y_{0.02H+0.8H} \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

[1 · 17]

$$\left(\begin{aligned} a &= 0.06 \\ b &= 0.20 \end{aligned} \right)$$

$$\begin{aligned}
 V = H \left\{ \begin{aligned} &0.11734 y_{0.06H} \\ &+0.16771 y_{0.06H+0.2H} \\ &+0.15478 y_{0.06H+0.4H} \\ &+0.15708 y_{0.06H+0.6H} \\ &+ \quad // \quad y_{0.06H+0.8H} \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

[1 · 18]

$$\begin{cases} a=0.08 \\ b=0.20 \end{cases}$$

$$V=H \left\{ \begin{aligned} &0.14226 \cdot y_{0.08H} \\ &+0.15478 \cdot y_{0.08H+0.2H} \\ &+0.15849 \cdot y_{0.08H+0.4H} \\ &+0.15708 \cdot y_{0.08H+0.6H} \\ &+ \quad \quad \cdot y_{0.08H+0.8H} \end{aligned} \right\}$$

[1 · 19]

$$\begin{cases} a=0.10 \\ b=0.20 \end{cases}$$

$$V=H \left\{ \begin{aligned} &0.17017 \cdot y_{0.1H} \\ &+0.13745 \cdot y_{0.1H+0.2H} \\ &+0.16363 \cdot y_{0.1H+0.4H} \\ &+0.15708 \cdot y_{0.1H+0.6H} \\ &+ \quad \quad \cdot y_{0.1H+0.8H} \end{aligned} \right\}$$

1 · 2 · 1 c [aH, bH] 型の求積式, その 3

以上の求積式は, 全長Hをこえる測点を想定して, そのもとに導かれたものであるが, そのような前提条件をのぞいた求積式をつぎにもとめてみよう。x₀~x_H内にとられた測点における観測値のみをもちいた求積式は, それを一般的な形でしめすためには, b=φ(H)としてあらわす必要がある, 非常に複雑になってくるので, a, b についていくつかの値を確定してもとめることにする。

まず, a = 0, b = 0.1とした場合について考えてみよう。

この場合の測定部位およびIの分割は, 図1 · 6のとおりである。

$$I = \int_{x_0}^{x_H} y dx = I(1) + I(2) + I(3) + \dots + I(9)$$

ここに

$$I(1) = \int_{x_0}^{x_{0.15H}} y dx,$$

$$I(2) = \int_{x_{0.15H}}^{x_{0.25H}} y dx, \quad I(3) = \int_{x_{0.25H}}^{x_{0.35H}} y dx, \quad \dots \dots I(9) = \int_{x_{0.85H}}^{x_H} y dx$$

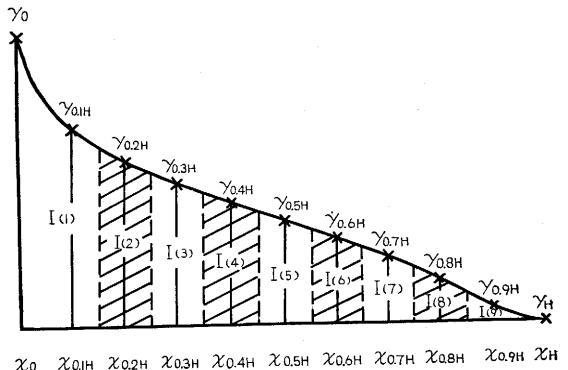


図 1 · 6

個々の積分値をもとめるのに, 近接する5点の観測値をもちいれば, § 1 · 2 · 1 aの場合と同様にして

$$I(2) = \frac{0.1H}{D} \left\{ C_{-2}y_0 + C_{-1}y_{0.1H} + C_0y_{0.2H} + C_1y_{0.3H} + C_2y_{0.4H} \right\}$$

$$I(3) = \frac{0.1H}{D} \left\{ C_{-2}y_{0.1H} + C_{-1}y_{0.2H} + C_0y_{0.3H} + C_1y_{0.4H} + C_2y_{0.5H} \right\}$$

$$I(4) = \frac{0.1H}{D} \left\{ C_{-2} y_{0.2H} + C_{-1} y_{0.3H} + C_0 y_{0.4H} + C_1 y_{0.5H} + C_2 y_{0.6H} \right\}$$

$$I(5) = \frac{0.1H}{D} \left\{ C_{-2} y_{0.2H} + C_{-1} y_{0.4H} + C_0 y_{0.5H} + C_1 y_{0.6H} + C_2 y_{0.7H} \right\}$$

$$I(6) = \frac{0.1H}{D} \left\{ C_{-2} y_{0.4H} + C_{-1} y_{0.5H} + C_0 y_{0.6H} + C_1 y_{0.7H} + C_2 y_{0.8H} \right\}$$

$$I(7) = \frac{0.1H}{D} \left\{ C_{-2} y_{0.5H} + C_{-1} y_{0.6H} + C_0 y_{0.7H} + C_1 y_{0.8H} + C_2 y_{0.9H} \right\}$$

$$I(8) = \frac{0.1H}{D} \left\{ C_{-2} y_{0.6H} + C_{-1} y_{0.7H} + C_0 y_{0.8H} + C_1 y_{0.9H} + C_2 y_H \right\}$$

したがって

$$\begin{aligned} & I(2) + I(3) + \dots + I(8) \\ &= \frac{0.1H}{D} \left\{ C_{-2} y_0 \right. \\ &\quad + (C_{-2} + C_{-1}) y_{0.1H} \\ &\quad + (C_{-2} + C_{-1} + C_0) y_{0.2H} \\ &\quad + (C_{-2} + C_{-1} + C_0 + C_1) y_{0.3H} \\ &\quad + (C_{-2} + C_{-1} + C_0 + C_1 + C_2) y_{0.4H} \\ &\quad + (C_{-2} + C_{-1} + C_0 + C_1 + C_2) y_{0.5H} \\ &\quad + (C_{-2} + C_{-1} + C_0 + C_1 + C_2) y_{0.6H} \\ &\quad \quad + (C_{-1} + C_0 + C_1 + C_2) y_{0.7H} \\ &\quad \quad \quad + (C_0 + C_1 + C_2) y_{0.8H} \\ &\quad \quad \quad \quad + (C_1 + C_2) y_{0.9H} \\ &\quad \quad \quad \quad \quad \left. + C_2 y_H \right\} \end{aligned} \tag{1.2.20}$$

$I(1)$ については、使用される係数を D' , C' とすれば

$$I(1) = \frac{0.1H}{D'} \left\{ C_{-2}' y_0 + C_{-1}' y_{0.1H} + C_0' y_{0.2H} + C_1' y_{0.3H} + C_2' y_{0.4H} \right\} \tag{1.2.21}$$

また、 $I(9)$ については、使用される係数を D'' , C'' とすれば

$$I(9) = \frac{0.1H}{D''} \left\{ C_{-2}'' y_{0.6H} + C_{-1}'' y_{0.7H} + C_0'' y_{0.8H} + C_1'' y_{0.9H} + C_2'' y_H \right\} \tag{1.2.22}$$

としてしめされるから、全体の面積 I は、(1.2.20), (1.2.21), (1.2.22) の各式の和としてあたえられる。

$I(2) \sim I(8)$ については、表 1.1 の $(\alpha, \beta) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ の係数がもちいられるから、3次式を仮定すれば

$$I(2) + I(3) + \dots + I(8)$$

$$= \frac{0.1H}{840} \left\{ \begin{aligned} &(-62) y_0 \\ &+(-62+283) y_{0.1H} \\ &+(-62+283+398) y_{0.2H} \\ &+(-62+283+398+283) y_{0.3H} \\ &+(-62+283+398+283-62) y_{0.4H} \\ &+(-62+283+398+283-62) y_{0.5H} \\ &+(-62+283+398+283-62) y_{0.6H} \\ &\quad + (283+398+283-62) y_{0.7H} \\ &\quad + (398+283-62) y_{0.8H} \\ &\quad + (283-62) y_{0.9H} \\ &\quad + (-62) y_H \end{aligned} \right\}$$

$$= 0.1H \left\{ \begin{array}{ll} -0.0738 y_0 & +1.0000 y_{0.6H} \\ -0.2681 y_{0.1H} & +1.0738 y_{0.7H} \\ +0.7369 y_{0.2H} & +0.7369 y_{0.8H} \\ +1.0738 y_{0.3H} & +0.2631 y_{0.9H} \\ +1.0000 y_{0.4H} & -0.0738 y_H \\ +1.0000 y_{0.5H} & \end{array} \right\} \quad (1 \cdot 2 \cdot 23)$$

$I(1)$ に対しては, $(\alpha, \beta) = (-2, -\frac{1}{2})$ の係数がもちいられるから

$$I(1) = \frac{0.1H}{8960} \left\{ \begin{array}{ll} 3783 y_0 & = 0.1H \left\{ 0.4222 y_0 \right. \\ +8178 y_{0.1H} & \quad +0.9127 y_{0.1H} \\ +3168 y_{0.2H} & \quad +0.3536 y_{0.2H} \\ -2322 y_{0.3H} & \quad -0.2592 y_{0.3H} \\ +633 y_{0.4H} & \quad \left. +0.0706 y_{0.4H} \right\} \end{array} \right\} \quad (1 \cdot 2 \cdot 24)$$

また, $I(9)$ に対しては, $(\alpha, \beta) = (-\frac{1}{2}, 2)$ の係数がもちいられるから

$$I(9) = \frac{0.1H}{8960} \left\{ \begin{array}{ll} 633 y_{0.6H} & = 0.1H \left\{ 0.0706 y_{0.6H} \right. \\ -2322 y_{0.7H} & \quad -0.2592 y_{0.7H} \\ +3168 y_{0.8H} & \quad +0.3536 y_{0.8H} \\ +8178 y_{0.9H} & \quad +0.9127 y_{0.9H} \\ +3783 y_H & \quad \left. +0.4222 y_H \right\} \end{array} \right\} \quad (1 \cdot 2 \cdot 25)$$

したがって、(1・2・23), (1・2・24), (1・2・25)の各式から、 I は

$$I = 0.1H \left\{ \begin{array}{ll} (-0.0738 + 0.4222) y_0 & + (1.0000 + 0.0706) y_{0.6H} \\ + (0.2631 + 0.9127) y_{0.1H} & + (1.0738 - 0.2592) y_{0.7H} \\ + (0.7369 + 0.3536) y_{0.2H} & + (0.7369 + 0.3536) y_{0.8H} \\ + (1.0738 - 0.2592) y_{0.3H} & + (0.2631 + 0.9127) y_{0.9H} \\ + (1.0000 + 0.0706) y_{0.4H} & + (-0.0738 + 0.4222) y_H \\ + (1.0000 &) y_{0.5H} \end{array} \right\}$$

すなわち、上式よりこの場合の V の式は、つぎのようにあたえられる。

$$V = H \left\{ \begin{array}{ll} 0.02736 y_0 & + 0.08408 y_{0.6H} \\ + 0.09235 y_{0.1H} & + 0.06398 y_{0.7H} \\ + 0.08565 y_{0.2H} & + 0.08565 y_{0.8H} \\ + 0.06398 y_{0.3H} & + 0.09235 y_{0.9H} \\ + 0.08408 y_{0.4H} & + 0.02736 y_H \\ + 0.07854 y_{0.5H} & \end{array} \right\} \quad [1 \cdot 20]$$

§ 1・2・1 aにおいても、同様の求積式がもとめられたが、その場合にくらべると [1・5] 式は理論上全長 H をこえる測点が想定されているのに対し、上式は、そのような想定なしに導かれている点が相違する。

同様に、 $a = 0$, $b = 0.2$ とした場合についてもとめてみよう。

この場合の測定部位および I の分割は、図 1・7のとおりであり、各分割面積の推定は、§ 1・2・1 b, $b = 0.2$ の場合に準じておこなうことにする。

$$\int_{x_0}^{x_H} y b x$$

$$= I(1) + I(2) + I(3) + I(4) + I(5) + I(6)$$

ここに

$$I(1) = \int_{x_0}^{x_{0.1H}} y b x,$$

$$I(2) = \int_{x_{0.1H}}^{x_{0.3H}} y b x,$$

$$I(3) = \int_{x_{0.3H}}^{x_{0.5H}} y d x, \quad I(4) = \int_{x_{0.5H}}^{x_{0.7H}} y d x, \quad I(5) = \int_{x_{0.7H}}^{x_{0.9H}} y d x, \quad I(6) = \int_{x_{0.9H}}^{x_H} y d x$$

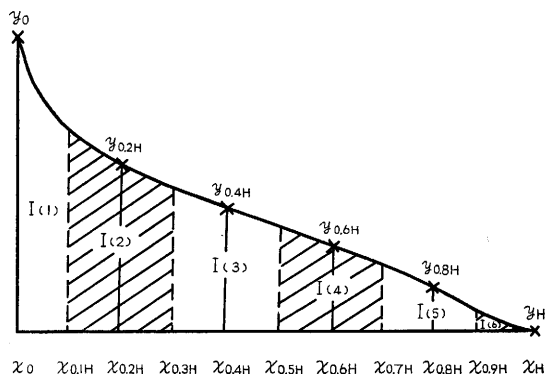


図 1・7

近接する3個の測点における観測値をもちいて、各分割面積をもとめると、 $I(2) \sim I(5)$ は

$$I(2) = \frac{0.2H}{D} \{C_{-1}y_0 + C_0y_{0.2H} + C_1y_{0.4H}\}$$

$$I(3) = \frac{0.2H}{D} \{C_{-1}y_{0.2H} + C_0y_{0.4H} + C_1y_{0.6H}\}$$

$$I(4) = \frac{0.2H}{D} \{C_{-1}y_{0.4H} + C_0y_{0.6H} + C_1y_{0.8H}\}$$

$$I(5) = \frac{0.2H}{D} \{C_{-1}y_{0.6H} + C_0y_{0.8H} + C_1y_H\}$$

$I(1)$, $I(6)$ に対する係数をそれぞれ D' , C' , D'' , C'' とすれば

$$I(1) = \frac{0.2H}{D'} \{C_{-1}'y_0 + C_0'y_{0.2H} + C_1'y_{0.4H}\}$$

$$I(6) = \frac{0.2H}{D''} \{C_{-1}''y_{0.6H} + C_0''y_{0.8H} + C_1''y_H\}$$

したがって、 I は

$$\begin{aligned} I = & 0.2H \left[\left\{ \frac{1}{D}C_{-1} + \frac{1}{D}C_{-1}' \right\} y_0 \right. \\ & + \left\{ \frac{1}{D}(C_{-1} + C_0) + \frac{1}{D'}C_0' \right\} y_{0.2H} \\ & + \left\{ \frac{1}{D}(C_{-1} + C_0 + C_1) + \frac{1}{D'}C_1' \right\} y_{0.4H} \\ & + \left\{ \frac{1}{D}(C_{-1} + C_0 + C_1) + \frac{1}{D''}C_{-1}'' \right\} y_{0.6H} \\ & + \left\{ \frac{1}{D}(C_0 + C_1) + \frac{1}{D''}C_0'' \right\} y_{0.8} \\ & \left. + \left\{ \frac{1}{D}C_1 + \frac{1}{D''}C_1'' \right\} y_H \right] \end{aligned} \quad (1 \cdot 2 \cdot 26)$$

近似する曲線として、2次式を仮定すれば

$$I(2) \sim I(5) \text{ に対しては } (\alpha, \beta) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$I(1) \quad \quad \quad \text{''} \quad \quad (\alpha, \beta) = \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$I(6) \quad \quad \quad \text{''} \quad \quad (\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

の係数がそれぞれもちいられるから、(1・2・26)式は

$$\begin{aligned} I = & 0.2H \left\{ \left(\frac{1}{24} + \frac{8}{24} \right) y_0 \right. \\ & + \left(\frac{1}{24} + \frac{22}{24} + \frac{5}{24} \right) y_{0.2H} \\ & \left. + \left(\frac{1}{24} + \frac{22}{24} + \frac{1}{24} - \frac{1}{24} \right) y_{0.4H} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{1}{24} + \frac{22}{24} + \frac{1}{24} - \frac{1}{24} \right) y_{0.6H} \\
 & + \left(\frac{22}{24} + \frac{1}{24} + \frac{5}{24} \right) y_{0.8H} \\
 & + \left(\frac{1}{24} + \frac{8}{24} \right) y_H \}
 \end{aligned}$$

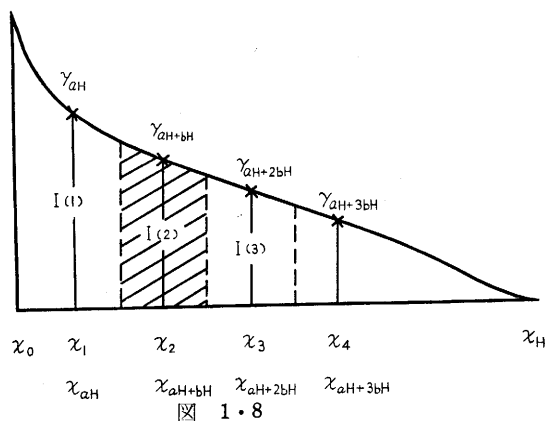
したがって、この場合のVの式はつぎのようにあたえられる。

$$\begin{aligned}
 V = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{0.2H}{24} \{ & 9 y_0 & = H \{ & 0.05891 y_0 \\
 & + 28 y_{0.2H} & & + 0.18326 y_{0.2H} \\
 & + 23 y_{0.4H} & & + 0.15054 y_{0.4H} \\
 & + 23 y_{0.6H} & & + 0.15054 y_{0.6H} \\
 & + 28 y_{0.8H} & & + 0.18326 y_{0.8H} \\
 & + 9 y_H \} & & + 0.05891 y_H \} \quad [1 \cdot 21]
 \end{aligned}$$

上式が、 $a = 0, b = 0.2$ として、 H 内の測点のみをもちいてもとめられた求積式である。

つぎの場合として、 $a = 0.1, b = 0.2$ してもとめてみよう。

この場合の測定部位および I の分割は、
 図 1・8 のとおりである。



$$\begin{aligned}
 I &= \int_{x_0}^{x_H} y dx \\
 &= I(1) + I(2) + I(3) + I(4) + I(5)
 \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}
 I(1) &= \int_{x_0}^{x_{0.2H}} y dx, & I(4) &= \int_{x_{0.6H}}^{x_{0.8H}} y dx, \\
 I(2) &= \int_{x_{0.2H}}^{x_{0.4H}} y dx, & I(5) &= \int_{x_{0.8H}}^{x_H} y dx \\
 I(3) &= \int_{x_{0.4H}}^{x_{0.6H}} y dx,
 \end{aligned}$$

個々の分割面積をもとめるのに、前の場合と同様、表 1・1 (3点, 2次) の係数をもちいることにすれば

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{0.2H}{24} \left\{ \begin{array}{l} 26 y_{0.1H} \\ +21 y_{0.3H} \\ +26 y_{0.5H} \\ +21 y_{0.7H} \\ +26 y_{0.9H} \end{array} \right\} = H \left\{ \begin{array}{l} 0.17017 y_{0.1H} \\ +0.13745 y_{0.3H} \\ +0.17017 y_{0.5H} \\ +0.13745 y_{0.7H} \\ +0.17017 y_{0.9H} \end{array} \right\} \quad [1 \cdot 22]
 \end{aligned}$$

1・2・1 d 理論上の想定についての検討

本項 a) ~ c) においては、同一の a , b の値に対して、2通りの求積式があたえられた。すなわち、§1・2・1 a, §1・2・1 b における各式は、理論上全長 H をこえる測点が想定されているに対して、§1・2・1 c における各式は、そのような想定なしに導かれたものであったが、そのような理論上の想定が実用上許容されるかどうか検討してみよう。

$x_0 \sim x_H$ 内にとられた測点における観測値のみをもちいた求積式を一般的な形でしめすことは、前記したごとく非常に困難であるが、もともとこのような問題によって生ずる差異は、梢端部分において生起することであり、 b が小さい場合にはその差異が無視しうるほどに小さいであろうことは十分予想されるし、また、 a の移動する範囲も、実用上 $(0 \sim \frac{1}{2}) \cdot b$ 程度と考えられるから、その差異について一応の目安をうるためには、しいて a , b に関して一般的な値をとる必要はなく、§1・2・1 c における a , b 3つの組合せの場合について考察すれば十分であろう。

いま、全長をこえる測点を想定した場合をA法、想定しない場合をB法として、まず、 $a=0$ $b=0.2$ とした場合についてしらべてみる。

図1・7を参照すると、 $I(1) \sim I(5)$ の各分割面積の推定においては、A, B両法とも利用する係数C, Dは同一であるが、 $I(6)$ に対する係数が異なるから、求積式としては、 $y_{0.6H}$, $y_{0.8H}$, y_H にかかる求積用係数が影響をうけることになる。

すなわち、A法によると、求積式は

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{\pi}{4} \cdot 0.2H \left[\left\{ \frac{1}{D} C_{-1} + \frac{1}{D'} C_{-1}' \right\} y_0 \right. \\
 &\quad + \left\{ \frac{1}{D} (C_{-1} + C_0) + \frac{1}{D'} C_0' \right\} y_{0.2H} \\
 &\quad + \left\{ \frac{1}{D} (C_{-1} + C_0 + C_1) + \frac{1}{D'} C_1' \right\} y_{0.4H} \\
 &\quad + \left\{ \frac{1}{D} (C_{-1} + C_0 + C_1) \right\} y_{0.6H} \\
 &\quad + \left\{ \quad \quad \quad \right\} y_{0.8H} \\
 &\quad + \left\{ \quad \quad \quad \right\} y_H \left. \right]^* \quad (A)
 \end{aligned}$$

*) A法によっても、本来は $I(6)$ までの推定でよいわけであるから、 y_H にかかる係数は $\frac{1}{D} (C_0 + C_1)$ とすべきであるが、一般には b の値を確定しえないため、(1・2・15) 式においては $\frac{1}{D} (C_{-1} + C_0 + C_1)$ としてあたえてある。

また、B法によると

$$\begin{aligned}
 V = \frac{\pi}{4} \cdot 0.2H & \left[\left\{ \frac{1}{D} C_{-1} + \frac{1}{D'} C_{-1}' \right\} y_0 \right. \\
 & + \left\{ \frac{1}{D} (C_{-1} + C_0) + \frac{1}{D'} C_0' \right\} y_{0.2H} \\
 & + \left\{ \frac{1}{D} (C_{-1} + C_0 + C_1) + \frac{1}{D'} C_1' \right\} y_{0.4H} \\
 & + \left\{ \frac{1}{D} (C_{-1} + C_0 + C_1) + \frac{1}{D''} C_{-1}'' \right\} y_{0.6H} \\
 & + \left\{ \frac{1}{D} (C_0 + C_1) + \frac{1}{D''} C_0'' \right\} y_{0.8H} \\
 & \left. + \left\{ \frac{1}{D} C_1 + \frac{1}{D''} C_1'' \right\} y_H \right] \quad (B)
 \end{aligned}$$

としてしめされるから、両式の差は

$$\begin{aligned}
 (A) - (B) = \frac{\pi}{4} \cdot 0.2H & \left[\left\{ -\frac{1}{D''} C_{-1}'' \right\} y_{0.6H} \right. \\
 & + \left\{ \frac{1}{D} C_{-1} - \frac{1}{D''} C_0'' \right\} y_{0.8H} \\
 & \left. + \left\{ \frac{1}{D} (C_{-1} + C_0) - \frac{1}{D''} C_1'' \right\} y_H \right]
 \end{aligned}$$

としてあたえられる。

$y_H = 0$ と看做しうる場合を考えて、[1・14]式、[1・21]式によって、上式の値をもとめると

$$\begin{aligned}
 (A) - (B) & = H \left\{ (0.15708 - 0.15054) y_{0.6H} \right. \\
 & \quad \left. + (0.15708 - 0.18326) y_{0.8H} \right\} \\
 & = H \left\{ 0.00654 y_{0.6H} - 0.02618 y_{0.8H} \right\}
 \end{aligned}$$

いま、ある試料の大きさを

試料 I

$H = 15 \text{ m}$			
$d_0 = 26 \text{ cm}$	$d_{0.5H} = 16$	$y_0 = 0.0676 \text{ m}^2$	$y_{0.5H} = 0.0256$
$d_{0.1H} = 21$	$d_{0.6H} = 14$	$y_{0.1H} = 0.0441$	$y_{0.6H} = 0.0196$
$d_{0.2H} = 20$	$d_{0.7H} = 11$	$y_{0.2H} = 0.0400$	$y_{0.7H} = 0.0121$
$d_{0.3H} = 19$	$d_{0.8H} = 8$	$y_{0.3H} = 0.0361$	$y_{0.8H} = 0.0064$
$d_{0.4H} = 18$	$d_{0.9H} = 4$	$y_{0.4H} = 0.0324$	$y_{0.9H} = 0.0016$

として考え、(B)法によって、その V をもとめると

$$V = 15 \{ 0.05891 \times 0.0676 + 0.18326 \times 0.0400 + 0.15054 \times 0.0324$$

$$+0.15054 \times 0.0196 + 0.18326 \times 0.0064 \} = 0.3047 \text{ (m}^3\text{)}$$

このVの値に対して、両式の差は

$$(A)-(B) = 15 \{ 0.00654 \times 0.0196 - 0.02618 \times 0.0064 \} = -0.0009 \text{ (m}^3\text{)}$$

であるから

$$\frac{|(A)-(B)|}{V} = \frac{9}{3047} = 0.0030$$

すなわち、対象木の大きさに対する比率は0.3%にすぎない。

別な例についてしらべてみると、

試料 II

$$H = 18 \text{ m}$$

$$d_0 = 29 \text{ cm} \quad d_{0.5H} = 17 \quad y_0 = 0.0841 \text{ m}^2 \quad y_{0.5H} = 0.0289$$

$$d_{0.1H} = 23 \quad d_{0.6H} = 16 \quad y_{0.1H} = 0.0529 \quad y_{0.6H} = 0.0256$$

$$d_{0.2H} = 22 \quad d_{0.7H} = 13 \quad y_{0.2H} = 0.0484 \quad y_{0.7H} = 0.0169$$

$$d_{0.3H} = 20 \quad d_{0.8H} = 9 \quad y_{0.3H} = 0.0400 \quad y_{0.8H} = 0.0081$$

$$d_{0.4H} = 19 \quad d_{0.9H} = 4 \quad y_{0.4H} = 0.0361 \quad y_{0.9H} = 0.0016$$

$$V = 18 \{ 0.05891 \times 0.0841 + 0.18326 \times 0.0484 + 0.15054 \times 0.0361$$

$$+ 0.15054 \times 0.0256 + 0.18326 \times 0.0081 \} = 0.4427 \text{ (m}^3\text{)}$$

$$(A)-(B) = 18 \{ 0.00654 \times 0.0256 - 0.02618 \times 0.0081 \} = -0.0008 \text{ (m}^3\text{)}$$

$$\frac{|(A)-(B)|}{V} = \frac{8}{4427} = 0.0018$$

すなわち、この例についても約0.2%にすぎない。

同様にして、 $a=0.1$ 、 $b=0.2$ の場合について検討してみよう。この場合の差異は、〔1・19〕式および〔1・22〕式から

$$(A)-(B) = H \{ (0.16363 - 0.17017) y_{0.5H} + (0.15708 - 0.13745) y_{0.7H} \\ + (0.15708 - 0.17017) y_{0.9H} \}$$

としてあたえられるから、試料Iについてその値をみると

$$(A)-(B) = 15 \{ (-0.00554) \times 0.0256 + 0.01933 \times 0.0121 + (-0.01309) \times 0.0016 \} \\ = 0.0007 \text{ (m}^3\text{)}$$

$V \doteq 0.30 \text{ m}^3$ として考えれば

$$\frac{|(A)-(B)|}{V} = \frac{7}{3000} = 0.0023$$

また、試料IIについては

$$(A)-(B) = 18 \{ (-0.00554) \times 0.0289 + 0.01933 \times 0.0169 + (-0.01309) \times 0.0016 \} \\ = 0.0022 \text{ (m}^3\text{)}$$

$V \doteq 0.44\text{m}^3$ とすれば

$$\frac{|(A)-(B)|}{V} = \frac{22}{4400} = 0.0050$$

すなわち、差の比率は、それぞれ0.2%、0.5%程度である。

つぎに、3番目の場合として、 $a=0$ 、 $b=0.1$ についてみると、[1・5]式および[1・20]式から

$$(A)-(B) = H\{(0.07854-0.08408)y_{0.6H} + (0.07854-0.06398)y_{0.7H} \\ + (0.07854-0.08565)y_{0.8H} + (0.07854-0.09235)y_{0.9H}\}$$

としてあたえられるから、試料Iについては

$$(A)-(B) = 15\{(-0.00554) \times 0.0196 + 0.01456 \times 0.0121 + (-0.00711) \times 0.0064 \\ + (-0.01381) \times 0.0016\} = 0.0003 \text{ (m}^3\text{)}$$

$V \doteq 0.30\text{m}^3$ とすれば

$$\frac{|(A)-(B)|}{V} = \frac{3}{3000} = 0.001$$

また、試料IIについては

$$(A)-(B) = 18\{(-0.00554) \times 0.0256 + 0.01456 \times 0.0169 + (-0.00711) \times 0.0081 \\ + (-0.01381) \times 0.0016\} = 0.0004 \text{ (m}^3\text{)}$$

$V \doteq 0.44\text{m}^3$ とすれば

$$\frac{|(A)-(B)|}{V} = \frac{4}{4400} = 0.0009$$

すなわち、この場合における差の比率は、ともに約0.1%である。

以上3つの場合について、A法およびB法における想定上の差異が、実際にどの程度のひらきをあたえるものか検討したが、そのいずれの場合においても、差の絶対値は、対象材積に対して0.1%~0.5%というような小さい値をしめすにすぎなかった。後述するように、求積の実行にあたって、 $b=0.2$ とした場合に0.2%~0.5%、また、 $b=0.1$ とした場合に0.1%程度という値は、偶差としても生起する可能性が十分考えられる値であるから、実行上、両者のひらきについて、特に考慮する必要は認められないようにおもわれる。

したがって、 b が0.2以下の値をとり、 y_H が0と看做しうるような場合においては、A法、B法ともに同一の推定値をあたえるものと看做しても差支えないであろう。

y_H が0と看做しえないような場合、換言すれば、欠頂体の部分材積が比較的大きい場合の求積においては、B法をもちうべきことは勿論である。

1・2・1 e [X, h]型の求積式

幹材積推定の実行にあたって、全長 H の測定は慣行的におこなわれるものであり、したがって0.1 H 、0.2 H 等間隔 bH の値は数値上容易にもとめられるから、適当な測桿を利用すれば、 bH

間隔での測定も特に煩雑とはおもわれぬ。また実際に、試験研究の目的をもつたある種の調査においては、間隔を bH としてあたえた方がよりこのましい場合も生起するが、一方また、間隔を H にとらわれない値としてあたえてやると、測定はより容易になるため、実用上、そのような要求の生ずることもしばしばである。

間隔 h を、1 m あるいは 2 m というように H に関係なく定めた求積式も、測点の指標として、 aH 、 bH をもちいた場合と全く同様にしてもとめられる。いま、その一例として、間隔を hm とし、最初の測点 x_1 を対象の基部より 0.3m はなれた点 $x_{0.3}$ にとった場合を考えてみよう。

前記した結果を参照して、この場合においても、全長 H をこえる測点を、便宜上、想定することにする。

図 1・2 を参照して、 I の分割はつぎのようにおこなわれる。

$$I = \int_{x_0}^{x_H} y dx = I(1) + I(2) + I(3) + \dots$$

ここに

$$I(1) = \int_{x_0}^{x_{0.3+\frac{3}{2}h}} y dx, \quad I(2) = \int_{x_{0.3+\frac{3}{2}h}}^{x_{0.3+\frac{5}{2}h}} y dx, \quad I(3) = \int_{x_{0.3+\frac{5}{2}h}}^{x_{0.3+\frac{7}{2}h}} y dx, \dots$$

$I(2)$ の面積をもとめるのに、 $x_{0.3}$ 、 $x_{0.3+h}$ 、 $x_{0.3+2h}$ 、 $x_{0.3+3h}$ 、 $x_{0.3+4h}$ の 5 点をもちいることにし、 $I(3)$ 、 $I(4)$ 、……についても同様に考えれば

$$I_{0.3+\frac{3}{2}h}^H = I(2) + I(3) + I(4) + \dots$$

$$= \frac{h}{D} \left\{ \begin{aligned} &C_{-2} y_{0.3} \\ &+(C_{-2}+C_{-1}) y_{0.3+h} \\ &+(C_{-2}+C_{-1}+C_0) y_{0.3+2h} \\ &+(C_{-2}+C_{-1}+C_0+C_1) y_{0.3+3h} \\ &+(C_{-2}+C_{-1}+C_0+C_1+C_2) y_{0.3+4h} \\ &+(\quad \quad \quad // \quad \quad \quad) y_{0.3+5h} \\ &+ \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \end{aligned} \right\}$$

また、 $I(1) = I_{0.3+\frac{3}{2}h}^{0.3+\frac{3}{2}h}$ についての係数を D' 、 C' とすれば、 $I(1)$ も (1・2・4) 式と同じ形でしめされるから、この場合の I は、(1・2・5) 式において y の添字を $0.3+ih$ ($i=0, 1, 2, \dots$) にかきなおしたものとしてあらわされる。

$k=5$ として 3 次曲線近似 (5 点、3 次) を仮定すれば、 $I(2)$ 、 $I(3)$ 、……の積分に対しては、 $(\alpha, \beta) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ の係数が使用でき、また、 $I(1)$ に対しては、 $(\alpha, \beta) = \left\{-\left(2+\frac{0.3}{h}\right), \right.$

$-\frac{1}{2}\}$ の係数が使用される。

$I(1)$ の積分を変換して

$$\int_{x_0}^{x_{0.3+\frac{3}{2}h}} y dx = \int_{x_0}^{x_{0.3+2h}} y dx - \int_{x_{0.3+\frac{3}{2}h}}^{x_{0.3+2h}} y dx = - \int_{x_{0.3+2h}}^{x_0} y dx + \int_{x_{0.3+2h}}^{x_{0.3+\frac{3}{2}h}} y dx$$

$$2 + \frac{0.3}{h} = z \text{ とおき}$$

$$\int_{x_{0.3+2h}}^{x_0} y dx = I(A), \quad \int_{x_{0.3+2h}}^{x_{0.3+\frac{3}{2}h}} y dx = I(B)$$

とおけば、 $I(A)$ 、 $I(B)$ についての係数は、それぞれ (1.2.7) 式、(1.2.8) 式のとおりであるから、 $\left\{-\left(2 + \frac{0.3}{h}\right), -\frac{1}{2}\right\}$ に対する係数はその和としてしめされる。

したがって、この場合の求積式は、(1.2.11) 式において間隔を h として y の添字を $0.3 + ih$ としたものとしてあたえられるから、いま、 $h = 1 \text{ m}$ とすれば $z = 2.3$ より

$$C_{-2}' = 2.3 \{-144 - 70(2.3) + 80(2.3)^2 + 35(2.3)^3\} + 77.3125 = 1328.6160$$

$$C_{-1}' = 2.3 \{576 + 560(2.3) - 40(2.3)^2 - 70(2.3)^3\} - 418.6250 = 1423.0080$$

$$C_0' = 2.3 \{816 - 80(2.3)\} - 398 = 505.4400$$

$$C_1' = 2.3 \{576 - 560(2.3) - 40(2.3)^2 + 70(2.3)^3\} - 147.3750 = -312.7680$$

$$C_2' = 2.3 \{-144 + 70(2.3) + 80(2.3)^2 - 35(2.3)^3\} + 46.6875 = 79.7040$$

これらの値を (1.2.11) 式に代入して

$$I = \frac{1}{1680} \left\{ \begin{aligned} &(-124 + 1328.6160) y_{0.3} \\ &+ (442 + 1423.0080) y_{1.3} \\ &+ (1238 + 505.4400) y_{2.3} \\ &+ (1804 - 312.7680) y_{3.3} \\ &+ (1680 + 79.7040) y_{4.3} \\ &+ 1680 \quad y_{5.3} \\ &+ \quad \quad y_{6.3} \\ &+ \quad \quad \quad \vdots \end{aligned} \right\}$$

したがって、 V は上式に $\frac{\pi}{4}$ を乗じて

$$\begin{aligned} V = & 0.5632 y_{0.3} & + 0.6972 y_{3.3} & + 0.7854 y_{6.3} \\ & + 0.8719 y_{1.3} & + 0.8227 y_{4.3} & + \quad \quad y_{7.3} \\ & + 0.8151 y_{2.3} & + 0.7854 y_{5.3} & + \quad \dots \end{aligned}$$

すなわち、上式が $x_{0.3}$ を基点として、以下 1 m 間隔に測点を取り、各分割面積の積分に（5 点 3 次）の係数をもちいた場合の求積式である。

このようにして、間隔を H に関係なく定めた場合の求積式はもとめられるから、前記 $b=0.05 \sim 0.10$ に対応して n が 10 程度以上に大きい場合に対しては（5 点，3 次）， $b=0.15 \sim 0.20$ に対応して n が 5，6 というように小さい場合に対しては（3 点，2 次）の積分用係数をもちい、最初の測点 x_1 のとり方および h の値について次表のような組合せをつくり、それぞれの場合についての求積式をもとめるとつぎのとおりである。*

h	対象の基部より最初の測点までの距離 (X)								
0.5 ^m	0.0 ^m	0.1	0.2	0.3					
1.0	0.0		0.2	0.3	0.4	0.6			
2.0	0.0			0.3	0.4		0.8	1.2	
3.0	0.0					0.6		1.2	1.8
4.0	0.0						0.8		1.6
5.0	0.0							1.0	2.0
									2.4
									3.0

[1・23]	[1・24]	[1・25]	[1・26]
($X=0.0m$ $h=0.5m$)	($X=0.0m$ $h=0.5m$)	($X=0.1m$ $h=0.5m$)	($X=0.1m$ $h=0.5m$)
(5点, 3次)	(3点, 2次)	(5点, 3次)	(3点, 2次)
$V=0.1368 y_0$	$V=0.1473 y_0$	$V=0.2266 y_{0.1}$	$V=0.2381 y_{0.1}$
+0.4617 $y_{0.5}$	+0.4582 $y_{0.5}$	+0.4524 $y_{0.6}$	+0.4414 $y_{0.6}$
+0.4282 $y_{1.0}$	+0.3763 $y_{1.0}$	+0.4169 $y_{1.1}$	+0.3808 $y_{1.1}$
+0.3199 $y_{1.5}$	+0.3927 $y_{1.5}$	+0.3336 $y_{1.6}$	+0.3927 $y_{1.6}$
+0.4204 $y_{2.0}$	+ " $y_{2.0}$	+0.4162 $y_{2.1}$	+ " $y_{2.1}$
+0.3927 $y_{2.5}$	+ ⋮	+0.3927 $y_{2.6}$	+ ⋮
+ " $y_{3.0}$		+ " $y_{3.1}$	
+ ⋮		+ ⋮	
[1・27]	[1・28]	[1・29]	[1・30]
($X=0.2m$ $h=0.5m$)	($X=0.2m$ $h=0.5m$)	($X=0.3m$ $h=0.5m$)	($X=0.3m$ $h=0.5m$)
(5点, 3次)	(3点, 2次)	(5点, 3次)	(3点, 2次)
$V=0.3440 y_{0.2}$	$V=0.3557 y_{0.2}$	$V=0.4935 y_{0.3}$	$V=0.5030 y_{0.3}$
+0.4105 $y_{0.7}$	+0.3869 $y_{0.7}$	+0.3283 $y_{0.8}$	+0.2885 $y_{0.8}$

*) これら求積式のもちい方については、後述の考察 3) 参照のこと。

$$\begin{aligned}
 &+0.3956 y_{1.2} \\
 &+0.3700 y_{1.7} \\
 &+0.4042 y_{2.2} \\
 &+0.3927 y_{2.7} \\
 &+ \quad // \quad y_{3.2} \\
 &+ \quad \vdots
 \end{aligned}$$

[1 · 31]

$$\begin{cases} X=0.0m \\ h=1.0m \end{cases}$$

(5点, 3次)

$$\begin{aligned}
 V &= 0.2736 y_0 \\
 &+ 0.9235 y_1 \\
 &+ 0.8565 y_2 \\
 &+ 0.6398 y_3 \\
 &+ 0.8409 y_4 \\
 &+ 0.7854 y_5 \\
 &+ \quad // \quad y_6 \\
 &+ \quad \vdots
 \end{aligned}$$

[1 · 35]

$$\begin{cases} X=0.3m \\ h=1.0m \end{cases}$$

(5点, 3次)

$$\begin{aligned}
 V &= 0.5632 y_{0.3} \\
 &+ 0.8719 y_{1.3} \\
 &+ 0.8151 y_{2.3} \\
 &+ 0.6972 y_{3.3} \\
 &+ 0.8227 y_{4.3} \\
 &+ 0.7854 y_{5.3} \\
 &+ \quad // \quad y_{6.3} \\
 &+ \quad \vdots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+0.3962 y_{1.2} \\
 &+0.3297 y_{1.7} \\
 &+ \quad // \quad y_{2.2} \\
 &+ \quad \vdots
 \end{aligned}$$

[1 · 32]

$$\begin{cases} X=0.0m \\ h=1.0m \end{cases}$$

(3点, 2次)

$$\begin{aligned}
 V &= 0.2945 y_0 \\
 &+ 0.9163 y_1 \\
 &+ 0.7527 y_2 \\
 &+ 0.7854 y_3 \\
 &+ \quad // \quad y_4 \\
 &+ \quad \vdots
 \end{aligned}$$

[1 · 36]

$$\begin{cases} X=0.3m \\ h=1.0m \end{cases}$$

(3点, 2次)

$$\begin{aligned}
 V &= 0.5867 y_{0.3} \\
 &+ 0.8385 y_{1.3} \\
 &+ 0.7739 y_{2.3} \\
 &+ 0.7854 y_{3.3} \\
 &+ \quad // \quad y_{4.3} \\
 &+ \quad \vdots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+0.3636 y_{1.8} \\
 &+0.3724 y_{1.8} \\
 &+0.3815 y_{2.8} \\
 &+0.3927 y_{2.8} \\
 &+ \quad // \quad y_{3.8} \\
 &+ \quad \vdots
 \end{aligned}$$

[1 · 33]

$$\begin{cases} X=0.2m \\ h=1.0m \end{cases}$$

(5点, 3次)

$$\begin{aligned}
 V &= 0.4532 y_{0.2} \\
 &+ 0.9047 y_{1.2} \\
 &+ 0.8337 y_{2.2} \\
 &+ 0.6673 y_{3.2} \\
 &+ 0.8324 y_{4.2} \\
 &+ 0.7854 y_{5.2} \\
 &+ \quad // \quad y_{6.2} \\
 &+ \quad \vdots
 \end{aligned}$$

[1 · 37]

$$\begin{cases} X=0.4m \\ h=1.0m \end{cases}$$

(5点, 3次)

$$\begin{aligned}
 V &= 0.6880 y_{0.4} \\
 &+ 0.8209 y_{1.4} \\
 &+ 0.7912 y_{2.4} \\
 &+ 0.7400 y_{3.4} \\
 &+ 0.8083 y_{4.4} \\
 &+ 0.7854 y_{5.4} \\
 &+ \quad // \quad y_{6.4} \\
 &+ \quad \vdots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+0.4258 y_{1.3} \\
 &+0.3927 y_{1.8} \\
 &+ \quad // \quad y_{2.3} \\
 &+ \quad \vdots
 \end{aligned}$$

[1 · 34]

$$\begin{cases} X=0.2m \\ h=1.0m \end{cases}$$

(3点, 2次)

$$\begin{aligned}
 V &= 0.4762 y_{0.2} \\
 &+ 0.8828 y_{1.2} \\
 &+ 0.7616 y_{2.2} \\
 &+ 0.7854 y_{3.2} \\
 &+ \quad // \quad y_{4.2} \\
 &+ \quad \vdots
 \end{aligned}$$

[1 · 38]

$$\begin{cases} X=0.4m \\ h=1.0m \end{cases}$$

(3点, 2次)

$$\begin{aligned}
 V &= 0.7113 y_{0.4} \\
 &+ 0.7739 y_{1.4} \\
 &+ 0.7925 y_{2.4} \\
 &+ 0.7854 y_{3.4} \\
 &+ \quad // \quad y_{4.4} \\
 &+ \quad \vdots
 \end{aligned}$$

[1 · 39]	[1 · 40]	[1 · 41]	[1 · 42]
$\begin{cases} X=0.6\text{m} \\ h=1.0\text{m} \end{cases}$	$\begin{cases} X=0.6\text{m} \\ h=1.0\text{m} \end{cases}$	$\begin{cases} X=0.0\text{m} \\ h=2.0\text{m} \end{cases}$	$\begin{cases} X=0.0\text{m} \\ h=2.0\text{m} \end{cases}$
(5点, 3次)	(3点, 2次)	(5点, 3次)	(3点, 2次)
$V=0.9870 y_{0.6}$	$V=1.0061 y_{0.6}$	$V=0.5473 y_0$	$V=0.5891 y_0$
+0.6567 $y_{1.6}$	+0.5770 $y_{1.6}$	+1.8470 y_2	+1.8326 y_2
+0.7272 $y_{2.6}$	+0.8516 $y_{2.6}$	+1.7129 y_4	+1.5054 y_4
+0.7448 $y_{3.6}$	+0.7854 $y_{3.6}$	+1.2797 y_6	+1.5708 y_6
+0.7630 $y_{4.6}$	+ " $y_{4.6}$	+1.6818 y_8	+ " y_8
+0.7854 $y_{5.6}$	+ \vdots	+1.5708 y_{10}	+ \vdots
+ " $y_{6.6}$		+ " y_{12}	
+ \vdots		+ \vdots	
[1 · 43]	[1 · 44]	[1 · 45]	[1 · 46]
$\begin{cases} X=0.3\text{m} \\ h=2.0\text{m} \end{cases}$	$\begin{cases} X=0.3\text{m} \\ h=2.0\text{m} \end{cases}$	$\begin{cases} X=0.4\text{m} \\ h=2.0\text{m} \end{cases}$	$\begin{cases} X=0.4\text{m} \\ h=2.0\text{m} \end{cases}$
(5点, 3次)	(3点, 2次)	(5点, 3次)	(3点, 2次)
$V=0.8070 y_{0.3}$	$V=0.8521 y_{0.3}$	$V=0.9064 y_{0.4}$	$V=0.9524 y_{0.4}$
+1.8299 $y_{2.3}$	+1.7955 $y_{2.3}$	+1.8095 $y_{2.4}$	+1.7656 $y_{2.4}$
+1.6824 $y_{4.3}$	+1.5151 $y_{4.3}$	+1.6674 $y_{4.4}$	+1.5232 $y_{4.4}$
+1.3133 $y_{6.3}$	+1.5708 $y_{6.3}$	+1.3345 $y_{6.4}$	+1.5708 $y_{6.4}$
+1.6717 $y_{8.3}$	+ " $y_{8.3}$	+1.6649 $y_{8.4}$	+ " $y_{8.4}$
+1.5708 $y_{10.3}$	+ \vdots	+1.5708 $y_{10.4}$	+ \vdots
+ " $y_{12.3}$		+ " $y_{12.4}$	
+ \vdots		+ \vdots	
[1 · 47]	[1 · 48]	[1 · 49]	[1 · 50]
$\begin{cases} X=0.8\text{m} \\ h=2.0\text{m} \end{cases}$	$\begin{cases} X=0.8\text{m} \\ h=2.0\text{m} \end{cases}$	$\begin{cases} X=1.2\text{m} \\ h=2.0\text{m} \end{cases}$	$\begin{cases} X=1.2\text{m} \\ h=2.0\text{m} \end{cases}$
(5点, 3次)	(3点, 2次)	(5点, 3次)	(3点, 2次)
$V=1.3760 y_{0.8}$	$V=1.4226 y_{0.8}$	$V=1.9740 y_{1.2}$	$V=2.0122 y_{1.2}$
+1.6418 $y_{2.8}$	+1.5478 $y_{2.8}$	+1.3134 $y_{3.2}$	+1.1540 $y_{3.2}$
+1.5825 $y_{4.8}$	+1.5849 $y_{4.8}$	+1.4544 $y_{5.2}$	+1.7033 $y_{5.2}$

$$\begin{aligned}
 &+1.4800 y_{6.8} \\
 &+1.6166 y_{8.8} \\
 &+1.5708 y_{10.8} \\
 &+ \quad " \quad y_{12.8} \\
 &+ \quad \vdots
 \end{aligned}$$

〔1·51〕

$$\begin{cases} X=0.0m \\ h=3.0m \end{cases}$$

(5点, 3次)

$$\begin{aligned}
 V &= 0.8209 y_0 \\
 &+ 2.7705 y_3 \\
 &+ 2.5694 y_6 \\
 &+ 1.9195 y_9 \\
 &+ 2.5227 y_{12} \\
 &+ 2.3562 y_{15} \\
 &+ \quad " \quad y_{18} \\
 &+ \quad \vdots
 \end{aligned}$$

〔1·55〕

$$\begin{cases} X=1.2m \\ h=3.0m \end{cases}$$

(5点, 3次)

$$\begin{aligned}
 V &= 2.0640 y_{1.2} \\
 &+ 2.4628 y_{4.2} \\
 &+ 2.3737 y_{7.2} \\
 &+ 2.2200 y_{10.2} \\
 &+ 2.4249 y_{13.2} \\
 &+ 2.3562 y_{16.2} \\
 &+ \quad " \quad y_{19.2} \\
 &+ \quad \vdots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+1.5708 y_{6.8} \\
 &+ \quad " \quad y_{8.8} \\
 &+ \quad \vdots
 \end{aligned}$$

〔1·52〕

$$\begin{cases} X=0.0m \\ h=3.0m \end{cases}$$

(5点, 3次)

$$\begin{aligned}
 V &= 0.8836 y_0 \\
 &+ 2.7489 y_3 \\
 &+ 2.2580 y_6 \\
 &+ 2.3562 y_9 \\
 &+ \quad " \quad y_{12} \\
 &+ \quad \vdots
 \end{aligned}$$

〔1·56〕

$$\begin{cases} X=1.2m \\ h=3.0m \end{cases}$$

(3点, 2次)

$$\begin{aligned}
 V &= 2.1339 y_{1.2} \\
 &+ 2.3216 y_{4.2} \\
 &+ 2.3774 y_{7.2} \\
 &+ 2.3562 y_{10.2} \\
 &+ \quad " \quad y_{13.2} \\
 &+ \quad \vdots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+1.4896 y_{7.2} \\
 &+1.5261 y_{9.2} \\
 &+1.5708 y_{11.2} \\
 &+ \quad " \quad y_{13.2} \\
 &+ \quad \vdots
 \end{aligned}$$

〔1·53〕

$$\begin{cases} X=0.6m \\ h=3.0m \end{cases}$$

(5点, 3次)

$$\begin{aligned}
 V &= 1.3597 y_{0.6} \\
 &+ 2.7142 y_{3.6} \\
 &+ 2.5012 y_{6.6} \\
 &+ 2.0018 y_{9.6} \\
 &+ 2.4973 y_{12.6} \\
 &+ 2.3562 y_{15.6} \\
 &+ \quad " \quad y_{18.6} \\
 &+ \quad \vdots
 \end{aligned}$$

〔1·57〕

$$\begin{cases} X=1.8m \\ h=3.0m \end{cases}$$

(5点, 3次)

$$\begin{aligned}
 V &= 2.9610 y_{1.8} \\
 &+ 1.9701 y_{4.8} \\
 &+ 2.1816 y_{7.8} \\
 &+ 2.2344 y_{10.8} \\
 &+ 2.2891 y_{13.8} \\
 &+ 2.3562 y_{16.8} \\
 &+ \quad " \quad y_{19.8} \\
 &+ \quad \vdots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+1.5708 y_{7.2} \\
 &+ \quad " \quad y_{9.2} \\
 &+ \quad \vdots
 \end{aligned}$$

〔1·54〕

$$\begin{cases} X=0.6m \\ h=3.0m \end{cases}$$

(5点, 3次)

$$\begin{aligned}
 V &= 1.4286 y_{0.6} \\
 &+ 2.6484 y_{3.6} \\
 &+ 2.2847 y_{6.6} \\
 &+ 2.3562 y_{9.6} \\
 &+ \quad " \quad y_{12.6} \\
 &+ \quad \vdots
 \end{aligned}$$

〔1·58〕

$$\begin{cases} X=1.8m \\ h=3.0m \end{cases}$$

(3点, 2次)

$$\begin{aligned}
 V &= 3.0183 y_{1.8} \\
 &+ 1.7310 y_{4.8} \\
 &+ 2.5549 y_{7.8} \\
 &+ 2.3562 y_{10.8} \\
 &+ \quad " \quad y_{13.8} \\
 &+ \quad \vdots
 \end{aligned}$$

[1 · 59]	[1 · 60]	[1 · 61]	[1 · 62]
$\begin{pmatrix} X=0.0\text{m} \\ h=4.0\text{m} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X=0.0\text{m} \\ h=4.0\text{m} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X=0.8\text{m} \\ h=4.0\text{m} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X=0.8\text{m} \\ h=4.0\text{m} \end{pmatrix}$
(5点, 3次)	(3点, 2次)	(5点, 3次)	(3点, 2次)
$V=1.0945 y_0$	$V=1.1781 y_0$	$V=1.8129 y_{0.8}$	$V=1.9049 y_{0.8}$
+ 3.6940 y_4	+ 3.6652 y_4	+ 3.6189 $y_{4.8}$	+ 3.5312 $y_{4.8}$
+ 3.4258 y_8	+ 3.0107 y_8	+ 3.3349 $y_{8.8}$	+ 3.0464 $y_{8.8}$
+ 2.5593 y_{12}	+ 3.1416 y_{12}	+ 2.6690 $y_{12.8}$	+ 3.1416 $y_{12.8}$
+ 3.3635 y_{16}	+ " y_{16}	+ 3.3298 $y_{16.8}$	+ " $y_{16.8}$
+ 3.1416 y_{20}	+ \vdots	+ 3.1416 $y_{20.8}$	+ \vdots
+ " y_{24}		+ " $y_{24.8}$	
+ \vdots		+ \vdots	
[1 · 63]	[1 · 64]	[1 · 65]	[1 · 66]
$\begin{pmatrix} X=1.6\text{m} \\ h=4.0\text{m} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X=1.6\text{m} \\ h=4.0\text{m} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X=2.4\text{m} \\ h=4.0\text{m} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X=2.4\text{m} \\ h=4.0\text{m} \end{pmatrix}$
(5点, 3次)	(3点, 2次)	(5点, 3次)	(3点, 2次)
$V=2.7520 y_{1.6}$	$V=2.8452 y_{1.6}$	$V=3.9480 y_{2.4}$	$V=4.0244 y_{2.4}$
+ 3.2337 $y_{5.6}$	+ 3.0355 $y_{5.6}$	+ 2.6233 $y_{6.4}$	+ 2.3080 $y_{6.4}$
+ 3.1649 $y_{9.6}$	+ 3.1699 $y_{9.6}$	+ 2.9033 $y_{10.4}$	+ 3.4055 $y_{10.4}$
+ 2.9600 $y_{13.6}$	+ 3.1416 $y_{13.6}$	+ 2.9792 $y_{14.4}$	+ 3.1416 $y_{14.4}$
+ 3.2332 $y_{17.6}$	+ " $y_{17.6}$	+ 3.0521 $y_{18.4}$	+ " $y_{18.4}$
+ 3.1416 $y_{21.6}$	+ \vdots	+ 3.1416 $y_{22.4}$	+ \vdots
+ " $y_{25.6}$		+ " $y_{26.4}$	
+ \vdots		+ \vdots	
[1 · 67]	[1 · 68]	[1 · 69]	[1 · 70]
$\begin{pmatrix} X=0.0\text{m} \\ h=5.0\text{m} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X=0.0\text{m} \\ h=5.0\text{m} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X=1.0\text{m} \\ h=5.0\text{m} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X=1.0\text{m} \\ h=5.0\text{m} \end{pmatrix}$
(5点, 3次)	(3点, 2次)	(5点, 3次)	(3点, 2次)
$V=1.3682 y_0$	$V=1.4726 y_0$	$V=2.2661 y_1$	$V=2.3811 y_1$
+ 4.6174 y_5	+ 4.5815 y_5	+ 4.5237 y_6	+ 4.4139 y_6
+ 4.2823 y_{10}	+ 3.7634 y_{10}	+ 4.1686 y_{11}	+ 3.8080 y_{11}

+3.1992 y_{15}	+3.9270 y_{15}	+3.3363 y_{16}	+3.9270 y_{16}
+4.2044 y_{20}	+ // y_{20}	+4.1622 y_{21}	+ // y_{21}
+3.9270 y_{25}	+ ⋮	+3.9270 y_{26}	+ ⋮
+ // y_{30}		+ // y_{31}	
+ ⋮		+ ⋮	
[1・71]	[1・72]	[1・73]	[1・74]
($X=2.0m$ $h=5.0m$)	($X=2.0m$ $h=5.0m$)	($X=3.0m$ $h=5.0m$)	($X=3.0m$ $h=5.0m$)
(5点, 3次)	(3点, 2次)	(5点, 3次)	(3点, 2次)
$V=3.4400 y_2$	$V=3.5566 y_2$	$V=4.9349 y_3$	$V=5.0305 y_3$
+4.1046 y_7	+3.8694 y_7	+3.2835 y_8	+2.8850 y_8
+3.9562 y_{12}	+3.9623 y_{12}	+3.6360 y_{13}	+4.2582 y_{13}
+3.7000 y_{17}	+3.9270 y_{17}	+3.7240 y_{18}	+3.9270 y_{18}
+4.0415 y_{22}	+ // y_{22}	+3.8152 y_{23}	+ // y_{23}
+3.9270 y_{27}	+ ⋮	+3.9270 y_{28}	+ ⋮
+ // y_{32}		+ // y_{33}	
+ ⋮		+ ⋮	

1・2・2 不等間隔の場合

以上 §1・2・1 にしめた求積式は、いずれもあたえられた点 x_{0H} , x_x を基点として、以下順次等間隔にとられた測点における観測値をもちいるものであったが、つぎに、測点の間隔を不等にとった場合について考察してみよう。

一般に、間隔を不等にした場合の手法は2通り考えられる。その1つは、表1・1にしめされている等間隔の場合の数値積分用係数を援用することであり、他の1つは、不等の場合について積分用係数そのものをつくりかえることである。

第1の手法については、対数等間隔、すなわち、 $\log x$ について等間隔の場合を考えると、あるいは、種々の間隔について等間隔の場合の求積式をもとめ、それらを適当に組み合わせることを考えなければならない。このようなもとめ方による以上、測定部位はある程度の制約をうけることになるから、不等とはいえ測定部位に関して一般的なものとはなりえない。これに対して2番目の手法は、全く適宜に測定部位を定めようとするものであるが、このような方法による以上等間隔用の積分用係数はもちいられないから、測点のとられ方に対応した積分用係数をまず算出する必要がある。

とおけば、 $I(A)$ については、 y のはじめの 5 点から $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ の係数がもちいら
れるから

$$I(A) = \frac{bH}{1680} \left\{ -29 y_0 + 46 y_{bH} + 736 y_{2bH} + 1026 y_{3bH} - 99 y_{4bH} \right\}$$

$I(B)$ についての係数は、 $(0, \beta) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ とおいて一般式をもちいれば

$$C_{-2}(B) = \frac{1}{2} \left\{ -144 + 70 \left(\frac{1}{2}\right) + 80 \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 35 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right\} = -46.6875$$

$$C_{-1}(B) = \frac{1}{2} \left\{ 576 - 560 \left(\frac{1}{2}\right) - 40 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 70 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right\} = 147.3750$$

$$C_0(B) = \frac{1}{2} \left\{ 816 - 80 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\} = 398$$

$$C_1(B) = \frac{1}{2} \left\{ 576 + 560 \left(\frac{1}{2}\right) - 40 \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 70 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right\} = 418.6250$$

$$C_2(B) = \frac{1}{2} \left\{ -144 - 70 \left(\frac{1}{2}\right) + 80 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 35 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right\} = -77.3125$$

$$D(B) = 1680$$

となるから

$$I(B) = \frac{bH}{1680} \left\{ -46.6875 y_0 + 147.3750 y_{bH} + 398 y_{2bH} + 418.6250 y_{3bH} - 77.3125 y_{4bH} \right\}$$

したがって

$$\begin{aligned} I(3) &= \frac{bH}{1680} \left\{ 17.6875 y_0 - 101.3750 y_{bH} + 338 y_{2bH} + 607.3750 y_{3bH} - 21.6875 y_{4bH} \right\} \\ &= bH \left\{ \begin{array}{ll} 0.01053 y_0 & + 0.36153 y_{3bH} \\ -0.06034 y_{bH} & - 0.01291 y_{4bH} \end{array} \right\} \quad (1 \cdot 2 \cdot 31) \\ &\quad + 0.20119 y_{2bH} \end{aligned}$$

以上もとめられた $(1 \cdot 2 \cdot 28) \sim (1 \cdot 2 \cdot 31)$ の各式から、全体の積分値 I は

$$\begin{aligned} I &= bH \left\{ (0.42221 - 0.07381 + 0.01053 - 0.14762) y_0 \right. \\ &\quad + (0.91272 + 0.33690 - 0.06034) y_{bH} \\ &\quad + (0.35357 + 0.47381 + 0.20119 + 0.52619) y_{2bH} \\ &\quad + (-0.25915 + 0.33690 + 0.36153) y_{3bH} \\ &\quad + (0.07065 - 0.07381 - 0.01291 + 1.47381) y_{4bH} \\ &\quad + 2.14762 y_{6bH} \\ &\quad + 2.00000 y_{8bH} \\ &\quad + // y_{10bH} \\ &\quad + \left. \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= bH \left\{ \begin{array}{ll} 0.21131 y_0 & +2.14762 y_{6bH} \\ +1.18928 y_{bH} & +2.00000 y_{8bH} \\ +1.55476 y_{2bH} & + // y_{10bH} \\ +0.43928 y_{3bH} & + \vdots \\ +1.45774 y_{4bH} & \end{array} \right\} \quad (1 \cdot 2 \cdot 32)
 \end{aligned}$$

すなわち、求積式はつぎのようにあたえられる。

$$\begin{aligned}
 V &= bH \left\{ \begin{array}{ll} 0.16596 y_0 & +1.68674 y_{6bH} \\ +0.93406 y_{bH} & +1.57080 y_{8bH} \\ +1.22111 y_{2bH} & + // y_{10bH} \\ +0.34501 y_{3bH} & + \vdots \\ +1.14491 y_{4bH} & \end{array} \right\} \quad (1 \cdot 2 \cdot 33)
 \end{aligned}$$

したがって、いま、 $b=0.05$ とおくと

$$\begin{aligned}
 V &= H \left\{ \begin{array}{ll} 0.00830 y_0 & +0.07854 y_{0.40H} \\ +0.04670 y_{0.05H} & + // y_{0.50H} \\ +0.06106 y_{0.10H} & \vdots \\ +0.01725 y_{0.15H} & \vdots \\ +0.05725 y_{0.20H} & \vdots \\ +0.08434 y_{0.30H} & + // y_H \end{array} \right\} \quad [1 \cdot 75]
 \end{aligned}$$

つぎに、 b の値を0.1程度として、(3点, 2次)の係数をもちいた場合についても同様の求積式をもとめてみよう。

最初の測点を対象の基部にとることにすれば、図1・10を参照して

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{x_0}^{x_H} y dx \\
 &= I(1) + I(2) + I(3) \\
 &\quad + I(4) + I(5) \\
 &\quad + I(6)
 \end{aligned}$$

ここに

$$I(1) = \int_{x_0}^{x_{\frac{1}{2}bH}} y dx,$$

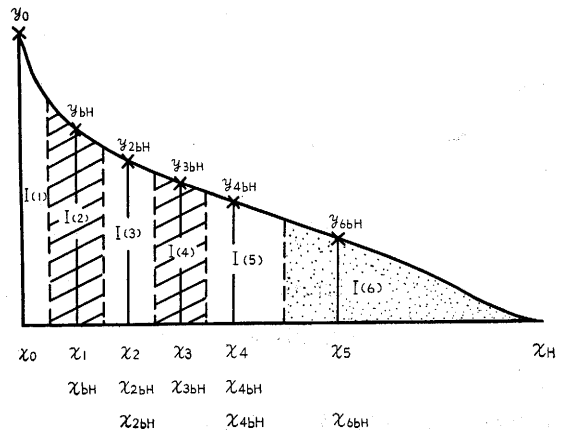


図1・10

$$I(2) = \int_{x_{\frac{1}{2}bH}}^{x_{\frac{3}{2}bH}} y dx, \quad I(3) = \int_{x_{\frac{3}{2}bH}}^{x_{\frac{5}{2}bH}} y dx, \quad I(4) = \int_{x_{\frac{5}{2}bH}}^{x_{\frac{7}{2}bH}} y dx,$$

$$I(5) = \int_{x_{\frac{7}{2}bH}}^{x_{bbH}} y dx, \quad I(6) = \int_{x_{bbH}}^{x_H} y dx$$

$I(1)$ より順次もとめてゆくと

$$I(1) = \frac{bH}{24} \left\{ 8 y_0 + 5 y_{bH} - y_{2bH} \right\}$$

$$I(2) = \frac{bH}{24} \left\{ y_0 + 22 y_{bH} + y_{2bH} \right\}$$

$$I(3) = \frac{bH}{24} \left\{ y_{bH} + 22 y_{2bH} + y_{3bH} \right\}$$

$$I(4) = \frac{bH}{24} \left\{ y_{2bH} + 22 y_{3bH} + y_{4bH} \right\}$$

$$I(5) = \frac{bH}{24} \left\{ -\frac{9}{8} y_{2bH} + \frac{270}{8} y_{4bH} + \frac{27}{8} y_{6bH} \right\}$$

$$I(6) = \frac{2bH}{24} \left\{ y_{4bH} + 23 y_{6bH} + 24 y_{8bH} + \dots \right\}$$

したがって、全体の面積 I は

$$I = bH \left\{ \begin{array}{ll} 0.37500 y_0 & +2.05729 y_{6bH} \\ +1.16667 y_{bH} & +2.00000 y_{8bH} \\ +0.91146 y_{2bH} & + \quad // \quad y_{10bH} \\ +0.95833 y_{3bH} & + \quad \vdots \\ +1.53125 y_{4bH} & \quad \quad \quad \end{array} \right\} \quad (1 \cdot 2 \cdot 34)$$

すなわち

$$V = bH \left\{ \begin{array}{ll} 0.29453 y_0 & +1.61580 y_{6bH} \\ +0.91630 y_{bH} & +1.57080 y_{8bH} \\ +0.71586 y_{2bH} & + \quad // \quad y_{10bH} \\ +0.75267 y_{3bH} & + \quad \vdots \\ +1.20264 y_{4bH} & \quad \quad \quad \end{array} \right\} \quad (1 \cdot 2 \cdot 35)$$

したがって、いま、 $b = 0.1$ とおくと、測点を $x_0, x_{0.1H}, x_{0.2H}, x_{0.3H}, x_{0.4H}, x_{0.6H}, x_{0.8H}, x_H$ にとった場合の求積式として、次式があたえられる。

$$V = H \left\{ \begin{array}{ll} 0.02945 y_0 & +0.12026 y_{0.4H} \\ +0.09163 y_{0.1H} & +0.16158 y_{0.6H} \\ +0.07159 y_{0.2H} & +0.15708 y_{0.8H} \\ +0.07527 y_{0.3H} & +0.15708 y_H \end{array} \right\} \quad [1.76]$$

1.2.2 b 手法 2

つぎに、いま1つの手法について考察してみよう。

前記したように、間隔を不等にとった場合には、それに対応した数値積分用係数をまずも定めなければならないから、そのためにはふたたび積分用係数誘導の過程がしめされた § 1.1 にたかえる必要がある。すなわち、測点が適宜とられた場合の積分用係数 c_i は (1.1.9) 式にしめされた連立方程式から λ_i をもとめ、それらを (1.1.8) 式に代入することによってあたえられる。したがって、この場合に必要な係数 c_i は、一般式としてはその解としてしめされるが、その展開が極度に複雑であることは、両式を通覧すれば容易に予想される。

その煩雑さをさけるためにこそ、等間隔の場合においては、 h_i についてある数値をあたえ、(1.1.8) 式、(1.1.9) 式を簡略化して、係数 c_i を導いたのであるが、この場合においても、無理に一般式として誘導することをさけて、 h_i のあたえ方をかえた場合をいく通りか想定し、そのもとに導かれた求積式をこの手法による求積式として例示することにする。なお、近似する曲線は3次式とする。

1) $k=5$ とし、 h_i を図 1.11 のように $h_1=0.1$, $h_2=0.2$, $h_3=0.3$, $h_4=0.4$ とした場合 $a \sim b$ の区間 h を 1 としても一般性は失わないから

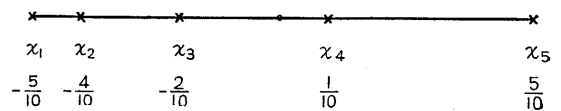


図 1.11

$$\left(-\frac{h}{2}\right) = x_1 = -0.5$$

$$\left(-\frac{h}{2} + h_1\right) = x_2 = -0.4 \quad \left(\frac{h}{2} - h_4\right) = x_4 = 0.1$$

$$\left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right) = x_3 = -0.2 \quad \left(\frac{h}{2}\right) = x_5 = 0.5$$

したがって

$$\left(-\frac{h}{2}\right) + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right) + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right) + \left(\frac{h}{2} - h_4\right) + \left(\frac{h}{2}\right) = \sum x_i = -0.5$$

$$\left(-\frac{h}{2}\right)^2 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)^2 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)^2 + \left(\frac{h}{2} - h_4\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \sum x_i^2 = 0.71$$

$$\left(-\frac{h}{2}\right)^3 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)^3 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)^3 + \left(\frac{h}{2} - h_4\right)^3 + \left(\frac{h}{2}\right)^3 = \sum x_i^3 = -0.071$$

$$\left(-\frac{h}{2}\right)^4 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)^4 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)^4 + \left(\frac{h}{2} - h_4\right)^4 + \left(\frac{h}{2}\right)^4 = \sum x_i^4 = 0.1523$$

$$\left(-\frac{h}{2}\right)^5 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)^5 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)^5 + \left(\frac{h}{2} - h_4\right)^5 + \left(\frac{h}{2}\right)^5 = \sum x_i^5 = -0.01055$$

$$\left(-\frac{h}{2}\right)^6 + \left(-\frac{h}{2} + h_1\right)^6 + \left(-\frac{h}{2} + h_1 + h_2\right)^6 + \left(\frac{h}{2} - h_4\right)^6 + \left(\frac{h}{2}\right)^6 = \sum x_i^6 = 0.035411$$

これらの値を (1・1・9) 式に代入して

$$5 \lambda_1 - 0.5 \lambda_2 + 0.71 \lambda_3 - 0.071 \lambda_4 = -2$$

$$-0.5 \lambda_1 + 0.71 \lambda_2 - 0.071 \lambda_3 + 0.1523 \lambda_4 = 0$$

$$0.71 \lambda_1 - 0.071 \lambda_2 + 0.1523 \lambda_3 - 0.01055 \lambda_4 = -\frac{1}{6}$$

$$-0.071 \lambda_1 + 0.1523 \lambda_2 - 0.01055 \lambda_3 + 0.035411 \lambda_4 = 0$$

上式から

$$\lambda_1 = -\frac{103928}{127413} \qquad \lambda_3 = \frac{298265}{127413}$$

$$\lambda_2 = -\frac{1601}{891} \qquad \lambda_4 = \frac{550}{81}$$

これらの値を (1・1・8) 式に代入して, c_i は

$$c_1 = \frac{46068}{509652} \qquad c_3 = \frac{106260}{509652} \qquad c_5 = \frac{71379}{509652}$$

$$c_2 = \frac{39996}{509652} \qquad c_4 = \frac{245949}{509652}$$

としてもとめられるから, この場合の求積式は次式のようにあたえられる。

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{H}{509652} \left\{ \begin{array}{l} 46068 y_0 \\ + 39996 y_{0.1H} \\ + 106260 y_{0.3H} \\ + 245949 y_{0.6H} \\ + 71379 y_H \end{array} \right\} = H \left\{ \begin{array}{l} 0.07099 y_0 \\ + 0.06164 y_{0.1H} \\ + 0.16375 y_{0.3H} \\ + 0.37902 y_{0.6H} \\ + 0.11000 y_H \end{array} \right\} \dots\dots [1 \cdot 77]$$

2) $k=5$ とし, $h_1=0.1, h_2=0.1,$

$h_3=0.1, h_4=0.7$ とした場合

$$x_1 = -0.5 \qquad x_4 = -0.2$$

$$x_2 = -0.4 \qquad x_5 = 0.5$$

$$x_3 = -0.3$$



図 1・12

したがって

$$\sum x_i = -0.9 \qquad \sum x_i^2 = -0.099 \qquad \sum x_i^3 = -0.01299$$

$$\sum x_i^4 = 0.79 \qquad \sum x_i^5 = 0.1603 \qquad \sum x_i^6 = 0.036139$$

であるから, λ に関する連立方程式は

$$5 \lambda_1 - 0.9 \lambda_2 + 0.79 \lambda_3 - 0.099 \lambda_4 = -2$$

$$\begin{aligned} -0.9\lambda_1 + 0.79\lambda_2 - 0.099\lambda_3 + 0.1603\lambda_4 &= 0 \\ 0.79\lambda_1 - 0.099\lambda_2 + 0.1603\lambda_3 - 0.01299\lambda_4 &= -\frac{1}{6} \\ -0.099\lambda_1 + 0.1603\lambda_2 - 0.01299\lambda_3 + 0.036139\lambda_4 &= 0 \end{aligned}$$

上式から*

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -18.15767 & \lambda_3 &= 68.28450 \\ \lambda_2 &= -70.19127 & \lambda_4 &= 286.14702 \end{aligned}$$

これらの値から, c_i は

$$\begin{aligned} c_1 &= 0.879643 & c_3 &= -0.659674 & c_5 &= 0.206900 \\ c_2 &= -1.265475 & c_4 &= 1.838605 \end{aligned}$$

したがって, この場合の求積式は, 次式のようにあたえられる。

$$\begin{aligned} V = \frac{\pi}{4} \cdot H \left\{ \begin{array}{l} 0.879643 y_0 \\ -1.265475 y_{0.1H} \\ -0.659674 y_{0.2H} \\ +1.838605 y_{0.3H} \\ +0.206900 y_H \end{array} \right\} &= H \left\{ \begin{array}{l} 0.69087 y_0 \\ -0.99390 y_{0.1H} \\ -0.51811 y_{0.2H} \\ +1.44404 y_{0.3H} \\ +0.16250 y_H \end{array} \right\} \quad [1 \cdot 78] \end{aligned}$$

3) $h=5$ とし, x_1, x_5 を $-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}$ よりそれぞれ 0.1 内側にとり, $h_1=0.1, h_2=0.3, h_3=0.3, h_4=0.1$ とした場合

$x_1 = -0.4$	$x_4 = 0.3$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$x_2 = -0.3$	$x_5 = 0.4$	$-\frac{4}{10}$	$-\frac{3}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$
$x_3 = 0$						

図 1 · 13

したがって

$$\begin{aligned} \sum x_i &= 0 & \sum x_i^3 &= 0 & \sum x_i^5 &= 0 \\ \sum x_i^2 &= 0.5 & \sum x_i^4 &= 0.0674 & \sum x_i^6 &= 0.00965 \end{aligned}$$

これらの値から

$$\begin{aligned} 5\lambda_1 & & +0.5\lambda_3 & & & = -2 \\ & 0.5\lambda_2 & & +0.0674\lambda_4 & & = 0 \\ 0.5\lambda_1 & & +0.0674\lambda_3 & & & = -\frac{1}{6} \\ & 0.0674\lambda_2 & & +0.00965\lambda_4 & & = 0 \end{aligned}$$

上式から

*) 計算からえられる λ の値は, 小数点以下非常に多くの桁数を要するので, この場合近似値をあたえた。

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{772}{1305} & \lambda_3 &= \frac{500}{261} \\ \lambda_2 &= 0 & \lambda_4 &= 0\end{aligned}$$

これらの値を (1・1・8) 式に代入して, c_i は

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{372}{2610} & c_3 &= \frac{772}{2610} & c_5 &= \frac{372}{2610} \\ c_2 &= \frac{547}{2610} & c_4 &= \frac{547}{2610}\end{aligned}$$

としてもとめられるから, この場合の求積式は次式のようにあたえられる。

$$\begin{aligned}V &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{H}{2610} \left\{ \begin{array}{l} 372 y_{0.1H} \\ +547 y_{0.2H} \\ +772 y_{0.5H} \\ +547 y_{0.8H} \\ +372 y_{0.9H} \end{array} \right\} = H \left\{ \begin{array}{l} 0.11194 y_{0.1H} \\ +0.16460 y_{0.2H} \\ +0.23231 y_{0.5H} \\ +0.16460 y_{0.8H} \\ +0.11194 y_{0.9H} \end{array} \right\} \quad [1 \cdot 79]\end{aligned}$$

4) $k=5$ とし, $h_1=0.1$, $h_2=0.4$,

$h_3=0.4$, $h_4=0.1$ とした場合

$$\begin{array}{l} x_1 = -0.5 \quad x_4 = 0.4 \\ x_2 = -0.4 \quad x_5 = 0.5 \\ x_3 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{cccccc} \times & \times & & \times & & \times & \times \\ x_1 & x_2 & & x_3 & & x_4 & x_5 \\ -\frac{5}{10} & -\frac{4}{10} & & 0 & & \frac{4}{10} & \frac{5}{10} \end{array}$$

図 1・14

したがって

$$\begin{aligned}\sum x_i &= 0 & \sum x_i^3 &= 0 & \sum x_i^5 &= 0 \\ \sum x_i^2 &= 0.82 & \sum x_i^4 &= 0.1762 & \sum x_i^6 &= 0.039442\end{aligned}$$

これらの値から

$$\begin{aligned}5\lambda_1 &+ 0.82\lambda_3 & & & & & = -2 \\ &0.82\lambda_2 & & + 0.1762\lambda_4 & & & = 0 \\ 0.82\lambda_1 &+ 0.1762\lambda_3 & & & & & = -\frac{1}{6} \\ &0.1762\lambda_2 & & + 0.039442\lambda_4 & & & = 0\end{aligned}$$

上式から

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{3236}{3129} & \lambda_3 &= \frac{12100}{3129} \\ \lambda_2 &= 0 & \lambda_4 &= 0\end{aligned}$$

これらの値を (1・1・8) 式に代入して

$$c_1 = \frac{211}{6258} \quad c_3 = \frac{3236}{6258} \quad c_5 = \frac{211}{6258}$$

$$c_3 = \frac{1300}{6258} \quad c_4 = \frac{1300}{6258}$$

したがって

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{H}{6258} \left\{ \begin{array}{l} 211 y_0 \\ +1300 y_{0.1H} \\ +3236 y_{0.5H} \\ +1300 y_{0.9H} \\ +211 y_H \end{array} \right\} = H \left\{ \begin{array}{l} 0.02648 y_0 \\ +0.16315 y_{0.1H} \\ +0.40613 y_{0.5H} \\ +0.16315 y_{0.9H} \\ +0.02648 y_H \end{array} \right\} \quad [1 \cdot 80]$$

第2章 直交多項式の数表を利用する方法

2.1 直交多項式

変数 x の回帰函数 y を

$$y = f(x)$$

であらわすと、 $f(x)$ は xy 平面上に一本の連続曲線としてしめされることが普通であり、そしてそれは、しばしば x の多項式で近似される。

たとえばいま、 x の等間隔の k 個の点、 $x_1 = x_0$, $x_2 = x_0 + h$, \dots , $x_k = x_0 + (k-1)h$ における y の観測値を y_1, y_2, \dots, y_k とすると、変数 x に対する観測値の母平均 y は、通常、 x の多項式として

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{k-1} x^{k-1} \quad (2 \cdot 1 \cdot 1)$$

としてあらわされる。

ここに、 a_0, a_1, \dots, a_{k-1} の各係数は、最小2乗法を適用してもとめられるが、このままの形では x の次数がふえたり、あるいは観測の回数が大きいと、その推定は非常に面倒になる。その困難をのぞくために考えられた方法の1つが、直交多項式による展開をおこない、係数の推定を容易にする方法である。

まず、 $t = x - \bar{x}$ とおき、(2.1.1) 式の代りにつぎのような形で展開式を考えることにする。

$$\begin{aligned} y &= b_0 + b_1 \phi_1(t) + b_2 \phi_2(t) + b_3 \phi_3(t) + \dots \\ &= b_0 + b_1(t + \alpha) + b_2(t^2 + \beta_1 t + \beta_2) + b_3(t^3 + r_1 t^2 + r_2 t + r_3) + \dots \end{aligned} \quad (2 \cdot 1 \cdot 2)$$

ここに、 x の k 個の点は、 $x_0, x_0 + h, \dots, x_0 + (k-1)h$ としてあたえられるから、 t の変域は、 k が奇数であれば、

$$-\frac{k-1}{2} h, -\frac{k-3}{2} h, \dots, -h, 0, h, \dots, \frac{k-3}{2} h, \frac{k-1}{2} h$$

また、 k が偶数であれば

$$-\frac{k-1}{2}h, -\frac{k-3}{2}h, \dots, -\frac{3}{2}h, -\frac{1}{2}h, 0, \frac{1}{2}h, \frac{3}{2}h, \dots, \frac{k-1}{2}h$$

(2・1・2) 式に展開した場合の係数 b_0, b_1, \dots に対する正規方程式は、つぎのようにしめされるから、いま、その対角線以外の項は 0 になるような条件をあたえて、その条件下における $\phi(t)$ の値をもとめてみよう。このような操作をおこなえば、 b_i ($i=1, 2, \dots$) の推定は互に独立になり、直交展開がおこなわれたことになる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_i 1 b_0 + \sum_i (t_i + \alpha) b_1 + \sum_i (t_i^2 + \beta_1 t_i + \beta_2) b_2 \\ + \sum_i (t_i^3 + r_1 t_i^2 + r_2 t_i + r_3) b_3 + \dots = \sum_i y_i \\ \sum_i (t_i + \alpha) b_0 + \sum_i (t_i + \alpha)^2 b_1 + \sum_i (t_i + \alpha) (t_i^2 + \beta_1 t_i + \beta_2) b_2 \\ + \sum_i (t_i + \alpha) (t_i^3 + r_1 t_i^2 + r_2 t_i + r_3) b_3 + \dots = \sum_i (t_i + \alpha) y_i \\ \sum_i (t_i^2 + \beta_1 t_i + \beta_2) b_0 + \sum_i (t_i + \alpha) (t_i^2 + \beta_1 t_i + \beta_2) b_1 \\ + \sum_i (t_i^2 + \beta_1 t_i + \beta_2)^2 b_2 + \sum_i (t_i^2 + \beta_1 t_i + \beta_2) (t_i^3 + r_1 t_i^2 + r_2 t_i + r_3) \\ + \dots = \sum_i (t_i^2 + \beta_1 t_i + \beta_2) y_i \\ \vdots \\ \vdots \end{aligned} \right\} (2 \cdot 1 \cdot 3)$$

まず、 α についてみると

$$\begin{aligned} \sum_i (t_i + \alpha) &= \sum_i t_i + k\alpha = 0 \\ \alpha &= -\frac{\sum_i t_i}{k} \end{aligned}$$

ここに、 $t_i = x_i - \bar{x}$ であるから

$$\alpha = -\frac{\sum_i t_i}{k} = -\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})}{k} = -\frac{\sum_i x_i}{k} + \frac{k\bar{x}}{k} = 0$$

したがって、 $\phi_1(t)$ は

$$\phi_1(t) = t = x - \bar{x}$$

としてあたえられる。

つぎに、 β_1, β_2 についてみると

$$\begin{aligned} \sum_i (t_i^2 + \beta_1 t_i + \beta_2) &= 0 \\ \sum_i (t_i + \alpha) (t_i^2 + \beta_1 t_i + \beta_2) &= 0 \end{aligned}$$

$\alpha = 0$ であるから、第 2 式は

$$\sum_i t_i (t_i^2 + \beta_1 t_i + \beta_2) = 0$$

したがって、上の連立方程式を満足するためには

$$\sum_i t_i^3 + \beta_1 \sum_i t_i + \sum_i \beta_2 = 0 \quad (A)$$

$$\sum_i t_i^3 + \beta_1 \sum_i t_i^2 + \beta_2 \sum_i t_i = 0 \quad (\text{B})$$

でなければならない。

(A) 式より, $\sum_i \beta_2 = -(\sum_i t_i^2 + \beta_1 \sum_i t_i)$ であるから, (B) 式によって

$$\sum_i t_i^3 + \beta_1 \sum_i t_i^2 + \sum_i t_i \left(-\frac{\sum_i t_i^2}{k} - \beta_1 \frac{\sum_i t_i}{k} \right) = 0$$

$$\beta_1 \left(\sum_i t_i^3 - \frac{\sum_i t_i \sum_i t_i^2}{k} \right) = \frac{\sum_i t_i \sum_i t_i^2}{k} - \sum_i t_i^3$$

$$\beta_1 = \frac{\frac{\sum_i t_i \sum_i t_i^2}{k} - \sum_i t_i^3}{\sum_i t_i^2 - \frac{\sum_i t_i \sum_i t_i}{k}}$$

$\sum_i t_i$, $\sum_i t_i^3$ は, 前記の t の変域によって, k の奇偶にかかわらず 0 になるから

$$\beta_1 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{したがって, } \beta_2 = -\frac{\sum_i t_i^2}{k} \end{array} \right\} \quad (2 \cdot 1 \cdot 4)$$

$\sum_i t_i^2$ をもとめるのに, あらためて $n = \frac{1}{2}(k-1)$ とおけば, k が奇数の場合は

$$\begin{aligned} \sum_i t_i^2 &= (-nh)^2 + \left\{ -(n-1)h \right\}^2 + \cdots + 0 + \cdots + (nh)^2 \\ &= h^2 \left\{ n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 1^2 \right\} \cdot 2 \\ &= h^2 \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\} \cdot 2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} h^2 \\ &= \frac{k}{12} (k-1)(k+1) \cdot h^2 \end{aligned}$$

また, k が偶数であれば

$$\begin{aligned} \sum_i t_i^2 &= \left\{ -nh \right\}^2 + \left\{ -(n-1)h \right\}^2 + \cdots + \left\{ -\frac{3}{2}h \right\}^2 + \left\{ -\frac{1}{2}h \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{2}h \right\}^2 + \cdots + \left\{ nh \right\}^2 \\ &= \frac{2h^2}{2^2} \left\{ (k-1)^2 + (k-3)^2 + \cdots + 3^2 + 1^2 \right\} \\ &= \frac{h^2}{2} \left\{ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 \right\} - \frac{h^2}{2} \left\{ 2^2 + 4^2 + \cdots + k^2 \right\} \\ &= \frac{h^2}{2} \cdot \frac{k}{6} (k+1)(2k+1) - \frac{h^2}{2} \cdot 2^2 \left\{ 1^2 + 2^2 + \cdots + \left(\frac{k}{2} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{h^2}{2} \cdot \frac{k}{6} (k+1)(2k+1) - \frac{h^2}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{6} \left\{ \frac{k}{2} \left(\frac{k}{2} + 1 \right) (k+1) \right\} \\ &= \frac{k}{12} (k-1)(k+1) \cdot h^2 \end{aligned}$$

$$\sum_i t_i^2 b_1 = \sum_i t_i y_i$$

したがって、 b_1 の推定値 \hat{b}_1 は

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum_i t_i y_i}{\sum_i t_i^2}$$

以下同様にして、 b_2, b_3, \dots についてもそれらの推定値がもとめられる。

ところで、 t_i や $\sum_i t_i^2$ をもとめるのも一般には相当の手数であるが、実際には、それらの値についての数表ができており、われわれは、それを単に利用しさえすればよい。すなわち、本文において必要な部分を専門書より抜萃すると、表 2・1 のとおりであるが、同表の値をもちいれば、 b_0, b_1, b_2, \dots はつぎのようにもとめられる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{b}_0 &= \frac{1}{k} (y_1 + y_2 + \dots + y_k) \\ \hat{b}_1 &= \frac{1}{\lambda S h} (W_1 y_1 + W_2 y_2 + \dots + W_k y_k) \\ \hat{b}_2 &= \frac{1}{\lambda S h^2} (W_1 y_1 + W_2 y_2 + \dots + W_k y_k) \\ \hat{b}_3 &= \frac{1}{\lambda S h^3} (W_1 y_1 + W_2 y_2 + \dots + W_k y_k) \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned} \right\} \quad [2 \cdot 1 \cdot 6]$$

ここに、 h は x の間隔であり、 λS はそれぞれの k および b_i に対して、表 2・1 の下の欄の値であり、 W_1, W_2, \dots, W_k はそれぞれの k および b_i に対して、表にあたえてある係数である。

たとえば、いま、 $k=5$ とすれば、 t の変域は

$$-2h, -h, 0, h, 2h$$

であるから、 $\sum_i t_i^2$ は

$$\sum_i t_i^2 = 2(4h^2 + h^2) = 10h^2$$

また、 $\sum_i t_i y_i$ は

$$\begin{aligned} \sum_i t_i y_i &= (-2h y_1 - h y_2 + 0 y_3 + h y_4 + 2h y_5) \\ &= h (-2y_1 - y_2 + 0 y_3 + y_4 + 2y_5) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \hat{b}_1 &= \frac{h}{10h^2} (-2y_1 - y_2 + 0 y_3 + y_4 + 2y_5) \\ &= \frac{1}{10h} (-2y_1 - y_2 + 0 y_3 + y_4 + 2y_5) \end{aligned}$$

としてもとめられる。

すなわち、表 2・1、 $k=5$ の b_1 欄における λS の値は、上式における分母の h にかかる値であり、分子の y_i にかかる係数が、 W_1, W_2, \dots, W_5 としてしめされている。

表 2・1 等間隔のときの直交多項式

	$k = 2$		$k = 3$		$k = 4$			$k = 5$			
	b_1		b_1	b_2	b_1	b_2	b_3	b_1	b_2	b_3	b_4
W_1	-1		-1	1	-3	1	-1	-2	2	-1	1
W_2	1		0	-2	-1	-1	3	-1	-1	2	-4
W_3			1	1	1	-1	-3	0	-2	0	6
W_4					3	1	1	1	-1	-2	-4
W_5								2	2	1	1
λS	1		2	2	10	4	6	10	14	12	24
S	$\frac{1}{2}$		2	$\frac{2}{3}$	5	4	$\frac{9}{5}$	10	14	$\frac{72}{5}$	$\frac{288}{35}$
λ	2		1	3	2	1	$\frac{10}{3}$	1	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{35}{12}$

	$k = 6$					$k = 7$				
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
W_1	-5	5	-5	1	-1	-3	5	-1	3	-1
W_2	-3	-1	7	-3	5	-2	0	1	-7	4
W_3	-1	-4	4	2	-10	-1	-3	1	1	-5
W_4	1	-4	-4	2	10	0	-4	0	6	0
W_5	3	-1	-7	-3	-5	1	-3	-1	1	5
W_6	5	5	5	1	1	2	0	-1	-7	-4
W_7						3	5	1	3	1
λS	35	56	108	48	120	28	84	36	264	240
S	$\frac{35}{2}$	$\frac{112}{3}$	$\frac{324}{5}$	$\frac{576}{7}$	$\frac{400}{7}$	28	84	216	$\frac{3168}{7}$	$\frac{4800}{7}$
λ	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{21}{10}$	1	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{20}$

	$k = 8$					$k = 9$				
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
W_1	-7	7	-7	7	-7	-4	28	-14	14	-4
W_2	-5	1	5	-13	23	-3	7	7	-21	11
W_3	-3	-3	7	-3	-17	-2	-8	13	-11	-4
W_4	-1	-5	3	9	-15	-1	-17	9	9	-9
W_5	1	-5	-3	9	15	0	-20	0	18	0
W_6	3	-3	-7	-3	17	1	-17	-9	9	9
W_7	5	1	-5	-13	-23	2	-8	-13	-11	4
W_8	7	7	7	7	7	3	7	-7	-21	-11
W_9						4	28	14	14	4
λS	84	168	396	1056	3102	60	924	1188	3432	3120
S	42	168	594	$\frac{12672}{7}$	$\frac{31200}{7}$	60	308	$\frac{7128}{5}$	$\frac{41184}{7}$	20800
λ	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{10}{7}$	1	3	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{20}$

	$k = 10$					$k = 11$				
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
W_1	-9	6	-42	18	-6	-5	15	-30	6	-3
W_2	-7	2	14	-22	14	-4	6	6	-6	6
W_3	-5	-1	35	-17	-1	-3	-1	22	-6	1
W_4	-3	-3	31	3	-11	-2	-6	23	-1	-4
W_5	-1	-4	12	18	-6	-1	-9	14	4	-4
W_6	1	-4	-12	18	6	0	-10	0	6	0
W_7	3	-3	-31	3	11	1	-9	-14	4	4
W_8	5	-1	-35	-17	1	2	-6	-23	-1	4
W_9	7	2	-14	-22	-14	3	-1	-22	-6	-1
W_{10}	9	6	42	18	6	4	6	-6	-6	-6
W_{11}						5	15	30	6	3
λS	165	264	5148	6864	7800	110	858	5148	3432	6240
S	$\frac{165}{2}$	528	$\frac{15444}{5}$	$\frac{82368}{5}$	78000	110	858	$\frac{30888}{5}$	41184	249600
λ	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{10}$	1	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{40}$

2.2 求積式の誘導

2.2.1 $r^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$

前節において、直交展開に利用される係数がしめされたが、これらの値をもちいて、いろいろな場合の求積式を導くことができる。

まず、幹曲線の形を

$$r^2 = a + bx + cx^2 + dx^3 \quad (2.2.1)$$

として考えてみよう。幹材積 V は

$$V = \pi \int_0^H r^2 dx = \pi \int_0^H (a + bx + cx^2 + dx^3) dx \quad (2.2.2)$$

としてあたえられる。

ここに、 x は梢端よりの距離であり、 r は x の部位における半径とする。

さて、前節(2.1.5)の公式によって、(2.2.1)式はつぎのように展開されるから

$$\begin{aligned} r^2 &= a + bx + cx^2 + dx^3 \\ &= b_0 + b_1(x - \bar{x}) + d_2 \left\{ (x - \bar{x})^2 - \frac{k^2 - 1}{12} h^2 \right\} \\ &\quad + b^3 \left\{ (x - \bar{x})^3 - \frac{3k^2 - 7}{20} (x - \bar{x}) h^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

幹曲線の形を(2.2.3)式として、これを(2.2.2)式に代入し、さきにしめされた b_i に対する推定式をもちいれば、直交展開によつた求積の一般式をもとめることができる。しかし、その形は煩雑であり、実用上あまり有用ともおもわれないので、以下、 k および h にいくつかの値

をあたえて、それらの場合についての求積式をもとめることにする。

最初に、 $k=11$, $h=0.1H$ として、各測点は、梢端より順次 $0.1H$ 間隔にとられた場合を考えよう。

$\bar{x} = \frac{1}{2}H$ としてしめされるから、(2・2・3)式にこれらの値を代入すれば

$$\begin{aligned} r^2 &= b_0 + b_1 \left(x - \frac{1}{2}H \right) + b_2 \left\{ \left(x - \frac{1}{2}H \right)^2 - \frac{120}{12} \cdot 0.01H^2 \right\} \\ &\quad + b_3 \left\{ \left(x - \frac{1}{2}H \right)^3 - \frac{356}{20} \left(x - \frac{1}{2}H \right) \cdot 0.01H^2 \right\} \\ &= b_0 + b_1 \left(x - \frac{1}{2}H \right) + b_2 \left(x^2 - H \cdot x + \frac{3}{20}H^2 \right) \\ &\quad + b_3 \left(x^3 - \frac{3}{2}H \cdot x^2 + \frac{1144}{2000}H^2 \cdot x - \frac{144}{4000}H^3 \right) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \int_0^H r^2 dx &= \int_0^H \left\{ b_0 + b_1 \left(x - \frac{1}{2}H \right) + b_2 \left(x^2 - H \cdot x + \frac{3}{20}H^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + b_3 \left(x^3 - \frac{3}{2}H \cdot x^2 + \frac{1144}{2000}H^2 \cdot x - \frac{144}{4000}H^3 \right) \right\} dx \\ &= b_0 H + b_1 \left(-\frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{2}H^2 \right) + b_2 \left(\frac{1}{3}H^3 - \frac{1}{2}H^3 + \frac{3}{20}H^3 \right) \\ &\quad + b_3 \left(\frac{1}{4}H^4 - \frac{1}{2}H^4 + \frac{1144}{4000}H^4 - \frac{144}{4000}H^4 \right) \\ &= b_0 H - \frac{1}{60} b_2 H^3 \end{aligned} \tag{2・2・4}$$

ここに、 b_0 および b_2 は、(2・1・6)式および表2・1より

$$\begin{aligned} \hat{b}_0 &= \frac{1}{11} (r_0^2 + r_{0.1H^2} + r_{0.2H^2} + r_{0.3H^2} + r_{0.4H^2} + r_{0.5H^2} \\ &\quad + r_{0.6H^2} + r_{0.7H^2} + r_{0.8H^2} + r_{0.9H^2} + r_H^2) \\ \hat{b}_2 &= \frac{1}{858 \times 0.01H^2} (15r_0^2 + 6r_{0.1H^2} - r_{0.2H^2} - 6r_{0.3H^2} - 9r_{0.4H^2} \\ &\quad - 10r_{0.5H^2} - 9r_{0.6H^2} - 6r_{0.7H^2} - r_{0.8H^2} + 6r_{0.9H^2} + 15r_H^2) \end{aligned}$$

としてしめされるから、これらの値を(2・2・4)式に代入すれば

$$\begin{aligned} \int_0^H r^2 dx &= \frac{H}{11} (r_0^2 + r_{0.1H^2} + r_{0.2H^2} + r_{0.3H^2} + r_{0.4H^2} + r_{0.5H^2} \\ &\quad + r_{0.6H^2} + r_{0.7H^2} + r_{0.8H^2} + r_{0.9H^2} + r_H^2) \\ &\quad - \frac{H}{514.8} (15r_0^2 + 6r_{0.1H^2} - r_{0.2H^2} - 6r_{0.3H^2} - 9r_{0.4H^2} \\ &\quad - 10r_{0.5H^2} - 9r_{0.6H^2} - 6r_{0.7H^2} - r_{0.8H^2} + 6r_{0.9H^2} + 15r_H^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=H \left\{ \left(\frac{1}{11} - \frac{15}{514.8} \right) r_0^2 \right. &= \frac{H}{5148} \left\{ 318 r_0^2 \right. \\
+ \left(\frac{1}{11} - \frac{6}{514.8} \right) r_{0.1H^2} &+ 408 r_{0.1H^2} \\
+ \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{514.8} \right) r_{0.2H^2} &+ 478 r_{0.2H^2} \\
+ \left(\frac{1}{11} + \frac{6}{514.8} \right) r_{0.3H^2} &+ 528 r_{0.3H^2} \\
+ \left(\frac{1}{11} + \frac{9}{514.8} \right) r_{0.4H^2} &+ 558 r_{0.4H^2} \\
+ \left(\frac{1}{11} + \frac{10}{514.8} \right) r_{0.5H^2} &+ 568 r_{0.5H^2} \\
+ \left(\frac{1}{11} + \frac{9}{514.8} \right) r_{0.6H^2} &+ 558 r_{0.6H^2} \\
+ \left(\frac{1}{11} + \frac{6}{514.8} \right) r_{0.7H^2} &+ 528 r_{0.7H^2} \\
+ \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{514.8} \right) r_{0.8H^2} &+ 478 r_{0.8H^2} \\
+ \left(\frac{1}{11} - \frac{6}{514.8} \right) r_{0.9H^2} &+ 408 r_{0.9H^2} \\
+ \left(\frac{1}{11} - \frac{15}{514.8} \right) r_H^2 \left. \right\} &+ 318 r_H^2 \left. \right\} \quad (2 \cdot 2 \cdot 5)
\end{aligned}$$

したがって、 V は(2・2・5)式の各係数に π を乗ずることによって

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^H r^2 dx \\
&= H \left\{ \begin{array}{l} 0.19406 r_0^2 \\ +0.24898 r_{0.1H^2} \\ +0.29170 r_{0.2H^2} \\ +0.32222 r_{0.3H^2} \\ +0.34052 r_{0.4H^2} \\ +0.34663 r_{0.5H^2} \\ +0.34052 r_{0.6H^2} \\ +0.32222 r_{0.7H^2} \\ +0.29170 r_{0.8H^2} \\ +0.24898 r_{0.9H^2} \\ +0.19406 r_H^2 \end{array} \right\} \quad [2 \cdot 1] \\
&= H \left\{ \begin{array}{l} 0.04852 d_0^2 \\ +0.06225 d_{0.1H^2} \\ +0.07293 d_{0.2H^2} \\ +0.08055 d_{0.3H^2} \\ +0.08513 d_{0.4H^2} \\ +0.08666 d_{0.5H^2} \\ +0.08513 d_{0.6H^2} \\ +0.08055 d_{0.7H^2} \\ +0.07293 d_{0.8H^2} \\ +0.06225 d_{0.9H^2} \\ +0.04852 d_H^2 \end{array} \right\} \quad [2 \cdot 1]'
\end{aligned}$$

としてあたえられる。

すなわち、〔2・1〕式は、 $h=0.1H$ 間隔にとられた11個の測点における観測値 $r_0, r_{0.1H}, r_{0.2H}, \dots, r_H$ をもちいて、幹曲線式 $r^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$ の係数 a, b, c, d を最小2乗法にもとずいて決定し、その結果もとめられる V の積分式を、実用上利用しやすい形にしてあたえたものである。実際に、最小2乗法によって、 a, b 等の係数をもとめることはかなり煩雑と、であり、加うるに、 H に関する高次の材積式をもちいねばならなかった今日迄の求積法を考える直交多項式によって導かれる〔2・1〕式は、実用上非常に便利な形と看做することができるであろう。

$2r = d$ なる関係をもちいれば、〔2・1〕式はまた、直径 d にもとずく求積式として、〔2・1〕'式のようにしめされる。

Breymann, Simony, Rieke 等の求積式はいずれも幹曲線式として (2・2・1) 式を想定してもとめられたものであるが、それらの各式も直交展開によって容易に導くことができる。

すなわち、 $h = \frac{1}{3}H$ として、4個の測点を順次対象の一端よりとることにすれば

$$\begin{aligned} r^2 &= a + bx + cx^2 + dx^3 \\ &= b_0 + b_1\left(x - \frac{1}{2}H\right) + b_2\left\{\left(x - \frac{1}{2}H\right)^2 - \frac{15}{12} \cdot \frac{1}{9}H^2\right\} \\ &\quad + b_3\left\{\left(x - \frac{1}{2}H\right)^3 - \frac{41}{20}\left(x - \frac{1}{2}H\right) \cdot \frac{1}{9}H^2\right\} \\ &= b_0 + b_1\left(x - \frac{1}{2}H\right) + b_2\left(x^2 - H \cdot x + \frac{1}{9}H^2\right) \\ &\quad + b_3\left(x^3 - \frac{3}{2}H \cdot x^2 + \frac{47}{90}H^2 \cdot x - \frac{1}{90}H^3\right) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \int_0^H r^2 dx &= b_0H + b_1\left(\frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{2}H^2\right) + b_2\left(\frac{1}{3}H^3 - \frac{1}{2}H^3 + \frac{1}{9}H^3\right) \\ &\quad + b_3\left(\frac{1}{4}H^4 - \frac{1}{2}H^4 + \frac{47}{180}H^4 - \frac{1}{90}H^4\right) \\ &= b_0H - b_2 \cdot \frac{1}{18}H^3 \end{aligned} \tag{2・2・6}$$

ここに、 \hat{b}_0, \hat{b}_2 は

$$\begin{aligned} \hat{b}_0 &= \frac{1}{4}(r_0^2 + r_{\frac{1}{3}H}^2 + r_{\frac{2}{3}H}^2 + r_H^2) \\ \hat{b}_2 &= \frac{9}{4H^2}(r_0^2 - r_{\frac{1}{3}H}^2 - r_{\frac{2}{3}H}^2 + r_H^2) \end{aligned}$$

としてあたえられるから、(2・2・6) 式は

$$\int_0^H r^2 dx = \frac{H}{4}(r_0^2 + r_{\frac{1}{3}H}^2 + r_{\frac{2}{3}H}^2 + r_H^2)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{H}{8}(r_0^2 - r_{\frac{1}{8}H}^2 - r_{\frac{2}{8}H}^2 + r_H^2) \\
& = \frac{H}{8}(r_0^2 + 3r_{\frac{1}{8}H}^2 + 3r_{\frac{2}{8}H}^2 + r_H^2)
\end{aligned}$$

としてしめされる。

したがって、 V は、 $\pi r^2 = g$ とすれば

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^H r^2 dx \\
&= \frac{\pi \cdot H}{8} (r_0^2 + 3r_{\frac{1}{8}H}^2 + 3r_{\frac{2}{8}H}^2 + r_H^2) \\
&= \frac{H}{8} (g_0 + 3g_{\frac{1}{8}H} + 3g_{\frac{2}{8}H} + g_H) \tag{2.2.7}
\end{aligned}$$

としてあたえられる。

(2.2.7) 式が、Breymann 式であり、直交多項式の数表を利用する方法にもとづく求積式として、(2.2.1) 式にしめされる幹曲線式のもとに、等間隔 $k=4$ のある場合として誘導される。

つぎに、 $k=3$ として、3個の測点を $x_{\frac{1}{4}H}$, $x_{\frac{2}{4}H}$, $x_{\frac{3}{4}H}$ にとった場合についてもとめてみよう。

幹曲線方程式を (2.2.1) 式とすれば、 $h = \frac{1}{4}H$, $\bar{x} = \frac{1}{2}H$ であるから

$$\begin{aligned}
r^2 &= a + bx + cx^2 + dx^3 \\
&= b_0 + b_1\left(x - \frac{1}{2}H\right) + b_2\left\{\left(x - \frac{1}{2}H\right)^2 - \frac{8}{12} \cdot \frac{1}{16}H^2\right\} \\
&\quad + b_3\left\{\left(x - \frac{1}{2}H\right)^3 - \frac{20}{20}\left(x - \frac{1}{2}H\right) \cdot \frac{1}{16}H^2\right\} \\
&= b_0 + b_1\left(x - \frac{1}{2}H\right) + b_2\left(x^2 - H \cdot x + \frac{5}{24}H^2\right) \\
&\quad + b_3\left(x^3 - \frac{3}{2}H \cdot x^2 + \frac{11}{16}H^2 \cdot x - \frac{3}{32}H^3\right)
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\int_0^H r^2 dx &= b_0H + b_1\left(\frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{2}H^2\right) + b_2\left(\frac{1}{3}H^3 - \frac{1}{2}H^3 + \frac{5}{24}H^3\right) \\
&\quad + b_3\left(\frac{1}{4}H^4 - \frac{1}{2}H^4 + \frac{11}{32}H^4 - \frac{3}{32}H^4\right) \\
&= b_0H + \frac{1}{24}b_2H^3 \tag{2.2.8}
\end{aligned}$$

ここに

$$\hat{b}_0 = \frac{1}{3}\left(r_{\frac{1}{4}H}^2 + r_{\frac{2}{4}H}^2 + r_{\frac{3}{4}H}^2\right)$$

$$\hat{b}_2 = \frac{16}{2H^2} \left(r_{\frac{1}{4}H}^2 - 2r_{\frac{2}{4}H}^2 + r_{\frac{3}{4}H}^2 \right)$$

としてあたえられるから、(2・2・8)式は

$$\begin{aligned} \int_0^H r^2 dx &= \frac{H}{3} \left(r_{\frac{1}{4}H}^2 + r_{\frac{2}{4}H}^2 + r_{\frac{3}{4}H}^2 \right) + \frac{H}{3} \left(r_{\frac{1}{4}H}^2 - 2r_{\frac{2}{4}H}^2 + r_{\frac{3}{4}H}^2 \right) \\ &= \frac{H}{3} \left(2r_{\frac{1}{4}H}^2 - r_{\frac{2}{4}H}^2 + 2r_{\frac{3}{4}H}^2 \right) \end{aligned}$$

したがって、 V は

$$V = \frac{H}{3} \left(2g_{\frac{1}{4}H} - g_{\frac{2}{4}H} + 2g_{\frac{3}{4}H} \right) \quad (2 \cdot 2 \cdot 9)$$

としてもとめられる。

上式が、Simony 第1式であり、本法にもとずく求積式として、幹曲線方程式を(2・2・1)式として、等間隔 $k=3$ のある場合として誘導される。

同様に、3個の測点を $x_0, x_{\frac{1}{2}H}, x_H$ にとれば、Rieke 式 $V = \frac{H}{6} (g_0 + 4g_{\frac{1}{2}H} + g_H)$ が、また、 $x_{\frac{1}{7}H}, x_{\frac{2}{7}H}, x_{\frac{6}{7}H}$ にとれば、Simony 第2式が、 $x_{\frac{1}{5}H}, x_{\frac{2}{5}H}, x_{\frac{4}{5}H}$ にとれば、Simony 第3式がそれぞれもめられる。

以上と全く同様な手法によって、幹曲線の方程式を $r^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$ とした種々の場合の求積式をもとめることができる。

いま、

i) $k=5, h=0.2H$ として、各測点を梢端より $0.1H, 0.3H, 0.5H, 0.7H, 0.9H$ の距離にとった場合。($k=5, h=0.2H, ((x_{0.1H}, x_{0.3H}, \dots, x_{0.9H}))$) と略記する。以下同様。)

ii) $k=6, h=0.2H, ((x_0, x_{0.2H}, x_{0.4H}, x_{0.6H}, x_{0.8H}, x_H))$

iii) $k=10, h=0.1H, ((x_{0.05H}, x_{0.15H}, x_{0.25H}, \dots, x_{0.95H}))$

の3つの場合について考えると、それぞれの場合における求積式は、つぎのようにもとめられる。

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad V = H \left\{ \begin{array}{ll} 0.66571 r_{0.1H}^2 & + 0.60963 r_{0.7H}^2 \\ + 0.60963 r_{0.3H}^2 & + 0.66571 r_{0.9H}^2 \\ + 0.59093 r_{0.5H}^2 & \end{array} \right\} \quad [2 \cdot 2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad V = H \left\{ \begin{array}{ll} 0.28984 r_0^2 & + 0.71060 r_{0.6H}^2 \\ + 0.57036 r_{0.2H}^2 & + 0.57036 r_{0.8H}^2 \\ + 0.71060 r_{0.4H}^2 & + 0.28984 r_H^2 \end{array} \right\} \quad [2 \cdot 3] \end{aligned}$$

$$\text{iii)} \quad V = H \left\{ \begin{array}{ll} 0.32011 r_{0.05H}^2 & + 0.31019 r_{0.95H}^2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{ll} +0.31614 r_{0.15H^2} & +0.31118 r_{0.65H^2} \\ +0.31317 r_{0.25H^2} & +0.31317 r_{0.75H^2} \\ +0.31118 r_{0.35H^2} & +0.31614 r_{0.85H^2} \\ +0.31019 r_{0.45H^2} & +0.32011 r_{0.95H^2} \end{array} \right\} [2 \cdot 4]$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \quad r = ax + bx^2 + cx^3$$

つぎに、幹曲線の方程式を

$$r = ax + bx^2 + cx^3 \quad (2 \cdot 2 \cdot 10)$$

として考えてみよう。上式は、吉田が理想的な算出曲線として提案したものであり、幹材積 V は

$$V = \left[\frac{a^2}{2} H^2 + \frac{2ab}{3} H^3 + \frac{b^2 + 2ac}{4} H^4 + \frac{2bc}{5} H^5 + \frac{c^2}{6} H^6 \right] \pi H$$

としてあたえられるが、前の場合に準じて、同じ幹曲線式をもちいて、直交展開による求積式を誘導してみよう。

まず

$$z = \frac{r}{x} = a + bx + cx^2$$

とおけば

$$z = b_0 + b_1(x - \bar{x}) + b_2 \left\{ (x - \bar{x})^2 - \frac{k^2 - 1}{12} h^2 \right\} \quad (2 \cdot 2 \cdot 11)$$

ここに、 $k=11$ とにおいて、各測点は、対象の一端より順次 $0.1H$ 間隔にとられた場合を考えると、 $\bar{x} = \frac{1}{2}H$ であるから、上式は

$$\begin{aligned} z &= b_0 + b_1 \left(x - \frac{1}{2}H \right) + b_2 \left\{ \left(x - \frac{1}{2}H \right)^2 - 10 \cdot 0.01H^2 \right\} \\ &= b_0 + b_1 \left(x - \frac{1}{2}H \right) + b_2 \left(x^2 - H \cdot x + \frac{3}{20}H^2 \right) \end{aligned} \quad (2 \cdot 2 \cdot 12)$$

r になおすと

$$\begin{aligned} r &= b_0 x + b_1 \left(x^2 - \frac{1}{2}H \cdot x \right) + b_2 \left(x^3 - H \cdot x^2 + \frac{3}{20}H^2 \cdot x \right) \\ &= \left(b_0 - b_1 \frac{1}{2}H + b_2 \frac{3}{20}H^2 \right) x + (b_1 - b_2 H) x^2 + b_2 x^3 \end{aligned}$$

いま

$$\left. \begin{array}{l} A = b_0 - b_1 \frac{1}{2}H + b_2 \frac{3}{20}H^2 \\ B = b_1 - b_2 H \\ C = b_2 \end{array} \right\} \quad (2 \cdot 2 \cdot 13)$$

とおけば、上式は

$$r = Ax + Bx^2 + Cx^3$$

としてしめされるから

$$\begin{aligned} r^2 &= (Ax + Bx^2 + Cx^3)^2 \\ &= A^2x^2 + 2AB \cdot x^3 + (2AC + B^2)x^4 + 2BC \cdot x^5 + C^2x^6 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \int_0^H r^2 dx &= \int_0^H \{A^2x^2 + 2AB \cdot x^3 + (2AC + B^2)x^4 + 2BC \cdot x^5 + C^2x^6\} dx \\ &= \frac{A^2}{3}H^3 + \frac{AB}{2}H^4 + \frac{2AC + B^2}{5}H^5 + \frac{BC}{3}H^6 + \frac{C^2}{7}H^7 \end{aligned} \quad (2 \cdot 2 \cdot 14)$$

さて、 $z = \frac{r}{x}$ とおいたから、まず、 $x = 0$ における z の値をもとめなければならない。記号を簡略にして、 $x = 0, 0.1H, 0.2H, \dots, H$ に対応した z の値を z_1, z_2, \dots, z_{11} とすれば、 $x = 0$ に対する z の値は、(2・2・12) 式より

$$z_1 = b_0 - \frac{1}{2}Hb_1 + \frac{3}{20}H^2b_2 \quad (2 \cdot 2 \cdot 15)$$

ここに、 b_0, b_1 および b_2 の推定値は、(2・1・6) 式および表 2・1 によって

$$\left. \begin{aligned} \hat{b}_0 &= \frac{1}{11}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 + z_7 + z_8 + z_9 + z_{10} + z_{11}) \\ \hat{b}_1 &= \frac{1}{110 \times 0.1H}(-5z_1 - 4z_2 - 3z_3 - 2z_4 - z_5 + z_7 + 2z_8 + 3z_9 + 4z_{10} + 5z_{11}) \\ \hat{b}_2 &= \frac{1}{858 \times 0.01H^2}(15z_1 + 6z_2 - z_3 - 6z_4 - 9z_5 - 10z_6 - 9z_7 - 6z_8 - z_9 \\ &\quad + 6z_{10} + 15z_{11}) \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 2 \cdot 16)$$

としてしめされるから、(2・2・15) 式は

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{11}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 + z_7 + z_8 + z_9 + z_{10} + z_{11}) \\ &\quad - \frac{H}{2} \cdot \frac{1}{110 \times 0.1H}(-5z_1 - 4z_2 - 3z_3 - 2z_4 - z_5 + z_7 + 2z_8 + 3z_9 + 4z_{10} + 5z_{11}) \\ &\quad + \frac{3H^2}{20} \cdot \frac{1}{858 \times 0.01H^2}(15z_1 + 6z_2 - z_3 - 6z_4 - 9z_5 - 10z_6 - 9z_7 - 6z_8 - z_9 + 6z_{10} + 15z_{11}) \\ &= \frac{1}{11}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 + z_7 + z_8 + z_9 + z_{10} + z_{11}) \\ &\quad - \frac{1}{22}(-5z_1 - 4z_2 - 3z_3 - 2z_4 - z_5 + z_7 + 2z_8 + 3z_9 + 4z_{10} + 5z_{11}) \\ &\quad + \frac{1}{57.2}(15z_1 + 6z_2 - z_3 - 6z_4 - 9z_5 - 10z_6 - 9z_7 - 6z_8 - z_9 + 6z_{10} + 15z_{11}) \\ &= \frac{1}{11}z_1 + \frac{1}{11}(z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 + z_7 + z_8 + z_9 + z_{10} + z_{11}) \\ &\quad + \frac{5}{22}z_1 - \frac{1}{22}(-4z_2 - 3z_3 - 2z_4 - z_5 + z_7 + 2z_8 + 3z_9 + 4z_{10} + 5z_{11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{15}{57.2} z_1 + \frac{1}{57.2} (6z_2 - z_3 - 6z_4 - 9z_5 - 10z_6 - 9z_7 - 6z_8 - z_9 + 6z_{10} + 15z_{11}) \\
z_1 & - \frac{1}{11} z_1 - \frac{5}{22} z_1 - \frac{15}{57.2} z_1 \\
& = \frac{240}{572} z_1 = \left(\frac{1}{11} + \frac{4}{22} + \frac{60}{572} \right) z_2 \quad + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{22} - \frac{90}{572} \right) z_7 \\
& \quad + \left(\frac{1}{11} + \frac{3}{22} - \frac{10}{572} \right) z_3 \quad + \left(\frac{1}{11} - \frac{2}{22} - \frac{60}{572} \right) z_8 \\
& \quad + \left(\frac{1}{11} + \frac{2}{22} - \frac{60}{572} \right) z_4 \quad + \left(\frac{1}{11} - \frac{3}{22} - \frac{10}{572} \right) z_9 \\
& \quad + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{22} - \frac{90}{572} \right) z_5 \quad + \left(\frac{1}{11} - \frac{4}{22} + \frac{60}{572} \right) z_{10} \\
& \quad + \left(\frac{1}{11} + 0 - \frac{100}{572} \right) z_6 \quad + \left(\frac{1}{11} - \frac{5}{22} + \frac{150}{572} \right) z_{11}
\end{aligned}$$

したがって、 z_1 は

$$\begin{aligned}
z_1 & = \frac{572}{240} \cdot \frac{1}{572} (216z_2 + 120z_3 + 44z_4 - 12z_5 - 48z_6 - 64z_7 - 60z_8 - 36z_9 + 8z_{10} + 72z_{11}) \\
& = \frac{1}{60} (54z_2 + 30z_3 + 11z_4 - 3z_5 - 12z_6 - 16z_7 - 15z_8 - 9z_9 + 2z_{10} + 18z_{11})
\end{aligned}$$

としてもとめられる。

さて、この z_1 の値を、あらためて (2・2・16) 式に代入すれば、この場合の b_0 , b_1 , b_2 の各係数は

$$\begin{aligned}
\hat{b}_0 & = \frac{1}{11} \left\{ \frac{1}{60} (54z_2 + 30z_3 + 11z_4 - 3z_5 - 12z_6 - 16z_7 - 15z_8 - 9z_9 + 2z_{10} + 18z_{11}) \right. \\
& \quad \left. + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 + z_7 + z_8 + z_9 + z_{10} + z_{11} \right\} \\
& = \frac{1}{660} (114z_2 + 90z_3 + 71z_4 + 57z_5 + 48z_6 + 44z_7 + 45z_8 + 51z_9 + 62z_{10} + 78z_{11}) \\
\hat{b}_1 & = \frac{1}{11H} \left\{ -\frac{1}{12} (54z_2 + 30z_3 + 11z_4 - 3z_5 - 12z_6 - 16z_7 - 15z_8 - 9z_9 + 2z_{10} + 18z_{11}) \right. \\
& \quad \left. - 4z_2 - 3z_3 - 2z_4 - z_5 + z_7 + 2z_8 + 3z_9 + 4z_{10} + 5z_{11} \right\} \\
& = \frac{1}{132H} (-102z_2 - 66z_3 - 35z_4 - 9z_5 + 12z_6 + 28z_7 + 39z_8 + 45z_9 + 46z_{10} + 42z_{11}) \\
\hat{b}_2 & = \frac{1}{8.58H^2} \left\{ \frac{1}{4} (54z_2 + 30z_3 + 11z_4 - 3z_5 - 12z_6 - 16z_7 - 15z_8 - 9z_9 + 2z_{10} + 18z_{11}) \right. \\
& \quad \left. + 6z_2 - z_3 - 6z_4 - 9z_5 - 10z_6 - 9z_7 - 6z_8 - z_9 + 6z_{10} + 15z_{11} \right\} \\
& = \frac{1}{34.32H^2} (78z_2 + 26z_3 - 13z_4 - 39z_5 - 52z_6 - 52z_7 - 39z_8 - 13z_9 + 26z_{10} + 78z_{11})
\end{aligned}$$

としてもとめられるから、これらの値を (2・2・13) の各式に代入して

$$A = b_0 - b_1 \frac{1}{2} H + b_2 \frac{3}{20} H^2$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{114}{660} + \frac{102}{264} + \frac{780}{2288} \right) z_2 & + \left(\frac{44}{660} - \frac{28}{264} - \frac{520}{2288} \right) z_7 \\
&+ \left(\frac{90}{660} + \frac{66}{264} + \frac{260}{2288} \right) z_3 & + \left(\frac{45}{660} - \frac{39}{264} - \frac{390}{2288} \right) z_8 \\
&+ \left(\frac{71}{660} + \frac{35}{264} - \frac{130}{2288} \right) z_4 & + \left(\frac{51}{660} - \frac{45}{264} - \frac{130}{2288} \right) z_9 \\
&+ \left(\frac{57}{660} + \frac{9}{264} - \frac{390}{2288} \right) z_5 & + \left(\frac{62}{660} - \frac{46}{264} + \frac{260}{2288} \right) z_{10} \\
&+ \left(\frac{48}{660} - \frac{12}{264} - \frac{520}{2288} \right) z_6 & + \left(\frac{78}{660} - \frac{42}{264} + \frac{780}{2288} \right) z_{11} \\
&= 0.90000 z_2 & - 0.26666 z_7 \\
&+ 0.50000 z_3 & - 0.25000 z_8 \\
&+ 0.18333 z_4 & - 0.15000 z_9 \\
&- 0.05000 z_5 & + 0.03333 z_{10} \\
&- 0.20000 z_6 & + 0.30000 z_{11}
\end{aligned} \tag{2 \cdot 2 \cdot 17}$$

$$B = b_1 - b_2 H$$

$$\begin{aligned}
&= \left(-\frac{102}{132H} - \frac{78}{34 \cdot 32H} \right) z_2 & = \frac{1}{H} (-3.04545 z_2 \\
&+ \left(-\frac{66}{132H} - \frac{26}{34 \cdot 32H} \right) z_3 & - 1.25758 z_3 \\
&+ \left(-\frac{35}{132H} + \frac{13}{34 \cdot 32H} \right) z_4 & + 0.11364 z_4 \\
&+ \left(-\frac{9}{132H} + \frac{39}{34 \cdot 32H} \right) z_5 & + 1.06818 z_5 \\
&+ \left(\frac{12}{132H} + \frac{52}{34 \cdot 32H} \right) z_6 & + 1.60606 z_6 \\
&+ \left(\frac{28}{132H} + \frac{52}{34 \cdot 32H} \right) z_7 & + 1.72727 z_7 \\
&+ \left(\frac{39}{132H} + \frac{39}{34 \cdot 32H} \right) z_8 & + 1.43182 z_8 \\
&+ \left(\frac{45}{132H} + \frac{13}{34 \cdot 32H} \right) z_9 & + 0.71970 z_9 \\
&+ \left(\frac{46}{132H} - \frac{26}{34 \cdot 32H} \right) z_{10} & - 0.40909 z_{10} \\
&+ \left(\frac{42}{132H} - \frac{78}{34 \cdot 32H} \right) z_{11} & - 1.95455 z_{11})
\end{aligned} \tag{2 \cdot 2 \cdot 18}$$

また

$$C = b_2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{34.32H^2} (78 z_2 & &= \frac{1}{H^2} (2.27273 z_2 \\
&\quad +26 z_3 & &\quad +0.75758 z_3 \\
&\quad -13 z_4 & &\quad -0.37879 z_4 \\
&\quad -39 z_5 & &\quad -1.13636 z_5 \\
&\quad -52 z_6 & &\quad -1.51515 z_6 \\
&\quad -52 z_7 & &\quad -1.51515 z_7 \\
&\quad -39 z_8 & &\quad -1.13636 z_8 \\
&\quad -13 z_9 & &\quad -0.37879 z_9 \\
&\quad +26 z_{10} & &\quad +0.75758 z_{10} \\
&\quad +78 z_{11}) & &\quad +2.27273 z_{11}) \quad (2 \cdot 2 \cdot 19)
\end{aligned}$$

としてもとめられる。

$z = \frac{r}{x}$ より, $x = 0.1H, 0.2H, \dots, H$ とおいた z_2, z_3, \dots, z_H の値は

$$\begin{aligned}
z_2 &= \frac{r_{0.1H}}{0.1H} = \frac{10}{H} r_{0.1H} & z_7 &= \frac{r_{0.6H}}{0.6H} = \frac{10}{6H} r_{0.6H} \\
z_3 &= \frac{r_{0.2H}}{0.2H} = \frac{10}{2H} r_{0.2H} & z_8 &= \frac{r_{0.7H}}{0.7H} = \frac{10}{7H} r_{0.7H} \\
z_4 &= \frac{r_{0.3H}}{0.3H} = \frac{10}{3H} r_{0.3H} & z_9 &= \frac{r_{0.8H}}{0.8H} = \frac{10}{8H} r_{0.8H} \\
z_5 &= \frac{r_{0.4H}}{0.4H} = \frac{10}{4H} r_{0.4H} & z_{10} &= \frac{r_{0.9H}}{0.9H} = \frac{10}{9H} r_{0.9H} \\
z_6 &= \frac{r_{0.5H}}{0.5H} = \frac{10}{5H} r_{0.5H} & z_{11} &= \frac{r_H}{H} = \frac{10}{10H} r_H
\end{aligned}$$

としてしめされるから, 上記の各式における z を r としてあたえなおすと

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{H} (9.00000 r_{0.1H} & &-0.44444 r_{0.6H} \\
&\quad +2.50000 r_{0.2H} & &-0.35714 r_{0.7H} \\
&\quad +0.61111 r_{0.3H} & &-0.18750 r_{0.8H} \\
&\quad -0.12500 r_{0.4H} & &+0.03704 r_{0.9H} \\
&\quad -0.40000 r_{0.5H} & &+0.30000 r_H) \quad (2 \cdot 5A)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{H^2} (-30.45455 r_{0.1H} & &+2.87879 r_{0.6H} \\
&\quad - 6.28788 r_{0.2H} & &+2.04545 r_{0.7H} \\
&\quad + 0.37879 r_{0.3H} & &+0.89962 r_{0.8H} \\
&\quad + 2.67045 r_{0.4H} & &-0.45455 r_{0.9H} \\
&\quad + 3.21212 r_{0.5H} & &-1.95455 r_H) \quad (2 \cdot 5B)
\end{aligned}$$

$$C = \frac{1}{H^3} (\begin{array}{ll} 22.72727 r_{0.1H} & -2.52525 r_{0.6H} \\ + 3.78788 r_{0.2H} & -1.62338 r_{0.7H} \\ - 1.26263 r_{0.3H} & -0.47348 r_{0.8H} \\ - 2.84091 r_{0.4H} & +0.84175 r_{0.9H} \\ - 3.03030 r_{0.5H} & +2.27273 r_H \end{array}) \quad [2 \cdot 5C]$$

としてもとめられる。

上記した A , B , C の各式を, (2・2・14) 式に代入して π 倍すれば, $V = \pi \int_0^H r^2 dx$ の式がもとめられるが, その整頓は非常に煩雑であるので, むしろ, 求積の実行にさいしては, (2・2・14) 式の利用と [2・5] 式の利用と 2 通りにわけ, まず, [2・5] 式をもちいて A , B , C の値をもとめ, しかるのちにあらためて, (2・2・14) 式をもちいるようにすればよい。

r にかかる係数を W_i とすれば, A の形は $(\sum_i W_i' r_i)/H$ であり, B の形は $(\sum_i W_i'' r_i)/H^2$, また, C の形は $(\sum_i W_i''' r_i)/H^3$ であるから, 形の上では

$$\begin{aligned} & \frac{A^2}{3} H^3 + \frac{AB}{2} H^4 + \frac{2AC + B^2}{5} H^5 + \frac{BC}{3} H^6 + \frac{C^2}{7} H^7 \\ &= \frac{H^3}{3} \cdot \frac{(\sum_i W_i' r_i)^2}{H^2} + \frac{H^4}{2} \cdot \frac{(\sum_i W_i' r_i)}{H} \cdot \frac{(\sum_i W_i'' r_i)}{H^2} + \frac{2H^5}{5} \cdot \frac{(\sum_i W_i' r_i)}{H} \cdot \frac{(\sum_i W_i''' r_i)}{H^3} \\ & \quad + \frac{H^6}{5} \cdot \frac{(\sum_i W_i'' r_i)^2}{H^4} + \frac{H^6}{3} \cdot \frac{(\sum_i W_i'' r_i)}{H^2} \cdot \frac{(\sum_i W_i''' r_i)}{H^3} + \frac{H^7}{7} \cdot \frac{(\sum_i W_i''' r_i)^2}{H^6} \\ &= H \left(\frac{A'^2}{3} + \frac{A'B'}{2} + \frac{2A'C'}{5} + \frac{B'^2}{5} + \frac{B'C'}{3} + \frac{C'^2}{7} \right) \quad (2 \cdot 2 \cdot 20) \end{aligned}$$

となるから, 実用上は, まず A , B , C の各式において, H を除外した $A' = \sum_i W_i' r_i$, $B' = \sum_i W_i'' r_i$, $C' = \sum_i W_i''' r_i$ を計算して, (2・2・20) 式における括弧内の値をもとめ, しかるのちに, πH の値を乗じて V をもとめることにすれば計算は容易になる。

以上と同様な手法によって, 幹曲線の方程式を $r = a x + b x^2 + c x^3$ とした種々の場合の求積式をもとめることができる。

前の場合に準じて, いま

- i) $k = 5$, $h = 0.2H$, ($(x_{0.1H}, x_{0.3H}, x_{0.5H}, x_{0.7H}, x_{0.9H})$)
- ii) $k = 6$, $h = 0.2H$, ($(x_0, x_{0.2H}, x_{0.4H}, x_{0.6H}, x_{0.8H}, x_H)$)
- iii) $k = 10$, $h = 0.1H$, ($(x_{0.05H}, x_{0.15H}, x_{0.25H}, \dots, x_{0.95H})$)

の 3 つの場合について考えると, それぞれの場合における A , B , C の各式は, つぎのようにあてえられる。なお, i), iii) の場合においては, 最初の測点は, 対象の一端より $0.1H$ あるいは $0.05H$ の距離にとられるから, z_1 に対する特別な考慮は不要である。また, もちいられる積分式は, 例示した場合と同様 (2・2・14) 式あるいは (2・2・20) 式である。

$$i) \quad A = \frac{1}{H} \left(\begin{array}{ll} 13.07143 \ r_{0.1H} & -0.50510 \ r_{0.7H} \\ + 0.48810 \ r_{0.3H} & +0.34127 \ r_{0.9H} \\ - 0.81429 \ r_{0.5H} & \end{array} \right) \quad [2 \cdot 6A]$$

$$B = \frac{1}{H^2} \left(\begin{array}{ll} -45.71429 \ r_{0.1H} & +3.26531 \ r_{0.7H} \\ + 4.28571 \ r_{0.3H} & -2.85714 \ r_{0.9H} \\ + 7.14286 \ r_{0.5H} & \end{array} \right) \quad [2 \cdot 6B]$$

$$C = \frac{1}{H^3} \left(\begin{array}{ll} 35.71429 \ r_{0.1H} & -2.55102 \ r_{0.7H} \\ - 5.95238 \ r_{0.3H} & +3.96825 \ r_{0.9H} \\ - 7.14286 \ r_{0.5H} & \end{array} \right) \quad [2 \cdot 6C]$$

$$ii) \quad A = \frac{1}{H} \left(\begin{array}{ll} 9.00000 \ r_{0.2H} & -0.75000 \ r_{0.8H} \\ - 1.33333 \ r_{0.6H} & +0.60000 \ r_H \end{array} \right)^* \quad [2 \cdot 7A]$$

$$B = \frac{1}{H^2} \left(\begin{array}{ll} -26.42857 \ r_{0.2H} & +3.30357 \ r_{0.8H} \\ + 4.10714 \ r_{0.4H} & -3.28571 \ r_H \\ + 7.14286 \ r_{0.6H} & \end{array} \right) \quad [2 \cdot 7B]$$

$$C = \frac{1}{H^3} \left(\begin{array}{ll} 17.85714 \ r_{0.2H} & -2.23214 \ r_{0.8H} \\ - 4.46429 \ r_{0.4H} & +3.57143 \ r_H \\ - 5.95238 \ r_{0.6H} & \end{array} \right) \quad [2 \cdot 7C]$$

$$iii) \quad A = \frac{1}{H} \left(\begin{array}{ll} 15.06818 \ r_{0.05H} & -0.33471 \ r_{0.55H} \\ + 2.92677 \ r_{0.15H} & -0.27885 \ r_{0.65H} \\ + 0.75227 \ r_{0.25H} & -0.15328 \ r_{0.75H} \\ + 0.00162 \ r_{0.35H} & +0.01738 \ r_{0.85H} \\ - 0.27441 \ r_{0.45H} & +0.21890 \ r_{0.95H} \end{array} \right) \quad [2 \cdot 8A]$$

$$B = \frac{1}{H^2} \left(\begin{array}{ll} -56.36364 \ r_{0.05H} & +2.86501 \ r_{0.55H} \\ - 7.87879 \ r_{0.15H} & +2.02797 \ r_{0.65H} \\ + 0.30303 \ r_{0.25H} & +0.90909 \ r_{0.75H} \\ + 2.72727 \ r_{0.35H} & -0.39216 \ r_{0.85H} \\ + 3.23232 \ r_{0.45H} & -1.81818 \ r_{0.95H} \end{array} \right) \quad [2 \cdot 8B]$$

$$C = \frac{1}{H^3} \left(\begin{array}{ll} 45.45455 \ r_{0.05H} & -2.75482 \ r_{0.55H} \\ + 5.05051 \ r_{0.15H} & -1.74825 \ r_{0.65H} \end{array} \right)$$

*) $r_{0.4H}$ にかかると係数は 0。

$$\begin{array}{ll}
- 1.51515 r_{0.25H} & -0.50505 r_{0.75H} \\
- 3.24675 r_{0.35H} & +0.89127 r_{0.85H} \\
- 3.36700 r_{0.45H} & +2.39234 r_{0.95H}
\end{array} \quad (2 \cdot 8C)$$

2・2・3 梯形則, Simpson 則

つぎに, 数値積分法における重要な公式である梯形則および Simpson 則の利用について考察してみよう。

もともと, 梯形則および Simpson 則は, それぞれ Bessel および Stirling の内挿公式によって導かれるものであるが, 直交多項式を利用して容易にあたえられる。いま, 幹曲線の方程式を

$$r^2 = a + bx$$

とおくと

$$r^2 = a + bx = b_0 + b_1(x - \bar{x})$$

x についての積分範囲を $l_1 \sim l_2$ とし, 両端 l_1, l_2 に測点がとられた場合を考えると,

$$\begin{aligned}
\int_{l_1}^{l_2} r^2 dx &= \int_{l_1}^{l_2} \left\{ b_0 + b_1(x - \bar{x}) \right\} dx \\
&= b_0(l_2 - l_1) + b_1 \left\{ \frac{(l_2 - l_1)^2}{2} - \frac{(l_2 - l_1)^2}{2} \right\} \\
&= b_0(l_2 - l_1)
\end{aligned}$$

$l_2 - l_1 = h$ とおけば

$$\hat{b}_0 = \frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2)$$

としてあたえられるから

$$\int_{l_1}^{l_2} r^2 dx = \frac{h}{2}(r_1^2 + r_2^2) \quad (2 \cdot 2 \cdot 21)$$

すなわち, l_1 から l_2 まで積分した結果は, $x = l_1$ および $x = l_2$ における函数値 r_1^2, r_2^2 の平均に h を乗じたものとひとしい。これが, 梯形則であるが (2・2・21) 式によって幹材積 V をもとめれば

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{l_1}^{l_2} r^2 dx \\
&= \frac{\pi h}{2}(r_1^2 + r_2^2)
\end{aligned}$$

$\pi r_1^2, \pi r_2^2$ をそれぞれ g_1, g_2 とおけば

$$V = \frac{h}{2}(g_1 + g_2) \quad (2 \cdot 2 \cdot 22)$$

これは Smalian 式にほかならない。

つぎに、幹曲線の方程式を

$$r^2 = a + dx + cx^2$$

とおき、積分範囲を $l_1 \sim l_3$ として、測点を h 間隔に $l_1, l_2 = (l_3 - l_1) / 2, l_3$ の 3 点にとると

$$\begin{aligned} \int_{l_1}^{l_3} r^2 dx &= \int_{-h}^h r^2 dx \\ &= \int_{-h}^h \left\{ b_0 + b_1 x + b_2 \left(x^2 - \frac{2}{3} h^2 \right) \right\} dx = 2hb_0 - \frac{2}{3} h^3 b_2 \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} \hat{b}_0 &= \frac{1}{3} (r_{-h}^2 + r_0^2 + r_h^2) \\ \hat{b}_1 &= \frac{1}{2h^2} (r_{-h}^2 - 2r_0^2 + r_h^2) \end{aligned}$$

としてあたえられるから

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h r^2 dx &= \frac{2}{3} h (r_{-h}^2 + r_0^2 + r_h^2) - \frac{1}{3} h (r_h^2 - 2r_0^2 + r_{-h}^2) \\ &= \frac{h}{3} (r_{-h}^2 + 4r_0^2 + r_h^2) \end{aligned} \quad (2 \cdot 2 \cdot 23)$$

上式が、Simpson 則であり、この場合の V は

$$V = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + 4r_2^2 + r_3^2) \quad (2 \cdot 2 \cdot 24)$$

としてもとめられる。

Smalian 式にもとずいて、その区分求積式が導かれるのと同様にして、Simpson 則にもとずいた区分求積式も容易にもとめられる。

すなわち、測点の数を奇数にして、となり合う 3 つの測点における観測値を一組にして、順次加え合せれば、区間 $[0, H]$ における積分値 $\int_0^H r^2 dx$ があたえられる。たとえば、いま、

$k = 11, h = 0.1H$ とすれば

$$\begin{aligned} \int_0^H r^2 dx &= \int_0^{0.2H} r^2 dx + \int_{0.2H}^{0.4H} r^2 dx + \cdots + \int_{0.8H}^H r^2 dx \\ &= \frac{0.1H}{3} (r_0^2 + 4r_{0.1H}^2 + r_{0.2H}^2) + \frac{0.1H}{3} (r_{0.2H}^2 + 4r_{0.3H}^2 + r_{0.4H}^2) \\ &\quad + \cdots + \frac{0.1H}{3} (r_{0.8H}^2 + 4r_{0.9H}^2 + r_H^2) \end{aligned}$$

したがって

$$V = \frac{0.1H}{3} \cdot \pi (r_0^2 + 4r_{0.1H}^2 + 2r_{0.2H}^2 + 4r_{0.3H}^2 + \cdots + r_H^2)$$

$$\begin{aligned}
=H(& 0.10472 r_0^2 & +0.20944 r_{0.6H}^2 \\
& +0.41888 r_{0.1H}^2 & +0.41888 r_{0.7H}^2 \\
& +0.20944 r_{0.2H}^2 & +0.20944 r_{0.8H}^2 \\
& +0.41888 r_{0.3H}^2 & +0.41888 r_{0.9H}^2 \\
& +0.20944 r_{0.4H}^2 & +0.10472 r_H^2) \quad [2 \cdot 9] \\
& +0.41888 r_{0.5H}^2
\end{aligned}$$

2・2・4 附 記

以上, 幹曲線の方程式を

$$\begin{aligned}
r^2 &= a + bx + cx^2 + dx^3 & r^2 &= a + bx \\
r &= ax + bx^2 + cx^3 & r^2 &= a + bx + cx^2
\end{aligned}$$

とした場合の求積式を, 直交多項式にもとずいて検討したが, 全く同様な手法によって, 幹曲線を別にした場合, あるいは, 間隔 h , 測点のとり方等をかえた場合の求積式を適宜もとめることができる。

なお, 幹曲線式を

$$\begin{aligned}
r^2 &= a + bx + cx^2 + bx^3 \\
r &= ax + bx^2 + cx^3
\end{aligned}$$

とした場合の積分区間を, 本文においては, 一律に $[0, H]$ としたが, Smalian 式あるいは, Simpson 則の区分求積法にならって, 小区間ずつ積分して加え合わせることも勿論可能である。

第 3 章 平均値法

3・1 原 理

区間 $\left[-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right]$ において, 連続な函数 $y=f(x)$ のこの区間での積分値を, つぎのような I とする。

$$I = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} f(x) dx \quad (3 \cdot 1 \cdot 1)$$

そこで, $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ なる n 個の x に対する函数 $f(x)$ の値 y_1, y_2, \dots, y_n と, それらに乗ずべき係数 C_1, C_2, \dots, C_n を適当にえらんで

$$M = (C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n) \cdot H \quad (3 \cdot 1 \cdot 2)$$

なる値を, できるだけ上記の積分にひとしくなるように工夫する。

まず, $f(x)$ を Maclaurin の級数で展開すると

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (3 \cdot 1 \cdot 3)$$

ここに

$$\sum_{i=1}^n C_i x_i^m = \begin{cases} 0 & (m: \text{奇数}) \\ \frac{H^m}{(m+1)2^m} & (m: \text{偶数}) \end{cases}$$

(3・1・7) 式における方程式の数は、一般に無限であるから、これらを全体としてとくことはできない。そこで、 x_i および C_i に種々の条件をもうけて、有限個の方程式をつくり、それらを連立させて x_i および C_i の値が定められる。この条件のもうけ方によって、種々異った方式、たとえば、Newton-Cotes, Maclaurin, Chebyshev, Gauss 等の方式がうまれてくることになるが、本文では、それらの方式のうち、Newton-Cotes および Gauss の方式をえらんで考察することにする。

3・2 求積式の誘導

3・2・1 Newton-Cotes の方式

この方式は、 x_1, x_2, \dots, x_n を等間隔 $\frac{H}{n-1}$ にとり、かつ、 C_i ($i=1, 2, \dots, n$) は、 $C_1=C_n, C_2=C_{n-1}, \dots$ のように対称的であるという条件のもとに (3・1・7) 式をといたものである。あたえられた n に対して、 x_i はもはや未知数ではなく、 C_i は、 n が偶数ならばその平均 $\frac{n}{2}$ だけが未知数となり、 n が奇数ならば、 $\frac{n+1}{2}$ だけが未知数となる。したがって、未知数の個数にひとしい方程式を (3・1・7) 式の上から順にとって、これをとけばよい。

たとえば、いま、 $n=2$ とすると

$$x_1 = -\frac{1}{2}H, \quad x_2 = \frac{1}{2}H$$

$$C_1 = C_2, \quad C_1 + C_2 = 1$$

であるから

$$C_1 = \frac{1}{2}, \quad C_2 = \frac{1}{2}$$

したがって、 I の近似値は、(3・1・1) 式 (3・1・2) 式によって

$$\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} f(x) dx = \int_0^H f(x) dx \doteq H \left(\frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}y_H \right) = \frac{H}{2}(y_0 + y_H)$$

としてあたえられる。

また、 $n=5$ とすると

$$x_1 = -\frac{1}{2}H, \quad x_2 = -\frac{1}{4}H, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = \frac{1}{4}H, \quad x_5 = \frac{1}{2}H$$

$$C_1 = C_5, \quad C_2 = C_4$$

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 = 1$$

$$-\frac{1}{2}HC_1 - \frac{1}{4}HC_2 + 0 + \frac{1}{4}HC_4 + \frac{1}{2}HC_5 = 0$$

$$\frac{1}{4}H^2C_1 + \frac{1}{16}H^2C_2 + 0 + \frac{1}{16}H^2C_4 + \frac{1}{4}H^2C_5 = \frac{1}{12}H^2$$

$$\frac{1}{16}H^4C_1 + \frac{1}{256}H^4C_2 + 0 + \frac{1}{256}H^4C_4 + \frac{1}{16}H^4C_5 = \frac{1}{80}H^4$$

上記の各式から

$$C_1 = \frac{7}{90} \quad C_2 = \frac{32}{90} \quad C_3 = \frac{12}{90} \quad C_4 = \frac{32}{90} \quad C_5 = \frac{7}{90}$$

がもとめられるから, I の近似値は

$$\begin{aligned} \int_0^H f(x)dx &\doteq H \left(\frac{7}{90}y_0 + \frac{32}{90}y_{\frac{1}{4}H} + \frac{12}{90}y_{\frac{2}{4}H} + \frac{32}{90}y_{\frac{3}{4}H} + \frac{7}{90}y_H \right) \\ &= \frac{H}{90} (7y_0 + 32y_{\frac{1}{4}H} + 12y_{\frac{2}{4}H} + 32y_{\frac{3}{4}H} + 7y_H) \end{aligned}$$

H をあらためて, $H = 4h$ とおけば

表 3・1 Newton-Cotes 公式の係数

	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 9$	$n = 11$	$n = 13$
C_i	1	1	1	7	19	41	989	16067	1364651
	1	4	3	32	75	216	5888	106300	9903168
$K = \frac{1}{2}$		1	3	12	50	27	-928	-48525	-7587864
		$\frac{1}{3}$	1	32	50	272	10496	272400	35725120
			$\frac{3}{8}$	7	75	27	-4540	-260550	-51491295
				$\frac{2}{45}$	19	216	10496	427368	87516288
					$\frac{5}{288}$	41	以下対称	-260550	-87797136
						$\frac{1}{140}$	$\frac{4}{14175}$	以下対称	87516288
								$\frac{5}{299376}$	以下対称
									$\frac{1}{5255250}$

$$\int_0^H f(x) dx \doteq \frac{2}{45} h (7y_0 + 32y_h + 12y_{2h} + 32y_{3h} + 7y_{4h})$$

としてあたえられる。

このようにして、Newton-Cotes 公式は、 $y_i = f(x_i) = f(x_1 + ih)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$)
とおくと、一般に

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x) dx = K \cdot h (C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n) \quad (3 \cdot 2 \cdot 1)$$

としてしめされ、係数 C_i および K の値は、表 3・1 のようにあたえられる。

表 3・1 をもちいての求積式は、容易に導かれる。すなわち (3・2・1) 式における y_i を直径の
2 乗と考えれば

$$V = -\frac{\pi}{4} \int_{x_1}^{x_n} y dx = -\frac{\pi}{4} \cdot K \cdot h (C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n)$$

したがって、たとえば、全長 H を 10 等分した場合を考えると、 $h = 0.1H$ 、 $n = 11$ であるから

$$\begin{aligned} V = -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{5}{299376} \cdot 0.1H & (16067 y_0 & = H (0.02108 y_0 \\ & + 106300 y_{0.1H} & + 0.13944 y_{0.1H} \\ & - 48525 y_{0.2H} & - 0.06365 y_{0.2H} \\ & + 272400 y_{0.3H} & + 0.35731 y_{0.3H} \\ & - 260550 y_{0.4H} & - 0.34177 y_{0.4H} \\ & + 427368 y_{0.5H} & + 0.56059 y_{0.5H} \\ & - 260550 y_{0.6H} & - 0.34177 y_{0.6H} \\ & + 272400 y_{0.7H} & + 0.35731 y_{0.7H} \\ & - 48525 y_{0.8H} & - 0.06365 y_{0.8H} \\ & + 106300 y_{0.9H} & + 0.13944 y_{0.9H} \\ & + 16067 y_H) & + 0.02108 y_H) \quad [3 \cdot 1] \end{aligned}$$

また、 $n = 7$ とおくと

$$\begin{aligned} V = -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{140} \cdot \frac{1}{6} H & (41 y_0 & \doteq \frac{3V}{10} (g_0 \\ & + 216 y_{\frac{1}{6}H} & + 5 g_{\frac{1}{6}H} \\ & + 27 y_{\frac{2}{6}H} & + g_{\frac{2}{6}H} \\ & + 272 y_{\frac{3}{6}H} & + 6 g_{\frac{3}{6}H} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 27 y_{\frac{4}{6}H} && + g_{\frac{4}{6}H} \\
 &+ 216 y_{\frac{5}{6}H} && + 5 g_{\frac{5}{6}H} \\
 &+ 41 y_H) + g_H) && \quad \quad \quad [3 \cdot 2]
 \end{aligned}$$

これが, Weddle の求積式である。ここに, $g = \frac{\pi}{4}y$ であり, $l' = \frac{1}{6}H$ とする。

3・2・2 Gauss の方式

Newton-Cotes の方式では, あらかじめ定められた x_i に対する y_i の値が使用された。この条件は, 実用上は便利なものであるが, n に対して満足される方程式の次数は高々 $(n-1)$ である。いま, x_i および C_i の合計 $2n$ 個の未知数に, なんの条件もつけずに, (3・1・7) 式の上から $2n$ 個の方程式を満足するように, これらの値をもとめることにすれば, あたえられた n に対する近似度ははるかに高くなるであろう。この原理によるものが, Gauss の方式であり, その形は, 一般につきのようにしめされる。

$$\int_a^b y dx = (b-a) \{ C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \} \quad (3 \cdot 2 \cdot 2)$$

この方式によると, x_i および C_i は複雑になる。 x_i は等間隔ではなく, 適宜あたえられるから, $2 \leq n \leq 10$ の場合には, まず, 次表から U_i をもとめ, 次式に代入して, 横座標 x_i を決定する。

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} U_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3 \cdot 2 \cdot 3)$$

表 3・2 Gauss 積分公式の横座標と係数

n	U_i	C_i	n	U_i	C_i
2	± .57735	.50000	7	± .94911	.06474
				± .74153	.13985
3	± .77460 0	.27778 .44444	8	± .40585	.19092
				0	.20898
				± .96029	.05061
4	± .86114 ± .33998	.17393 .32607	9	± .79667	.11119
				± .52553	.15685
				± .18343	.18134
5	± .90618 ± .53847 0	.11846 .23931 .28444	10	± .96816	.04064
				± .83603	.09032
				± .61337	.13031
6	± .93247 ± .66121 ± .23862	.08566 .18038 .23396	10	± .32425	.15617
				0	.16512
				± .97391	.03334
				± .86506	.07473
				± .67941	.10954
				± .43340	.13463
				± .14887	.14776

したがって、たとえば、 $n = 10$ とすると

$$a + b = b - a = H$$

$$x_i = \frac{H}{2} + \frac{H}{2} U_i$$

であるから、 U_i の値を表 3・2 からもとめると、10個の測点は

$$x_1 = \frac{H}{2} + \frac{H}{2} (-0.97391) = 0.01304 \cdot H$$

$$x_2 = \frac{H}{2} + \frac{H}{2} (-0.86506) = 0.06747 \cdot H$$

$$x_3 = \frac{H}{2} + \frac{H}{2} (-0.67941) = 0.16029 \cdot H$$

$$x_4 = \frac{H}{2} + \frac{H}{2} (-0.43340) = 0.28330 \cdot H$$

$$x_5 = \frac{H}{2} + \frac{H}{2} (-0.14887) = 0.42556 \cdot H$$

$$x_6 = \frac{H}{2} + \frac{H}{2} (0.14887) = 0.57444 \cdot H$$

$$x_7 = \frac{H}{2} + \frac{H}{2} (0.43340) = 0.71670 \cdot H$$

$$x_8 = \frac{H}{2} + \frac{H}{2} (0.67941) = 0.83971 \cdot H$$

$$x_9 = \frac{H}{2} + \frac{H}{2} (0.86506) = 0.93253 \cdot H$$

$$x_{10} = \frac{H}{2} + \frac{H}{2} (0.97391) = 0.98696 \cdot H$$

としてあたえられる。

これらの測点における観測値を y_1, y_2, \dots, y_n とすれば、(3・2・2) 式および表 3・2 を参照して、つぎのような求積式をもとめることができる。

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot H \left\{ \begin{array}{ll} 0.03334 y_1 & = H (0.02619 y_1 \\ +0.07473 y_2 & +0.05869 y_2 \\ +0.10954 y_3 & +0.08603 y_3 \\ +0.13463 y_4 & +0.10574 y_4 \\ +0.14776 y_5 & +0.11605 y_5 \\ +0.14776 y_6 & +0.11605 y_6 \\ +0.13463 y_7 & +0.10574 y_7 \\ +0.10954 y_8 & +0.08603 y_8 \\ +0.07473 y_9 & +0.05869 y_9 \\ +0.03334 y_{10} \end{array} \right\} + 0.02619 y_{10}) \dots \dots \dots [3 \cdot 3]$$

この方式による求積にさいしては、(3・2・3)式および表3・2によって、測点 x_i が定められることを注意しなければならない。

第4章 補 注

1) 移動平均法によって、ある区間の面積を推定する場合に、対象の全域をいくつかの小面積に分割し、近接する数個の観測値をもちいて、各分割面積を推定するのが普通であるが、この場合、分割する手法はいく通りにも考えられ、そして、それらの分割面積の推定にもちいる測点数 k もまた近似曲線の次数に関連して幾通りにも考えられる。

これらの数値について、理論上、とくにとるべき数値は定められないが、一般に、比較的大きい k の値をもちいて比較的小さい区間を推定するのが数値積分上の通念である。この通念に適応させるべく、本文においては、 $(\alpha, \beta) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ とおいて、測点の総数が比較的小さい場合に対応して(3点, 2次)の積分用係数を、また、 n が10程度以上ある場合に対しては、(5点, 3次)の係数をそれぞれもちいたが、勿論このような数値をあたえる以外にも、たとえば、 $n \geq 10$ において、 $k=4, 6, 7$ という数値も考えられるし、また、 (α, β) の値も $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ に限らず、 $(-1, 1)$ その他の値をとることも可能である。

このように、 k の値、近似曲線の次数、 (α, β) の値等によって、種々異った求積式が導かれるが、そのいずれがこのまじいかについては、実際例にもとずいて経験的に判断する以外に方法はなく、理論上からは完全な評価はできない。ただ、ある限られた n の値に対して、 k を必要以上に大きくとると、全長 H をこえる測点についての想定上の問題が生じてくる。また、近似する曲線の次数も k の値に関連してくるが、一般には、より高次のものの方が適合の度もよいと考えられるものの、分割した上での積分においては、必ずしも高い次数が要求されとも考えられない。

このような事情から、 $n \geq 10$ の場合に対しても(3点, 2次)の求積式をもちいることは、理論上一向に差支えないことである。

2) 移動平均法をもちいる場合、本文においては、積分式を

$$I = \frac{h}{D} \left\{ C_{-2}y_1 + C_{-1}y_2 + C_0y_3 + C_1y_4 + C_2y_5 \right\} \quad (i)$$

という形であたえてある。ここに、 y_i ($i=1, 2, 3, 4, 5$)は、各測点における観測値であるが、 $y_i = d_i^2$ と規定してあるから、 d について幾通りかの測定値がある場合には、 y_i のあたえ方に注意しなければならない。

すなわち、 d_i について q 通りの測定値がある場合には、(i)式は、 $q\bar{y}_1 = \sum_{j=1}^q y_{1,j}$ 、 $q\bar{y}_2 = \sum_{j=1}^q y_{2,j}$ 、……として

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{h}{Dq} \left\{ C_{-2} q\bar{y}_1 + C_{-1} q\bar{y}_2 + C_0 q\bar{y}_3 + C_1 q\bar{y}_4 + C_2 q\bar{y}_5 \right\} \\
 &= \frac{h}{D} \left\{ C_{-2}\bar{y}_1 + C_{-1}\bar{y}_2 + C_0\bar{y}_3 + C_1\bar{y}_4 + C_2\bar{y}_5 \right\} \quad (\text{ii})
 \end{aligned}$$

とおくことも考えられるが、求積の理論上からは、むしろつぎのように考慮する方が、より適切であろうとおもわれる。

§ 1・2・1 における材積式は、樹幹の横断面を正円と仮定して導かれたものであるが、実際におこなわれる q 通りの測定は断面積そのものの推定のためというより、むしろ、その断面積とひとしい面積をもった正円のもつ直径を推定するためと理解される。すなわち、 q 通りの測定は、直接 y に関するものではなく、 d に関連したものと考えられる。そして、 y はあくまでも正円と考えられた横断面の直径の 2 乗値として定義される。

このように考えれば、(i) 式は、むしろ、つぎのようにあたえるべきであろう。すなわち、 $q\bar{d}_1 = \sum_{j=1}^q d_{1,j}$ 、 $q\bar{d}_2 = \sum_{j=1}^q d_{2,j}$ 、……として

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{h}{D} \left\{ C_{-2}(\bar{d}_1)^2 + C_{-1}(\bar{d}_2)^2 + C_0(\bar{d}_3)^2 + C_1(\bar{d}_4)^2 + C_2(\bar{d}_5)^2 \right\} \\
 &= \frac{h}{D} \left\{ C_{-2}y_1^2 + C_{-1}y_2^2 + C_0y_3^2 + C_1y_4^2 + C_2y_5^2 \right\}
 \end{aligned}$$

本文においては、 y のとり方については、とくにふれなかったが、 q が 2 以上に大きい場合には、 y は、個々の d の平均を \bar{d} として、その 2 乗値として考えることにすればよい。もしも q 通りの測定を直接 y に結びつけるならば、たとえば、 $q=2$ とした場合には、 $(\bar{d})^2 = y$ とおく代りに、 $d_{1,1} \cdot d_{1,2} = y$ とおく方法も考えられる。

なお、このような考慮は、移動平均法におけるばかりでなく、直交多項式の数表を利用する方法においても、平均値法における場合も同様である。

第 II 部 実 験 結 果

第 II 部においては、第 I 部において提案した数多くの求積式についての実験的な考察を記載する。

すなわち、第 5 章においては、それらの求積式を実際にもちいた場合の測定結果が、第 6 章においては、生起する誤差について実験上種々の角度から考察した結果が、それぞれしめされる。

また、比較のために、慣用の Huber 式および Smalian 式区分求積法、右田式区分求積法その他 Breyman, Simony 等既出の求積式による実測結果も記載した。

なお、説明の便宜上、第 I 部にしめた各種の求積式について、以下、下記のような略記号をもちいることにする。

$$[a = \alpha, b = \beta]$$

移動平均法にもとづく求積式において、最初の測点 x を、対象の基部より αH の距離にとり、以下、 βH 間隔に測点をとった場合。

$$[X = \alpha \text{ m}, h = \beta \text{ m}]$$

移動平均法にもとづく求積式において、最初の測点 x を、対象の基部より αm の距離にとり、以下、 βm 間隔に測点をとった場合。

$$[\text{不等}, 0 \text{ m 基点}, b = \beta]$$

移動平均法にもとづく求積式において、はじめの測点 5 個を、対象の基部より順次 βH 間隔にとり、他の測点は、 $2\beta H$ 間隔にとった場合。

$$[\text{不等}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5]$$

移動平均法にもとづく求積式において、5 個の測点を対象の基部より $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ の距離にとった場合。

$$[\gamma = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots, k = n, h = \beta]^*$$

直交多項式の数表を利用する方法にもとづく求積式において、幹曲線の方程式を $\gamma = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots$ とし、 n 個の測点を βH 間隔にとった場合。

第 5 章 実 測 結 果

5.1 供 試 木

供試木は、水戸営林署太田経営区内におけるスギ58年生人工林、ヒノキ58年生人工林よりえらばれた伐倒木それぞれ10本、6本計16本である。それら供試木の選定については、その大きさ、樹幹の形状等についてできるだけ変化をたせるように留意した。

本実験においては、スギ、ヒノキを対象樹種としてとりあげたが、これは樹種間の差を見出そうとしたためではなく、実験の対象として、樹幹の通直な針葉樹の幹形を想定し、その形状に巾をもたせようとしたためである。

たとえば、根張りについて考えても、スギとヒノキでは、根のはり方、それらの材質その他の変動原因に影響されて、あるいは、本質的な差異があるかもしれない。しかしながら、反面、林分のしたて方によってもそれぞれの樹種についてなおかなりの変動がしめされるのが一般である。このようなことから、実験条件として、幹形をとりあげる場合には、林分の構成状態についてなんらかの指標をあたえ、そのもとで供試木を選定することがのぞまれるが、そのような条件をとらない場合においては、むしろ、幹形についていろいろな場合を想定し、そのもとで実験をおこなった方が、推論上このまじいと考えられる。

*) $k = 5, 10$ の場合には、最初の測点は対象の一端より $\frac{1}{2}\beta H$ の距離にとられるものとする。

また、本実験においては、供試木の本数をあらかじめ15本程度に限定したが、これはある求積式自体の誤差の真値を確定することが実験上の目的ではなく、提示した各種の求積式を、実用上の見地から比較検討することを主目的としたためである。

実験の性質から、まず、真値と看做しうるような基準値をもとめることが必要である。本実験においては、対象木材積として

1) 根元より 0.3 m はなれた部位を対象樹幹の基部として、他端を梢端とした場合。(以下〔0.3m以上〕と略記する。)

2) 根元以上の全樹幹材積を対象樹幹材積とした場合。(以下〔0 m以上〕と略記する。)

の2通りの場合を想定したが、基準値をもとめるための算定式として、1) の場合に対しては、右田式求積式第1法、測点間隔 $l = 0.2\text{m}$ をもちいた。2) に対しては、根元附近 ($x = 0\text{m} \sim 0.3\text{m}$) の部分材積を Smalian 式によって別途計算し、その値と 1) における値との和をもって基準値とした。

すなわち、算定式はつぎのとおりである。

1) $x = 0.3\text{m}, 0.4\text{m}, 0.6\text{m}, \dots$ における直径および断面積を、それぞれ、 $d_{0.3}, d_{0.4}, d_{0.6}, \dots, g_{0.3}, g_{0.4}, g_{0.6}, \dots$ とすれば、 $x = 0.3\text{m} \sim H\text{m}$ の幹材積は、Huber 式区分求積法によって、

$$\begin{aligned} V_H &= \frac{\pi}{4} \cdot 0.2 (d_{0.4}^2 + d_{0.6}^2 + \dots + d_n^2) \\ &= 0.15708 (d_{0.4}^2 + d_{0.6}^2 + \dots + d_n^2) \end{aligned}$$

としてあたえられるから、* 右田式第1法によれば

$$\begin{aligned} V(1) &= V_H + \frac{g_{0.3} - g_{0.4}}{10} \cdot l \\ &= V_H + \frac{1}{10} \cdot \frac{\pi}{4} (d_{0.3}^2 - d_{0.4}^2) \cdot 0.2 \\ &= 0.15708 (d_{0.4}^2 + d_{0.6}^2 + \dots + d_n^2) + 0.015708 (d_{0.3}^2 - d_{0.4}^2) \end{aligned} \quad (1)$$

2) $x = 0\text{m} \sim 0.3\text{m}$ の部分材積 V' を

Smalian 式によってもとめれば

$$\begin{aligned} V(2) &= V(1) + V' \\ &= V(1) + \frac{1}{2} (g_0 + g_{0.3}) \cdot 0.3 = V(1) + 0.11781 (d_0^2 + d_{0.3}^2) \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 d および g の単位を、それぞれ m 、 m^2 とすれば、 $V(1)$ 、 $V(2)$ は m^3 単位であたえられる。

各供試木における所定部位の直径測定は、一方向の輪尺測定によった。これは、基準値算定の

*) $l = 0.2\text{m}$ であるから、梢端材積は無視しうるであろう。

目的が、該供試木自体の材積を正確にもとめることではなくて、実験上の対象樹幹として、その大きさおよび形状を決定することにあつたからである。このため、ある場合には、下部直径より上部直径の方がより大きいというような結果も生じたが、そのような場合には、測定後前後の値をもちいて補間し、形状の凹凸に対して修正を加えた。各供試木について前記(1)、(2)式によって算定した材積(基準値)をしめすとつぎのとおりである。附記した値は、それぞれの胸高直径、樹高、胸高形数である。

表 5・1 供 試 木 一 覧 表

樹 種	番 号	基 準 値		胸 高 直 径	樹 高	胸 高 形 数	
		[0.3m以上]	[0m以上]				
ス	ギ	1	0.2772 ^{m³}	0.2919 ^{m³}	21.5 ^{cm}	15.15 ^m	0.5307
	//	2	0.5962	0.6282	32.0	19.55	0.3995
	//	3	0.3301	0.3472	23.5	15.70	0.5098
	//	4	0.0887	0.0951	13.4	11.80	0.5715
	//	5	1.1655	1.2293	41.8	21.20	0.4226
	//	6	0.9233	0.9729	35.0	22.40	0.4514
	//	7	0.4024	0.4219	24.4	17.80	0.5069
	//	8	0.0441	0.0491	10.8	10.10	0.5308
	//	9	0.3922	0.4109	23.9	17.95	0.5102
	//	10	0.3805	0.4027	25.8	16.30	0.4726
ヒ	ノ	11	0.1545	0.1668	18.4	12.44	0.5042
	//	12	0.2001	0.2116	18.9	14.80	0.5096
	//	13	0.5360	0.5679	31.5	16.20	0.4498
	//	14	0.1237	0.1321	15.6	12.90	0.5357
	//	15	0.6035	0.6349	31.9	18.30	0.4341
	//	16	0.2075	0.2219	19.8	14.20	0.5075

5・2 各種求積式による実測結果

第I部においてしめされた各種の求積式について、それらを実際にもちいた場合どの程度の誤差が生起するか、まずしらべてみよう。

全樹幹材積を推定する場合においても、根元附近の材積は別途に計算するのが求積上の通例である。したがって、本文においては、前記したとおり、求積の対象として2通りの場合を想定したが、第1の場合、すなわち、対象として比較的容易な形状をとった場合の推定値 $E(m^3)$ および誤差率 $e(\%)$ を § 5・2・1 に、また、根元附近にたいしてとくに考慮をあらわすに、全樹幹材積を求積の対象とした場合の結果を § 5・2・2 にしめすことにする。

なお、誤差率 e は (基準値-推定値)/基準値 の値を%としてあたえたものであり、また、適用した求積式は、見出しに括弧を附してしめしてある。

5・2・1 対象木材積が根元附近をふくまない場合

番 号	$\left(\begin{matrix} \alpha=0 \\ b=0.05 \end{matrix}\right) [1 \cdot 1]$		$\left(\begin{matrix} \alpha=0.01 \\ b=0.05 \end{matrix}\right) [1 \cdot 2]$		$\left(\begin{matrix} \alpha=0.02 \\ b=0.05 \end{matrix}\right) [1 \cdot 3]$		$\left(\begin{matrix} \alpha=0.03 \\ b=0.05 \end{matrix}\right) [1 \cdot 4]$	
	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>
1	0.2773	0.04	0.2772	0.00	0.2764	-0.29	0.2739	-1.19
2	0.5964	0.03	0.5964	0.03	0.5952	-0.17	0.5864	-1.64
3	0.3299	-0.06	0.3301	0.00	0.3302	0.03	0.3254	-1.42
4	0.0886	-0.11	0.0889	0.23	0.0886	-0.11	0.0873	-1.58
5	1.1690	0.30	1.1663	0.07	1.1624	-0.27	1.1441	-1.84
6	0.9247	0.15	0.9243	0.11	0.9221	-0.13	0.9052	-1.96
7	0.4023	-0.02	0.4016	-0.20	0.4016	-0.20	0.3973	-1.27
8	0.0441	0.00	0.0440	-0.23	0.0439	-0.45	0.0434	-1.59
9	0.3928	0.15	0.3928	0.15	0.3918	-0.10	0.3855	-1.71
10	0.3809	0.11	0.3812	0.18	0.3808	0.08	0.3732	-1.92
11	0.1542	-0.19	0.1545	0.00	0.1549	0.26	0.1528	-1.10
12	0.2000	-0.05	0.2000	-0.05	0.2001	0.00	0.1980	-1.05
13	0.5354	-0.11	0.5350	-0.19	0.5369	0.17	0.5288	-1.34
14	0.1242	0.40	0.1238	0.08	0.1237	0.00	0.1214	-1.86
15	0.6025	-0.17	0.6035	0.00	0.6030	-0.08	0.5950	-1.41
16	0.2075	0.00	0.2078	0.14	0.2073	-0.10	0.2041	-1.64

番 号	$\left(\begin{matrix} \alpha=0 \\ b=0.10 \end{matrix}\right) [1 \cdot 5]$		$\left(\begin{matrix} \alpha=0.02 \\ b=0.10 \end{matrix}\right) [1 \cdot 6]$		$\left(\begin{matrix} \alpha=0.04 \\ b=0.10 \end{matrix}\right) [1 \cdot 7]$		$\left(\begin{matrix} \alpha=0.06 \\ b=0.10 \end{matrix}\right) [1 \cdot 8]$	
	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>
1	0.2769	-0.11	0.2755	-0.61	0.2761	-0.40	0.2705	-2.38
2	0.5930	-0.54	0.5927	-0.59	0.5960	-0.03	0.5865	-1.63
3	0.3324	0.70	0.3298	-0.09	0.3288	-0.39	0.3216	-2.57
4	0.0887	0.00	0.0883	-0.45	0.0879	-0.90	0.0870	-1.92
5	1.1704	0.42	1.1621	-0.29	1.1641	-0.12	1.1334	-2.75
6	0.9338	1.14	0.9233	0.00	0.9163	-0.76	0.8920	-3.39
7	0.4035	0.27	0.4030	0.15	0.3997	-0.67	0.3908	-2.88
8	0.0442	0.23	0.0440	-0.23	0.0442	0.23	0.0427	-3.17
9	0.3941	0.48	0.3917	-0.13	0.3896	-0.66	0.3822	-2.55
10	0.3832	0.71	0.3807	0.05	0.3794	-0.29	0.3714	-2.39
11	0.1546	0.06	0.1549	0.26	0.1525	-1.29	0.1504	-2.65
12	0.1971	-1.50	0.1988	-0.65	0.2005	0.20	0.1971	-1.50
13	0.5369	0.17	0.5398	0.71	0.5350	-0.19	0.5200	-2.99
14	0.1247	0.81	0.1232	-0.40	0.1234	-0.24	0.1208	-2.34
15	0.6067	0.53	0.6079	0.73	0.6049	0.23	0.5848	-3.10
16	0.2085	0.48	0.2078	0.14	0.2065	-0.48	0.2012	-3.04

番 号	$\left(\begin{matrix} \alpha=0 \\ b=0.15 \end{matrix}\right) [1 \cdot 9]$		$\left(\begin{matrix} \alpha=0.02 \\ b=0.15 \end{matrix}\right) [1 \cdot 10]$		$\left(\begin{matrix} \alpha=0.04 \\ b=0.15 \end{matrix}\right) [1 \cdot 11]$		$\left(\begin{matrix} \alpha=0.06 \\ b=0.15 \end{matrix}\right) [1 \cdot 12]$	
	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>
1	0.2794	0.79	0.2787	0.54	0.2780	0.29	0.2777	0.18
2	0.6000	0.64	0.5966	0.07	0.5948	-0.23	0.5954	-0.13
3	0.3319	0.55	0.3313	0.33	0.3289	-0.35	0.3287	-0.42
4	0.0897	1.13	0.0883	-0.45	0.0880	-0.79	0.0888	0.11
5	1.2014	3.08	1.1785	1.12	1.1727	0.62	1.1606	-0.42
6	0.9532	3.24	0.9295	0.67	0.9210	-0.25	0.9134	-1.07
7	0.4072	1.19	0.4012	-0.30	0.4022	-0.05	0.3982	-1.04
8	0.0448	1.59	0.0443	0.45	0.0439	-0.45	0.0436	-1.13
9	0.3996	1.89	0.3947	0.64	0.3909	-0.33	0.3909	-0.33
10	0.3854	1.29	0.3830	0.66	0.3812	0.18	0.3786	-0.50
11	0.1535	-0.58	0.1561	1.04	0.1536	-0.58	0.1543	-0.13
12	0.1964	-1.85	0.1986	-0.75	0.2011	0.50	0.2019	0.90
13	0.5400	0.75	0.5388	0.52	0.5375	0.28	0.5372	0.22
14	0.1246	0.73	0.1241	0.32	0.1234	-0.24	0.1226	-0.89
15	0.6060	0.41	0.6016	-0.31	0.6035	0.00	0.6050	0.25
16	0.2107	1.54	0.2089	0.67	0.2079	0.19	0.2071	-0.19

番 号	$\left(\begin{array}{l} a=0.08 \\ b=0.15 \end{array}\right) [1 \cdot 13]$		$\left(\begin{array}{l} a=0 \\ b=0.20 \end{array}\right) [1 \cdot 14]$		$\left(\begin{array}{l} a=0.02 \\ b=0.20 \end{array}\right) [1 \cdot 15]$		$\left(\begin{array}{l} a=0.04 \\ b=0.20 \end{array}\right) [1 \cdot 16]$	
	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>
1	0.2754	-0.65	0.2808	1.30	0.2769	-0.11	0.2777	0.18
2	0.5898	-1.07	0.6095	2.23	0.6074	1.88	0.6081	2.00
3	0.3308	0.21	0.3345	1.33	0.3325	0.73	0.3323	0.67
4	0.0898	1.24	0.0915	3.16	0.0892	0.56	0.0882	-0.56
5	1.1325	-2.83	0.2022	3.15	1.1749	0.81	1.1747	0.79
6	0.9093	-1.51	0.9742	5.51	0.9427	2.10	0.9285	0.56
7	0.4009	-0.37	0.4066	1.04	0.4018	-0.15	0.4007	-0.42
8	0.0439	-0.45	0.0456	3.40	0.0449	1.81	0.0445	0.91
9	0.3857	-1.66	0.4022	2.55	0.3944	0.56	0.3911	-0.28
10	0.3760	-1.18	0.3911	2.79	0.3834	0.76	0.3808	0.08
11	0.1548	0.19	0.1571	1.68	0.1572	1.75	0.1532	-0.84
12	0.2011	0.50	0.2022	1.05	0.2024	1.15	0.2021	1.00
13	0.5372	0.22	0.5517	2.93	0.5520	2.99	0.5396	0.67
14	0.1224	-1.05	0.1261	1.94	0.1241	0.32	0.1255	1.46
15	0.6003	-0.53	0.6143	1.79	0.6141	1.76	0.6097	1.03
16	0.2041	-1.64	0.2150	3.61	0.2116	1.98	0.2080	0.24

番 号	$\left(\begin{array}{l} a=0.06 \\ b=0.20 \end{array}\right) [1 \cdot 17]$		$\left(\begin{array}{l} a=0.08 \\ b=0.20 \end{array}\right) [1 \cdot 18]$		$\left(\begin{array}{l} a=0.10 \\ b=0.20 \end{array}\right) [1 \cdot 19]$	
	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>
1	0.2786	0.51	0.2789	0.61	0.2739	-1.19
2	0.6046	1.41	0.5911	-0.86	0.5793	-2.83
3	0.3304	0.09	0.3312	0.33	0.3287	-0.42
4	0.0880	-0.79	0.0876	-1.24	0.0864	-2.59
5	1.1671	0.14	1.1466	-1.62	1.1470	-1.59
6	0.9142	-0.99	0.9058	-1.90	0.8996	-2.57
7	0.4047	0.57	0.4048	0.60	0.4029	0.12
8	0.0438	-0.68	0.0440	-0.23	0.0430	-2.49
9	0.3909	-0.33	0.3863	-1.50	0.3870	-1.33
10	0.3801	-0.11	0.3761	-1.16	0.3757	-1.26
11	0.1527	-1.17	0.1516	-1.88	0.1519	-1.68
12	0.1992	-0.45	0.1954	-2.35	0.1914	-4.35
13	0.5295	-1.21	0.5311	-0.91	0.5263	-1.81
14	0.1255	1.46	0.1242	0.40	0.1235	-0.16
15	0.5994	-0.68	0.5975	-0.99	0.5956	-1.31
16	0.2035	-1.93	0.2006	-3.33	0.2030	-2.17

番 号	$\left(\begin{array}{l} \text{不等, 0m基点} \\ b=0.05 \end{array}\right) [1.75]$		$\left(\begin{array}{l} \text{不等, 0m基点} \\ b=0.10 \end{array}\right) [1.76]$		不等, 0, 0.1H, 0.3H, 0.6H, H [1.77]	
	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>
1	0.2763	-0.32	0.2763	-0.32	0.2858	3.10
2	0.5927	-0.59	0.5965	0.05	0.6173	3.54
3	0.3288	-0.39	0.3303	0.06	0.3423	3.70
4	0.0883	-0.45	0.0895	0.90	0.0944	6.43
5	1.1666	0.09	1.1687	0.27	1.2675	8.75
6	0.9182	-0.55	0.9332	1.40	1.0198	10.45
7	0.4016	-0.20	0.4018	-0.15	0.4287	6.54
8	0.0439	-0.45	0.0444	0.68	0.0464	5.22
9	0.3918	-0.10	0.3962	1.02	0.4211	7.37
10	0.3798	-0.18	0.3828	0.60	0.4007	5.31
11	0.1541	-0.26	0.1547	0.13	0.1598	3.43
12	0.1988	-0.65	0.1996	-0.25	0.2056	2.75
13	0.5318	-0.78	0.5335	-0.47	0.5626	4.96
14	0.1237	0.00	0.1238	0.08	0.1308	5.74
15	0.6005	-0.50	0.6075	0.66	0.6277	4.01
16	0.2063	-0.58	0.2087	0.58	0.2231	7.52

番 号	不等, 0, 0.1H, 0.2H, 0.3H, H [1.78]		不等, 0.1H, 0.2H, 0.5H, 0.8H, 0.9H [1.79]		不等, 0, 0.1H, 0.5H, 0.9H, H [1.80]	
	E	e	E	e	E	e
1	0.4186	51.01	0.2726	-1.66	0.2838	2.38
2	0.9154	53.54	0.5779	-3.07	0.5948	-0.23
3	0.4297	30.17	0.3281	-0.61	0.3480	5.42
4	0.1257	41.71	0.0863	-2.71	0.0903	1.80
5	2.4029	106.17	1.1292	-3.11	1.2600	8.11
6	2.0393	120.87	0.8811	-4.57	0.9564	3.58
7	0.5280	31.21	0.3945	-1.96	0.4149	3.11
8	0.0716	62.36	0.0428	-2.95	0.0449	1.81
9	0.5694	45.18	0.3839	-2.12	0.3998	1.94
10	0.5155	35.48	0.3748	-1.50	0.3932	3.34
11	0.2226	44.08	0.1508	-2.39	0.1558	0.84
12	0.3130	56.42	0.1888	-5.65	0.1967	-1.70
13	0.6972	30.07	0.5357	-0.06	0.5601	4.50
14	0.1875	51.58	0.1217	-1.62	0.1284	3.80
15	0.7918	31.20	0.5940	-1.57	0.6165	2.15
16	0.3036	46.31	0.2027	-2.31	0.2149	3.57

番 号	$(r^2=a+bx+cx^2+dx^3)$ $(k=11, h=0.1H)$ [2.1]		$(r^2=a+bx+cx^2+dx^3)$ $(k=5, h=0.2H)$ [2.2]		$(r^2=a+bx+cx^2+dx^3)$ $(k=6, h=0.2H)$ [2.3]	
	E	e	E	e	E	e
1	0.2823	1.84	0.2734	-1.37	0.2853	2.92
2	0.6048	1.44	0.5792	-2.85	0.6182	3.69
3	0.3359	1.76	0.3270	-0.94	0.3395	2.85
4	0.0905	2.03	0.0857	-3.38	0.0932	5.07
5	1.2167	4.39	1.1381	-2.35	1.2445	6.78
6	0.9706	5.12	0.8969	-2.86	1.0034	8.68
7	0.4108	2.09	0.4005	-0.47	0.4139	2.86
8	0.0453	2.72	0.0428	-2.95	0.0466	5.67
9	0.4019	2.47	0.3851	-1.81	0.4102	4.59
10	0.3893	2.31	0.3739	-1.73	0.3977	4.52
11	0.1571	1.68	0.1514	-2.01	0.1597	3.37
12	0.2008	0.35	0.1916	-4.25	0.2062	3.05
13	0.5470	2.05	0.5251	-2.03	0.5571	3.94
14	0.1271	2.75	0.1230	-0.57	0.1282	3.64
15	0.6131	1.59	0.5936	-1.64	0.6235	3.31
16	0.2133	2.80	0.2008	-3.23	0.2198	5.39

番 号	$(r^2=a+bx+cx^2+dx^3)$ $(k=10, h=0.1H)$ [2.4]		$(r=ax+bx^2+cx^3)$ $(k=11, h=0.1H)$ [2.5]		$(r=ax+bx^2+cx^3)$ $(k=5, h=0.2H)$ [2.6]	
	E	e	E	e	E	e
1	0.2762	-0.36	0.2830	2.09	0.2738	-1.23
2	0.5961	-0.02	0.6060	1.64	0.5793	-2.83
3	0.3283	-0.55	0.3376	2.27	0.3269	-0.97
4	0.0883	-0.45	0.0913	2.93	0.0859	-3.16
5	1.1572	-0.71	1.2321	5.71	1.1352	-2.60
6	0.9104	-1.40	0.9769	5.81	0.8964	-2.91
7	0.3996	-0.70	0.4091	1.67	0.4025	0.02
8	0.0437	-0.91	0.0448	1.59	0.0433	-1.81
9	0.3902	-0.51	0.4043	3.09	0.3858	-1.63
10	0.3786	-0.50	0.3873	1.79	0.3758	-1.24
11	0.1533	-0.78	0.1631	5.57	0.1513	-2.07
12	0.2015	0.70	0.2040	1.95	0.1914	-4.35
13	0.5323	-0.69	0.5604	4.55	0.5225	-2.52
14	0.1232	-0.40	0.1290	4.28	0.1229	-0.65
15	0.5992	-0.71	0.6203	2.78	0.5916	-1.97
16	0.2061	-0.67	0.2171	4.63	0.2007	-3.28

番 号	$(r=ax+bx^2+cx^3$ $k=6, h=0.2H$ [2·7])		$(r=ax+bx^2+cx^3$ $k=10, h=0.1H$ [2·8])		(Simpson $k=11, h=0.1H$ [2·9])	
	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>
1	0.2842	2.53	0.2768	-0.14	0.2773	0.04
2	0.6162	3.35	0.5958	-0.07	0.5915	-0.79
3	0.3413	3.39	0.3298	-0.09	0.3327	0.79
4	0.0917	3.38	0.0895	0.90	0.0881	-0.68
5	1.2495	7.21	1.1577	-0.67	1.1747	0.79
6	1.0123	9.64	0.9095	-1.49	0.9344	1.20
7	0.4123	2.46	0.4004	-0.50	0.4039	0.37
8	0.0459	4.08	0.0441	0.00	0.0442	0.23
9	0.4082	4.08	0.3926	0.10	0.3937	0.38
10	0.3974	4.44	0.3789	-0.42	0.3821	0.42
11	0.1601	3.62	0.1550	0.32	0.1546	0.06
12	0.2073	3.60	0.2026	1.25	0.1954	-2.35
13	0.5673	5.84	0.5347	-0.24	0.5346	-0.26
14	0.1290	4.28	0.1242	0.40	0.1250	1.05
15	0.6231	3.25	0.5991	-0.73	0.6037	0.03
16	0.2190	5.54	0.2076	0.05	0.2075	0.00

番 号	(Newton-Cotes $n=11, h=0.1H$ [3·1])		(Weddle $n=7$ [3·2])		(Gauss $n=10$ [3·3])	
	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>
1	0.2849	2.78	0.2808	1.30	0.2771	-0.04
2	0.5776	-3.12	0.5962	0.00	0.5984	0.37
3	0.3371	2.12	0.3364	1.91	0.3304	0.09
4	0.0839	-5.41	0.0900	1.47	0.0888	0.11
5	1.2223	4.87	1.1978	2.77	1.1701	0.39
6	0.9323	0.97	0.9459	2.45	0.9237	0.04
7	0.4076	1.29	0.4026	0.05	0.4035	0.27
8	0.0429	-2.72	0.0447	1.36	0.0441	0.00
9	0.3914	-0.20	0.3973	1.30	0.3925	0.08
10	0.3719	-2.26	0.3850	1.18	0.3803	-0.05
11	0.1575	1.94	0.1545	0.00	0.1549	0.26
12	0.1830	-8.55	0.1959	-2.10	0.2009	0.40
13	0.5334	-0.49	0.5451	1.70	0.5335	-0.47
14	0.1295	4.69	0.1247	0.81	0.1233	-0.32
15	0.5936	-1.64	0.6027	-0.13	0.6008	-0.45
16	0.2021	-2.60	0.2098	1.11	0.2067	-0.39

番 号	(Simony (I) $k=3$)		(Simony (II) $k=3$)		(Huber $h=0.1H$)		(Huber $h=0.2H$)	
	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>
1	0.2543	-8.26	0.2723	-1.77	0.2763	-0.32	0.2740	-1.15
2	0.5949	-0.22	0.5737	-3.77	0.5949	-0.22	0.5754	-3.49
3	0.2897	-12.24	0.3288	-0.39	0.3283	-0.55	0.3272	-0.88
4	0.0800	-9.81	0.0861	-2.93	0.0883	-0.45	0.0860	-3.04
5	0.9614	-17.51	1.1302	-3.03	1.1561	-0.81	1.1381	-2.35
6	0.8422	-8.78	0.8730	-5.45	0.9098	-1.46	0.8968	-2.87
7	0.3723	-7.48	0.3941	-2.06	0.3996	-0.70	0.4007	-0.42
8	0.0405	-8.16	0.0427	-3.17	0.0436	-1.13	0.0427	-3.17
9	0.3647	-7.01	0.3853	-1.76	0.3902	-0.51	0.3856	-1.68
10	0.3485	-8.41	0.3786	-0.50	0.3782	-0.60	0.3729	-2.00
11	0.1420	-8.09	0.1493	-3.37	0.1532	-0.84	0.1512	-2.14
12	0.1848	-7.65	0.1881	-6.00	0.2014	0.65	0.1920	-4.05
13	0.4883	-8.90	0.5301	-1.10	0.5317	-0.80	0.5234	-2.35
14	0.1181	-4.53	0.1197	-3.23	0.1232	-0.40	0.1231	-0.49
15	0.5434	-9.96	0.5933	-1.69	0.5985	-0.83	0.5907	-2.12
16	0.1841	-11.28	0.2009	-3.18	0.2060	-0.72	0.2007	-3.28

番 号	(Smalian $h=0.1H$)		(Smalian $h=0.2H$)		(右田 (I) $h=0.1H$)		(右田 (I) $h=0.2H$)	
	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>
1	0.2798	0.94	0.2857	3.07	0.2775	0.11	0.2775	0.11
2	0.6017	0.92	0.6279	5.32	0.5985	0.39	0.5878	-1.41
3	0.3333	0.97	0.3395	2.85	0.3297	-0.12	0.3307	0.18
4	0.0895	0.90	0.0930	4.85	0.0887	0.00	0.0872	-1.69
5	1.1958	2.60	1.2536	7.56	1.1669	0.12	1.1712	0.49
6	0.9540	3.33	1.0112	9.52	0.9205	-0.30	0.9242	0.10
7	0.4076	1.29	0.4144	2.98	0.4015	-0.22	0.4059	0.87
8	0.0449	1.81	0.0471	6.80	0.0439	-0.45	0.0437	-0.91
9	0.3981	1.50	0.4108	4.74	0.3922	0.00	0.3911	-0.28
10	0.3865	1.58	0.4002	5.18	0.3804	-0.03	0.3792	-0.34
11	0.1560	0.97	0.1607	4.01	0.1539	-0.39	0.1534	-0.71
12	0.1988	-0.65	0.2056	2.75	0.2018	0.85	0.1944	-2.85
13	0.5434	1.38	0.5633	5.09	0.5351	-0.17	0.5328	-0.60
14	0.1258	1.70	0.1285	3.88	0.1238	0.08	0.1249	0.97
15	0.6104	1.14	0.6301	4.41	0.6018	-0.28	0.6002	-0.55
16	0.2109	1.64	0.2210	6.51	0.2074	-0.05	0.2048	-1.30

(Breyman
 $k=4$)

番 号	<i>E</i>	<i>e</i>	番 号	<i>E</i>	<i>e</i>	番 号	<i>E</i>	<i>e</i>
1	0.2937	5.95	7	0.4331	7.63	13	0.5567	3.86
2	0.6259	4.98	8	0.0471	6.80	14	0.1317	6.47
3	0.3414	3.42	9	0.4184	6.68	15	0.6335	4.97
4	0.0945	6.54	10	0.3984	4.70	16	0.2195	5.78
5	1.2785	9.70	11	0.1641	6.21			
6	1.0542	14.18	12	0.2121	6.00			

5.2.2 全樹幹材積を対象とした場合

番 号	$(a=0, b=0.10)$ [1.5]		$(a=0.02, b=0.10)$ [1.6]		$(a=0.04, b=0.10)$ [1.7]		$(a=0.06, b=0.10)$ [1.8]	
	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>
1	0.2935	0.55	0.2916	-0.10	0.2896	-0.79	0.2827	-3.15
2	0.6272	-0.16	0.6250	-0.51	0.6232	-0.80	0.6176	-1.69
3	0.3513	1.18	0.3486	0.40	0.3445	-0.78	0.3356	-3.34
4	0.0964	1.37	0.0946	-0.53	0.0939	-1.26	0.0922	-3.05
5	1.2501	1.69	1.2284	-0.07	1.2145	-1.20	1.1867	-3.47
6	0.9978	2.56	0.9718	-0.11	0.9572	-1.61	0.9280	-4.62
7	0.4285	1.56	0.4212	-0.16	0.4205	-0.33	0.4055	-3.65
8	0.0494	0.61	0.0494	0.61	0.0488	-0.61	0.0473	-3.67
9	0.4142	0.80	0.4109	0.00	0.4064	-1.10	0.3971	-3.36
10	0.4061	0.84	0.4032	0.12	0.3998	-0.72	0.3900	-3.15
11	0.1690	1.32	0.1659	-0.54	0.1658	-0.60	0.1604	-3.84
12	0.2123	0.33	0.2084	-1.61	0.2098	-0.85	0.2076	-1.89
13	0.5686	0.12	0.5710	0.55	0.5676	-0.05	0.5503	-3.10
14	0.1321	0.00	0.1325	0.30	0.1311	-0.76	0.1277	-3.33
15	0.6359	0.16	0.6381	0.50	0.6379	0.47	0.6152	-3.10
16	0.2223	0.18	0.2227	0.36	0.2212	-0.32	0.2143	-3.42

番 号	$\left(\begin{matrix} a=0 \\ b=0.20 \end{matrix} \quad [1.14]\right)$		$\left(\begin{matrix} a=0.02 \\ b=0.20 \end{matrix} \quad [1.15]\right)$		$\left(\begin{matrix} a=0.04 \\ b=0.20 \end{matrix} \quad [1.16]\right)$		$\left(\begin{matrix} a=0.06 \\ b=0.20 \end{matrix} \quad [1.17]\right)$	
	E	e	E	e	E	e	E	e
1	0.2999	2.74	0.2954	1.20	0.2915	-0.14	0.2913	-0.21
2	0.6472	3.02	0.6443	2.56	0.6354	1.15	0.6423	2.24
3	0.3575	2.97	0.3519	1.35	0.3480	0.23	0.3452	-0.58
4	0.1003	5.47	0.0967	1.68	0.0948	-0.32	0.097	-1.47
5	1.3139	6.88	1.2502	1.70	1.2330	0.30	1.2209	-0.68
6	1.0791	10.92	1.0050	3.30	0.9721	-0.08	0.9519	-2.16
7	0.4399	4.27	0.4224	0.12	0.4203	-0.38	0.4185	-0.81
8	0.0520	5.91	0.0510	3.87	0.0498	1.43	0.0488	-0.61
9	0.4304	4.75	0.4178	1.68	0.4088	-0.51	0.4066	-1.05
10	0.4203	4.37	0.4108	2.01	0.4028	0.02	0.3997	-0.74
11	0.1783	6.89	0.1689	1.26	0.1677	0.54	0.1639	-1.74
12	0.2218	4.82	0.2135	0.90	0.2131	0.71	0.2109	-0.33
13	0.5866	3.29	0.5855	3.10	0.5771	1.62	0.5668	-0.19
14	0.1352	2.35	0.1346	1.89	0.1326	0.38	0.1323	0.15
15	0.6489	2.21	0.6481	2.08	0.6427	1.23	0.6286	-0.99
16	0.2330	5.00	0.2285	2.97	0.2250	1.40	0.2190	-1.31

番 号	$\left(\begin{matrix} a=0.08 \\ b=0.20 \end{matrix} \quad [1.18]\right)$		$\left(\begin{matrix} a=0.10 \\ b=0.20 \end{matrix} \quad [1.19]\right)$		$\left(\begin{matrix} \text{不等, 0m基点} \\ b=0.05 \end{matrix} \quad [1.75]\right)$		$\left(\begin{matrix} \text{不等, 0m基点} \\ b=0.10 \end{matrix} \quad [1.76]\right)$	
	E	e	E	e	E	e	E	e
1	0.2906	-0.45	0.2880	-1.34	0.2909	-0.34	0.2938	0.65
2	0.6294	0.19	0.6137	-2.31	0.6253	-0.46	0.6336	0.86
3	0.3434	-1.09	0.3458	-0.40	0.3469	-0.09	0.3500	0.81
4	0.0928	-2.42	0.0924	-2.84	0.0944	-0.74	0.0972	2.21
5	1.2015	-2.26	1.1967	-2.65	1.2255	-0.31	1.2485	1.56
6	0.9419	-3.19	0.9269	-4.73	0.9636	-0.96	1.0028	3.07
7	0.4207	-0.28	0.4202	-0.40	0.4217	-0.05	0.4266	1.11
8	0.0479	-2.44	0.0474	-3.46	0.0488	-0.61	0.0497	1.22
9	0.4027	-2.00	0.4001	-2.63	0.4083	-0.63	0.4166	1.39
10	0.3966	-1.51	0.3953	-1.84	0.4010	-0.42	0.4065	0.94
11	0.1620	-2.88	0.1606	-3.72	0.1660	-0.48	0.1704	2.16
12	0.2084	-1.51	0.2027	-4.21	0.2107	-0.43	0.2159	2.03
13	0.5591	-1.55	0.5560	-2.10	0.5629	-0.88	0.5667	-0.21
14	0.1325	0.30	0.1297	-1.82	0.1306	-1.14	0.1321	0.00
15	0.6222	-2.00	0.6268	-1.28	0.6324	-0.39	0.6403	0.85
16	0.2151	-3.06	0.2130	-4.01	0.2199	-0.90	0.2243	1.08

番 号	$\left(\begin{matrix} \text{Simpson} \\ k=11, h=0.1H \end{matrix} \quad [2.9]\right)$		$\left(\begin{matrix} \text{Newton-Cotes} \\ n=11 \end{matrix} \quad [3.1]\right)$		$\left(\begin{matrix} \text{Gauss} \\ n=10 \end{matrix} \quad [3.3]\right)$	
	E	e	E	e	E	e
1	0.2938	0.65	0.3001	2.81	0.2895	-0.82
2	0.6267	-0.24	0.6191	-1.45	0.6302	0.32
3	0.3513	1.18	0.3556	2.42	0.3460	-0.35
4	0.0957	0.63	0.0910	-4.31	0.0645	-0.63
5	1.2547	2.07	1.3117	6.70	1.2323	0.24
6	0.9675	-0.56	0.9826	1.00	0.9741	0.12
7	0.4291	1.71	0.4343	2.94	0.4194	-0.59
8	0.0493	0.41	0.0483	-1.63	0.0487	-0.81
9	0.4132	0.56	0.4061	-1.17	0.4091	-0.44
10	0.4049	0.55	0.3958	-1.71	0.4031	0.10
11	0.1682	0.84	0.1621	-2.82	0.1659	-0.54
12	0.2117	0.05	0.1993	-5.81	0.2132	0.76
13	0.5664	-0.26	0.5672	-0.12	0.5655	-0.42
14	0.1326	0.38	0.1378	4.31	0.1319	-0.15
15	0.6355	0.09	0.6289	-0.95	0.6331	-0.28
16	0.2210	-0.41	0.2138	-3.65	0.2227	0.36

番 号	(Huber $\hat{h}=0.1H$)		(Huber $\hat{h}=0.2H$)		(Smalian $\hat{h}=0.1H$)		(Smalian $\hat{h}=0.2H$)	
	E	e	E	e	E	e	E	e
1	0.2881	-1.30	0.2872	-1.61	0.2975	1.92	0.3078	5.45
2	0.6233	-0.78	0.6086	-3.12	0.6411	2.05	0.6735	7.23
3	0.3445	-0.78	0.3440	-0.92	0.3550	2.25	0.3360	5.41
4	0.0932	-2.00	0.0918	-3.47	0.0977	2.73	0.1036	8.94
5	1.2088	-1.67	1.1876	-3.39	1.2887	4.83	1.3898	13.06
6	0.9485	-2.51	0.9235	-5.08	1.0328	6.16	1.1422	17.40
7	0.4170	-1.16	0.4180	-0.92	0.4358	3.29	0.4533	7.51
8	0.0483	-1.63	0.0469	-4.48	0.0508	3.46	0.0547	11.41
9	0.4060	-1.19	0.3984	-3.04	0.4209	2.43	0.4433	7.89
10	0.3968	-1.47	0.3922	-2.61	0.4134	2.66	0.4346	7.92
11	0.1644	-1.44	0.1597	-4.26	0.1725	3.42	0.1854	11.15
12	0.2108	-0.38	0.2023	-4.40	0.2161	2.13	0.2299	8.65
13	0.5644	-0.62	0.5508	-3.01	0.5773	1.66	0.6038	6.32
14	0.1299	-1.67	0.1293	-2.12	0.1345	1.82	0.1397	5.75
15	0.6330	-0.30	0.6213	-2.14	0.6463	1.80	0.6714	5.75
16	0.2191	-1.26	0.2112	-4.82	0.2270	2.30	0.2429	9.46

番 号	(右田 (I) $\hat{h}=0.1H$)		(右田 (I) $\hat{h}=0.2H$)		番 号	(右田 (I) $\hat{h}=0.1H$)		(右田 (I) $\hat{h}=0.2H$)	
	E	e	E	e		E	e	E	e
1	0.2900	-0.65	0.2922	0.10	9	0.4097	-0.29	0.4077	-0.78
2	0.6288	0.10	0.6249	-0.53	10	0.4006	-0.52	0.4022	-0.12
3	0.3468	-0.12	0.3498	0.75	11	0.1663	-0.30	0.1647	-1.26
4	0.0941	-1.05	0.0940	-1.16	12	0.2126	0.47	0.2075	-1.94
5	1.2285	-0.07	1.2400	0.87	13	0.5687	0.14	0.5630	-0.86
6	0.9682	-0.48	0.9713	-0.16	14	0.1311	-0.76	0.1322	0.08
7	0.4211	-0.19	0.4278	1.40	15	0.6377	0.44	0.6341	-0.13
8	0.0489	-0.41	0.0487	-0.81	16	0.2214	-0.23	0.2175	-1.98

第 6 章 各種求積式のもつ誤差

6・1 移動平均法における誤差

移動平均法にもとづく求積式として、最初の測点を対象の基部より aH の距離にとり、以下 bH 間隔に測点をとった場合の求積式が § 1・2・1 に、そして、それら各式による実測結果が § 5・2 にしめされたが、その結果によると、 b の値を 0.05, 0.10, 0.15, 0.20 とおいたそれぞれの場合において、生起する誤差 e は、 a の大きさによって少しずつ変化するようにみうけられる。すなわち、 a の値が小さい場合には e はプラスの値をとり、一方、 a の値が大きくなるとマイナスの値をとるように認められるが、その大きさあるいは傾向はどのようなものか、そしてそれぞれの b の値に対して、このましい a の値はどの程度か、本節において考察を加えることにする。

6・1・1 [0.3m以上], $b=0.1$ の場合

b の値を 0.1 とし、求積の対象を [0.3m以上] とした場合の誤差率は § 5・2・1 における実測結果よりつぎのように表示される。

右表下欄にしめされる T および \bar{e} は、それぞれ a の各水準における合計および標本平均であり、 $\hat{\sigma}^2$ は、それぞれの分散の推定値をしめしている。また、 $\hat{\sigma}^2$ の一番小さい値を 1 として、その値との比をしめしたものが F_0 である。

分散比 F_0 をみると、 $\hat{\sigma}^2$ の一番小さい $a = 0.02$ に対して他のいずれの a の分散も $F_{15}^{15}(0.05) = 2.40$ より小さい。このことは統計的に、それぞれの分散間にとくに差が認められないことをしめすから、つぎに、平均値について検定してみよう。

各水準における \bar{e} の値をみると、 $a = 0.06$ における \bar{e} は極端に過小の値をとり、このましい a の値は、 a

$= 0.06$ と 0.04 の範囲内にあることは明らかであるから、 $a = 0.06$ を除外して、 a の 3 水準について一様性の検定をおこなうとつぎのような分散分析表がもとめられる。すなわち、 a の効果は非常に有意であり、 a の大きさによって、生起する誤差率の母平均は明らかに異ると考えられる。また、その変動のうち、lin. の変動のみが有意であること

要因	SS	df	MS	F_0
a { lin.	2.8860	1	2.8860	11.71**
res.	0.0082	1	0.0082	—
R (a)	11.0914	45	0.2465	
a R	13.9856	47		

とから、誤差率 e と a の関係は、1 次式で十分近似されることがわかる。

§ 2.1 にしめされた直交多項式の係数表をもちいて、その関係式をもとめると、 a の各水準における実験値の合計は

$$T(a = 0.00) = 3.85$$

$$T(a = 0.04) = -5.76$$

$$T(a = 0.02) = -1.40$$

であるから

$$\hat{b}_0 = -3.31 / 48 = -0.069$$

表 6・1

	$a = 0.00$	$a = 0.02$	$a = 0.04$	$a = 0.06$
	-0.11	-0.61	-0.40	-2.38
	-0.54	-0.59	-0.03	-1.63
	0.70	-0.09	-0.39	-2.57
	0.00	-0.45	-0.90	-1.92
	0.42	-0.29	-0.12	-2.75
	1.14	00.0	-0.76	-3.39
	0.27	0.15	-0.67	-2.88
	0.23	-0.23	0.23	-3.17
	0.48	-0.13	-0.66	-2.55
	0.71	0.05	-0.29	-2.39
	0.06	0.26	-1.29	-2.65
	-1.50	-0.65	0.20	-1.50
	0.17	0.71	-0.19	-2.99
	0.81	-0.40	-0.24	-2.34
	0.53	3.73	0.23	-3.10
	0.48	0.14	-0.48	-3.04
T	3.85	-1.40	-5.76	-41.25
\bar{e}	0.24	-0.09	-0.36	-2.58
$\hat{\sigma}^2$	0.7969	0.1796	0.1829	0.2945
F_0	2.10	1	1.02	1.64

また, \hat{b}_1 は

$$\hat{b}_1 = \frac{1}{16 \times 2 \times 0.02} \{ (-1) \times 3.85 + (-5.76) \} = -15.02$$

としてあたえられるから, a に対する e の回帰式は

$$e = -0.069 - 15.02(a - 0.02)$$

としてもとめられる。

いま, a の値を 0.01 間隔にとると

$$e(a=0.00) = -0.069 - 15.02(-0.02) = 0.231$$

$$e(a=0.01) = -0.069 - 15.02(-0.01) = 0.081$$

$$e(a=0.02) = -0.069 - 15.02(0) = -0.069$$

$$e(a=0.03) = -0.069 - 15.02(0.01) = -0.219$$

$$e(a=0.04) = -0.069 - 15.02(0.02) = -0.369$$

であり, それらの各点を結ぶと, 図6・1における実線がもとめられる。

また, 上式において, $e = 0$ における a の値は, $a = 0.015$ としてあたえられる。

つぎに, 回帰式によって推定された e の各値に対して信頼限界をあたえてみよう。統計理論によれば

$$y = b_0 + b_1(x - \bar{x})$$

の分散 $\sigma^2(y)$ は

$$\sigma^2(y) = \sigma^2(b_0) + (x - \bar{x})^2 \sigma^2(b_1)$$

としてしめされ, ここにもちいられる b_0, b_1 の分散 $\sigma^2(b_0), \sigma^2(b_1)$ は, 実験誤差分散を σ_E^2 として

$$\sigma^2(\hat{b}_0) = \frac{\sigma_E^2}{\text{全実験数}} \qquad \sigma^2(\hat{b}_1) = \frac{\sigma_E^2}{rSh^2}$$

としてあたえられる。ここに, r は反復数である。

したがって, 表2・1を参照して, この場合の $\sigma^2(e)$ をもとめると

$$\sigma^2(\hat{b}_0) = \frac{\sigma_E^2}{48} \qquad \sigma^2(\hat{b}_1) = \frac{\sigma_E^2}{16 \times 2 \times 0.02^2} = \frac{\sigma_E^2}{0.0128}$$

$$\sigma^2(\hat{e}) = \frac{\sigma_E^2}{48} + (a - \bar{a})^2 \frac{\sigma_E^2}{0.0128} = \left\{ \frac{1}{48} + \frac{(a - 0.02)^2}{0.0128} \right\} \sigma_E^2$$

σ_E^2 にかかる有効反復数をあらためて

$$n_e = \frac{1}{\frac{1}{48} + \frac{(a-0.02)^2}{0.0128}}$$

とおくと、上式は

$$\sigma^2(\hat{e}) = \frac{\sigma_E^2}{n_e}$$

としてしめされる。

分散分析表によると、 $\sigma_E^2 = 0.2465$ であるから、 $\sigma_E \doteq 0.50$ と考えれば、信頼度を95%とした e の信頼限界は、つぎのようにあたえられる。

$$\begin{aligned} \hat{e} \pm t_\alpha \cdot \sqrt{\sigma^2(\hat{e})} \\ = \hat{e} \pm \frac{t_{0.05}(45)}{\sqrt{n_e}} \cdot \sqrt{\sigma_E^2} = \hat{e} \pm \frac{2.02}{\sqrt{n_e}} \\ = \hat{e} \pm \frac{1.01}{\sqrt{n_e}} \end{aligned}$$

たとえば、 $a=0.00$ とおくと

$$n_e = \frac{1}{\frac{1}{48} + \frac{0.0004}{0.0128}} = \frac{1536}{48532} = 19.20$$

したがって、 $\sqrt{n_e} = 4.4$ であり、また、 $a=0.00$ における \hat{e} は 0.231 としてあたえられてあるから、これらの値を上式に代入すれば、 $a=0.00$ に対する信頼限界は

$$0.231 \pm \frac{1.01}{4.4} = 0.231 \pm 0.230 (\%)$$

としてもとめられる。

同様に、 a の各値に対して信頼限界をもとめると次表のとおりであり、それらの値を図上にしめすと、図 6・1 において破線でしめされた信頼帯がもとめられる。

右図によってみられるとおり、対象木が [0.3 m以上] の場合、 a の値が 0.01 ~ 0.02 においては、推定値に偏りは認められないが、 $a=0.00$ においてはプラスの方向に、一方また、 $a=0.03$, 0.04 においてはマイナスの方向にそれぞれ偏りがあるものと考えられる。マイナスの偏りは、 a の値に比例して増大する傾向をしめしている。

前記したように、 $a=0.01$, 0.02 における分散は、他の a に比して大きいとは考えられないから、対象木を [0.03m以上] とした場合、 $b=0.1$ の

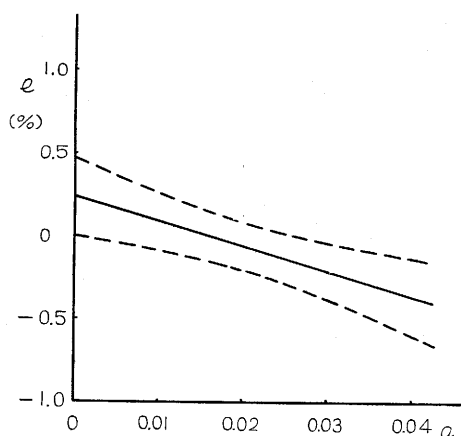


図 6.1

表 6・2

a	\hat{e}	n_e	$\frac{2.02}{\sqrt{n_e}} \cdot 0.5$	信 頼 限 界
0.00	0.231	19.20	0.230	0.231 \pm 0.230
0.01	0.081	34.91	0.171	0.081 \pm 0.171
0.02	-0.069	48.00	0.146	-0.069 \pm 0.146
0.03	-0.219	34.91	0.171	-0.219 \pm 0.171
0.04	-0.369	19.20	0.230	-0.369 \pm 0.230

求積式においては、 a の値は0.01~0.02程度をとる場合が最もこのまじいと考えられる。

6・1・2 [0.3m以上], $b=0.2$ の場合

つぎに、 b の値を0.2とした場合についてしらべてみよう。まず、§5・2・1における実測結果にもとずいて e の原表をつくるとつぎのとおりである。

表 6・3

	$a=0.00$	$a=0.02$	$a=0.04$	$a=0.06$	$a=0.08$	$a=0.10$
	1.68	1.75	-0.84	-1.17	-1.88	-1.68
	1.05	1.15	1.00	-0.45	-2.35	-4.35
	2.93	2.99	0.67	-1.21	-0.91	-1.81
	1.94	0.32	1.46	1.46	0.40	-0.16
	1.79	1.76	1.03	-0.68	-0.99	-1.31
	3.61	1.98	0.24	-1.93	-3.33	-2.17
	1.30	-0.11	0.18	0.51	0.61	-1.19
	2.23	1.88	2.00	1.41	-0.86	-2.83
	1.33	0.73	0.67	0.09	0.33	-0.42
	3.16	0.56	-0.56	-0.79	-1.24	-2.59
	3.15	0.81	0.79	0.14	-1.62	-1.59
	5.51	2.10	0.56	-0.99	-1.90	-2.57
	1.04	-0.15	-0.42	0.57	0.60	0.12
	3.40	1.81	0.91	-0.68	-0.23	-2.49
	2.55	0.56	-0.28	-0.33	-1.50	-1.33
	2.79	0.76	0.08	-0.11	-1.16	-1.26
T	39.46	18.90	7.49	-4.16	-16.03	-27.63
\bar{e}	2.47	1.18	0.47	-0.26	-1.00	-1.73
$\hat{\sigma}^2$	1.3880	0.7846	0.5813	0.8707	1.2703	1.2514
F_0	2.39	1.35	1	1.50	2.19	2.15

F_0 の各値はすべて危険率を0.05とした F の限界値よりも小さいから、 a の各値とも分散の上では有意差は認められない。

つぎに、 a の水準数を6として、平均値の検定をおこなうとつぎのような分散分析表がまとめられる。

$b = 0.1$ の場合と同様、 a の
効果は非常に有意であり、 e の
母平均は、 a の大きさによって
明らかに異なると考えられる。

e と a の関係は、1次式で十

分近似できるから、その関係式をもとめると

$$\begin{aligned} T(a=0.00) &= 39.46 & T(a=0.06) &= -4.16 \\ T(a=0.02) &= 18.90 & T(a=0.08) &= -16.03 \\ T(a=0.04) &= 7.49 & T(a=0.10) &= -27.63 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \hat{b}_0 &= 18.03 / 96 = 0.188 \\ \hat{b}_1 &= \frac{1}{16 \times 35 \times 0.02} \left\{ (-5) \times 39.46 + (-3) \times 18.90 + (-1) \times 7.49 + 1 \times (-4.16) \right. \\ &\quad \left. + 3 \times (-16.03) + 5 \times (-27.63) \right\} = -40.35 \end{aligned}$$

したがって

$$e = 0.188 - 40.35(a - 0.05)$$

いま、 a の値を0.01間隔にとると、それぞれの a に対応した e の値は

$$\begin{aligned} e(a=0.00) &= 2.206 & e(a=0.06) &= -0.216 \\ e(a=0.01) &= 1.802 & e(a=0.07) &= -0.619 \\ e(a=0.02) &= 1.399 & e(a=0.08) &= -1.023 \\ e(a=0.03) &= 0.995 & e(a=0.09) &= -1.426 \\ e(a=0.04) &= 0.592 & e(a=0.10) &= -1.830 \\ e(a=0.05) &= 0.188 \end{aligned}$$

としてもとめられ、また、 $e = 0$ における a の値は、 $40.35(a - 0.05) = 0.188$ より、 $a = 0.055$ としてあたえられる。

つぎに、上記 e の各値に対して信頼限界をあたえると

$$\sigma^2(\hat{b}_0) = \frac{\sigma_E^2}{96} \quad \sigma^2(\hat{b}_1) = \frac{\sigma_E^2}{16 \times \frac{35}{2} \times 0.02^2} = \frac{\sigma_E^2}{0.112}$$

したがって

$$\sigma^2(\hat{e}) = \frac{\sigma_E^2}{96} + (a - \bar{a})^2 \frac{\sigma_E^2}{0.112} = \left\{ \frac{1}{96} + \frac{(a - 0.05)^2}{0.112} \right\} \sigma_E^2 = \frac{\hat{\sigma}_E^2}{n_e}$$

分散分析表によると、 $\sigma_E^2 = 1.0244$ であるから $\hat{\sigma}_E = 1.00$ とすれば、信頼度を95%とした e の信頼限界は

$$\hat{e} \pm t_{\alpha} \sqrt{\sigma^2(e)} = \hat{e} \pm \frac{t_{0.05}(90)}{\sqrt{n_e}} \sqrt{\sigma_E^2} = \hat{e} \pm \frac{2.00}{\sqrt{n_e}} \cdot 1.000 = \hat{e} \pm \frac{2.00}{\sqrt{n_e}}$$

としてしめされるから、個々の a に対しては次表のような数値がもとめられる。

図6・2によってみられると

表 6・4

おり、対象木が [0.3m以上] の場合、移動平均法 $b=0.2$ の求積式においては、 a の値が、0.00~0.04においてはプラスの方向に、また、0.06以上に大きい場合にはマイナスの方向に、それぞれ偏りが生ずるものと考えられる。そしてその大きさは、プラスの偏りは a の値に反比例し、マイ

a	\hat{e}	n_e	$\frac{2.00}{\sqrt{n_e}}$	信頼限界
0.00	2.206	30.55	0.362	2.206 ± 0.362
0.01	1.802	40.48	0.314	1.802 ± 0.314
0.02	1.399	54.19	0.272	1.399 ± 0.272
0.03	0.995	71.49	0.236	0.995 ± 0.236
0.04	0.592	88.42	0.213	0.592 ± 0.213
0.05	0.188	96.00	0.204	0.188 ± 0.204
0.06	-0.216	88.42	0.213	-0.216 ± 0.213
0.07	-0.619	71.49	0.236	-0.619 ± 0.236
0.08	-1.023	54.19	0.272	-1.023 ± 0.272
0.09	-1.426	40.48	0.314	-1.426 ± 0.314
0.10	-1.830	30.35	0.362	-1.830 ± 0.362

ナスの偏りは a の値に比例して増大する傾向をしめしている。

分散については、有意差は認められず、図6・2によると、信頼帯は、 $a=0.05\sim 0.06$ において横軸に接するから、 $b=0.2$ の場合には、この範囲内の a の値をとる求積式が、最もこのましい推定値をあたえるものと考えられる。

6・1・3 [0 m以上], $b=0.1$ の場合

対象木材積を [0 m以上] とした場合についてつぎに考察する。まず、 b の値を 0.1 とすると、 e の原表はつぎのようにあたえられる。

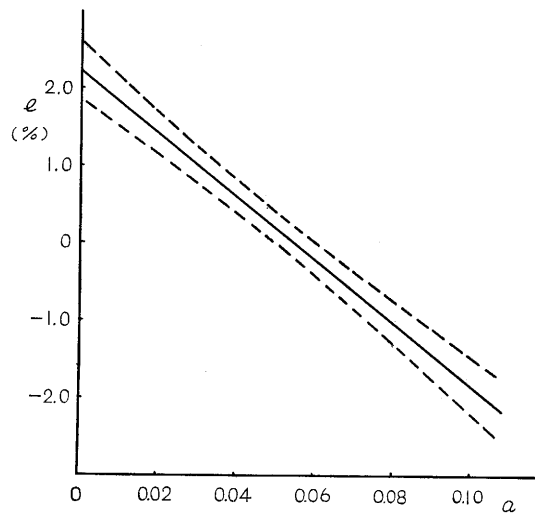


図 6.2

F_0 の各値はすべて危険率を0.05とした F の限界値よりも小さいから、 a の各値とも分散の上では有意差は認められない。

§ 6・1・1 の場合に準じて、 a の水準数を $a=0.00, 0.02, 0.04$ の3として平均値の検定をおこなうと、つぎのような分散分析表がもとめられる。

表 6・5

	$a=0.00$	$a=0.02$	$a=0.04$	$a=0.06$		$a=0.00$	$a=0.02$	$a=0.04$	$a=0.06$
	0.55	-0.10	-0.79	-3.15		0.80	0.00	-1.10	-3.36
	-0.16	-0.51	-0.80	-1.69		0.84	0.12	-0.72	-3.15
	1.18	0.40	-0.78	-3.34		1.32	-0.54	-0.60	-3.84
	1.37	-0.53	-1.26	-3.05		0.33	-1.61	-0.85	-1.89
	1.69	-0.07	-1.20	-3.47		0.12	0.55	-0.05	-3.10
	2.56	-0.11	-1.61	-4.62		0.00	0.30	-0.76	-3.33
	1.56	-0.16	-0.33	-3.65		0.16	0.50	0.47	-3.10
	0.61	0.00	-0.61	-3.67		0.18	0.36	-0.32	-3.42
$\frac{T}{e}$	13.11	-0.79	-11.31	-51.83	$\hat{\sigma}^2$	0.5560	0.3171	0.2462	0.4701
	0.82	-0.05	-0.71	-3.24	F	2.26	1.29	1	1.91

※1次の効果は非常に有意であり、 e の母平均は a の大きさによって明らかに異ると考えられる。

その関係式は、つぎのようにしめされる。

要因	SS	df	MS	F_0
a { lin.	18.6355	1	18.6355	49.95**
res.	0.1190	1	0.1190	—
$R(a)$	16.7897	45	0.3731	
aR	35.5442	47		

$$T(a=0.00) = 13.11$$

$$T(a=0.04) = -11.31$$

$$T(a=0.04) = -11.31$$

$$\hat{b}_0 = 1.01 / 48 = 0.021$$

$$\hat{b}_1 = \frac{1}{16 \times 2 \times 0.02} \{ (-1) \times 13.11 + (-11.31) \} = -38.16$$

したがって

$$e = 0.021 - 38.16(a - 0.02)$$

いま、 a の値を0.01間隔にとると、それぞれの a に対応した e の値は

$$e(a=0.00) = 0.784$$

$$e(a=0.03) = -0.361$$

$$e(a=0.01) = 0.403$$

$$e(a=0.04) = -0.742$$

$$e(a=0.02) = 0.021$$

としてもとめられ、また、上記の回帰式より $e=0$ における a の値は、 $a=0.021$ としてあたえられる。

つぎに、 e の各値に対して信頼限界をあたえると、 $\sigma^2(e)$ は[0.3m以上]、 $b=0.1$ の場合と同様にしめされ、また、分散分析表によると、 $\sigma_E^2=0.3731$ であるから、この場合の σ_E を $\sigma_E \approx 0.60$ としてあたえることにすれば、信頼度を95%として

$$\hat{e} \pm t_\alpha \cdot \sqrt{\sigma^2(\hat{e})} = \hat{e} \pm \frac{2.02}{\sqrt{n_e}} \cdot 0.6 = \hat{e} \pm \frac{1.21}{\sqrt{n_e}}$$

したがって、個々の a に対しては、次表に示めされる数値がもとめられる。

図6・3にみられるとおり、

表 6.6

対象木が [0 m以上] の場合、
 $b = 0.1$ の求積式において
 は、 a の値が、0.00, 0.01に
 おいてはプラスの方向に、ま
 た、0.03以上に大きい場合に

a	\hat{e}	n_e	$\frac{1.21}{\sqrt{n_e}}$	信 頼 限 界
0.00	0.784	19.20	0.275	0.784 ± 0.275
0.01	0.403	34.91	0.205	0.403 ± 0.205
0.02	0.021	48.00	0.175	0.021 ± 0.175
0.03	-0.361	34.91	0.205	-0.361 ± 0.205
0.04	-0.742	19.20	0.275	-0.742 ± 0.275

はマイナスの方向に、それぞれ偏りが生ずるもの
 と考えられる。その大きさは、プラスの偏りは a
 の値に反比例し、マイナスの偏りは a の値に比例
 して増大する傾向をしめしている。

[0.3m以上] の場合においては、プラスの偏り
 は、それほど顕著ではなかったが、[0m以上] に
 おいては、その傾向を明らかにしめしている。

信頼帯をみると、それは $a = 0.015 \sim 0.025$ にお
 いて横軸に接するから、対象木を [0 m以上] と
 した場合、 $b = 0.1$ の求積式においては、この範

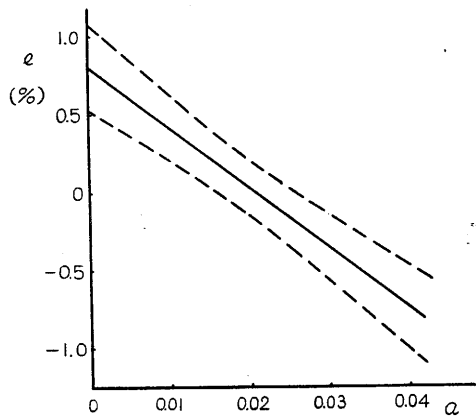


図 6.3

囲内の a の値をとる求積式が、最もこのましい推定値をあたえるものと考えられる。

6・1・4 [0 m以上], $b = 0.2$ の場合

$b = 0.2$ とすると、§ 5・2・2 における実測結果から、表 6.7 のような e の原表をつくること
 ができる。

$\hat{\sigma}^2$ の一番小さい $a = 0.04$ を基準にして F_0 の値をもとめると、 $a = 0.00$, $a = 0.08$ および $a =$
 0.10 は危険率 1% あるいは 5% でそれぞれ有意である。他方 \bar{e} の値をみても、それらは過大ある
 いは過小の傾向をしめしているから、 a の値を 0.00, 0.08, 0.10 とした求積式は、 a の値を 0.02,
 0.04, 0.06 とした場合に比して明らかにこのましいとはおもわれない。

したがって、 a について 0.02, 0.04, 0.06 の 3 水準として平均値の検定をおこなうと、つぎの
 ような分散分析表がもとめられる。

[0.3m以上], $b = 0.2$ の場合と同様、 a の効果は非常に有意であり、 e の母平均は a の大きさ
 によって明らかに異ると考えられる。

$a = 0.02 \sim 0.06$ の範囲内では、 a に対する e の回帰式は 1 次で十分近似されることがわかるが、
 いま、 $a = 0.00, 0.08, 0.10$ 等における値を図上におとしてみると、それらの値も 1 次の線に

表 6・7

	$a=0.00$	$a=0.02$	$a=0.04$	$a=0.06$	$a=0.08$	$a=0.10$
	6.89	1.26	0.54	-1.74	-2.88	-3.72
	4.82	0.90	0.71	-0.33	-1.51	-4.21
	3.29	3.10	1.62	-0.19	-1.55	-2.10
	2.35	1.89	0.38	0.15	0.30	-1.82
	2.21	2.08	1.23	-0.99	-2.00	-1.28
	5.00	2.97	1.40	-1.31	-3.06	-4.01
	2.74	1.20	-0.14	-0.21	-0.45	-1.34
	3.02	2.56	1.15	2.24	0.19	-2.31
	2.97	1.35	0.23	-0.58	-1.09	-0.40
	5.47	1.68	-0.32	-1.47	-2.42	-2.84
	6.88	1.70	0.30	-0.68	-2.25	-2.65
	10.92	3.30	-0.08	-2.16	-3.19	-4.73
	4.27	0.12	-0.38	-0.81	-0.28	-0.40
	5.91	3.87	1.43	-0.61	-2.44	-3.45
	4.75	1.68	-0.51	-1.05	-2.00	-2.63
	4.37	2.01	0.02	-0.74	-1.51	-1.84
T	75.86	31.67	7.58	-10.48	-26.15	-39.74
\bar{e}	4.74	1.98	0.47	-0.66	-1.63	-2.48
$\hat{\sigma}^2$	4.9357	0.9542	0.4993	0.9595	1.2380	1.6991
F_0	9.89**	1.91	1	1.92	2.48*	3.40*

のようにおもわれる。 § 6・

1・2に準じて、回帰式の範囲を

$a=0.00\sim 0.10$ にひろげると、

その推定には、むしろ $a=0.00$

0.08, 0.10等の値をふくめた方

がよいとおもわれるから、 a の6水準をもちいて回帰式をもとめることにすればつぎのとおりである。

$$T(a=0.00)=75.86$$

$$T(a=0.06)=-10.48$$

$$T(a=0.02)=31.67$$

$$T(a=0.08)=-26.15$$

$$T(a=0.04)=7.58$$

$$T(a=0.10)=-39.74$$

$$\hat{b}_0=38.74/96=0.404$$

$$\hat{b}_1=\frac{1}{16 \times 35 \times 0.02} \left\{ (-5) \times 75.86 + (-3) \times 31.67 + (-1) \times 7.58 + 1 \times (-10.48) \right. \\ \left. + 3 \times (-26.15) + 5 \times (-39.74) \right\} = -68.71$$

したがって

$$e=0.404-68.71(a-0.05)$$

要因	SS	df	MS	F_0
a { lin.	55.5195	1	55.5195	69.03**
res.	0.3787	1	0.3787	—
$R(a)$	36.1947	45	0.8043	
aR	92.0929	47		

a の値を0.01間隔にとると、それぞれの a に対応した e の値は

$$e(a=0.00)=3.840 \qquad e(a=0.02)=2.465$$

$$e(a=0.01)=3.152 \qquad e(a=0.03)=1.778$$

$$e(a=0.04)=1.091$$

$$e(a=0.05)=0.404$$

$$e(a=0.06)=-0.283$$

$$e(a=0.07)=-0.970$$

$$e(a=0.08)=-1.657$$

$$e(a=0.09)=-2.344$$

$$e(a=0.10)=-3.032$$

としてもとめられ、また、 $e=0$ における a の値は、 $a=0.056$ としてあたえられる。

表 6・8

a	\hat{e}	n_e	$\frac{3.03}{\sqrt{n_e}}$	信 頼 限 界
0.00	3.840	30.55	0.549	3.840±0.549
0.01	3.152	40.48	0.476	3.152±0.476
0.02	2.465	54.19	0.412	2.465±0.412
0.03	1.778	71.49	0.358	1.778±0.358
0.04	1.091	88.42	0.322	1.091±0.322
0.05	0.404	96.00	0.309	0.404±0.309
0.06	-0.283	88.42	0.322	-0.283±0.322
0.07	-0.970	71.49	0.358	-0.970±0.358
0.08	-1.657	54.19	0.412	-1.657±0.412
0.09	-2.344	40.48	0.476	-2.344±0.476
0.10	-3.032	30.55	0.549	-3.032±0.549

つぎに、 e の各値に対して

信頼限界をあたえると、 $\sigma^2(e)$ は、[0.3m以上]、 $b=0.2$ の場合と同様にしめされる。また、分散分析表によると、 $\sigma_E^2=0.8043$ であるが、 $a=0.00, 0.08, 0.10$ 等の分散はかなり大きいから、 $\hat{\sigma}_E=1.5$ としてあたえることにすれば、信頼度を95%として

$$\hat{e} \pm t_\alpha \cdot \sqrt{\hat{\sigma}^2(e)} = \hat{e} \pm \frac{3.03}{\sqrt{n_e}}$$

したがって、個々の a に対して、次表のような数値がもとめられる。

図6・4にみられるとおり、対象木が[0m以上]の場合 $b=0.2$ の求積式においては a の値が0.00~0.05においてはプラスの方向に、また、0.06以上に大きい場合にはマイナスの方向に、それぞれ偏りが生ずるものと考えられる。その大きさの傾向は、[0.3m以上]の場合と同様である。

分散については、 a の各水準において有

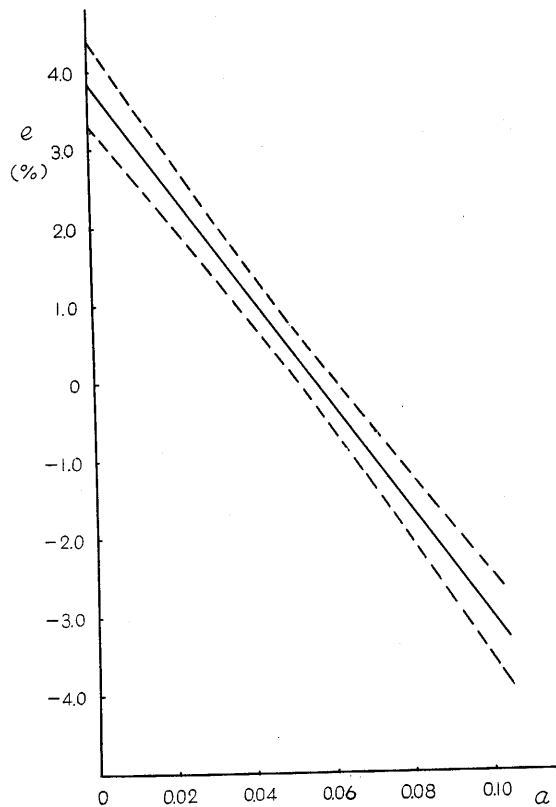


図 6・4

図意差が認められ、 $a=0.02, 0.04, 0.06$ におけるその値が他に比して小さく、また図6・4によると、信頼帯は $a=0.05\sim 0.06$ において横軸に接するから、 $b=0.2$ の場合には、この範囲内の a の値をとる求積式が最もこのましい推定値をあたえるものと考えられる。

6・1・5 [$b=0.05$], [$b=0.15$] の場合

b の値を0.1および0.2とした場合の結果は、それぞれ§6・1・1～§6・1・4に示されたが、つぎに、 b の値を0.05, 0.15とした場合について検討してみよう。この場合、求積の対象を[0.3m以上]とし、前記4項のような統計的分析をおこなわずに、期待される誤差の大きさを $\bar{e} \pm 2\sigma_e$ としてもとめてみると表6・9のとおりである。

誤差率算定にもちいた基準値の性質から表6・9の値はそのまま求積式のもつ偏りの推定値と看做することができる。すなわち、求積の対象木が根元附近をふくまない場合には

[$a=0.00, a=0.15$]	[$a=0.03, b=0.05$]
[$a=0.02, b=0.15$]	[$a=0.06, b=0.15$]
はプラスの方向に偏りをもち	[$a=0.08, b=0.15$]

等は、マイナスの方向に偏りをもつものと考えられる。

[$a=0.00, b=0.05$]	[$a=0.02, b=0.05$]
[$a=0.01, b=0.05$]	[$a=0.04, b=0.15$]

表6・9

求 積 式	[0.3m以上]	求 積 式	[0.3m以上]
$a=0.00, b=0.05$	% 0.03 ± 0.08	$a=0.00, b=0.15$	% 1.02 ± 0.61
$a=0.01, b=0.05$	0.02 ± 0.07	$a=0.02, b=0.15$	0.33 ± 0.27
$a=0.02, b=0.05$	-0.09 ± 0.09	$a=0.04, b=0.15$	-0.08 ± 0.20
$a=0.03, b=0.05$	-1.53 ± 0.15	$a=0.06, b=0.15$	-0.29 ± 0.28
		$a=0.08, b=0.15$	-0.66 ± 0.50

等については、とくに偏りはみられない。

$b=0.05$ についてみると、 a の各値における分散にはとくに差があるとは考えられないから、平均値について大きな偏りをしめしている[$a=0.03$]を除いた他の求積式には、式自体としてとくに優劣は認められない。

$b=0.15$ についてみると、平均値について大きなひらきがあり、[$a=0.00$]、[$a=0.02$]、[$a=0.06$]、[$a=0.08$]等は、それぞれプラスあるいはマイナスの方向に偏りをしめすから、明らかにこのましくない。 a と e の関係曲線をもとめた場合、その曲線と $e=0$ との交点は、 $a=0.03\sim 0.04$ の範囲と考えられ、この範囲の a における分散がとくに大きいとはおもわれないから、 b の値を0.15とした場合のこのましい a の値は0.03～0.04程度と考えられる。

6・1・6 [不等] の場合

[不等] の場合における誤差の大きさは、表 6・10 のようにもとめられる。

[不等] の求積式の 1 つの場合として、等間隔用の数値積分用係数を適宜組合せた求積式は、本文においては、0m 基点の場合についてのみ誘導したが、表 6・10 にみられるように、 $b=0.05$ においては [0.3m 以上]、[0 m 以上] とともにマイナスの推定値をあたえ、また、 $b=0.1$ においては、ともにプラスの値をあたえている。

表 6・10

求 積 式		[0.3m 以上]	[0 m 以上]
不 等	0 m 基点, $b=0.05$	-% -0.37 ± 0.12	-% -0.55 ± 0.16
不 等	0 m 基点, $b=0.10$	0.33 ± 0.27	1.23 ± 0.42
不 等	0, 0.1H, 0.3H, 0.6H, H	5.55 ± 1.09	
不 等	0, 0.1H, 0.2H, 0.3H, H	52.34 ± 13.01	
不 等	0.1H, 0.2H, 0.5H, 0.8H, 0.9H	-2.37 ± 0.69	
不 等	0, 0.1H, 0.5H, 0.9H, H	2.78 ± 1.13	

測点を適当にえらんだ 4 例においては、[0.3m 以上] についてのみ測定をおこなったが、[0, 0.1H, 0.3H, 0.6H, H], [0, 0.1H, 0.2H, 0.3H, H], [0, 0.1H, 0.5H, 0.9H, H] がプラスに、[0.1H, 0.2H, 0.5H, 0.8H, 0.9H] がマイナスに偏りをあたえている。この場合の偏りは顕著で、とくに [0, 0.1H, 0.2H, 0.3H, H] においては、50% もの偏りが期待されるから、これらの諸式は明らかに正確な求積式とは考えられない。

6・2 直交多項式の数表を利用する方法および平均値法における誤差

前節においては、移動平均法にもとづく各種の求積式について、生起する誤差の大きさおよびその性質が検討されたが、つぎに、直交多項式の数表を利用する方法および平均値法にもとづく場合について考察してみよう。期待される誤差の大きさを $\bar{e} \pm 2\sigma_e$ としてもとめてみると、表 6・11 があたえられる。ただし、求積の対象を全樹幹材積とした測定は Huber, Smalian 等の数種の場合についてのみおこなった。

対象木が根元附近をふくまない場合においては

$$\left[\begin{array}{l} r^2 = a + bx + cx^2 + dx^3 \\ k=11, \quad h=0.1H \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} r^2 = a + bx + cx^2 + dx^3 \\ k=6, \quad h=0.2H \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} r = ax + dx^2 + cx^3 \\ k=11, \quad h=0.1H \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} r = ax + bx^2 + cx^3 \\ k=6, \quad h=0.2H \end{array} \right]$$

$$[\text{Smalian}, \quad h=0.1H]$$

$$[\text{Smalian}, \quad h=0.2H]$$

$$[\text{Breyman}, \quad k=4]$$

$$[\text{Weddle}, \quad n=7]$$

等はプラスの方向に偏りをもち

表 6・11

求 積 式	[0.3m以上]	[0 m以上]	求 積 式	[0.3m以上]	[0 m以上]
$r^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$ $k = 11, h = 0.1H$	% 2.34±0.56	%	Huber $h = 0.2H$	% -2.22±0.54	% -3.09±0.65
$r^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$ $k = 10, h = 0.1H$	-0.54±0.22		右田(I) $h = 0.1H$	-0.03±0.16	-0.25±0.20
$r^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$ $k = 6, h = 0.2H$	4.40±0.82		右田(I) $h = 0.2H$	-0.50±0.50	-0.41±0.54
$r^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$ $k = 5, h = 0.2H$	-2.15±0.52		Simpson $h = 0.1H$	0.08±0.43	0.48±0.37
$r = ax + bx^2 + cx^3$ $k = 11, h = 0.1H$	3.27±0.78		Simony(I) $k = 3$	-8.64±1.80	
$r = ax + bx^2 + cx^3$ $k = 10, h = 0.1H$	-0.08±0.32		Simony(II) $k = 3$	-2.71±0.78	
$r = ax + bx^2 + cx^3$ $k = 6, h = 0.2H$	4.42±0.94		Breymann $k = 4$	6.49±1.27	
$r = ax + bx^2 + cx^3$ $k = 5, h = 0.2H$	-2.08±0.56		Newton-Cotes $n = 11$	-0.52±1.80	-0.22±1.68
Smalian $h = 0.1H$	1.38±0.42	2.81±0.61	Weddle $n = 7$	0.95±0.59	
Smalian $h = 0.2H$	4.97±0.94	8.71±1.62	Gauss $n = 10$	0.02±0.15	-0.20±0.23
Huber $h = 0.1H$	-0.61±0.23	-1.26±0.29			

$$\left[\begin{array}{l} r^2 = a + bx + cx^2 + dx^3 \\ k = 10, \quad h = 0.1H \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} r^2 = a + bx + cx^2 + dx^3 \\ k = 5, \quad h = 0.2H \end{array} \right]$$

$$[\text{Huber}, \quad h = 0.1H]$$

$$\left[\begin{array}{l} r = ax + bx^2 + cx^3 \\ k = 5, \quad h = 0.2H \end{array} \right]$$

$$[\text{Huber}, \quad h = 0.2H]$$

$$[\text{Simony (I)}, \quad k = 3]$$

$$[\text{Simony (II)}, \quad k = 3]$$

等はマイナスの方向に偏りをもつものと考えられる。

その大きさは、個々の求積式によって異なるが、 $\left[r^2 = a + bx + cx^2 + dx^3, \quad k = 6, \quad h = 0.2H \right]$, $\left[r = ax + bx^2 + cx^3, \quad k = 6, \quad h = 0.2H \right]$, $[\text{Smalian}, \quad h = 0.2H]$, $[\text{Simony (I)}, \quad k = 3]$, $[\text{Breymann}, \quad k = 4]$ 等はとくに著しく、3%以上もの偏りが期待されるから、これらの諸式は明らかに正確な求積式とは考えられない。

幹曲線方程式を $r^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$ および $r = ax + bx^2 + cx^3$ とした2つの場合においては、生起する誤差の傾向は大体一致している。すなわち、 $[k = 11, h = 0.1H]$, $[k = 6, h = 0.2H]$ においては、ともにプラスの偏りを、 $[k = 5, h = 0.2H]$ においては、ともにマイナスの偏りをあたえている。このことは、最初の測点のとり方のわずかなひらきが、推定値に大きな影響をあたえることをしめしているから、正確な推定値をうるためには、移動平均法の場合と同様、最初の測点のとり方について特別の配慮が必要になってくる。

求積の対象として根元附近をふくむ場合には、プラスの方向に偏りをもつものとしては

$$[\text{Smalian}, \quad h = 0.1H], \quad [\text{Smalian}, \quad h = 0.2H], \quad [\text{Simpson}, \quad h = 0.1H]$$

また、マイナスの方向としては

$$[\text{Huber}, h=0.1H], [\text{Huber}, h=0.2H], [\text{右田(I)}, h=0.1H]$$

等があげられる。その大きさとしては [Smalian, $h=0.2H$] が目立つ。

各種の区分求積法については、以前より種々の研究がなされているが、上記の結果をみても、Smalian が過大なそして Huber が過小な推定値をあたえる傾向をもつことは明瞭である。ことに [0 m以上] の場合においては、根張りの影響とおもわれるが、[0.3m以上] の場合に比して正負の誤差が倍程度に大きくなっている。

6.3 誤差上の順位

§6.1, §6.2 において、個々の求積式のもつ平均的な誤差の大きさとその傾向をしらべたが、つぎに、これら数多くの求積式のうち、誤差上からみるとどの式が有用と考えられるかを検討してみよう。

表 6.12 誤差上の順位 [0.3m以上]

順位	求積式	M. S. E.	測定部位数	順位	求積式	M. S. E.	測定部位数
1	$a=0.01, b=0.05$	0.0177	20	26	$a=0.00, b=0.15$	2.4482	7
2	$a=0.00, b=0.05$	0.0253	21	27	Smalian, $h=0.1H$	2.5727	11
3	$a=0.02, b=0.05$	0.0367	20	28	$a=0.10, b=0.20$	4.1553	5
4	Gauss, $n=10$	0.0812	10	29	$r = ax + bx^2 + cx^3$ $k=5, h=0.2H$	5.4854	5
5	右田(I), $h=0.1H$	0.0954	11	30	$r^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$ $k=5, h=0.2H$	5.6796	5
6	$a=0.04, b=0.15$	0.1527	7	31	Huber, $h=0.2H$	6.0202	5
7	$a=0.02, b=0.10$	0.1760	10	32	$r^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$ $k=11, h=0.1H$	6.6529	11
8	不等, 0^m 基点 $b=0.05$	0.1928	13	33	$a=0.06, b=0.10$	6.9228	10
9	$a=0.04, b=0.10$	0.3011	10	34	不等, $0.1H, 0.2H, 0.5H$ $0.8H, 0.9H$	7.3629	5
10	不等, 0^m 基点 $b=0.10$	0.3697	8	35	$a=0.00, b=0.20$	7.3836	6
11	$a=0.02, b=0.15$	0.3770	7	36	Simony(II), $k=3$	9.6609	3
12	$a=0.06, b=0.15$	0.3777	7	37	Newton-Cotes, $n=11$	12.4153	11
13	$r = ax + bx^2 + cx^3$ $k=10, h=0.1H$	0.3979	10	38	不等, $0, 0.1H, 0.5H,$ $0.9H, H$	12.5277	5
14	$a=0.00, b=0.10$	0.4112	11	39	$r = ax + bx^2 + cx^3$ $k=11, h=0.1H$	13.0149	11
15	$r^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$ $k=10, h=0.1H$	0.4759	10	40	$r^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$ $k=6, h=0.2H$	21.7843	6
16	Huber, $h=0.1H$	0.5604	10	41	$r = ax + bx^2 + cx^3$ $k=6, h=0.2H$	22.7659	6
17	Simpson, $h=0.1H$	0.6865	11	42	Smalian, $h=0.2H$	28.0006	6
18	$a=0.04, b=0.20$	0.7642	5	43	不等, $0, 0.1H, 0.3H,$ $0.6H, H$	35.3114	5
19	$a=0.06, b=0.20$	0.8839	5	44	Breymann, $k=4$	48.1523	4
20	右田(I), $h=0.2H$	1.1774	6	45	Simony(I), $k=3$	86.9102	3
21	$a=0.08, b=0.15$	1.3958	7	46	不等, $0, 0.1H, 0.2H,$ $0.3H, H$	3373.2529	5
22	$a=0.02, b=0.20$	2.1309	5				
23	$a=0.08, b=0.20$	2.1947	5				
24	Weddle, $n=7$	2.2071	7				
25	$a=0.03, b=0.05$	2.4277	20				

誤差上の順位 [0 m以上]

順位	求積式	M. S. E.	測定 部位数	順位	求積式	M. S. E.	測定 部位数
1	右田(I), $h=0.1H$	0.2186	11	12	不等, 0 m基点 $b=0.10$	2.1760	8
2	Gauss, $n=10$	0.2406	10	13	$a=0.08, b=0.20$	3.8318	5
3	$a=0.02, b=0.10$	0.2997	10	14	$a=0.02, b=0.20$	4.8125	5
4	不等, 0 m基点 $b=0.05$	0.3937	13	15	$a=0.10, b=0.20$	7.7619	5
5	$a=0.04, b=0.20$	0.6926	5	16	Smalian, $h=0.1H$	9.2679	11
6	Simpson, $h=0.1H$	0.7295	11	17	Newton-Cotes, $n=11$	10.6524	11
7	$a=0.04, b=0.10$	0.7305	10	18	$a=0.06, b=0.10$	10.9343	10
8	右田(I), $h=0.2H$	1.0159	6	19	Huber, $h=0.2H$	11.1473	5
9	$a=0.00, b=0.10$	1.1926	11	20	$a=0.00, b=0.20$	27.1066	6
10	$a=0.06, b=0.20$	1.3285	5	21	Smalian, $h=0.2H$	85.6726	6
11	Huber, $h=0.1H$	1.9153	10				

一般に、推定の問題にかんしては、偏りのない、しかも、精度の高い推定値をもとめることがのぞまれるから、求積式の良否を比較する場合にも、当然、推定値のもつ偏りと分散に対する考慮が必要になってくる。いま、その判定の目安として、平均2乗誤差(M. S. E.)をとり、第5章の実測結果から、各式におけるM. S. E.をもとめ、その値の小さいものほどよい求積式であると考えれば、その順位は表6・12のようにしめされる。

上表にみられるとおり、本実験にもちいた式中では、[Gauss, $n=10$], [右田(I), $h=0.1H$] [$a=0.02, b=0.10$], [$a=0.04, b=0.15$], [不等, 0 m基点
 $b=0.05$] 等がよい値をしめしている。[$a=0.01, b=0.05$], [$a=0.00, b=0.05$], [$a=0.02, b=0.05$] 等はきわめて良好な求積式であるが、求積に要する測点数も多く、これらは例外と看做される。

[$a=0.04, b=0.15$] がよい値をしめしていることは興味ぶかい。たとえば、[$b=0.05$] についても、上記の3つの場合におけるM. S. E.は小さいが、[$a=0.03$] になると順位ははるかに下ってくる。同様にして、 b の値は同一であっても、 a の値の如何によって順位に相当のひらきがみられる。このことは小さなM. S. E.をあたえるためには、必ずしもつねに小さい値の b が要求されるのではなく、 b の値に対応して、 a の値を適宜選択することの重要性をしめしている。§6・1の結果から判断すると、 b の値が小さくてしかもM. S. E.が大きい場合は、明らかに偏りが影響をあたえていると考えられる。

勿論、ここに記したM. S. E.の値は、16本の実測結果にもとずいた推定値であるから、順位も一応の目安をしめすにすぎず、したがってまた、順位1つごとに明らかな差異があるとは考えられないが、いま、[0.3m以上]についてはM. S. E. = 0.01, [0 m以上]についてはM. S. E. = 0.02を最小値

階層	[0.3m以上]	[0 m以上]
A	0.01 ~ 0.05	0.02 ~ 0.10
B	0.05 ~ 0.25	0.10 ~ 0.50
C	0.25 ~ 1.25	0.50 ~ 2.50
D	1.25 ~ 6.25	2.50 ~ 12.50
E	6.25 ~ 31.25	12.50 ~ 62.50
F	31.25 ~ 166.25	62.50 ~ 312.50

仮定して、表示したように順次5倍ずつした値を範囲の限界値として、M. S. E. の各値を層化し、それぞれの階層をA, B, C, D, E, F とおくと、[0 m以上] において、B層に属する求積式は、[0.3m以上] においても同様B層に属し、所属する階層は大体共通している。このことは、[0.3m以上] において良好な推定値をあたえる求積式は、[0 m以上] においても良好な求積式と看做しうることをしめしている。

[0.3m以上] と [0 m以上] を比較すると、M. S. E. は [0.3m以上] の場合がはるかに小さい。これは対象の形状の複雑さを考慮すれば、当然予想される結果である。

幹曲線方程式を $r^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$, $r = ax + bx^2 + cx^3$ とした場合の各求積式は表6・12 においては、比較的ひくい方にしめされているが、測点のとり方によってはよりよい値がえられるものとおもわれる。[不等] の場合も同様、測点のとり方についての配慮が必要であろう。

6・4 許 容 限 界

表6・13 許 容 限 界

求 積 式	[0.3m以上] %	[0 m以上] %	求 積 式	[0.3m以上] %	[0 m以上] %
$a=0.00, b=0.05$	0.03±0.36		$r^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$ $k=11, h=0.1H$	2.34±2.52	
$a=0.01, b=0.05$	0.02±0.32		$r^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$ $k=10, h=0.1H$	-0.54±0.99	
$a=0.02, b=0.05$	-0.09±0.41		$r^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$ $k=6, h=0.2H$	4.40±3.69	
$a=0.03, b=0.05$	-1.53±0.65	0.82±1.69	$r^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$ $k=5, h=0.2H$	-2.15±2.34	
$a=0.00, b=0.10$	0.24±1.37		$r = ax + bx^2 + cx^3$ $k=11, h=0.1H$	3.27±3.51	
$a=0.02, b=0.10$	-0.09±0.95	-0.05±1.26	$r = ax + bx^2 + cx^3$ $k=10, h=0.1H$	-0.08±1.44	
$a=0.04, b=0.10$	-0.36±0.97	-0.71±1.13	$r = ax + bx^2 + cx^3$ $k=6, h=0.2H$	4.42±4.23	
$a=0.06, b=0.10$	-2.58±1.22	-3.24±1.55	$r = ax + bx^2 + cx^3$ $k=5, h=0.2H$	-2.08±2.52	
$a=0.00, b=0.15$	1.02±2.75		Smalian, $h=0.1H$	1.38±1.89	2.81±2.75
$a=0.02, b=0.15$	0.33±1.22	4.74±5.00	Smalian, $h=0.2H$	4.97±4.23	8.71±7.29
$a=0.04, b=0.15$	-0.08±0.90	1.98±2.21	Huber, $h=0.1H$	-0.61±1.04	-1.26±1.31
$a=0.03, b=0.15$	-0.29±1.26	0.47±1.60	Huber, $h=0.2H$	-2.22±2.43	-3.09±2.97
$a=0.08, b=0.15$	-0.66±2.27	-0.66±2.21	右田(I), $h=0.1H$	-0.03±0.72	-0.25±0.90
$a=0.00, b=0.20$	2.47±2.66	-1.63±2.50	右田(I), $h=0.2H$	-0.50±2.25	-0.41±2.43
$a=0.02, b=0.20$	1.18±2.00	-2.48±2.93	Simpson, $h=0.1H$	0.08±1.94	0.48±1.67
$a=0.04, b=0.20$	0.47±1.71	-0.55±0.72	Simony(I), $k=3$	-8.64±8.10	
$a=0.05, b=0.20$	-0.26±2.09	1.23±1.89	Simony(II), $k=3$	-2.71±3.51	
$a=0.08, b=0.20$	-1.00±2.54		Breymann, $k=4$	6.49±5.72	
$a=0.10, b=0.20$	-1.73±2.52		Newton-Cotes, $n=11$	-0.52±8.10	-0.22±7.56
不 等, $0m$ 基点 $b=0.05$	-0.37±0.54		Weddle, $n=7$	0.95±2.66	
不 等, $0m$ 基点 $b=0.10$	0.33±1.22		Gauss, $n=10$	0.02±0.68	-0.20±1.04
不等, $0, 0.1H, 0.3H$ $0.6H, H$	5.55±4.91				
不等, $0, 0.1H, 0.2H$ $0.3H, H$	52.34±58.55				
不等, $0.1H, 0.2H$ $0.5H, 0.8H, 0.9H$	-2.37±3.11				
不等, $0, 0.1H, 0.5H$ $0.9H, H$	2.78±5.09				

許容限界は、一般に

$$\bar{x} \pm \alpha \sigma_x$$

としてしめされる。ここに、係数 α は、両側許容限界用係数表よりあたえられるが、本実験においては、信頼度 90%， $P=0.90$ として、 $\alpha (n=16, \nu=15) = 2.25$ をもちいることにする。

第 5 章にしめされた個々の実測結果にもとずいて、それぞれについての範囲を算出すると、表 6・13 かもとめられる。許容限界の概念から、それらの値は、各求積式によって求積をおこなった場合、その測定値のうちの少くとも 90% がふくまれると考えられる範囲を、90% のたしからしきでしめしている。したがって、各求積式について、1 回の測定で生起するとおもわれる誤差の範囲は、大体表 6・13 程度と考えることができる。

6・5 対象木の大きさと誤差率との関係

さきに、§ 6・1、§ 6・2 において、各式について期待される誤差の大きさをしめたが、それらの値は、推定にさいして、対象木の大きさあるいは形状をとくに考慮せずに、平均としてもとめられた値であった。したがって、より厳密に誤差の性質をしらべるためには、大きさあるいは形状によって、供試木を類別した上で検討する必要があるであろう。樹幹の形状については、一般に、それが複雑になればなるほど、推定値のもつ誤差も増大するものと考えられるが、その関係をしらべることは、はなはだ困難であるので、ここでは、対象木の大きさと誤差率との関係についてのみしらべることにする。なおまた、個々の求積式すべてにわたって分析することをさけて、実際に利用される可能性のある $[a=0.02, b=0.1]$ 、 $[a=0.04, b=0.15]$ 、 $[b=0.04, b=0.20]$ 、 $[\text{Huber}, h=0.1H]$ 、 $[\text{Huber}, h=0.2H]$ の 5 式および参考に $[\text{Gauss}, n=10]$ 、 $[\text{右田}(I), h=0.2H]$ 、 $\left[\begin{matrix} r = a x + b x^2 + c x^3 \\ k = 5, h = 0.2H \end{matrix} \right]$ について分析をおこなうことにする。

分析の方法は、供試木材積を変数とし、対応した誤差率 e を変量とした共分散分析法をもちいたが、各式についてえられた結果をしめすとつぎのとおりである。

表 6・14

求 積 式	[0.3m 以上]				[0 m 以上]		
	要 因	SS	df	MS	SS	df	MS
$\left(\begin{matrix} a=0.02 \\ b=0.10 \end{matrix} \right)$	1 次回帰	0.0930	1	0.0930	0.0282	1	0.0282
	残 差	2.6009	14	0.1858	4.7287	14	0.3378
	全 体	2.6939	15		4.7569	15	
$\left(\begin{matrix} a=0.04 \\ b=0.15 \end{matrix} \right)$	要 因	SS	df	MS			
	1 次回帰	0.4582	1	0.4582			
	残 差	1.8912	14	0.1350			
	全 体	2.3494	15				

求 積 式	[0.3m 以上]				[0 m以上]		
	要 因	SS	df	MS	SS	df	MS
$\left(\begin{array}{l} \alpha = 0.04 \\ b = 0.20 \end{array} \right.$	1次回帰	0.5942	1	0.5942	0.0211	1	0.0211
	残 差	8.1260	14	0.5804	7.4689	14	0.5335
	全 体	8.7202	15		7.4900	15	
Huber $\left(\begin{array}{l} h = 0.1H \end{array} \right.$	要 因	SS	df	MS	SS	df	MS
	1次回帰	0.3765	1	0.3765	0.0540	1	0.0540
	残 差	2.7209	14	0.1945	5.1886	14	0.3706
Huber $\left(\begin{array}{l} h = 0.2H \end{array} \right.$	全 体	3.0974	15		5.2426	15	
	要 因	SS	df	MS	SS	df	MS
	1次回帰	0.0441	1	0.0441	0.0292	1	0.0292
Gauss $\left(\begin{array}{l} n = 10 \end{array} \right.$	残 差	17.6022	14	1.2573	25.8669	14	1.8476
	全 体	17.6463	15		25.8961	15	
	要 因	SS	df	MS	SS	df	MS
右 田 (I) $\left(\begin{array}{l} h = 0.2H \end{array} \right.$	1次回帰	0.0346	1	0.0346	0.4091	1	0.4091
	残 差	1.2598	14	0.0900	2.8287	14	0.2020
	全 体	1.2944	15		3.2378	15	
$\left(\begin{array}{l} r = ax + bx^2 + cx^3 \\ k = 5, h = 0.2H \end{array} \right.$	要 因	SS	df	MS	SS	df	MS
	1次回帰	1.6554	1	1.6554	2.7899	1	2.7899
	残 差	13.2620	14	0.9473	10.7999	14	0.7714
	全 体	14.9174	15		13.5898	15	
	要 因	SS	df	MS	SS	df	MS
	1次回帰	0.3331	1	0.3331			
	残 差	18.5439	14	1.3246			
	全 体	18.8770	15				

F表によれば、 $F_{14}^1(0.05) = 4.60$ であるから、ここにしめす各場合とも、回帰項は有意とは認められない。第5章にしめされる個々の求積結果を通覧すると、[Smalian]の場合に多少疑義があるが、他の場合については大体同様の結果が予想されるから、本実験にもちいた供試木の大きさ程度の求積においては、対象木の大きさと誤差率との関係について、とくに考慮する必要はないとおもわれる。

考 察

- 1) 幹曲線式に準拠した求積法においては、まず、なんらかの幹曲線方程式が想定され、いく

つかの測点における半径あるいは直径の実測値にもとずいて方程式中の未知係数が決定され、しかるのちに、その方程式より転換された積分式にもとずいて幹材積が算出される。このような手続きによる以上、正確な求積をおこなうためには、想定される幹曲線方程式はどうしても高次のものとなり、したがって、転換される積分式、すなわち、材積式はいきおい複雑な形をとらざるをえない。そして、この場合複雑な材積式を解く困難はもとより、通常の手法による最小2乗法解として、方程式中の未知係数が決定されてきたため、その数値計算は極度に煩雑なものとなった。

このような解析的な解法に対して、直交多項式を応用すると、解式は直接的に、しかも実用上便利な形としてあたえられる。そこにはもはや高次の積分式もなく、また、未知係数決定のための計算上の煩雑さもない。このように、直接数値上の解があたえられることは、求積の実行にさいして非常にこのまじいことである。

われわれが、求積上、要求していることは、多くの場合要するに数値であって、解式そのものではない。われわれにとって、数学は手段であって、目的ではないからである。本文において、筆者は、3つの手法を異にする求積法を記述したが、これらの求積法のもつ特徴は、たとえ解析的に解くことが困難な場合でも、一律にその解の数値をしることができ、しかも、実行に要する労力は、多くの場合解析的な解式から数値を計算する労力に比して、はるかに少いことである。§1・1、§2・1、§3・1 にしめされるように、各方法の理論そのものは難解であるが、それを応用した解式の誘導は容易であり、また、その実用は簡単である。このような数値解法は、求積の実行にあたって、非常に便利なものと考えられるであろう。

なお、数値積分法とならんで、図的積分法といわれる解法があり、すでに、30年程前 Reineke は、図的積分法にもとずいたプラニメーターによる求積法を考案しているが、この図による解法は実行上種々の誤差が介入するおそれがあり、したがって、本文にしめしたような数値解法による結果に比して、よりよい推定値をうることは困難であろう。

2) 数値積分法あるいは直交多項式にもとずいた求積式として、本文においては、数多くのものを取りあげたが、実用の難易あるいは誤差上からみて有用と考えられる求積式をえらぶことが重要である。この問題に関連して第5章、第6章においては、期待される誤差の大きさ、平均2乗誤差の大きさ、あるいは許容限界等がもとめられたのであるが、もともと、本実験は、個々の求積式に対して、厳密な判定をくだすために計画されたものではないために、この問題についても決定的な結論をくだすことはできないが、本実験の範囲内における結論としては、つぎのような考察が可能であろう。

求積式の有用性は、求積の目的によって左右され、すべての場合に対して、一律にその良否を云々することはできない。たとえば、非常に高い精度での推定が要求される場合には、まず、なによりもそのような精度をあたえる求積式中から有用と看做される式がえらばれるであろうが、要求される推定値の精度がより低い場合には、高い場合に有用な式が必ずしも有用とは考えられな

いであろう。したがって、いま、実行の難易の指標として、測点数 n をとり*、同程度の n の範囲内における平均2乗誤差の小さい求積式をこのましい式と考えることにすれば、 $n=10, 7, 5$ とした各場合におけるそれらの式は、表

表 a

6・12よりつぎのようにえらばれる。

$n=10$ における3つの求積式は、表6・12において、[0.3m以上]、[0m以上]の両方の場合、平均2乗誤差A層に属するものであるが、このうち[Gauss, $n=10$]は、測定部位をあらかじめ所定の係数によって決定するという実行上の欠点をもっている。すなわち、測点の総数

	[0.3m以上]	[0m以上]
$n=10$	Gauss, $n=10$ 右田(I), $h=0.1H$ $a=0.02, b=0.10$	右田(I), $h=0.1H$ Gauss, $n=10$ $a=0.02, b=0.10$
$n=7$	$a=0.04, b=0.15$ 不 等, $0m$ 基点 $b=0.10$ $a=0.02, b=0.15$	
$n=5$	$a=0.04, b=0.20$ $a=0.06, b=0.20$ 右田(I), $h=0.2H$	$a=0.04, b=0.20$ 右田(I), $h=0.2H$ $a=0.06, b=0.20$

n は10であるが、実行上の難易は他の場合とは自ら異なるから、 $n=10$ においては、[右田(I), $h=0.1H$], [$a=0.02, b=0.10$] が有用な求積式と考えられる。これらの求積式によれば、対象を[0.3m以上]とした場合、1回の測定において期待される誤差の大きさは、高々1%程度であり、また、対象を[0m以上]とした場合においても、1%、1.3%程度である。

$n=7$ においては、[0.3m以上]の場合のみの検討であるが、[$a=0.04, b=0.15$] がとくに優れている。その平均2乗誤差は、A層に属するから、本式は非常に有用な求積式と考えられる。対象を[0.3m以上]とした場合に期待される誤差の大きさは、高々1%程度である。

$n=5$ においては、対象を[0.3m以上]、[0m以上]としたそれぞれの場合において、[$a=0.04, b=0.20$], [$a=0.06, b=0.20$]

表 b

	[0.3m以上]	[0m以上]
$b=0.05$	0.00 ~ 0.02	
$b=0.10$	0.005 ~ 0.025	0.015 ~ 0.025
$b=0.15$	0.03 ~ 0.04	
$b=0.20$	0.05 ~ 0.06	0.05 ~ 0.06

表 c

	[0.3m以上]	[0m以上]
$b=0.05$	0.00 ~ 0.40	
$b=0.10$	0.05 ~ 0.25	0.15 ~ 0.25
$b=0.15$	0.20 ~ 0.27	
$b=0.20$	0.25 ~ 0.30	0.25 ~ 0.30

[右田(I), $h=0.2H$] がともに上位をしめている。これらの求積式によって期待される誤差の大きさは、対象を[0.3m以上]とした場合、2~2.5%程度であり、また、[0m以上]とした場合には2~3%程度である。

3) 移動平均法にもとづく求積式として、本文においては、 b の値を0.05, 0.10, 0.15, 0.20とした4つの場合について検討したが、それぞれの場合において、このましい a の範囲が考えられた。§6・1における考察から、

*) 一律に、 n といっても、測点が梢端にとられる場合は、測定はおこなわれず、また、たとえば、 $a=0.00$ の場合に比して、 $a=0.02, 0.04$ 等の場合の測定は、実行上、多少煩雑にはなるであろう。

それらの値を表示すると表**b**のとおりである。

いま、 $p = a/b$ において、表**b**における a の値を、 b の各層毎に b に対する比の値としてしめしなおすと、表**c**があたえられる。

上表によると、 $b \leq 0.20$ において、 p の範囲は、各場合において必ずしも一定ではないが、その範囲は、 b の増大につれて漸減してゆくようにみうけられ、また、 $b = 0.05$ の場合を別にして考えれば、その両限の値は、 b の値に比例して少しずつ大きな値をとる傾向をしめしている。求積の対象を [0.3m 以上]、[0 m 以上] としたそれぞれの場合に対しては、 p はほぼ同様の値をしめしている。

表**c**にしめされた p の各範囲において、共通な p の値は 0.25 であるから、概括的には b が 0.20 よりも小さい場合におけるこのましい a の値は、その 1/4 ということができる。

このような数値は、§1・2・1にしめされる間隔 h を 1 m、2 m 等とおいた求積式の利用に対して重要な示唆をあたえる。すなわち、間隔を H に関係なく定めた求積における最初の測点のとられるべき部位は、表**c**の p の値によって指向されるからである。

たとえば、求積の対象を [0.3m 以上] とし、その樹幹の長さ H を 18m として考えてみよう。まず、 $h = 1$ m とすれば、 H に対する h の比の値は $1/18 = 0.056$ であり、この値は 0.05 に近いから、 $b = 0.05$ における p の値をもちいることにすれば、このましい X の値として、つぎの範囲があたえられる。

$$0.00 \times 1 \text{ m} \sim 0.40 \times 1 \text{ m} = 0 \text{ m} \sim 0.4 \text{ m}$$

したがって、本文に掲げた求積式としては

$$[X=0.0\text{m}, h=1\text{m}] \quad [X=0.2\text{m}, h=1\text{m}]$$

$$[X=0.3\text{m}, h=1\text{m}] \quad [X=0.4\text{m}, h=1\text{m}]$$

のうちのいずれかがもちいられることになる。

つぎに、 $h = 2$ m とすれば、 $h/H = 2/18 = 0.11$ であるから、 $b = 0.10$ における p の値をもちいれば、 X の範囲は

$$0.05 \times 2 \text{ m} \sim 0.25 \times 2 \text{ m} = 0.1 \text{ m} \sim 0.5 \text{ m}$$

としてしめされる。したがって、該当する求積式は

$$[X=0.3\text{m}, h=2\text{m}] \quad [X=0.4\text{m}, h=2\text{m}]$$

ということになる。

$h = 3$ m とすれば、 $h/H = 3/18 = 0.167$ であるから、 $b = 0.15$ における p の値をもちいことにすれば、 X の範囲は

$$0.20 \times 3 \text{ m} \sim 0.27 \times 3 \text{ m} = 0.6 \text{ m} \sim 0.81 \text{ m}$$

としてしめされる。したがって、求積式は $[X=0.6\text{m}, h=3\text{m}]$ がもちいられる。

(5点, 3次), (3点, 2次) については、 n の値によって、適宜えらぶことにすればよい。

上記した定め方とは別に、 $p = \frac{1}{4}$ をもちいて X をもとめると、 $h = 1 \text{ m}$ に対しては、 $1 \text{ m} \times \frac{1}{4} = 0.25 \text{ m}$ であるから、えらばれる求積式は $[X = 0.2 \text{ m}, h = 1 \text{ m}]$ あるいは $[X = 0.3 \text{ m}, h = 1 \text{ m}]$ となる。また、 $h = 2 \text{ m}$ に対しては、 $2 \text{ m} \times \frac{1}{4} = 0.5 \text{ m}$ であるから、 $h = 2 \text{ m}$ において 0.5 m に近い X をあたえる式として、 $[X = 0.4 \text{ m}, h = 2 \text{ m}]$ がえらばれる。 $h = 3 \text{ m}$ に対しては、 $3 \text{ m} \times \frac{1}{4} = 0.75 \text{ m}$ であるから、 $[X = 0.6 \text{ m}, h = 3 \text{ m}]$ をえらべばよいであろう。

本文においては、 X 、 h の、ある限られた組合せに対する求積式のみ記載されているため、実行にさいして、必ずしも算出された X の範囲に該当した式はあたえられないかもしれないが、そのような場合においては、その範囲に近い X をあたえる求積式をもちいることがのぞましい。

つぎに、参考として本実験における供試木に対して、 $h = 2 \text{ m}$ として求積した結果をしめしておく。なお、対象は $[0.3 \text{ m以上}]$ とする。

表 d

番号	H	$\frac{h}{H}$	近似する b の値	求 積 式	測 点 数	E	e
1	14.85 ^m	0.14	0.15	$X = 4.0 \text{ m}$ (3点, 2次)	8	0.2771 ^{m³}	-0.04 [%]
2	19.25	0.10	0.10	$X = 0.3 \text{ m}$ (5点, 3次)	10	0.5935	-0.45
3	15.40	0.13	0.15	$X = 0.4 \text{ m}$ (3点, 2次)	8	0.3309	0.24
4	11.50	0.17	0.15	$X = 0.4 \text{ m}$ (3点, 2次)	6	0.0887	0.00
5	20.90	0.10	0.10	$X = 0.3 \text{ m}$ (5点, 3次)	11	1.1648	-0.06
6	22.10	0.09	0.10	$X = 0.3 \text{ m}$ (5点, 3次)	11	0.9210	-0.25
7	17.50	0.11	0.10	$X = 0.3 \text{ m}$ (5点, 3次)	9	0.4049	0.62
8	9.80	0.20	0.20	$X = 0.4 \text{ m}$ (3点, 2次)	5	0.0445	0.91
9	17.65	0.11	0.10	$X = 0.3 \text{ m}$ (5点, 3次)	9	0.3940	0.46
10	16.00	0.13	0.15	$X = 0.4 \text{ m}$ (3点, 2次)	8	0.3814	0.24
11	12.14	0.17	0.15	$X = 0.4 \text{ m}$ (3点, 2次)	6	0.1571	1.68
12	14.50	0.14	0.15	$X = 0.4 \text{ m}$ (3点, 2次)	8	0.2013	0.60
13	15.90	0.13	0.15	$X = 0.4 \text{ m}$ (3点, 2次)	8	0.5350	-0.19
14	12.60	0.16	0.15	$X = 0.4 \text{ m}$ (3点, 2次)	7	0.1235	-0.16
15	18.00	0.11	0.10	$X = 0.3 \text{ m}$ (5点, 3次)	9	0.6082	0.78
16	13.90	0.14	0.15	$X = 0.4 \text{ m}$ (3点, 2次)	7	0.2081	0.29

4) 前項において、それぞれの b に対してこのましい a の範囲が考察されたが、いま、その範囲

から1つずつ求積式をえらび、それらの式にもとづいた推定値のもつ分散を比較してみよう。 $b = 0.05$ の層からは、 $[a = 0.01, b = 0.05]$ を代表としてえらび、以下、 $b = 0.10, 0.15, 0.20$ の各層から、それぞれ $[a = 0.02, b = 0.10]$, $[a = 0.04, b = 0.15]$, $[a = 0.06, b = 0.20]$ をとることにして、第5章にしめされた求積の結果から、それぞれの σ^2 を推定すると表eのとおりである。

同表によると、 b の増大につれて、 σ^2 もまた増大する傾向をもつことは明らかである。

ここにもちいた各求積式における偏りは、とくに認めうるほど大きなものではなかったから、同表にしめされる分散の傾向から、測点数 n と誤差率 e との関係について、つぎのような推測がなされる。

すなわち、 n は求積式のもつ正確さよりもむしろ精度に影響をあたえる。正確な求積式、換言すれば、 $E(e) = 0$ とするような求積式は、たとえ n が小さい値をとっても、 a あるいは X のあたえ方如何によってもとめうるができるが、精度の高い推定、換言すれば、どのような幹形に対しても、つねに小さな e をうるためには、 n は大きくとらなければならない。

ただし、このような推測を可能にするためには、つぎのような前提が必要である。i) 図6・1~6・4にしめされるように、 \bar{e} の傾向線は、1次式で十分近似され、表cにおける p の範囲内で $e = 0$ の横軸に接する。ii) b の各場合において、その範囲内における σ^2 は同程度の大きさを持ち、他の p の範囲における σ^2 よりもとくに大きいとは考えられない。

5) 本文における興味の一つは、移動平均法にもとづく諸式と、慣用の求積式であるHuber式あるいはSmalian式の区分求積法との実用上における比較である。

まず、間隔を $0.1H, 0.2H$ 等 H に対する比の値とした場合においては、測定の手続きは同様と考えられるが、求積用係数は、Huber, Smalianの方が簡単である。したがって、実行上は、Huber, Smalianの区分求積法の方がこのましいであろう。しかしながら、それらの平均2乗誤差は、表6・2にしめされるように、Smalianは問題なくおとり、Huberといえどもえらばれた $[a = 0.02, b = 0.10]$, $[a = 0.04, b = 0.20]$ 等にくらべると、そのひらきが相当に目立つ。精度上におけるその相違は、計算上の多少のマイナスをおぎなってなお余りあるものとおもわれる。

間隔を $0.1H$ 等ととらずに、 $1m, 2m$ 等 H に関係なく定める場合においては、実行上においてもHuberがこのましいとはいえなくなってしまう。それは、Huberにおいては梢端材積を別途に計算する手数があらたに加わるからである。

右田式(1)区分求積法との比較においては、間隔を H に対する比の値にとった場合、測点数

表 e

	[0.3 m 以上]	[0 m 以上]
$b = 0.05$	0.0196	
$b = 0.10$	0.1796	0.3171
$b = 0.15$	0.1600	
$b = 0.20$	0.8707	0.9595

は右田 (I) が1個多いが、反面、求積用係数はより簡単であるから、実行上の手数は同程度と考えられる。また、精度上においてもそれらの平均2乗誤差は同じような値をしめすから、両者の差異はとくに認められない。しかし、間隔を H に関係なく定める場合においては、右田 (I) 式は Huber 式に準拠するため、Huber 式のもつ梢端材積への別考慮はそのまま入ってくる。求積の実行において、対象を分離するとその取扱いに割合面倒になり、どちらかといえばそのような別考慮をふくまない求積式の方がのぞましいことはいふ迄もない。したがって、実用上、右田式 (I) 区分求積法はこのましい方法ではあるが、 $[a=0.02, b=0.10]$ 、 $[a=0.04, b=0.20]$ 等の方がよりこのましいといえるであろう。

6) 本文においては、移動平均法の場合を主として多くの求積式を誘導記載した。しかしながら、移動平均法の場合においても、測点の数あるいはそのとり方、近似する曲線の次数等を変えることによって、この他にも種々の求積式をもとめることができる。また、直交多項式の数表を利用する方法においても、本文において想定した幹曲線方程式は僅かであり、他にも、たとえば $y^2 = ax^2 + bx^3 + cx^4$ 、 $y^2 = ax + bx^2 + cx^3$ 等想定する方程式は種々考えられるであろう。

このように考えると、本文においては、数値積分法あるいは直交多項式にもとずいて導かれる求積式のうちの一部をしめしたにすぎないことになる。勿論、導かれるままに式をもとめても無意味ではあろうけれども、直交多項式の場合における幹曲線の方程式および測点のとり方等については、より考察する必要があるかもしれない。同様にして、移動平均法における「不等」の場合についても、測点数をあまりふやさないで、種々の組合せを考えれば、あるいは、本文にしめしたのよりもよりよい式がもとめられるかもしれない。

適 応 実 験

本文にもちいた供試木の選定については、それらの大きさ、樹幹の形状等について、できるだけ変化をもたせるように留意はしたが、資料の蒐集が困難であったため、選定の対象樹種もスギ、ヒノキ等に限定せざるをえなかった。さいわいにも、本文の作成中、千葉、北海道、秩父等の演習林において、別個に資料をもとめる機会をうることができたので、これらの新しい資料にもとずいて、本文においてしめされた種々の実験結果を検討することにする。

新たにもとめられた供試木は、千葉演習林内よりのスギおよびヒノキ各9本、北海道演習林内よりのトドマツ5本、エゾマツ4本、広葉樹8本、秩父演習林内よりのツガ5本およびシオジ4本合計44本である。これら新供試木の選定あるいは伐倒後の所定部位の測定等は、直径測定の方角数および幹足材積の算出法を除いては、すべて本文における場合に準じておこなったが、いまそれらの胸高直径および樹高をしめすとつぎのとおりである。

対象樹種としては、スギ、ヒノキ以外にも数種がとられたが、これは、本文におけると同様、樹種間の差を見出そうとしたためではなく、実験の対象として、幹形に巾をもたせようとしたた

表 I 供試木の胸高直径, 樹高

樹種	番号	胸高直径	樹高	樹種	番号	胸高直径	樹高
スギ	1	12.3 ^{cm}	11.00 ^m	トドマツ	3	12.1 ^{cm}	9.60 ^m
"	2	16.2	12.40	"	4	12.3	10.80
"	3	10.0	11.16	"	5	34.7	21.90
"	4	27.4	18.10	エゾマツ	1	12.4	9.30
"	5	19.2	14.15	"	2	23.4	14.90
"	6	23.8	13.80	"	3	33.9	19.70
"	7	31.0	25.58	"	4	48.0	23.90
"	8	26.9	21.97	シオジ	1	19.7	17.10
"	9	37.9	17.75	"	2	29.1	20.80
ヒノキ	1	12.4	11.14	"	3	26.7	23.20
"	2	15.7	8.30	"	4	35.2	25.70
"	3	15.6	12.65	北演広葉樹 (ミズナラ)	1	11.0	13.10
"	4	16.8	11.25	"	2	21.4	19.30
"	5	18.2	12.30	(ミズナラ)	3	14.2	13.70
"	6	17.6	12.10	"	4	18.1	21.40
"	7	17.3	12.11	(ハリギリ)	5	11.5	14.90
"	8	23.5	14.12	"	6	12.1	12.10
"	9	14.3	11.07	(ヤチダモ)	7	14.8	13.80
ツガ	1	18.9	12.40	"	8	9.8	11.70
"	2	18.8	13.80	(マカンバ)			
"	3	39.7	14.20	"			
"	4	48.5	18.40	(オウバボ)			
"	5	55.1	23.60	ダイジュ			
トドマツ	1	19.0	15.50	"			
"	2	42.4	25.40	(ハリギリ)			
合 計							44本

めである。このように多種についてもとめられた形状は、本文における供試木（元供試木）のしめした形状よりも、より広く分布することが予想される。本文においてもとめられた種々の結論が、それ以外の幹形に対しても妥当であるかどうかを検討することが、この適応実験の主な目的である。

元供試木の幹形をしめすと、図 I のとおりである。個々の供試木は、直径、樹高ともに異なるから、それらを同一の尺度で図上にもとめたのでは、幹形の比較を明確にはなしえない。ために、図 I においては、基準値算定のためにもとめられた 0.2m 間隔の直径測定値をもちいて、個々の供試木についての形状をもとめ（半径の拡大比：2，樹高の縮小比：1/40），ついで、各供試木の樹高について、共通の単位の長さを図上にとり、その単位樹高のもとに、投影と同様の操作によって、形状の伸縮をおこなった。換言すれば、形状のちがいを瞭然とさせるために、樹高（横軸）の長さを一定にして、各供試木が、その単位の樹高を本来の樹高としたときにしめすはずの形状を個々にもとめたわけである。したがって、図 I にしめされる供試木個々の拡大、縮小の比

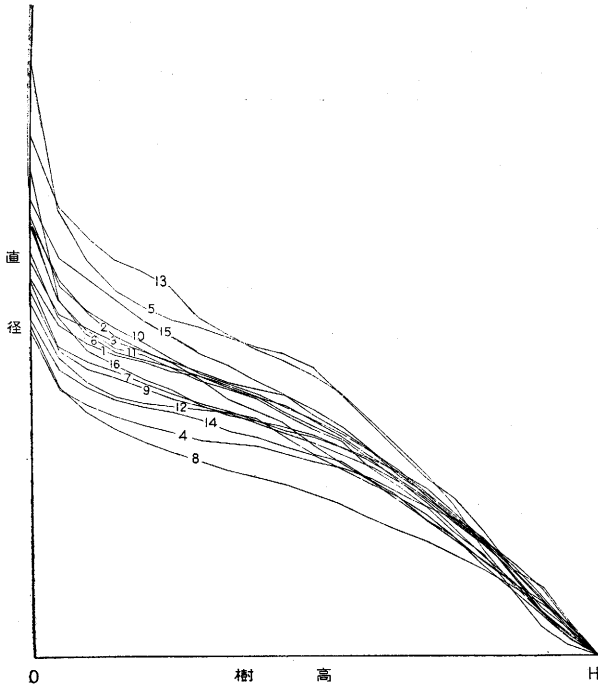


図 I 元供試木の幹形

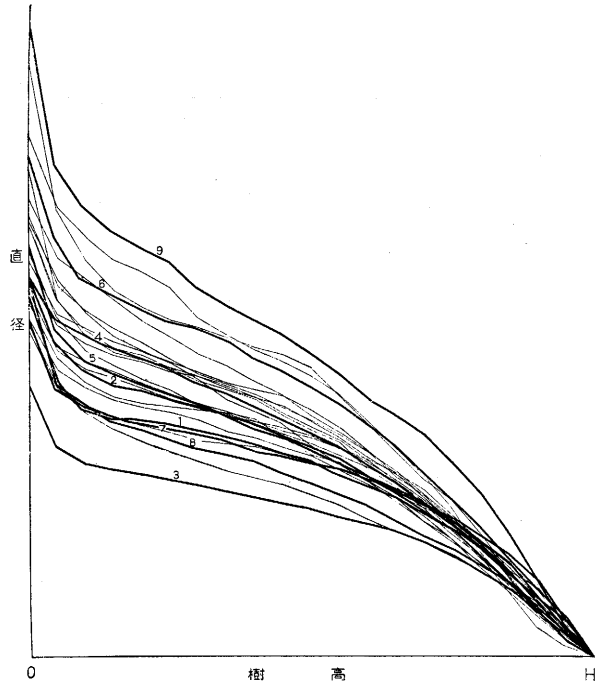


図 II 元供試木と新供試木（スギ）の幹形

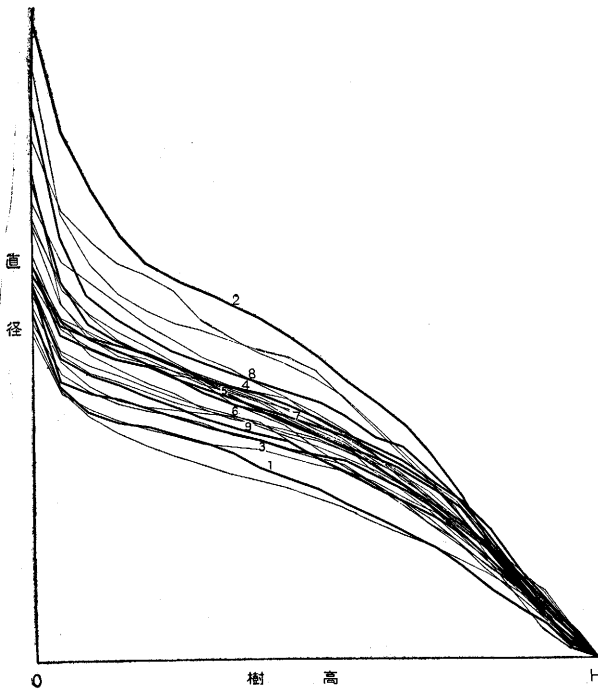


図 III 元供試木と新供試木（ヒノキ）の幹形

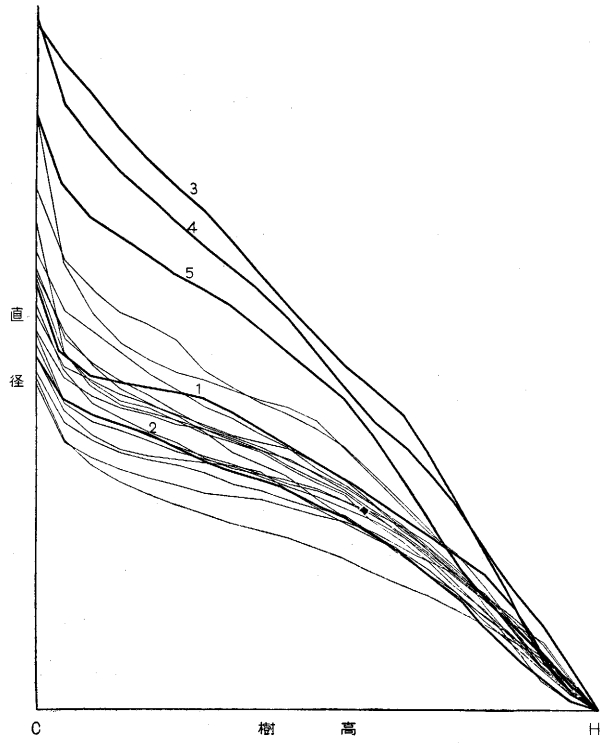


図 IV 元供試木と新供試木（ツガ）の幹形

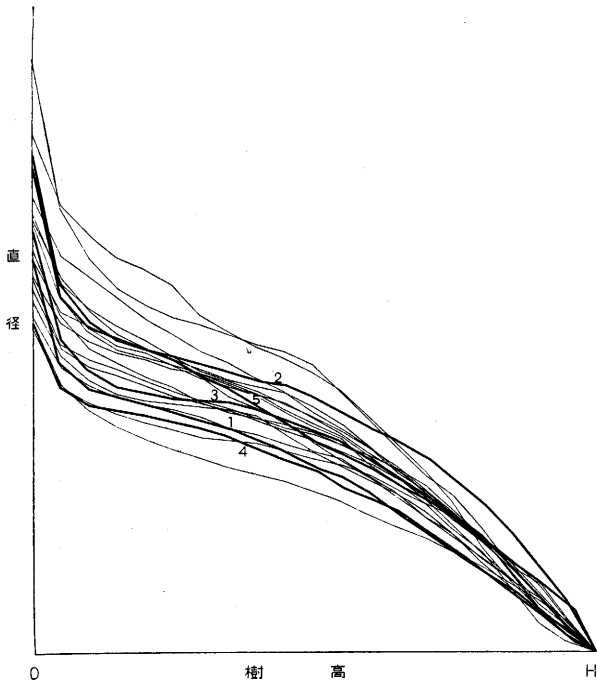


図 V 元供試木と新供試木 (トドマツ) の幹形

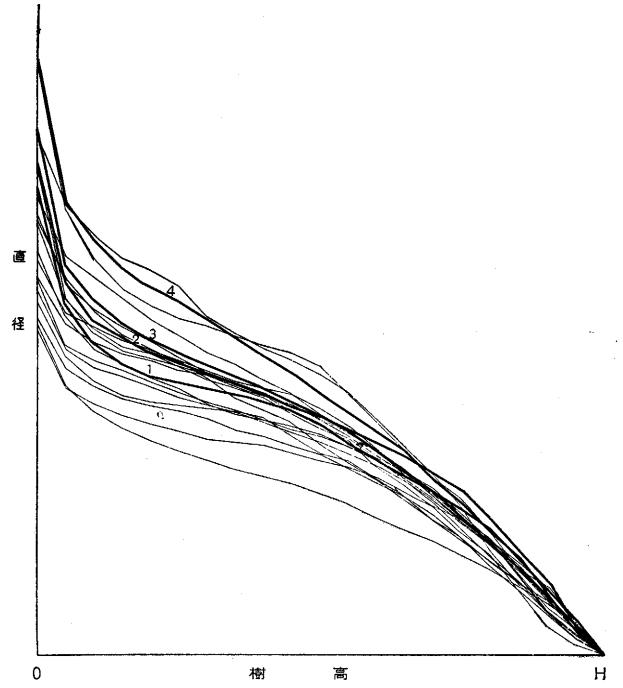


図 VI 元供試木と新供試木 (エゾマツ) の幹形

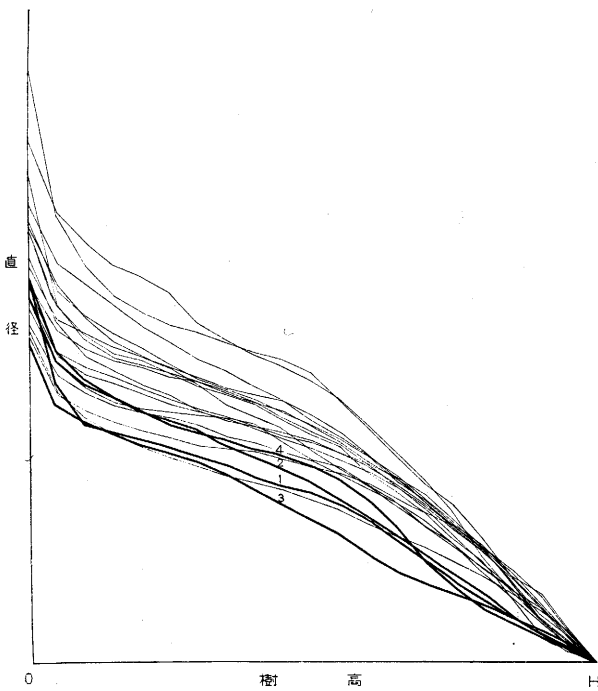


図 VII 元供試木と新供試木 (木シオジ) の幹形

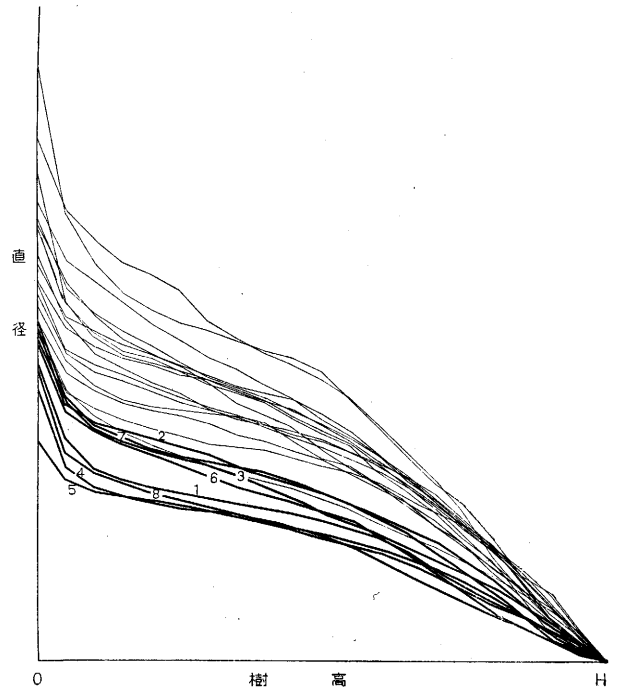


図 VIII 元供試木と新供試木 (北演広葉樹) の幹形

率は一樣ではない。

つぎに、新供試木についても、直径測定値をもちいて、元供試木に対したと同様の方法によってそれらの形状をもとめると、図 II～図 VIII が与えられる。図 II～図 VII において実線にてしめされた形状群は元供試木のものである。形状を適確に表現する量的目安がまだ与えられていないため、元供試木の形状と新供試木の形状との比較を図上の視察によっておこなうことにすれば、スギ 3 号木、9 号木 (図 II 参照)、ヒノキ 2 号木 (図 III 参照)、ツガ 3 号木、4 号木、5 号木 (図 VI 参照)、トドマツ 2 号木 (図 V 参照)、シオジ 3 号木、4 号木 (図 VII 参照)、北演広葉樹 1 号木、4 号木、5 号木、8 号木 (図 VIII 参照) 等が、元供試木の形状群に比して、より梢殺なあるいはより完満な形状を呈するものと認められる。

その形状が、元供試木と同様とは認められない上記 13 本 (以下ス 3、ス 9、……、コ 8 と略記する) 以外の新供試木については、求積上の誤差も本文と同様な結果を与えるものと考えることができるから、本適応実験における求積誤差計算は、選別された新供試木 13 本についてのみおこなうことにする。

[0.3m 以上] については、本文におけると同様、右田式第 1 式 (測点間隔 0.2 m) をもちい、0 m 以上] における幹足材積 V' は次式

$$V'(\text{m}^3) = g_{0.1} \times 0.2 + \frac{1}{2}(g_{0.2} + g_{0.3}) \times 0.1 = 0.15708 d_{0.1}^2 + 0.03927(d_{0.2}^2 + d_{0.3}^2)$$

によってもとめることにすれば、選別供試木 13 本の基準値は、つぎのように算定される。なお、本適応実験においては、直径測定は 2 方向の輪尺測定とし、 $d_{0.1}$ 、 $d_{0.3}$ 等も実測した。

表 II 選別供試木一覧表

樹種	番号	基準値		胸高直径	樹高	胸高形数
		[0.3m 以上]	[0 m 以上]			
スギ	3	0.0471	0.0507	10.0	11.16	0.5862
"	9	0.8990	0.9572	37.9	17.75	0.4868
ヒノキ	2	0.0799	0.0907	15.7	8.30	0.5839
ツガ	3	0.7173	0.7619	39.7	14.20	0.4334
"	4	1.4018	1.4761	48.5	18.40	0.4343
"	5	2.3599	2.4512	55.1	23.60	0.4357
トドマツ	2	1.6306	1.7050	42.4	25.40	0.4754
シオジ	3	0.4952	0.5200	26.7	23.20	0.4002
"	4	0.9883	1.0302	35.2	25.70	0.4120
北演広葉樹	1	0.0614	0.0671	11.0	13.10	0.5388
"	4	0.2331	0.2473	18.1	21.40	0.4491
"	5	0.0792	0.0839	11.5	14.90	0.5416
"	8	0.0403	0.0446	9.8	11.70	0.5060

本文においては、数多くの求積式について誤差計算をおこなったが、本実験においてはその目

的から、いくつかの求積式を選出し、それらについて検討すれば十分と考えられるので、慣用の式として

[右田 (I), $h=0.1H$] [右田 (I), $h=0.2H$]

[Huber, $h=0.1H$] [Huber, $h=0.2H$]

[Smalian, $h=0.1H$] [Smalian, $h=0.2H$]

の6式、また、数値積分にもとづく求積式として、各測点間隔において比較的正確な推定値をしめした

[$a=0.00$, $b=0.10$] [$a=0.02$, $b=0.10$] [$a=0.04$, $b=0.10$]

[$a=0.04$, $b=0.20$] [$a=0.06$, $b=0.20$] [Gauss, $n=10$]

の6式をえらび、これらの諸式について誤差の推定をおこなった。

各式にもとづく推定結果はつぎのとおりである。なお、参考に測点間隔を2mに固定した場合についてもとめてみた。

○ 対象木材積が根元附近をふくまない場合

番 号	(Huber $h=0.1H$)		(Huber $h=0.2H$)		(Smalian $h=0.1H$)		(Smalian $h=0.2H$)	
	E	e	E	e	E	e	E	e
ス3	0.0469 ^{m⁸}	-0.42%	0.0466	-1.06	0.0478	1.49	0.0489	3.82
ス9	0.8905	-0.95	0.8730	-2.89	0.9223	2.59	0.9716	8.08
ヒ2	0.0793	-0.75	0.0789	-1.25	0.0809	1.25	0.0830	3.88
ツ3	0.7144	-0.40	0.7131	-0.59	0.7227	0.75	0.7322	2.08
ツ4	1.3892	-0.90	1.3863	-1.11	1.4278	1.85	1.4693	4.82
ツ5	2.3412	-0.79	2.3108	-2.08	2.3936	1.43	2.4764	4.94
ト2	1.6018	-1.77	1.5773	-3.27	1.6758	2.77	1.7752	8.87
シ3	0.4896	-1.13	0.4914	-0.77	0.5089	2.77	0.5263	6.28
シ4	0.9818	-0.66	0.9631	-2.55	1.0121	2.41	1.0612	7.38
コ1	0.0604	-1.63	0.0587	-4.40	0.0631	2.77	0.0674	9.77
コ4	0.2302	-1.24	0.2253	-3.35	0.2422	4.03	0.2590	11.11
コ5	0.0787	-0.63	0.0778	-1.80	0.0800	1.01	0.0823	3.91
コ8	0.0398	-1.24	0.0391	-2.98	0.0411	1.99	0.0432	7.20

番 号	(右田 (I) $h=0.1H$)		(右田 (I) $h=0.2H$)		($a=0.00$ $b=0.10$)		($a=0.02$ $b=0.10$)	
	E	e	E	e	E	e	E	e
ス3	0.0471	0.00	0.0471	0.00	0.0474	0.64	0.0470	-0.21
ス9	0.8989	-0.01	0.8950	-0.44	0.9081	1.01	0.9019	0.32
ヒ2	0.0797	-0.25	0.0804	0.63	0.0799	0.00	0.0799	0.00
ツ3	0.7165	-0.11	0.7207	0.47	0.7183	0.14	0.7139	-0.47
ツ4	1.3980	-0.27	1.4107	0.63	1.4131	0.81	1.3996	-0.16
ツ5	2.3547	-0.22	2.3491	-0.46	2.3684	0.36	2.3671	0.31
ト2	1.6247	-0.36	1.6331	0.15	1.6542	1.45	1.6323	0.10
シ3	0.4939	-0.26	0.5026	1.49	0.5009	1.15	0.4935	-0.34
シ4	0.9906	0.23	0.9862	-0.21	0.9975	0.93	0.9886	0.03
コ1	0.0611	-0.49	0.0605	-1.47	0.0618	0.65	0.0617	0.49
コ4	0.2333	0.09	0.2334	0.13	0.2363	1.37	0.2328	-0.13
コ5	0.0791	-0.13	0.0788	-0.51	0.0794	0.25	0.0792	0.00
コ8	0.0402	-0.25	0.0401	-0.50	0.0405	0.50	0.0404	0.25

番号	$\left(\begin{array}{l} \alpha=0.04 \\ b=0.10 \end{array}\right)$		$\left(\begin{array}{l} \alpha=0.04 \\ b=0.20 \end{array}\right)$		$\left(\begin{array}{l} \alpha=0.06 \\ b=0.20 \end{array}\right)$		Gauss $(n=10)$		$h=2m$	
	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>
ス3	0.0467	-0.85	0.0472	0.21	0.0471	0.00	0.0469	-0.42	0.0471	0.00
ス9	0.8942	-0.53	0.9103	1.26	0.9037	0.52	0.8964	-0.29	0.9036	0.51
ヒ2	0.0798	-0.13	0.0810	1.38	0.0811	1.50	0.0797	-0.25	0.0813	1.75
ツ3	0.7145	-0.39	0.7184	0.15	0.7246	1.02	0.7176	0.04	0.7159	-0.20
ツ4	1.3969	-0.35	1.4056	0.27	1.3974	-0.31	1.3981	-0.26	1.3987	-0.22
ツ5	2.3543	-0.24	2.3533	-0.28	2.3291	-1.31	2.3570	-0.12	2.3686	0.37
ト2	1.6128	-1.09	1.6379	0.45	1.6237	-0.42	1.6372	0.40	1.6398	0.56
シ3	0.4925	-0.55	0.4924	-0.16	0.4919	-0.67	0.4941	-0.22	0.4946	-0.12
シ4	0.9856	-0.27	0.9849	-0.34	0.9752	-1.33	0.9864	-0.19	0.9891	0.08
コ1	0.0607	-1.14	0.0613	-0.16	0.0604	-1.63	0.0612	-0.33	0.0614	0.00
コ4	0.2341	0.43	0.2384	2.27	0.2316	-0.64	0.2337	0.26	0.2331	0.00
コ5	0.0790	-0.25	0.0796	0.51	0.0794	0.25	0.0794	0.25	0.0794	0.25
コ8	0.0401	-0.50	0.0404	0.25	0.0403	0.00	0.0403	0.00	0.0400	-0.74

○ 全樹幹材積を対象とした場合

番号	(Huber $h=0.1H$)		(Huber $h=0.2H$)		(Smalian $h=0.1H$)		(Smalian $h=0.2H$)	
	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>
ス3	0.0498	-1.78	0.0495	-2.37	0.0533	5.13	0.0571	12.62
ス9	0.9407	-1.72	0.9100	-4.93	1.0125	5.78	1.1149	16.48
ヒ2	0.0891	-1.76	0.0892	-1.65	0.0944	4.08	0.0996	9.81
ツ3	0.7564	-0.72	0.7559	-0.79	0.7688	0.91	0.7817	2.60
ツ4	1.4612	-1.01	1.4514	-1.67	1.5130	2.50	1.5747	6.68
ツ5	2.4296	-0.88	2.3845	-2.72	2.4981	1.91	2.6116	6.54
ト2	1.6599	-2.65	1.6227	-4.83	1.7975	5.43	1.9724	15.68
シ3	0.5103	-1.87	0.5084	-2.23	0.5490	5.58	0.5897	13.40
シ4	1.0149	-1.49	0.9895	-3.95	1.0714	4.00	1.1533	11.95
コ1	0.0658	-1.94	0.0621	-7.45	0.0707	5.37	0.0794	18.33
コ4	0.2415	-2.35	0.2350	-4.97	0.2668	7.89	0.2985	20.70
コ5	0.0827	-1.43	0.0816	-2.74	0.0868	3.46	0.0919	9.54
コ8	0.0436	-2.24	0.0419	-6.05	0.0480	7.62	0.0540	21.08

番号	(右田(I) $h=0.1H$)		(右田(I) $h=0.2H$)		$\left(\begin{array}{l} \alpha=0.00 \\ b=0.10 \end{array}\right)$		$\left(\begin{array}{l} \alpha=0.02 \\ b=0.10 \end{array}\right)$	
	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>
ス3	0.0505	-0.39	0.0511	0.79	0.0521	2.76	0.0506	-0.20
ス9	0.9589	0.18	0.9542	-0.31	0.9814	2.53	0.9567	-0.05
ヒ2	0.0904	-0.33	0.0925	1.98	0.0921	1.54	0.0912	0.55
ツ3	0.7593	-0.34	0.7650	0.41	0.7636	0.22	0.7611	-0.11
ツ4	1.4736	-0.17	1.4848	0.59	1.4918	1.06	1.4848	0.59
ツ5	2.4482	-0.12	2.4353	-0.65	2.4641	0.53	2.4572	0.24
ト2	1.6931	-0.70	1.7031	-0.11	1.7387	1.98	1.7208	0.93
シ3	0.5188	-0.23	0.5287	1.67	0.5342	2.73	0.5193	-0.13
シ4	1.0291	-0.11	1.0251	-0.50	1.0474	1.67	1.0322	0.19
コ1	0.0672	0.15	0.0656	-2.24	0.0682	1.64	0.0671	0.00
コ4	0.2475	0.08	0.2493	0.81	0.2562	3.60	0.2465	-0.32
コ5	0.0836	-0.36	0.0837	-0.24	0.0852	1.55	0.0840	0.12
コ8	0.0447	0.22	0.0446	0.00	0.0460	3.14	0.0447	0.22

番号	$\left(\begin{matrix} a=0.04 \\ b=0.10 \end{matrix}\right)$		$\left(\begin{matrix} a=0.04 \\ b=0.20 \end{matrix}\right)$		$\left(\begin{matrix} a=0.06 \\ b=0.20 \end{matrix}\right)$		(Gauss $n=10$)		$h = 2 \text{ m}$	
	E	e	E	e	E	e	E	e	E	e
ス 3	0.0501	-1.18	0.0505	-0.39	0.0499	-1.58	0.0505	-0.39	0.0506	-0.20
ス 9	0.9466	-1.11	0.9663	0.95	0.9536	-0.38	0.9587	0.16	0.9672	1.04
ヒ 2	0.0900	-0.77	0.0908	0.11	0.0904	-0.33	0.0910	0.33	0.0901	-0.66
ツ 3	0.7578	-0.54	0.7597	-0.29	0.7620	0.01	0.7629	0.13	0.7594	-0.33
ツ 4	1.4673	-0.60	1.4781	0.14	1.4674	-0.59	1.4685	-0.51	1.4862	0.68
ツ 5	2.4482	-0.12	2.4609	0.40	2.4161	-1.43	2.4426	-0.35	2.4561	0.20
ト 2	1.6718	-1.95	1.7047	-0.02	1.6791	-1.52	1.7084	0.20	1.7163	0.66
シ 3	0.5146	-1.04	0.5162	-0.73	0.5108	-1.77	0.5192	-0.15	0.5222	0.42
シ 4	1.0203	-0.96	1.0216	-0.83	1.0108	-1.88	1.0293	-0.09	1.0333	0.30
コ 1	0.0671	0.00	0.0679	1.19	0.0653	-2.68	0.0666	-0.75	0.0676	0.75
コ 4	0.2419	-2.18	0.2453	-0.81	0.2408	-2.63	0.2450	-0.93	0.2487	0.57
コ 5	0.0833	-0.72	0.0835	-0.48	0.0836	-0.36	0.0832	-0.83	0.0837	-0.24
コ 8	0.0441	-1.12	0.0448	0.45	0.0436	-2.24	0.0443	-0.67	0.0442	-0.90

上記した推定結果を、§5・2にしめされる本文における結果と対比すると、Smalian 式において多少大きな値がみられる以外は、正負の傾向、誤差率の大きさ等について特にひらきがあるとは考えられない。新たに選別された供試木は、元供試木に比して、その形状を異にするとおもわれるものばかりであるが、そのちがいは区々であるため、それらを平均化することをさけて、個々の誤差率について検討してみると、それらの殆んどは、§6・4にしめされる許容限界の範囲内に含まれている。

このようなことから、本文において与えられた種々の実験結果は、新供試木におけるように、木の対象の形状をより広く与えた場合についても大差なく適用しうるものと考えられるであろう。

摘 要

1) 長材について正確な材積をえようとする場合にもちいられる求積法の1つである Smalian 式の区分求積法は、数値積分法における梯形公式を求積上たぐみに応用したものと看做することができる。梯形公式は、内挿法による積分法の1つの場合であるが、この他数値積分の分野においては、ふるくからもちいられている Chebyshev 公式、Gauss 公式等の平均値法による積分法あるいは、近年考えられその応用範囲をより広いものにした最小2乗法にもとづく移動平均法等がある。梯形公式を単木の求積にあてはめたものが Smalian 式であるのと同様にして、このような各種の数値積分公式にもとずいて多くの求積式をもとめることができる。また、幹曲線方程式に準拠した求積法において、従来からもちいられてきた解法によると、その数値計算は極度に煩雑なものであったが、それに対して、直交多項式を応用すると、解式は表の係数もちいて直接的にしかも実用上便利な形としてあたえられる。

本文は、このようにして考えられた3つの手法をことにする求積方法——移動平均法、直交多項式の数表を利用する方法、平均値法——を、最も有用と考えられる移動平均法による場合を主

体して記したものである。本文に示した求積法のもつ特徴は、たとえ解析的に解くことが困難な場合でも、一律にその解の数値をしることができ、しかも、実行に要する労力は、多くの場合、解析的な解式から数値を計算する労力に比してはるかに少いことである。

2) 移動平均法にもとづく求積法は、つぎのようにしてあたえられる。

その積分理論から、等間隔の k 個の点 $x, x+h, x+2h, \dots, x+(k-1)h$, における観測値 $y_1, y_2, y_3, \dots, y_k$ および表 1・1 に示される積分用係数によって、つぎのような積分値の推定することができる。

$$I_{\alpha h}^{\beta h} = \int_{\alpha h}^{\beta h} f(x) dx = \frac{h}{D} C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_k y_k$$

ここに、 $f(x)$ は局部的に適当な次数の多項式で近似でき、しかも、 y_1, y_2, \dots, y_k の間には相関々係はないものとする。

したがって、たとえば、 $k=5$ とした場合 $(\alpha, \beta) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ は図 1・1 の斜線の部分の面積を示すことになり、その積分値は、もし 3 次曲線近似を仮定すれば

$$\begin{aligned} I_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} &= \frac{h}{D} \{C_{-2} y_1 + C_{-1} y_2 + C_0 y_3 + C_1 y_4 + C_2 y_5\} \\ &= \frac{h}{840} \{-62y_1 + 283y_2 + 398y_3 + 283y_4 - 62y_5\} \end{aligned}$$

としてあたえられる。

さて、樹幹の横断面を正円と仮定し、また、 x を樹幹の一端よりの距離、 y を x の部位における直径の 2 乗、 H を全長とすれば、幹材積 V は、つぎのように示される。

$$V = \frac{\pi}{4} \int_0^H y dx$$

図 1・2 において、対象の基部 x_0 より x 軸上 aH はなれた部位を x_{aH} として、以下、 bH 間隔にとられた点 x_{aH}, x_{aH+bH}, \dots における直径の 2 乗を y_{aH}, y_{aH+bH}, \dots とし、また、便宜上全長 H をこえる x を考え、それらの点における y の値を 0 としよう。なお、 $a < b$ として、 b の値は 0.05~0.10 とする。

$$V = \frac{\pi}{4} \int_{x_0}^{x_H} y dx = \frac{\pi}{4} I$$

を推定するのに、まず、 $y_{aH+\frac{3}{2}bH}, x_{aH+\frac{5}{2}bH}, \dots$ を分岐点として、 I を図示したような小面積に分割する。それぞれの小面積を $I(1), I(2), \dots$ として、それらの分割面積をもとめるのに、近接する 5 個の測点における観測値をもちいることにすれば

$$I(2) = \frac{bH}{D} \{C_{-2} y_{aH} + C_{-1} y_{aH+bH} + C_0 y_{aH+2bH} + C_1 y_{aH+3bH} + C_2 y_{aH+4bH}\}$$

以下、同様にして $I(3)$, $I(4)$, … はもとめられるから, $I_{aH + \frac{3}{2}bH}^H = I(2) + I(3) + \dots$ は, (1・2・3) 式として示される。つぎに, 最初の 5 点における観測値をもちいて $I_{0 + \frac{3}{2}bH}^H = I(1)$ をもとめると, この場合の係数を D' , C' として

$$I(1) = \frac{bH}{D'} \left\{ C_{-2}' y_{aH} + C_{-1}' y_{aH+bH} + C_0' y_{aH+2bH} + C_1' y_{aH+3bH} + C_2' y_{aH+4bH} \right\}$$

したがって, 全体の面積 I は, (1・2・5) 式としてあたえられる。

各分割面積を推定するのにもちいた各 5 個の測点における中央の点を 0 とし, その両側の 4 点を -2 , -1 , 1 , 2 とおけば, $I(2)$, $I(3)$, … の積分に対しては, 表 1・1 の $(\alpha, \beta) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ の係数が使用できる。また, $I(1)$ に対する係数は, 一般式をもちいて, (1・2・9) 式のようにもとめられるから, これらの各値を (1・2・5) 式に代入して, I は (1・2・10) 式としてもとめられる。したがって, V は (1・2・11) 式としてあたえられる。

たとえば, $a=0.02$, $b=0.10$ とおくと (1・2・12) 式がもとめられ, y の単位を m^2 とし, H を m とすれば, V は m^3 単位であたえられる。

同様にして, 適宜 a , b の値をかえた場合の求積式が, §1・2・1 a に示される。

§1・2・1 a に示される求積式は, b の値を $0.05 \sim 0.10$ と想定して導かれたものであるが, b の値がより大きい場合, すなわち, $0.15 \sim 0.20$ とした場合の求積式も同様にしてもとめられ, それらは §1・2・1 b に示される。 b の値が大きい場合の求積式は, 各分割面積の推定に近接する 3 個の観測値をもちい, 観測値間をとる曲線としては, 2 次式を仮定して導かれたものである。

間隔 h を $1m$ あるいは $2m$ というように, H に関係なく定めた求積式も, 測点の指標として, aH , bH をもちいた場合と全く同様にしてもとめられる。この場合においては, 前記の aH , bH を, たとえば $0.3m$, $1m$ として考えてゆけばよい。前記 $b=0.05 \sim 0.10$ に対応して, 測点数 n が 10 程度以上に大きい場合に対しては, 表 1・1 の積分用係数 (5 点, 3 次) を, また, $b=0.15 \sim 0.20$ に対応して n が 5, 6 というように小さい場合に対しては (3 点, 2 次) をもちい, 対象の基部より最初の測点までの距離 X および h の値を適宜かえた場合の求積式が, §1・2・1 e に示される。

以上, §1・2・1 a, §1・2・1 b, §1・2・1 e に示した求積式は, いずれも あたえられた点 x_{aH} , x_x を基点として, 以下, 等間隔にとられた測点における観測値をもちいるものであったが, 測点の間隔を不等にとった場合の求積式をもとめると §1・2・2 のとおりである。一般に, 間隔を不等にした場合の誘導法としては, 表 1・1 に示される等間隔の場合の積分用係数を援用すなわち, 種々の間隔について等間隔の場合の求積式をもとめ, それらを適宜組合せる方法と, する方法, 不等の場合について積分用係数そのものをつくりかえる 2 通りの方法が考えられる。[1・75] 式, [1・76] 式は, はじめの方法による例として, 根元附近の間隔をより小さくしたもののた, [1・77] 式~[1・80] 式は, 2 番目の誘導法にもとづいて測点を適宜あたえた場合のもの

であり、まである。

3) 表 2・1 は、直交多項式の数表を利用する方法においてもちいられる直交多項式の係数表である。これらの数値をもちいての求積式の誘導は、つぎのようにしておこなわれる。

まず、 x を梢端よりの距離、 r を x の距離における半径とし、幹曲線方程式を

$$r^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$$

として考察する。ここに、幹材積 V は

$$V = \pi \int_0^H r^2 dx$$

としてあたえられる。

k を等間隔にとられた測点数として、直交多項式の公式をもちいれば、上式は

$$r^2 = b_0 + b_1(x - \bar{x}) + b_2 \left\{ (x - \bar{x})^2 - \frac{k^2 - 1}{12} h^2 \right\} \\ + b_3 \left\{ (x - \bar{x})^3 - \frac{3k^2 - 7}{20} (x - \bar{x}) h^2 \right\}$$

として示されるから、たとえば、 $k=11$ 、 $h=0.1H$ とすると

$$r^2 = b_0 + b_1 \left(x - \frac{1}{2} H \right) + b_2 \left(x^2 - x \cdot H + \frac{3}{20} H^2 \right) \\ + b_3 \left(x^3 - \frac{3}{2} H \cdot x^2 + \frac{1144}{2000} H^2 \cdot x - \frac{144}{4000} H^3 \right)$$

したがって、 V は

$$V = \pi \int_0^H r^2 dx = \pi \left(b_0 H - \frac{1}{60} b_2 H^3 \right)$$

としてあたえられる。ここに、 b_0 、 b_2 は係数についての公式および表 2・1 によって

$$b_0 = \frac{1}{11} (r_0^2 + r_{0.1H^2} + r_{0.2H^2} + \dots + r_H^2) \\ b_2 = \frac{1}{858 \times 0.01 H^2} (15r_0^2 + 6r_{0.1H^2} - r_{0.2H^2} - 6r_{0.3H^2} - 9r_{0.4H^2} - 10r_{0.5H^2} \\ - 9r_{0.6H^2} - 6r_{0.7H^2} - r_{0.8H^2} + 6r_{0.9H^2} + 15r_H^2)$$

として示されるから、これらの値を上式に代入すれば [2・1] 式がもとめられる。

すなわち、[2・1] 式は、 $h=0.1H$ 間隔にとられた 11 個の測点における観測値 $r_0, r_{0.1H}, \dots, r_H$ をもちいて、幹曲線式 $r^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$ における係数 a, b, c, d を最小 2 乗法にもとめて決定し、その結果もとめられる材積式を、実用上、利用しやすい形にしてあたえたものである。[2・2] 式、[2・3] 式、[2・4] 式は、このような誘導法によって、 k および h のいくつかの場合についてもとめられたものである。

Breymann, Simony, Rieke 等の求積式は、いずれも前記の幹曲線式を想定してもとめられたものであるが、それらの各式も直交多項式をもちいて容易に導くことができる。

直交多項式の数表を利用する方法における2番目の場合として、幹曲線方程式を

$$r = ax + bx^2 + cx^3$$

とにおいて考えると、この場合における求積式の誘導は、前の場合に比して多少煩雑になる。それは、上式において $x=0$ における r の値は 0 であることから、 $z = \frac{r}{x}$ なる x の関数をあらためて考え、 $x=0$ における z の値に対して、特別な考慮をばらう必要があるからである。それ以外の手続きは、前の場合と同様であり、かくしてもとめられた求積式が、 $\pi \times (2 \cdot 2 \cdot 14)$ 式およびそれに附随する [2・5] 式 ([2・5 A], [2・5 B], [2・5 C]) である。実用上は、[2・5] の各式において H を除外した値を計算して (2・2・20) 式における括弧内の値をもとめ、しかるのちに πH の値を乗ずるようにした方が便利であろう。

本文においては、これらの他に幹曲線式を $r^2 = a + bx$, $r^2 = a + bx + cx^2$ とした場合についても考察したが、同様な誘導法によって、幹曲線の形を別にした場合、あるいは、間隔、測点のとり方等を異にした場合の求積式を適宜もとめることができる。

4) 平均値法にもとづく求積式の誘導は容易である。たとえば、Newton-Cotes 公式についてみると、その公式は、 $y_i = f(x_i) = f(x_1 + ih)$, ($i=0, 1, 2, \dots, n$) とすれば、一般に

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x) dx = K \cdot h (C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n)$$

として示され、もちいる係数 C_i および K の値は表 3・1 にあたえられるから、幹材積 V は、 y_i を直径の2乗と考えることによって

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{4} \int_{x_1}^{x_n} y dx \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot K \cdot h (C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n) \end{aligned}$$

したがって、全長 H を10等分した場合を考えれば、 $h=0.1H$, $n=11$ であるから、表 3・1 によって [3・1] 式がもとめられる。Weddle の公式は、上式において $n=7$ の場合としてあたえられる。

Gauss 公式の利用も同様にしておこなわれる。ただこの公式による求積にさいしては、(3・2・3) 式および表 3・2 によって、測点 x_i が定められることを注意しなければならない。

5) 以上、本文においては、数多くの求積式を誘導記載したが、それらを実際にもちいた場合に生起する誤差について考察するとつぎのとおりである。

本実験においては、対象木材積として

i) 根元より 0.3m はなれた部位を対象樹幹の基部として、他端を梢端とした場合。([0.3m 以上])

ii) 根元以上の全樹幹材積を対象とした場合。([0 m 以上])

の2通りの場合を想定したが、それぞれの場合における各種求積式にもとづく推定値 $E(m^3)$ および誤差率 $e(\%)$ は §5・2・1, §5・2・2 に示される。求積式は略記されているが、たとえば、 $[a=\alpha, b=\beta]$ は、移動平均法をもちいる求積式において、最初の測点を、対象の基部より αH の距離にとり、以下、 βH 間隔に測点をとった場合を示している。

移動平均法において、 b の値を 0.1, 0.2 とした場合の e の平均 \bar{e} と a との関係は、 a が $0 \sim \frac{1}{2}b$ の範囲内においては図 6・1~6・4 のように示される。その傾向は、1次式で近似され、 a を種々にかえた場合の平均的な誤差の大きさは、表 6・2, 6・4, 6・6, 6・8 のとおりである。その他の求積式について期待される誤差の大きさを示したものが表 6・9, 6・10, 6・11 である。誤差率算定にもちいた基準値の性質から、それらの値はそのまま各求積式のもつ偏りの推定値と看做することができる。

また、各求積式について、平均2乗誤差を推定すると、表 6・12 がもとめられる。平均2乗誤差は、推定値のもつ偏りの2乗と分散の和としてあたえられるから、その値の小さい式ほど精度上はこのまじいと考えられる。同表によると、[0.3m以上] において良好な推定値をあたえる求積式は、[0m以上] においても良好な結果を示している。また、[0m以上] に比して、[0.3m以上] における平均2乗誤差ははるかに小さい。

このような精度上の結果に実行上の難易を考慮して、有用と考えられる式をえらぶと、測点数 n が 10 程度の場合においては [右田(I), $h=0.1H$], [$a=0.02, b=0.10$] が、 n が 7 程度の場合においては [$a=0.04, b=0.15$] が、また、 n が 5 程度の場合においては [$a=0.04, b=0.20$], [$a=0.06, b=0.20$], [右田(I), $h=0.2H$] 等がこのまじいとおもわれる。

各種求積式について許容限界をもとめると表 6・13 があたえられる。これは、ある信頼度の下で1回の測定において期待される e の大きさを示している。

対象木の大きさと誤差率との関係についてもしらべたが、本実験にもちいた供試木の大きさ程度の求積においては、その関係についてとくに考慮する必要はないようにおもわれる。

本実験における供試木は、水戸営林署太田経営区内のスギ、ヒノキそれぞれ人工林よりえらばれた計16本である。本数については、計画上あらかじめ15本程度に限定したが、これは求積式自体の誤差の真値を確定することが実験上の目的ではなく、提示した各種の求積式を実用上の見地から比較検討することを主目的としたためである。このため良質の少数をあつめるべく供試木の選定については特に注意した。対象樹種として、本実験においてはスギ、ヒノキをとりあげたが、これも樹種間の差を見出そうとしたためではなく、実験の対象として幹形に巾をもたせようとしたためである。

試料の吟味がなされずにいたずらに大数をとることは無意味であろうし、また、実用上の見地からは、高精度の分析のみがのぞまれるとは考えられない。

対象木材積は、前記したとおり2通りの場合を想定したが、基準値をもとめるための算定式と

しては、i) の場合に対しては右田式求積式第1法、測点間隔0.2mをもちいた。ii) に対しては、根元附近の部分材積を Smalian 式によって別途計算し、その値と i) における値との和をもって基準値とした。それらの値は表5・1に示される。

6) 移動平均法について、本文においては、 b の値を0.05, 0.10, 0.15, 0.20とした4つの場合について検討したが、それぞれの場合についてこのましい a の範囲が考えられた。それらの値は、表 b (考察)に示されるが、 $p = -\frac{a}{b}$ とにおいて、同表における a の値を b の各層毎に b に対する比の値として示しなおすと、表 c がもとめられる。表 c によると、 $b \leq 0.20$ において、 p の範囲は、各場合とも必ずしも一定ではないが、その範囲は、 b の増大につれて漸減してゆくようになりみうけられる。また、 $b = 0.05$ の場合を別にすれば、その両限の値は、 b の値に比例して少しずつ大きな値をとる傾向を示している。それぞれの範囲において、共通の p の値は0.25であるから、一般的にいって、 b が0.20よりも小さい場合におけるこのましい a の値はその $\frac{1}{4}$ ということができる。

このような結果は、§1・2・1eに示される間隔 h を1m, 2m等とおいた求積式の利用に対して重要な示唆をあたえる。すなわち、間隔を H に関係なく定めた求積における最初の測点のとるべき部位は、表 c の p の値によって指向されるからである。たとえば、求積の対象を[0.3m以上]として、全長 H を20m, $h = 2$ mとすれば、このましいその値 X は

$$0.05 \times 2 \text{ m} \sim 0.25 \times 2 \text{ m} = 0.1 \text{ m} \sim 0.5 \text{ m}$$

としてあたえられる。したがって、本文に掲げた求積式としては、 $[X = 0.3 \text{ m}, h = 2 \text{ m}]$, $[X = 0.4 \text{ m}, h = 2 \text{ m}]$ がえらばれることになる。本文においては、 X , h の、ある限られた組合せに対する求積式のみ記載されているため、実行に際して、必ずしも算出された X の範囲に該当する式はあたえられないかもしれないが、そのような場合においては、その範囲に近い X をあたえる求積式をもちいることがのぞましい。

表 b の a の範囲における推定値の分散をしらべると、その値は b の値に比例して増大する傾向を示している。このようなことから、測点数 n は、求積式のもつ正確さよりもむしろ精度に影響をあたえるものと考えられる。

7) 上記した実験的な結論が、いろいろな幹形に対しても妥当であるかどうかを検討するために適応実験がおこなわれた。この適応実験にもちいられた供試木は、千葉演習林内よりのスギおよびヒノキ各9本、北海道演習林内よりのトドマツ5本、エゾマツ4本、広葉樹8本、秩父演習林内よりのツガ5本およびシオジ4本、合計44本である。これら供試木の胸高直径および樹高は表Iのとおりである。

本文においてもちいられた元供試木と、これら新供試木の幹形について、図上の比較をおこなう(図I～図VIII参照)、元供試木とその幹形を異にするとおもわれるもの計13本を選別して、そ

れらについて誤差計算がおこなわれた。その結果によると、求積対象木の幹形が極端に完満あるいは極端に梢殺な場合についても、第5章、第6章においてえられた実験結果は、大差なく適用しうるものと考えられる。

参 考 文 献

- 麻生 誠：1933. カラマツの単木幹材積表調製. 林試報 **33**, 103-126.
- BAKER, F. S. : 1953. Stand density and growth. Jour. For. **51**, 95-97.
- BRUCE, D. & SCHUMACHER, F. X. : 1950. Forest mensuration.
- BUCKINGHAM, R. A. : 1957. Numerical methods.
- CHAPMAN, H. H. & DEMERITT, D. B. : 1936. Elements of forest mensuration.
- CHAPMAN, H. H. & MEYER, W. H. : 1949. Forest mensuration.
- FERGUSON, J. H. A. : 1949. Wolff von Wülffing's stem form auxiliary tables. Byzondore Publicaties van het Bosbouwproefstation. (Indonesia). **3**.
- FERGUSON, J. H. A. : 1954. Consideration of the computation of diameter growth by diameter classes from stand tables. Commu. For. Res. Inst. (Indonesia). **46**.
- HARTREE, D. R. : 1955. Numerical analysis.
- 畑村・津村・奥野・田中訳. 1952. 統計的方法 (Snedecor) 上, 下.
- HERRICK, A. M. : 1945. A numerical evaluation of stand structure. Jour. For. **43**, 891-899.
- 日高 孝次 : 1948. 数値積分法 上.
- HILDEBRAND, F. B. : 1956. Introduction to numerical analysis.
- 本間 仁・春日屋伸昌 : 1957. 次元解析・最小2乗法と実験式. 応用数学講座 **5**.
- HOTTA, Y. & MAEZAWA, K. : 1954. The error of basal area effected by method of estimation. 東大演報 **46**, 145-157.
- HUMMEL, F. C. : 1955. The volume-basal area line. A study in forest mensuration. Forestry Commission Bulletin **24**.
- KER, J. W. : 1953. The relationship between the number of trees per acre and the percentage stocking of reproduction. Jour. For. **51**, 342-344.
- KER, J. W. : 1953. Growth of immature douglas fir by tree classes. Forestry Chronicle **29**, 367-373.
- 木梨 謙吉 : 1954. 推計学を基とした測樹学.
- 前沢完次郎 : 1953. 胸高断面積の括約誤差について. 日林誌 **35**, 160-164.
- 増山元三郎 : 1953. 少数例のまとめ方.
- MEYER, H. A. : 1940. A mathematical expression for height curves. Jour. For. **38**, 415-420.
- MILNE, W. E. : 1949. Numerical calculus.
- 嶺 一三 : 1932. 輪尺及巻尺の個人的測定誤差に就て. 日林誌 **14**, 529-545.
- 嶺 一三 : 1933. 輪尺及巻尺の個人的測定誤差に関する研究. 東大演報 **16**, II.
- 嶺 一三 : 1935. 測高器使用の際に生ずる個人的測定誤差の研究. 東大演報 **21**, 119-231.
- 嶺 一三 : 1952. 測樹.
- 森口 繁一訳 : 1951. 推計学によるデータのまとめ方 (Deming).
- 森口 繁一・高田 勝 : 1958. 数値計算法 I. 現代応用数学 B. **13**. I.
- 中島 広吉 : 1942. 編成法を異にせる単木材積表の比較研究. 北大演研報. **XII**, **2**, 167-207.
- 中山 博一 : 1957. 林木材積測定学.
- 小倉金之助 : 1933. 計算法及びものぐらふいー. 岩波講座, 数学 I—VIII.
- 長内 力 : 1956. 樹高曲線によるトドマツ立木幹材積表について. 林試北海道支場業務報告 **5**, 77-82.

- 大隅 真一 : 1954. 括約誤差に関する研究. 京大演報 **24**, 1-54.
- 大隅 真一 : 1960. 形状高の測定とその林分材積推定への応用について. 京府大演集報 **4**, 13-24.
- 大友 栄松 : 1956. 材積表調製に関する研究(I). 日林誌 **38**, 165-177.
- PRODAN, M. : 1951. Messung der Waldbestände.
- REINEKE, L. H. : 1926. The determination of tree volume by planimeter. Jour. For. **24**, 183-189.
- 林野庁 : 1957. 青森営林局広葉樹立木材積表調製説明書. 材積表調製業務資料 1.
- SCHUMACHER, F. X. : 1939. A new growth curve and its application to timber yield studies. Jour. For. **37**, 819-820.
- 扇田・中村・高原・佐藤 : 1952. 林分の生産構造の研究(予報)——アカマツ植栽疎密試験地に於ける若干の解析——. 東大演報 **43**, 49-57.
- 扇田 正二・佐藤大七郎 : 1956. 林分生長論資料(II). いろいろなツヨサの間伐をした北海道のストロープマツ林. 東大演報 **52**, 15-31.
- 清野 要 : 1928. 樹幹横断面積の算出に就て. 日林誌 **10**, 181-198.
- 清野 要 : 1936. ブナの単木材積表の調製方法について. 日林誌 **18**, 504-517.
- 清野 要 : 1938. 樹幹形数に就て. 日林誌 **20**, 553-565.
- SIBUYA, M. & HAGA, T. : 1959. Orthogonal polynomials without constant term. Ann. Int. Stat. Mathe. X, 209-222.
- SPURR, S. H. : 1951. Forest inventory.
- STOATE, T. N. : 1945. The use of volume table in pine stand. Australian Forestry **9**, 48-52.
- 鈴木外代一 : 1943. 測樹学.
- TAGUCHI, G. : 1951. On bias of sample mean and sample variance due to rounding or grouping. Rep. Stat. Appl. Res. **1**, **2**, 9-14.
- 田口 玄一 : 1958. 実験計画法 下.
- 高瀬 五郎 : 1952. 伐採木求積公式の研究. 日林誌 **34**, 56-60.
- 高瀬 五郎 : 1952. 間伐に伴う平均直径及び幹材積の変化について——特に収穫表調製への応用——日林誌 **34**, 344-348.
- 高瀬 五郎 : 1950. 3種の生長曲線について. 日林誌 **42**, 167-171.
- 谷村豊太郎編 : 1948. 計算図表学.
- 寺崎 渡 : 1914. スギ林の生長及び収穫. 林試報 **11**, 9 5-201.
- 寺崎 渡 : 1920. ひばの単木幹材材積表及単木幹材材積計算補助表の改訂. 林試報 **19**.
- 統計科学研究会編 : 1952. 新編統計数値表.
- 和田国次郎 : 1939. 樹幹の形状と立木形数とに就き. 御料林 **134**, 2-8.
- 渡辺 義勝 : 1947. 計算図表学.
- WHITTAKER, E. T. & ROBINSON, G. : 1937. The calculus of observations.
- WILSON, F.G. : 1945. Numerical expression of stocking in terms of height. Jour. For. **44**, 758-761.
- 山本 和蔵 : 1918. あかまつの単木材積表並びに胸高形数表. 林誌報 **16**, 147-164.
- 吉田 正男 : 1914. 同令単純林に於ける単木及林木の生長曲線に関する研究. 東大演報 **5**.
- 吉田 正男 : 1930. 測樹学要論.
- 吉田 正男・平田 種男 : 1953. 列状混淆植栽林に於ける杉扁桓の生長比較試験(第三回報告). 東大演報 **45**, 1-65.
- 吉田 正男・平田 種男 : 1954. 列状混淆植栽林に於ける杉扁桓の生長比較試験(第四回報告). 東大演報 **46**, 97-114.
- 吉田 正男・平田 種男 : 1955. 植栽林の林木構成状態に関する統計的研究(VI). 東大演報 **48**, 43-64.
- 吉田 正男・平田 種男 : 1956. 植栽林の林木構成状態に関する統計的研究(VII). 東大演報 **52**, 1-14.

Résumé

1) SMALIAN's sectional measurement for a stem volume can be considered as the cubic formula in which trapezoidal rule in numerical integration is skillfully used.

Generally speaking, numerical integration is theoretically classified into three methods, which are the interpolation, mean value method, and moving average method. Each method has several rules or formulae of integration, respectively.

By the same way as the trapezoidal rule in interpolation was converted to SMALIAN's sectional measurement in forestry practice, many cubic formulae will be introduced by using various rules or formulae of numerical integration.

On the other hand, the ordinary way of solution regarding the cubing method based on an equation of stem curve has a lot of trouble in its numerical calculation. However, if the orthogonal polynomial is used in it, the equation of solution is given not only directly but also as conventional form in practice by using the values of coefficients shown in prepared table.

In this paper, the writer proposes new cubic formulae applicable to the measurement of stem volume and shows the experimental results on them.

2) The cubing method based on the moving average method is given as follows: From the theory of numerical integration, the following value of integration can be estimated by using both the observed values of the square of diameter, $y_1, y_2, \dots, \text{ and } y_k$, at each of k points, $x, x+h, \dots, \text{ and } x+(k-1)h$, spaced with equal intervals, and the coefficients for numerical integration of both $C_i (i=1, 2, \dots, k)$ and D shown in Table 1.1.

$$I_{\alpha h}^{\beta h} = \int_{\alpha h}^{\beta h} f(x) dx \equiv \frac{h}{D} \{C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_k y_k\} .$$

The above equation is given under the following assumptions: (i) $f(x)$ can be approximated by polynomial having a suitable degree, and (ii) the observed values, $y_1, y_2, \dots, \text{ and } y_k$, are mutually independent.

Since the hatched part in Fig. 1.1 is shown as $(\alpha, \beta) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ in case of $k=5$, the value of the above integration is given as follows by using the values of C and D under the assumption that a cubing curve is an approximate equation.

$$\begin{aligned} I_{\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} &= \frac{h}{D} \{C_{-2} y_1 + C_{-1} y_2 + C_0 y_3 + C_1 y_4 + C_2 y_5\} \\ &= \frac{h}{840} \{-62 y_1 + 283 y_2 + 398 y_3 + 283 y_4 - 62 y_5\} . \end{aligned}$$

It is well known that a stem volume V is shown as

$$V = \frac{\pi}{4} \int_0^H y^2 dx .$$

In this equation, the cross section of stem is assumed as a circle. Moreover, the

distance from one end of stem is denoted with x , and the square of diameter at the measuring point x and the whole length of stem are denoted with y and H , respectively.

In Fig. 1.2, let us assume that the square of each diameter at x_{aH} , x_{aH+bH} , ... be y_{aH} , y_{aH+bH} , ..., and that the values of diameter at the points supposed beyond the whole length of stem for convenience be zero. Here b is given as 0.05~0.10 under the condition of $a < b$.

To estimate the value of

$$V = \frac{\pi}{4} \int_{x_0}^{x_H} y dx = \frac{\pi}{4} I,$$

at first I is divided into several parts shown in Fig. 1.1 under the consideration of such branch points as $x_{aH+\frac{3}{2}bH}$, $x_{aH+\frac{5}{2}bH}$,

Then, $I(2)$ is shown as

$$I(2) = \frac{bH}{D} \{C_{-2} y_{aH} + C_{-1} y_{aH+bH} + C_0 y_{aH+2bH} + C_1 y_{aH+3bH} + C_2 y_{aH+4bH}\}$$

by using the observation values at adjacent five points.

Since the same way can also be applied to other parts of $I(3)$, $I(4)$, ..., $I_{aH+\frac{3}{2}bH}^H = I(2) + I(3) + \dots$ is shown as the formula (1.2.3).

Next, if the coefficients for $I(1)$ are denoted with C' and D' , $I(1)$ is shown as

$$I(1) = \frac{bH}{D'} \{C_{-2}' y_{aH} + C_{-1}' y_{aH+bH} + C_0' y_{aH+2bH} + C_1' y_{aH+3bH} + C_2' y_{aH+4bH}\}$$

by using the observed values at the first adjacent five points. Then, the total area I is given as the formula (1.2.5).

If the middle point be zero and four points at both sides of it be -2 , -1 , 1 , 2 , respectively, in each group of adjacent five points which are used to estimate the area of each part, the coefficients of $(\alpha, \beta) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ in Table 1.1 can be used for $I(2)$, $I(3)$, Since the coefficients of general formula in the same table can be used for $I(1)$ and those values are shown as the formula (1.2.9), I is obtained as the formula (1.2.10) by putting each value of coefficients into the formula (1.2.5). Then, the volume V is given by the formula (1.2.11).

For instance, if the values of a and b be 0.02 and 0.1, respectively, the formula (1.2.12) is the cubic formula for this case, where the unit of V is cubic meter if y and H are measured with the unit of square meter and meter, respectively.

By the same way, the cubic formulae for various cases where the values of a and b are suitably selected are shown in §1.2.1a. The cubic formulae shown in §1.2.1a are derived under the assumption of $0.05 < b < 0.10$.

In §1.21b, other cubic formulae are shown for the case of $0.15 < b < 0.20$ and those formulae are derived under the assumption that a quadratic equation is used for an approximate curve and that the observed values at adjacent three points are used to estimate the area of each part.

The cubic formulae in which the interval between adjacent two points is decided independently of the whole length of stem H , for instance like one meter or two meter, are derived as well as the cases where it is given as aH and bH .

In § 1.2.1 e, the cubic formulae are shown for the case in which the distance X between the base of stem and the first measuring point, and the interval h between adjacent two points are suitably given. The coefficients for integration of (five points, cubic) and (three points, quadratic) in Table 1.1 are used for $0.05 < b < 0.10$ and for $0.15 < b < 0.20$, respectively.

The cubic formulae shown in § 1.2.1 a, § 1.2.1 b, and § 1.2.1 e are for the case where the measuring points are spaced equally. On the other hand, the cubic formulae for the case where the measuring points are spaced with different intervals are shown in § 1.2.2. To derive the formula for the measuring points with different intervals, generally speaking, there could be two ways; the method based on the integration coefficients for the measuring points with equal intervals as shown in Table 1.1 and the method based on different integration coefficients adjusted to the measuring points with unequal intervals. The formulae of [1.75] and [1.76] are based on the former with smaller interval near the base of stem, while the formulae of [1.77] to [1.80] are based on the latter with different intervals.

3) The coefficients of orthogonal polynomial are shown in Table 2.1. To use those coefficients, a cubic formula will be derived as follows. If the distance from the top of stem be x , the radius at the distance of x be r , and the equation of stem curve be $r^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$, the stem volume V will be expressed by the following equation:

$$V = \pi \int_0^H r^2 dx$$

To use the formula of orthogonal polynomial with k measuring points with equal intervals, the equation mentioned above will be expressed as follows:

$$r^2 = b_0 + b_1(x - \bar{x}) + b_2 \left\{ (x - \bar{x})^2 - \frac{k^2 - 1}{12} h^2 \right\} \\ + b_3 \left\{ (x - \bar{x})^3 - \frac{3k^2 - 7}{20} (x - \bar{x}) h^2 \right\}.$$

For instance if $k=11$ and $h=0.1H$ in the above equation,

$$r^2 = b_0 + b_1 \left(x - \frac{1}{2} H \right) + b_2 \left(x^2 - xH + \frac{3}{20} H^2 \right) \\ + b_3 \left(x^3 - \frac{3}{2} H x^2 + \frac{1144}{2000} H^2 x - \frac{144}{4000} H^3 \right).$$

Therefore,

$$V = \pi \int_0^H r^2 dx$$

$$= \pi \left(b_0 H - \frac{1}{60} b_2 H^3 \right).$$

From the formula of coefficients and Table 2.1, b_0 and b_2 will be expressed as follows:

$$b_0 = \frac{1}{11} (r_0^2 + r_{0.1H}^2 + r_{0.2H}^2 + \dots + r_H^2).$$

$$b_2 = \frac{1}{858 \times 0.01H^2} (15r_0^2 + 6r_{0.1H}^2 - r_{0.2H}^2 - 6r_{0.3H}^2 - 9r_{0.4H}^2 - 10r_{0.5H}^2 - 9r_{0.6H}^2 - 6r_{0.7H}^2 - r_{0.8H}^2 + 6r_{0.9H}^2 + 15r_H^2).$$

To put those relationships into the equation mentioned above, the formula [2.1] will be derived.

The formula [2.1] will be explained as follows. The coefficients, a , b , c and d , in the equation of stem curve $r^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$ are determined by the method of least squares with the observed values, r_0 , $r_{0.1H}$, \dots , and r_H at eleven measuring points set at the interval of $h = 0.1H$, and then the derived formula of stem volume is modified for practical use. The formulae of [2.2], [2.3] and [2.4] are derived for different values of k and h by the same way.

The cubic formula by BREYMAN, SIMONY, or RIEKE is derived on supposing the above-mentioned equation of stem curve, and those formulae will easily be derived from orthogonal polynomial.

The second of the methods using the table of orthogonal polynomial is a little complicated to derive a cubic formula in comparison with the former. In an equation of stem curve, $r = ax + bx^2 + cx^3$, the value of r is zero for $x = 0$, and so particular attention should be paid to the value of z for $x = 0$ on supposing the function $z = \frac{r}{x}$. The formula $\pi \times (2.2.14)$ and accompanying formulae [2.5] ([2.5A], [2.5B] and [2.5C]) are introduced in this way. For practical use, it is more convenient to calculate the formulae [2.5] excluding H , to get the value in parentheses of the equation (2.2.20), and then to multiply the value by πH .

Moreover in this paper, two cases are discussed to use $r^2 = a + bx$, $r^2 = a + bx + cx^2$ as an equation of stem curve. Just by the same way, a cubic formula will be obtained according to stem curve, interval between measuring points, and how to space those points.

4) By the mean value method, a cubic formula can easily be derived. With NEWTON-COTES' formula, for instance, the procedure will be as follows: If $y_i = f(x_i) = f(x_1 + ih)$, ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), the formula is generally represented by

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x) dx = K \cdot h (C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n),$$

where the values of C and K are given in Table 3.1. If y be the square of diameter, a stem volume V is expressed by the following equation:

$$V = \frac{\pi}{4} \int_{x_1}^{x_n} y dx$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot K \cdot h (C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n) .$$

If the total length is divided into ten equal parts, $h=0.1H$ and $n=11$, the formula [3.1] can be made by Table [3.1]. For the case of $n=7$, WEDDLE'S formula will be derived from the above. equation.

GAUSS' formula will also be used just in the same way. In using the formula for measuring a volume, however, it should be noticeable that the measuring point x_i is determined by the equation (3.2.3) and Table 3.2.

5) An error resulting from using the formulae mentioned above will be discussed for the following two cases: (i) to get a volume of stem above 0.3 m from the ground ([above 0.3 m]), and (ii) to get a volume of whole stem above the ground ([above 0 m].) An estimate value E (m^3) and ratio of error e (%) by each cubic formula are shown in §5.2.1 and §5.2.2, where a cubic formula is abbreviated as follows. For example, $[a=\alpha, b=\beta]$ means that in the cubic formula using the moving average method, the first measuring point is set at the distance of αH from the base of stem, and other points are spaced with the interval of βH .

In the moving average method, the relationship between the averaged e (\bar{e}) and a for $b=0.1$ or 0.2 is shown in Figs. 6.1 to 6.4 within the range of $0 \leq a \leq \frac{1}{2} b$. It is approximately linear, and the averaged error size for various values of a will be shown in Table 6.2, 6.4, 6.6, and 6.8. An error size resulting from using other cubic formulae is shown in Table 6.9, 6.10, and 6.11. To consider of a standard value for calculating a ratio of error, those values in the tables can be regarded as an estimate value of the bias of each cubic formula.

A mean square error for each cubic formula will be estimated as shown in Table 6.12. A mean square error is the sum of the squared bias of estimate value and variance, so the cubic formula with less mean square error should be better concerning a precision. According to the table, the cubic formula giving better estimate value for [above 0.3 m] also gives better value for [above 0 m]. A mean square error for [above 0.3 m] is much less than that for [above 0 m].

To consider of the relative ease in practice in addition to the result of a precision, the following formulae might be useful: [MIGITA (I), $h=0.1H$] and $[a=0.02, b=0.1]$ for the number of measuring points $n=10$, $[a=0.04, b=0.15]$ for $n=7$, and $[a=0.04, b=0.2]$, $[a=0.06, b=0.2]$, [MIGITA (I), $h=0.2H$] for $n=5$.

The tolerance limits for various cubic formulae are given in Table 6.13, which shows the value of e to be expected by one measurement under certain degree of reliability.

The relationship between the ratio of error and the size of stem to be measured need not be given a special consideration so far as the size dealt with in this experiment is concerned.

For this experiment, sixteen trees were taken from artificial plantations of *Cryptomeria japonica* and *Chamaecyparis obtusa* in Ohta National Forest of Mito District Office. The reason why about fifteen trees were taken is that the determination of the true value of error resulting from cubic formulae was not expected, but the comparison among various cubic formulae was expected from a practical point of view. Therefore, a special consideration was paid to select the trees of better quality. The reason why *Cryptomeria japonica* and *Chamaecyparis obtusa* were taken for the experiment is not for finding the difference between species, but for using different forms of stem.

For two cases as described already, a standard value was calculated; for (i) the volume calculated by MIGITA's formula (I) with the interval of 0.2 m between measuring points and for (ii) the sum of the volume of lower stem calculated by SMALIAN's formula and the volume calculated in (i). The standard values for each sample tree are shown in Table 5-1.

6) On the moving average method, four cases with $b=0.05, 0.10, 0.15,$ and 0.20 were discussed in this article, and a desirable range of a was discussed for each case, the values of which are shown in Table b. This table is converted into Table c by expressing a as a ratio to the stratified b ($p = \frac{a}{b}$). In Table c, a range of p is not always constant for $b \leq 0.20$, but has a tendency to decrease with the increased b . Except the case of $b=0.05$, both limits of p have a tendency to increase gradually in proportion to the value of b . As the value of p common to every range is 0.25, generally speaking, the desirable value of a could be one fourth of b for the case of $b \leq 0.20$.

The result like this gives an important suggestion to the usage of cubic formulae with the interval $h=1$ m, 2 m, etc. as shown in §1.2.1 e. That is to say, the position of the first measuring point could be determined by the value of p in Table c. For example, a desirable distance X between the base and the first measuring Point is given as follows for total length=20 m and $h=2$ m to get a volume of [above 0.3 m].

$$0.05 \times 2 \text{ m} \sim 0.25 \times 2 \text{ m} = 0.1 \text{ m} \sim 0.5 \text{ m}$$

Therefore, [$X=0.3$ m, $h=2$ m] and [$X=0.4$ m, $h=2$ m] should be taken from the cubic formulae described in this article. As the cubic formulae for certain limited combinations of X and h are described in this article, an appropriate formula might not always be found for the calculated range of X . In such a case, therefore, it should be desirable to use the cubic formula close to that range of X .

The variance of the estimate value in the range of a in Table b has a tendency to increase in proportion to the value of b , which indicates the number of measuring point " n " has more influence on the exactitude of cubic formula rather than on the accuracy of it.

7) An application test was carried out to examine whether the experimental conclusion mentioned above is applicable to various forms of stem. The sample

trees (total number 44) for the test are nine each of *Chryptomeria japonica* and *Chamaecyparis obtusa* in Tokyo University Forest in Chiba, five of *Abies mayriana*, four of *Picea jezoensis*, and eight of broad-leaved species in Tokyo Univ. Forest in Hokkaido, and five of *Tsuga sieboldii* and four of *Fraxinus spaethiana* in Tokyo Univ. Forest in Chichibu. The diameters at breast height of those sample trees are shown in Table I.

The sample trees for the theoretical discussion and those for the application test were diagrammatically compared as to their forms of stem (see Figs. I to VIII). Then thirteen trees of the latter different in stem form from the former were taken, with which an error calculation was carried out. The result indicates the experimental conclusion obtained in Chapters 5 and 6 could be almost equally applicable to even a tree having an extremely non-tapering or very tapering form of stem.