

可変プロット法の精度

助手 平 田 種 男

Taneo HIRATA:

Precisions of Variable Plot Methods (WZP.)

目 次

まえがき.....	1	IV. 測樹への応用——Strand の方式	6
I. 円と直線との交点数.....	1	V. ポイントとラインと円.....	8
II. 交点数と円の数.....	3	VI. 摘 要.....	13
III. 円の数分布型.....	4	VII. 引用文献, Résumé	14

ま え が き

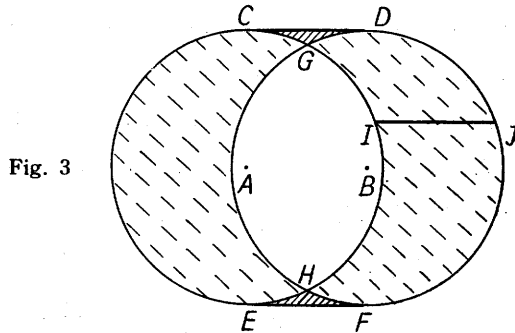
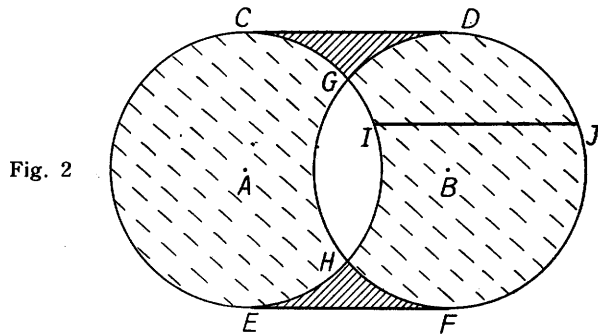
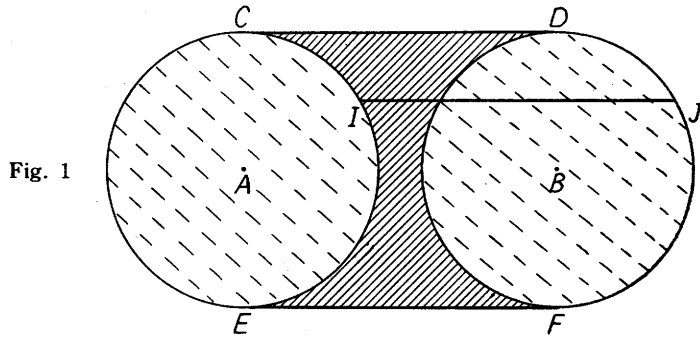
Bitterlich の Winkelzählprobe¹⁾ を可変円形プロット法とよぶとき, Strand の方式^{2,3)} は可変矩形プロット法とよぶことができる。両者がかんがえたプロットの形は別であるが, 共に可変である点では同じ思想と考えてよい。増山のいわゆる幾何学的調査法⁴⁾ としてながめるとき, 前者を Steiner の式⁵⁾ の特別のばあいとしてかんがえることができたが, 後者も Poincaré の式からえんえき⁷⁾ することができる。そうすることによつて Strand 法の性格が一層明らかになるであらう。さらにそこから, Bitterlich, およびその応用としての著者の方法との対比におよべば, おのづから両者の長短がうかびでることであらうし, また可変プロット法に対して立つ固定プロット法との比較評価も可能である。

この研究について, 御指導と御鞭撻を仰いだ東大, 嶺一三教授, 増山元三郎講師および測定研究会のみなさまにあつくお礼を申しあげる。

I. 円と直線との交点数

充分に大きい面積 T の平面の中で, 定長 L_0 の直線 K_0 を固定して, 半径 r_i の円 i , 1 個をランダムにうごかすとき, 円と直線との交点数を n_i とおけば, n_i は 2, 1, 0 のあたいをとる変数である。

直線 K_0 を AB とし, A, B を中心として半径 r_i の円をえがき, AB と交らない共通切線を CD, EF とする (Fig. 1, 2, 3 参照)。



$n_i = 2, 1, 0$ となる各領域のひろさをそれぞれ a_2, a_1, a_0 とかけば Fig. 1, 2, 3 から:

a_2 = 切線と円周とで囲まれた部分 (実線)

a_1 = かさならない円の部分 (破線)

a_0 = かさなつた円の部分と外域 $= T - a_2 - a_1$

いま, 円 A の円周上の 1 点 I から AB に平行線 IJ をひき, その長さを AB にひとしくとれば, ABIJ は平行四辺形となり, $AI = BJ = r_i$ のゆえに J は円 B の円周上にある。それゆえ, I が C から E へクロックワイズにうごくとき, J はおなじように D から F へうごく。このような IJ 直線の運動からできる図形のひろさは, $IJ = AB = L_0$ だから $\int_0^{2r_i} L_0 dx = 2L_0 r_i$ となる。すなわち, L_0 を一辺とし, $2r_i$ を他の一辺とする矩形の広さにひとしい。そこで, 上にかいた 3 つの a は, 次のようにかきなおせる。

$$a_2 = a_2$$

$$a_1 = 2(2L_0r_i - a_2)$$

$$a_0 = T - a_2 - a_1$$

したがって、

$$Pr\{n_i=2\} = a_2/T, \text{ これを } P_2 \text{ とかき}$$

$$Pr\{n_i=1\} = 2(2L_0r_i - a_2)/T, \text{ これを } P_1 \text{ とかけば}$$

$$Pr\{n_i=0\} = 1 - P_2 - P_1 = P_0 \text{ となる。}$$

n_i の母平均を n_i とかけば、 P_2, P_1, P_0 から平均の定義によれば、

$$\begin{aligned} n_i &= 2 \times P_2 + 1 \times P_1 + 0 \times P_0 \\ &= 2a_2/T + 2(2L_0r_i - a_2)/T + 0 = 4L_0r_i/T \end{aligned}$$

次に、 N 個の円- i ($i=1, 2, \dots, N$) を十分にひろい T 内で、互いに独立にランダムにうごかしたとき、これらと K_0 との交点数を n_s とかけば、変量 n_s は変量 n_i の N 個の和とかがえられるから $n_s = \sum_{i=1}^N n_i$ で、 n_s の母平均を n とかけば：

$$n = \sum_{i=1}^N n_i = \sum_{i=1}^N 4L_0r_i/T, \quad r_i \text{ の母平均を } r \text{ とすれば } n = 4L_0Nr/T \quad (1)$$

ここでは K_0 を固定して N 個の円- i をうごかしたが、うんどうの相対性によつて、円を固定して、 K_0 をうごかしたとかがえてもよい。すなわち、これはポワンカレの公式⁴⁾のひとつのケースである。

II. 交点数と円の数

Fig. をみながら、円- i と AB との交点数 (n_i) と円の数について次のように約束する。

$n_i=2$ のとき、すなわち、円の中心が a_2 内にあるときは円 1 個の数を 1、 $n_i=1$ のとき、すなわち、円の中心が a_1 内にあるときは円 1 個の数を 1/2、そして $n_i=0$ のとき、すなわち、円の中心が a_0 内にあるときは円 1 個の数を 0 と数える。

ところで、これらの円の数の合計の母平均 s_i は、矩形 $2L_0r_i$ 内にある円の数の母平均に一致する。というのは、Fig. で実線部分を円の個数に関して密度 1、破線部分を密度 1/2 ときめれば、Fig. 1, 2 では、2 つの円を CE, DF を軸にして内側にたたみこんだとき、一様に密度 1 の矩形 $CEFD$ が生まれ、Fig. 3 では GH を軸にして破線部分だけをどちらかにたたみこんだときできる図形、たとえば、 $CIEFJD$ は一様に密度が 1 となり、しかもこの図形のひろさは、まえに述べたように、矩形 $CEFD$ にひとしく、この矩形のひろさが $2L_0r_i$ であるからで。

さきに、この矩形 ($2L_0r_i$) 内にはいる円の数の母平均を s_i' としたから、あきらかに $n_i=2s_i'$ 、もし矩形の半分すなわち、たとえば $CABD$ ($=L_0r_i$) にはいる円の数の母平均を s_i とかけば $s_i'=2s_i$ で、 $n_i=2 \cdot 2s_i=4s_i$ 、 i を N まで合計したものを n, S とかけば

$$n=4S$$

このように文字をかえると (1) 式は:

$$S=L_0Nr/T \quad (2)$$

となる。すなわち、この S は、 K_0 の片側に中心がある円で、 K_0 に垂直な半径が K_0 と交るものの数の母平均である。

これで n が S におき換えられた。つまり、交点数が 2 が、1 が、0 がというような区別の必要がなくなつた。

III. 円の数の分布型

十分にひろい面積 T の平面の中で、定長 ($=L_0$) の直線 K_0 を固定し、半径 r_i の円- i を 1 個だけランダムにうごかすとき、 K_0 の片側で、円の中心から K_0 に下した垂線の足がその円の中にあるようなとき、この円を 1 と数え、そうでないときは 0 と数えるならば、そうしてそのような変量を s_i とかけば、すでに述べたことから:

$$P_r \{s_i=1\} = L_0r_i/T \quad \text{でこれを } P_1 \text{ とおけば}$$

$$P_r \{s_i=0\} = 1-P_1$$

s_i の母平均を m_i とかけば、平均の定義から、

$$m_i = 1 \times P_1 + 0 \times (1-P_1) = P_1$$

s_i の母分散を σ_i^2 とかけば、分散の定義から、

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= (1-m_i)^2 P_1 + (0-m_i)^2 (1-P_1), \quad m_i = P_1 \text{ をつかえば,} \\ &= m_i - m_i^2 \end{aligned}$$

次に N 個の円- i ($i=1, 2, \dots, N$) を互いに独立にランダムにうごかしたとき、上のやくそくによつて円- i を Count し、それを S_j とかけば、 S_j は N 個の変量 s_i の、独立な和としてまた変量となる。すなわち $S_j = \sum_{i=1}^N s_{ij}$

S_j の母平均を M_s とかけば、それは s_{ij} の母平均 m_i の N 個の和になるから、

$$M_s = \sum_{i=1}^N m_i = L_0Nr/T \quad (3)$$

次に、 S_j の母分散を $V(S)$ とかけば、それは s_{ij} の母分散 σ_i^2 の N 個の和である。すなわち、

$$\begin{aligned} V(S) &= \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^N m_i - \sum_{i=1}^N m_i^2 \\ &= M_s - M_s^2(1+C_r^2)/N \end{aligned} \quad (4)$$

ここで C_r は r_i の変動係数をあらわす。上式の両辺を M_s^2 でわり、 S_j の変動係数の平方 C_s^2 をもとめれば、

$$C_s^2 = 1/M_s - (1+C_r^2)/N \quad (5)$$

もし、 $C_r^2 \ll 1$, $M_s \gg N$ のときをかんがえることにすれば

$$C_s^2 \doteq 1/M_s = T/L_0 N r \quad (6)$$

このときは $V(S) \doteq M_s$ で $\{S_j\}$ の分布を Poisson 型とみることができる。これは後で述べるように可変矩形プロット法での Tree Count S_j の分布に対応する。

次に可変円形プロット法での Tree Count B_j の分布についてかんがえる。

大きさ k_i の円 i , 1 個が T 内でランダムにうごくとき, T 内に固点した定点 P_0 を含む円の数を b_i とすれば b_i は 1 か 0 の値をとる変量である。 s_i のときと同じように,

$$P_r \{b_i=1\} = k_i/T,$$

$$P_r \{b_i=0\} = 1 - k_i/T.$$

b_i の母平均と母分散をそれぞれ m_i , σ_i^2 とかけば,

$$m_i = 1 \times k_i/T + 0 \times (1 - k_i/T) = k_i/T,$$

$$\sigma_i^2 = (1 - m_i)^2 k_i/T + (0 - m_i)^2 (1 - k_i/T)$$

$$= m_i - m_i^2.$$

次に, 十分に広い平面 T の中で, N 個の円 i ($i=1, 2, \dots, N$) をそれぞれ独立にランダムにうごかしたとき, P_0 点が包まれる円の数を B_j とおき, その母平均と母分散をそれぞれ M_B , $V(B)$ とおけば:

$$M_B = \sum_{i=1}^N m_i = \sum_{i=1}^N k_i/T = K/T, \quad (\because K = \sum_{i=1}^N k_i) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} V(B) &= \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^N m_i - \sum_{i=1}^N m_i^2 \\ &= M_B - M_B^2(1 + C_k^2)/N \end{aligned} \quad (8)$$

$$\therefore C_B^2 = 1/M_B - (1 + C_k^2)/N$$

$C_k^2 \ll 1$, $M_B \ll N$ のときをかんがえることにすれば

$$C_B^2 \doteq 1/M_B = T/K \quad (9)$$

このとき $V(B) \doteq M_B$ で $\{B_j\}$ の分布^{6,8)} も Poisson 型とみることができる。 M_B が大きくなると正規型⁹⁾に近くなる。

同じようにして固定プロットについてかんがえてみる。十分にひろい T の中で, 1 点 P_0 を固定して, 大きさ k_0 の円 1 個をランダムにうごかすとき, P_0 点がこの円に包まれるときは 1 と数え, そうでないときは 0 と数えることにして, そのような変量を f_i とかけば

$$P_r \{f_i=1\} = k_0/T$$

$$P_r \{f_i=0\} = 1 - k_0/T$$

f_i の母平均, 母分散を m_i , σ_i^2 とかけば

$$m_i = k_0/T$$

$$\sigma_i^2 = m_i - m_i^2$$

同じ大きさの N 個の円 i ($i=1, 2, \dots, N$) をランダムにうごかしたとき, P_0 点が包まれる円の数を F_j とおき, その母平均, 母分散を $M_F, V(F)$ とかけば

$$\begin{aligned} M_F &= Nk_0/T \\ V(F) &= M_F - M_F^2/N \\ \therefore C_F^2 &= 1/M_F - 1/N \\ &\doteq 1/M_F \end{aligned}$$

$$\text{すなわち} \quad C_F^2 \doteq T/Nk_0 \quad (10)$$

このときまた $\{F_j\}$ の分布は Poisson 型とみることができる。

以上, 可変矩形および円形プロット法, 固定プロット法の Tree Count の分布についてかんがえてみたが, 上の述べ方を逆さにして, 円 i または, 矩形 i をプロットとかんがえ, これをランダムにうごかしたとき, 1 点 P_0 を包む回数とみても, また, このプロットを固定して, 点をランダムにうごかし, このプロットがつつむ点の数としても, 全く同じ結果がえられる。両つの説明は同じ 1 つのものの裏表であるにすぎない。

IV. 測樹への応用——Strand の方式

円 i を胸高断面円の拡大円——直径の拡大率 q ——とかんがえれば, r は $qd/2$ でおきかえられる。このとき M_r を S_r とかきなおせば, (3) 式から,

$$S_r = L_0 N q d / 2 T \quad (11)$$

S_r は直線 K_0 の片側にある立木の位置点から, そこへ下した垂線の長さが, 拡大円の半径以下である立木の数の母平均である。いいかえれば, K_0 の片側にある立木の位置点から K_0 へ下した垂線の足が, その木の拡大円内にあるときの立木の数の母平均である。

またこのようにして Count された立木の直径をはかり, それを d_{ri} とかき, ランダムサンプル d_i と区別する。 d_{ri} が抽かれる確率は d_i/Nd であるから d_{ri} の母平均 d_r をもとめれば,

$$d_r = \sum (f_i d_i / \sum f_i d_i) d_{ri}$$

ここで, d_{ri}, d_i を d_i の母平均 d と変動係数 C_d をつかって変換すれば

$$d_i = d_{ri} = d(1 + C_d t_i), \text{これを上式に代入して, } f_i/N = P_i \text{ とかけば}$$

$$\begin{aligned} d_r &= d \sum P_i (1 + C_d t_i)^2 \\ &= d (\sum P_i + 2C_d \sum t_i P_i + C_d^2 \sum P_i t_i^2) \\ &= d(1 + C_d^2) > d \end{aligned} \quad (12)$$

同じようにして d_{ri} の調和平均¹⁰⁾の期待値を d_{r_h} としてもとめれば

$$\begin{aligned} d_{r_h} &= 1 / \sum \{P_i (1 + C_d t_i) / d_{ri}\} \\ &= d / \sum P_i = d \end{aligned} \quad (13)$$

すなわち, d_{ri} の調和平均 d_{r_h} が, 母集団の算術平均 d に一致するし, 算術平均は, d より

大きくなる。いま木の断面積合計を G とかけば、定義により、

$$\begin{aligned} G &= N\pi d_0^2/4 = N\pi d^2(1+C_d^2)/4 \\ &= Nd\pi d(1+C_d^2)/4 \end{aligned}$$

上式 (11), (12) 式から

$$G = S_r T d_r \pi / 2 L_0 q \quad (14)$$

上式で、 $T=100^2 m^2$, $L_0=5\pi m$, $q=100$ とおけば

$$G = S_r D_r / 10, \quad m^2/ha \quad (15)$$

D_r は d_r を cm ではかつて単位をおとしたもので、(15) 式が Strand の G 推定式²⁾である。 S_r はレラスコープによる。

次に、円 i を樹高の変換円——その半径 $h_i \cot \beta$, β は定角——とみれば、 r は $h \cot \beta$ で置きかえられる。このとき M_s を S_c とかきなおせば、(3) 式から、

$$S_c = L_0 N h \cot \beta / T \quad (16)$$

S_c は樹高の変換円に関して、 S_r と同じ要領で、定角 β のコノメーター (定角測高器¹¹⁾) でもとめられる。

いま各立木の樹高を h_i , その頻度を f_i , h_i の木の直径を d_{hi} , そのときの断面積を g_{hi} , また d_{hi} の中でコノメーターで抽かれたものを d_{ci} , その断面積を g_{ci} とかき、 g_{ci} の平均を計算してみる。 g_{ci} が抽かれる確率は、 h_{ci} が抽かれる確率にひとしく、それは、さきに G の項でのべたと同様に、 $f_i h_i / N h$ である。したがって

$$\begin{aligned} \pi(d_c^2/4) &= \sum (f_i h_i / N h) g_{ci} \\ &= \sum f_i h_i g_{hi} / N h \end{aligned} \quad (17)$$

(16), (17) 式から $\sum f_i h_i g_{hi}$ をもとめて、これを M_s とおけば

$$M_s = S_c d_c^2 \pi T \tan \beta / 4 L_0 \quad (18)$$

上式で $T=100^2 m^2$, $\tan \beta=2$, $L_0=5\pi m$ とおけば

$$M_s = S_c D_c^2 / 10 \quad (19)$$

上式が Strand の、円柱合計の推定式²⁾である。 D は d から cm 単位をおとした値である。

もし $M_s = G h_s$ とおけば

$$h_s = M_s / G = S_c D_c^2 / S_r D_r \quad (20)$$

これが Strand の断面積加重平均樹高²⁾である。この量は母集団の算術平均樹高、あるいは著者の自乗平均樹高¹¹⁾より大きい値をとる。それは次の計算から明らかである。 i -の木の断面積を g_i , 樹高を h_i とすれば、

$$\begin{aligned} M_s &= \sum g_i h_i = N g h (1 + P_{gh} C_g C_h) \\ &= G h (1 + P_{gh} C_g C_h) \end{aligned}$$

上の 2 式から

$$h_s = h(1 + \rho_{gh} C_g C_h) \quad (21)$$

すなわち, $h_s > h(1 + C_h^2/2) > h$

Strand の方式では, 円柱体積の合計を一挙にもとめたから, ここから材積へゆくに必要な林分形数が問題になるが, それは V/Gh より小さい値をとる。

要するに Strand の可変矩形プロット法とは, $\sum d$, $\sum h$ を Counting によつて推定する方式に他ならない。そうしてそれがポアンカレの式からも演繹できることを知つた⁷⁾。

V. ポイントとラインと円

可変円形プロット法はいわばポイント (-グリッド)・サンプリングであり, 可変矩形プロット法はライン (-グリッド)・サンプリングであり, そして, 固定プロット法は, もし円プロットをとれば, その文字のままに円形プロット・サンプリングである。これらについて, 精度の考察をしてみよう。比較のために, 3 者が期待的に同じひろさのプロットをとるばあいをかんがえる。同じひろさをとるということはまた, 同じ Tree Count の合計でかんがえることである。

Bitterlich¹⁾ による G を G_B とかけば

$$G_B = k_B B_r$$

ここで k_B は Z_f (=断面積乗数), B_r は Tree Count の母平均。 B_r の推定をサイズ 1 の標本からもとめるとすれば, 推定 G_B の C.V. については,

$$C_{G_B}^2 = C_{B_r}^2$$

(9) 式を上に入代入すれば

$$C_{G_B}^2 = T/K \quad (22)$$

Strand²⁾ による G を G_S とかけば, (16) 式から,

$$G_S = k_s S_r \bar{d}_r, \quad k_s \text{ はコンスタント。}$$

S_r の推定をサイズ 1 の標本からもとめるとき, 推定 G_S の C.V. については, \bar{S}_r と \bar{d}_r はサイズと標本平均の関係であるため, 両者の相関を 0 とみなしうることから, 次のようにかける。

$$C_{G_S}^2 = C_{S_r}^2 + C_{\bar{d}_r}^2 / S_r$$

(6) 式をつかえば, $= (1 + C_{\bar{d}_r}^2) C_{S_r}^2$

(6) 式を代入して,

$$C_{G_S} = (1 + C_{\bar{d}_r}^2) T / L_0 N r \quad (23)$$

次に, 固定プロット法による G を G_F とかけば

$$G_F = F g T / k_0$$

ここで F は固定プロット (ひろさ k_0) に包まれる立木の数 \bar{F} の母平均, g は立木の胸高断面積 g_{ij} の母平均 (すなわちプロット内平均の母平均) である。 \bar{F} と \bar{g} は独立とみられるから, 推定 G_F の C.V. については,

$$\begin{aligned} C_{GF}^2 &= C_F^2 + C_G^2/F \\ &= (1+4C_d^2)C_F^2 \end{aligned}$$

$$(10) \text{ 式から } C_{GF}^2 = (1+4C_d^2)T/Nk_0 \quad (24)$$

さきにもべた比較の条件は (22), (23), (24) 式で

$$K = L_0 N r = N k_0$$

とおくことである。この3式から各方法の効率を比較すれば:

$$(C_{GB}/C_{GS})^2 = 1/(1+C_{dr}^2)$$

$$(C_{GB}/C_{GF})^2 = 1/(1+4C_d^2)$$

$$(C_{GS}/C_{GF})^2 = (1+C_{dr}^2)/(1+4C_d^2)$$

C_{dr}^2 は, d_{ri} のあつまりの中での, d_{ri} の相対頻度 $P_{ri} (= P_i(1+C_{ati}), P_i = f_i/N)$ から計算すれば,

$$C_{dr}^2 = C_d^2(1-3C_d^2) < C_d^2 \quad \text{となるから}$$

効率の高さは B-法, S-法, F-法の順である。つまり, G の推定について, 可変プロット法は, 固定プロット法に比べて, 同じサイズではいつも高い精度を期待できるが, その差は, 上の式に示すように, かけ離れたものではなかつた。而し前者の機動性は, 実際問題として, みのがすことのできない特長である, とくに B-法において。

樹高の推定については次のようになる。ただし, ここでは本数 N の推定に誤差がないとする。著者¹¹⁾, または Essed¹²⁾ によれば,

$$h_c = k_c \sqrt{B_c/N}, \quad k_c \text{ はコンスタント, 以下同じ}$$

$$\text{このとき, } C_{hc}^2 = C_{Bc}^2/4 = T/4K \quad (25)$$

Strand の可変矩形プロット法から平均樹高 (h_s') をもとめれば (前述の h_s ではない),

$$h_s' = k_s S_c/N$$

$$\text{このとき, } C_{hs'}^2 = C_{Sc}^2$$

$$\text{それゆえ } (C_{hc}/C_{hs'})^2 = (1/4)L_0 N \cot \beta / K$$

調査面積をそろえれば

$$(C_{hc}/C_{hs'})^2 = 1/4$$

よしんば, 後者でラインの両側で Count したときでも——このばあい調査面積が前者の2倍になる——そのときもう一つダッシュをつければ,

$$(C_{hc}/C_{hs''})^2 = 1/2$$

ここで $C_{hs''}$ を甲斐原の方式に対応させてもよい。 h_s'' は甲斐原方式を簡約して整えた形になっているからである。

以上は, N の推定に誤差なしとしたばあいの比較であつたが, もし N の推定に, 各法一定の誤差あるばあいも, ——すなわち, あとでのべるような方法で, つねに N を推定するとき——

あきらかに、 \sqrt{N} をつかう h_c の精度が、 h_s' 、 h_s'' より高くなるはずである。

さて、可変円形プロット法による樹高推定を、無作為抽出の樹高推定に比べればどうであろうか。前者で、ポイントを n 個とり、平均 \bar{B}_c 個の Tree Count があつたとき、 \bar{B}_c 個の木を h_s^2 に比例して抽いたことになる。後者でもし \bar{B}_c 個の標本を抽いたとして、両者の推定の精度を比べるのが合理的であろう。これはさきに、調査面積をひとしくして比べたことに対応する。こうする以外に比較の手がないからである。

いま、この林での h_i の C. V. を C_h とかけば、サイズ \bar{B}_c の無作為抽出による推定 \bar{h} の C. V. については

$$C_{\bar{h}}^2 = C_h^2 / \bar{B}_c$$

可変円形プロット法によれば、さきにかかげたように、

$$C_{h_c}^2 = C_{B_c}^2 / 4 = 1/4 \bar{B}_c$$

上の2式から

$$(C_{h_c} / C_{\bar{h}})^2 = (0.5 / C_h)^2$$

一般に $C_h < 0.5$ であるから、上式によれば、可変円形プロット法による推定 h_c の精度は、上にあげた比較の条件のもとでは、一般に、為作為抽出の推定 h のそれより低いことがわかる。 h_s' 、 h_s'' の精度はこれより更に低い。しかし、もしここで、可変円形プロット法で Count した \bar{B}_c 個と同数の無作為標本について、単木的な測高器で測るための時間¹²⁾を考慮すれば、両者の実際のな効率がおのづから判然するだろう。

$C_{h_c} > C_{\bar{h}}$ はしかし当然のことでもある。ランダムサンプルによる $C_{\bar{h}}$ には立木の位置が関係せず、 C_{h_c} にはそれがきいて来ている。その上 C_{h_c} の計算の前提であつたランダム模型は、立木の配置について、かんがえられる凡ゆる系列——すなわちランダムな配置——を意味するものであつたから、ここから計算された C_{h_c} は、凡ゆる系列の中から、出現された、実際の林の立木配置の1系列に対するものより、当然大きくみつもられていることを認めたらうで、上の不等式を解釈せなければならない。

だが、この方法によるときは、つねに h_c の推定に、 $C_h^2/2$ という正の Bias がともなう。これは人工林ではほとんど無視できる量であり、天然林でも、もし調査の対象を 10 cm (DBH) 以上のものに限れば、そこでは人工林とほとんど同程度¹³⁾の C_h^2 となる。また C_h^2 そのものの値も、ように推定できる C_a^2 との関係から、実験的に予想¹⁴⁾することも可能である。結局 h_c は、少し biased ではあるが、他にくらべて、時間をかんがえたときは、より precise であるように期待できる。

この方法に必要な N の推定については、 \bar{B}_r からの推定 G_B と、他の方法で推定した g から $G_B/g=N$ としてもとめるのが効果的だろう。ここで、他の方法というのは、標本点の近くの木で a 番目まで—— a は必要精度と、可変円形プロットのサイズできまる——の直径をはかり、

ここから g の推定をえることで、それは unbiased になるはずである。標本点がランダムであるかぎり、その近くの a 番目までの木はまたランダムな標本とみなされうるからである。

また、conometric な Tree Count \bar{B}_c と、relasopic な Tree Count \bar{B}_r との比の平方根をとれば

$$\begin{aligned}\sqrt{\bar{B}_c/\bar{B}_r} &= k'(h_c/d_0) \\ h_c &= h\sqrt{1+C_h^2}, \quad d_0 = d\sqrt{1+C_d^2} \quad \text{であるから} \\ \sqrt{\bar{B}_c/\bar{B}_r} &\doteq k(h/d)\end{aligned}\tag{26}$$

(h_i/d_i) は従来述べられているように、幹の形の平均的な指標であつたから、 (h/d) は林の平均的な幹の形をあらわすものとみることができらる。林分形数 ($f=V/Gh$) を (h/d) の函数としてあらかじめもとめておけば便利であろう。 (h/d) を $(h/100d)$ の形にすれば、この値は、われわれのばあい、1 を超えない値である。

さて、2 つの可変円形プロット法 (WZP) から Gh を推定するために次の式を提案する。

$$Gh \doteq K_{BC}\sqrt{\bar{B}_r\bar{B}_c} d_0\tag{27}$$

$$\text{又は} \quad \doteq K_{BC}\sqrt{\bar{B}_r\bar{B}_c} d\tag{28}$$

ここで B_r , B_c はそれぞれ、レラスコープ、コノメーターによる Tree Count の期待値、 d , d_0 は、さきに述べたように、サンプルポイントの至近木 a 本の副次のランダムサンプルからの期待値をあらわす。

$$\sqrt{\bar{B}_r} = k_1\sqrt{Nd_0} = k_1\sqrt{Nd}\sqrt{1+C_d^2}$$

$$\sqrt{\bar{B}_c} = k_2\sqrt{Nh}\sqrt{1+C_h^2}$$

$$\text{それゆえ} \quad \sqrt{\bar{B}_r\bar{B}_c}d_0 = Nd_0^2h\sqrt{1+C_h^2}K_1 = K_0Gh\sqrt{1+C_h^2}$$

$$\sqrt{\bar{B}_r\bar{B}_c}d = Nd_0^2h\frac{\sqrt{1+C_h^2}}{\sqrt{1+C_d^2}}K_2 = K_dGh\frac{\sqrt{1+C_h^2}}{\sqrt{1+C_d^2}}$$

$$\doteq K_dGh\left(1+\frac{C_h^2}{2}\right)\left(1-\frac{C_d^2}{2}\right)$$

$$\doteq K_dGh\left\{1-\frac{1}{2}(C_d^2-C_h^2)\right\}$$

すなわち、(27) 式は Gh の推定としては overestimate であり、(28) 式は underestimate となる。人工林のように C_h が非常に小さいところでは (27) 式を用い、天然林のように C_h が大きくて、 C_d との差が余りないところでは (28) 式を用いることにする。そこで (27), (28) 式を Gh の近似的な推定式として用いたとき、Strand の M_s すなわち Gh_s の推定式によるばあいとの精度を比較してみよう。両者は異つた量であるが、これらに適当な形数をかければ林の材積にゆける点で相い似た量であるとみてよからう。

$$M_s = K_s S_c d_c^2$$

$$M_{BC} = K_{BC} \sqrt{B_r B_c} d, \quad \text{または} \quad = K_{BC} \sqrt{B_r B_c} d_g$$

M_s, M_{BC} の推定の C.V. をそれぞれ C_{Ms}, C_{MBC} とかけば, $\{d_{e_i}\}$ の C.V. は $\{d_i\}$ のそれに近似的にひとしいとおけるから, 次のようにかける。

$$\begin{aligned} C_{Ms}^2 &= C_s^2 + \frac{C_g^2}{S_c} = C_s^2(1 + C_g^2) \\ C_{MBC}^2 &= \frac{1}{4}(C_{Br}^2 + C_{Bc}^2) + \frac{C_d^2}{a} + \frac{1}{2} \rho_{BrBc} C_{Br} C_{Bc} \end{aligned} \quad (29)$$

ここで比較の条件を次のように揃える。

$$1. \quad S_c = B_r + B_c = 2B_r = a$$

$$2. \quad C_s^2 = C_{Br}^2/2 = C_{Bc}^2/2$$

1. は両法で Tree Count 揃えることであり, このとき 2. がそれに伴う。

以上の条件によれば, (29) は次のようにかきなおされる。

$$\begin{aligned} C_{MBC}^2 &\geq \frac{1}{4}(2C_s^2 + 2C_s^2) + \frac{C_d^2}{S_c} \\ &= C_s^2(1 + C_d^2), \quad \text{または} \quad = C_s^2(1 + C_g^2) \end{aligned}$$

これらと C_{Ms}^2 の比をとれば, $C_g^2 = 4C_d^2$ をつかつて,

$$(C_{Ms}/C_{MBC})^2 = (1 + 4C_d^2)/(1 + C_d^2)$$

つまり, 両法の精度には大差がないが, 少し WZP の方が高精度のことがある。

実際問題としてはどうであろうか, 前者では主な道具がコノメーターだけであり, 後者ではレラスコープとコノメーターの2つである。前者ではテープによる K_0 ライン・グリッドを設けなければならない。後者ではポイントからポイントへうごくだけでよい。前者ではコノメーターで抽かれた木の直径をはかり, 後者ではポイントの至近木の直径をはかる。後者にある若干の Bias が前者にはない。結局, そのときに応じて, —たとえば山地と平地, 人工林と天然林等で—両法の得失があらわれることだろうが, 総合的にみて特に実際上の時間の経済をかんがえれば, やはり後者を採用することになる。

次に (29), (30) 式で a を仮りに B_r とさだめて, レラスコープの断面積乗数 $Z_f = 4$ と, コノメーターの定角 $\beta = \arctan \sqrt{2\pi}$ とを用い, $G = 40 \text{ m}^2/\text{ha}$, $N = 800$ 本, $h = 20 \text{ m}$, $C_d = 0.3$ の林で $M_{BC} (= Gh)$ を推定するのに必要なサンプル・ポイントの数 (サイズ) をもとめてみると

$$\begin{aligned} C_{MBC}^2 &= \frac{1}{4}(C_{Br}^2 + C_{Bc}^2) + \frac{C_d^2}{B_r} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{B_r} + \frac{1}{B_c}\right) + \frac{C_d^2}{B_r} \\ &= \frac{Z_f}{G}\left(\frac{1}{4} + C_d^2\right) + \frac{100^2 \tan^2 \beta}{4\pi N h^2} \end{aligned}$$

$$\therefore C_{MBC}^2 = 0.0496$$

必要なポイント数 n は、公式 $n \geq t^2 c^2 / \alpha^2$ で、 $t=2$ 、 $\alpha=0.05$ とおくことにすれば、

$$n = \frac{4 \times 0.0496}{(0.05)^2} = 80$$

このような n の決定法は、大面積の森林調査における各層に適用されうるだろう。小面積の調査では、実用的には、この n では大きすぎるから別途の工夫が必要である。

Counting による方法の最も弱い点は、Tangent Tree (1/2 本と数えられる木) の問題である。このような木が現れる確率は、可変円形プロットの方が可変矩形プロットよりも小さいことは明らかであるが、この問題は依然残る。これに対する一策として、A点では怪しい木をすべてすてることにし、次のB点では怪しい木をすべて採るというようにするのもよからう。

VI. 摘 要

1. Poincaré の式の特別の場合を説明した。この式で円と直線との交点数を円の数——立木の数——におきかえることによつて、Strand の可変矩形プロット法—— $\sum d$ 、 $\sum h$ の推定式——を演繹した。

2. ランダムな立木位置の凡ゆる系列を仮定して、可変プロットと法、固定プロット法による Tree Count の分布を Poisson 型に近いものとかんがえた。それによつて各方法の推定の精度を計算し、互いに比較考察して次の結果をえた。

$$(C_{GB}/C_{GS})^2 = 1/(1+C_d^2)$$

$$(C_{GB}/C_{GF})^2 = 1/(1+4C_d^2)$$

$$(C_{GS}/C_{GF})^2 = (1+C_d^2)/(1+4C_d^2)$$

$$(C_{hc}/C_{hs'})^2 = 1/4$$

$$(C_{hc}/C_{hs''})^2 = 1/2$$

$$(C_{hc}/C_{\bar{h}})^2 = (0.5/C_h)^2$$

$$(C_{Ms}/C_{MBC})^2 = (1+4C_d^2)/(1+C_d^2) \text{ or } = 1$$

ここで C は各 suffix の推定の C.V. をあらわす。suffix については次のとおりである。

G_B : 可変円形プロット法 (B-測定法) による断面積合計

G_S : 可変矩形プロット (Strand) 法による断面積合計

G_F : 固定プロット法による断面積合計

h_c : 可変円形プロット法 (H-測定法) による平均樹高

h_s' : 可変矩形プロット法による平均樹高 II

h_s'' : 可変矩形プロット法による平均樹高 III, あるいは甲斐原方式によるもの

\bar{h} : ランダムサンプルによる平均樹高

M_s : 可変矩形プロット法による $\sum (gh)_i (= Gh_s, h_s \text{ は Strand の平均樹高 I})$

M_{BC} : 可変円形プロット法による Gh_c

3. 可変円形プロット法の中の H-測定法と B-測定法の Tree Count の比の値から (h/d) をもとめ, あらかじめ (h/d) の函数として調整した, 林分形数表により, 両測定法での平均 Tree Count の積の平方根と, 標本点の至近木平均直径, 又は平均断面積木の直径との積から, 材積の推定へすすむ一法を提案した ($V = Kf\sqrt{B_r B_c} d$ or $= Kf\sqrt{B_r B_c} d_0$). この方法によつて, 95% の信頼度, 5% の誤差率で Gh を推定するためには, 大体 100 点前後のポイントが必要であつた。但し林分形数 f の誤差はかながえていない。(Feb. 1958)

Ⅶ 引 用 文 献

1. BITTERLICH, W.: Die Winkelzählprobe. Allg. Forst- u. Holzwirtschaft. Ztg. 59 Jhg. (1/2), 1948
2. STRAND, L.: "Relaskopisk" høyde- og kubikkmassebestemmelse. Norsk Skogbruk, Nr. 20, 1957.
3. 平田種男: Strand の可変矩形プロット法, 日本誌 Vol. 40, No. 4, 1958.
4. 増山元三郎: 幾何学的調査法, 統計学辞典 (増補版), 1957, 東京.
5. ———: 幾何学的調査法の話, オペレーションズ・リサーチ. No. 1, 1956.
6. 平田種男: Bitterlich 法の分散について. 測定研究会談話, 1957.
7. ———: Application of line-grid sampling to forest mensuration. Rep. Stat. Appl. Res. JUSE, 1958. (未刊)
8. 新谷克郎: Bitterlich—変量の分散に就いて—実験的考察, 東大農学部林学科卒業論文, 1958 (未刊).
9. 山田茂夫: Winkelzählprobe について, 山脈 Vol. 9, No. 4, 1958.
10. 平田種男: Bitterlich 法と調和平均, 演習林 (東大) No. 11, 1956.
11. ———: 定角測高法, 山林 No. 1, 1956.
12. ESSÉD, F.E.: De kegelmethode voor de bepaling van de gemiddelde hoogte in eensortige bosopstanden. N.B.T. 27, 1955.
13. 甲斐原一郎: 風倒木の材積は測れるか。グリーンエージ. No. 8, 1955.
14. 黒川忠雄: 幾何学的調査法による樹高測定について. — 定角測高法・Jukohscope —, 1958, 林野共済会.
15. 南雲秀次郎: Winkelzählprobe の諸問題. 東大農学部林学科卒業論文, 1958, (未刊).

Résumé

Reading the recent paper by Lars Strand, the author found that his formula derived from "Variable rectangular plots", could be deduced as a special case of Poincaré's formula in integral geometry.

1. Suppose a plane field of size T in which there is a fixed curve K_0 of length L_0 and suppose a variable rigid curve K of length L . Let the number of intersection points of K with K_0 as a function of K be n . Then the kinematic expectation of n is given by $KE(n) = 2L_0L/\pi T$ under the condition of unbiasedness. This formula can be derived by primary mathematics, if as a special case a straight line of K_0 and total perimeter of circles of K are treated (see fig. 1, 2, 3).

In timber survey, regard L as the total perimeter of circles, radii of which

being $h_i \cot \beta$, where h_i denotes the height of trees of N in number in the field T so wide enough, and β the elevation of the tree top from the plane field, namely

$$L = 2N\pi E(h) \cot \beta$$

Let the tree count by Strand be S , meant by the number of trees sampled proportionally to their radii ($h_i \cot \beta$), perpendicular to the straight line-grid of length L_0 , and such tree count S can be estimated easily by means called H -measurement with „*Conometer*“ of the vertical angle β .

Now $KE(n)$ in the above formula can be replaced with $4E(S)$, because two intersection-points between K and K_0 corresponds just to one tree count in the case of one side sampling with such a line-grid (see fig 1, 2, 3).

Then it follows that:

$$E(S) = L_0 NE(h) \cot \beta / T$$

$$\text{namely} \quad NE(h) = E(S) T \tan \beta / L_0 \quad (1)$$

The above is one of the principal formulae by Strand.

Measuring diameter (d_{hi}) of such trees as above, the expectation of their cross-sectional area g_{hi} is given by

$$\pi E(d_{hi}^2) / 4 = \sum^N \{h_i / NE(h)\} g_{hi} \quad (2)$$

, because g_{hi} is sampled, as above mentioned, proportionally to its height h_i .

From formulae (1) and (2), the sum of the tree cylinder ($= \sum^N (hg)_i$), denoted by M_s , is given as follows:

$$M_s = E(S) E(d_{hi}^2) T \tan \beta \pi / 4 L_0$$

Strand's case corresponds to the above formula, where $T = 100^2 m^2$, $\tan \beta = 2$ and $L_0 = 5\pi m$.

Another formula by Strand for estimating G as $S_r E(d_r) / 10$ is also deduced by the same approach as above, where S_r denotes the expectation of „*relasopic*“ tree count, and d_r the diameter of trees counted there, making use of the fact that $E(d_r) = d(1 + C_d^2)$, d denotes the population mean of diameter in the stand. By the way, it can be obtained that the harmonic mean of diameters of trees counted as such is an unbiased estimate of d , and the special mean height by Strand can be calculated from $M_s = Gh_s$ as follows:

$$h_s = h(1 + \rho_{gh} C_g C_h), \quad \text{thus}$$

h_s is always longer than $h(1 + C_h^2/2)$ by the author or Essed, F.E., and of course h , the pure mean height, which can be estimated directly by Strand's principal formula (1).

2. The variance of tree count in such sets of forests that each tree moves distributing spatially at random in the field of T wide enough, is given by the author as follows:

$$V(S) = E(S) - \{E(S)\}^2 (1 + C_r^2) / N$$

, where C_r denotes the coefficient of variation of radii of transformed circles for estimating total diameter or height.

Since in forestry practice, the second term of the above formula can be neglected enough, it is written approximately by:

$$V(S) \doteq E(S), \text{ thus } C_s^2 \doteq 1/E(S) \quad (3)$$

Denote the tree count by BITTERLICH's methods as B , and the variance of B -variate is given, as above case, by:

$$V(B) \doteq E(B), \text{ thus } C_B^2 \doteq 1/E(B) \quad (4)$$

In the conventional fixed plot method, if the tree count is denoted by F , the variance of F is given as follows:

$$V(F) \doteq E(F), \text{ thus } C_F^2 \doteq 1/E(F) \quad (5)$$

The estimates of G , h , M_s and Gh by variable and fixed plots methods are given as follows:

by	formula	notices
BITTERLICH	$G_B = k_B B_r$	B_r : the relascope tree count in horizontal WZP; k_B : the basal area factor ($=Z_f$).
STRAND	$G_s = k_s S_r$	S_r : the relascope tree count in his variable rectangular plot method.
Fixed plot method	$G_F = k_F Fg$	F : the tree count in the fixed plot of constant size, g : the expectation of cross-sectional area in the stand.
HIRATA	$h_c = k_c \sqrt{B_c/N}$	B_c : the conometric tree count in vertical WZP., N : the stem number per hectare.
STRAND	$h_s = k_{s_c} S_c/N$	S_c : the conometric tree count in his variable rectangular plot method.
Random Sampling	$\bar{h} = \sum h_i / B_c$	\bar{h} : the mean height of random sample tree of size B_c .
STRAND	$M_s = k_{M_s} S_c E(d_c^2)$	d_c : the diameter of the conometric tree counted in his variable rectangular plot method.
Combined WZP.	$M_{BC} = G_B h_c$ $= k_{BC} \sqrt{B_r B_c} d$ or $= k_{BC} \sqrt{B_r B_c} d_g$	d : the mean diameter of nearest tree sampled secondly at sample point for WZP., d_g : the diameter of mean basal area tree in sample as above.

In order to compare their precisions with each other, such assumption must be taken that the total area of their plots, variable or fixed, circular or rectangular, is expected to be the same one, namely, $C_s^2 = C_B^2 = C_F^2$.

$$\begin{aligned} \text{Then } (C_{GB}/C_{GS})^2 &= 1/(1+C_{d_r}^2) \\ (C_{GB}/C_{GF})^2 &= 1/(1+4C_{d^2}) \\ (C_{GS}/C_{GF})^2 &= (1+C_{d_r}^2)/(1+4C_{d^2}) \end{aligned}$$

, where $C_{d_r}^2 \doteq C_{d^2}(1-3C_{d^2}) \doteq C_{d^2}$.

When there is no sampling error in estimating N , followings are resulted in on the comparison of precisions of height estimation:

$$(C_{h_c}/C_{h_s'})^2 = 1/4$$

$$(C_{h_c}/C_{\bar{h}})^2 = (0.5/C_h)^2$$

, where C_h denotes the coefficient of variation of h_i in the stand, and it must be noticed that C_{h_c} calculated under assumptions as shown above, is probably the largest one in existing forests and, $(C_{M_s}/C_{M_{BC}})^2 = (1+4C_a^2)/(1+C_a^2)$, in the condition of $C_s^2 = C_{B_r}^2/2 = C_{B_c}^2/2$, $S_c = 2B_r = 2B_c = a$, which means comparing in the same number of tree count expected respectively in both methods.

Taking account of values of ratio between coefficients of variation in such a number of methods as above, moreover, considering of our practical viewpoint, it may be concluded that the combined variable circular plot methods (WZP) for estimating Gh has a better efficiency than others, at least, for forest inventory in slope so complicated, although in this case two kinds of sampling of so called B - and H - measurement must be replicated independently to each other, however, Strand's method of variable rectangular plot, for estimating the total volume of tree cylinder ($= \sum^N (gh)_i$) will do well in an inventory for flat timber land.

3. It is worthwhile to notice that the average form quotient (h/d) is given from the ratio of conometric tree count to the relascope one, approximately by $k\sqrt{B_c/B_r}$, therefore, the stand form factor ($f = V/Gh$) can be made use of for estimating V from $Gbh_c (= Gh)$ if the form factor table might be prepared in terms of (h/d).

For estimating the stem number per hectare, mean diameter or the diameter of mean basal area tree, which are necessiated by the formula $k_{BC}\sqrt{B_r B_c} d$ or $k_{BC}\sqrt{B_r B_c} d_q$ for estimating Gh through horizontal and vertical WZP, the author proposes from practical viewpoint that at every stand point taken at random or by systematic method, diameters of nearest trees be measured.

The stem number per hectare is estimated by G from WZP divided by the mean basal area g , which can be estimated from sample taken as written above. These values estimated by subsample of diameters are found to be unbiased, because nearest trees from first sample points can be regarded as random, so long as the points are taken in an unbiased fashion in the field.

Necessary size (n) of sample point for estimating $M_{BC} (= Gh)$ is given by

$$n = t^2 C_{M_{BC}}^2 / \alpha^2$$

, where

$$C_{M_{BC}}^2 = (C_{B_r}^2 + C_{B_c}^2) / 4 + C_a^2 / a$$

from the formula $M_{BC} = k_{BC}\sqrt{B_r B_c} d$ or $= k_{BC}\sqrt{B_r B_c} d_q$, $C_{B_r}^2 = 1/B_r = Z_f/G$

$C_{B_c}^2 = 1/B_c = 100^2 \tan^2 \beta / N\pi h^2$, $a = B_r$ the number of nearest tree at a sample point, and $t=2$, $\alpha=0.05$ in forestry practice. For example, when $G=40 \text{ m}^2/\text{ha}$, $Z_f=4$, $\tan \beta = \sqrt{2\pi}$, $N=800$ and $h=20 \text{ m}$, n is given by 80, which may be useful especially in inventories within stratum on a larger scale. (Feb. 1958)