

調和分柝法を應用せる

洪水調節池の作用に關する研究

助教授 萩 原 貞 夫

Sadao OGIHARA: A Study with the Aid of Harmonic Analysis

of the Flood Controlling Function of Reservoirs.

目 次

緒 言	3
第Ⅰ章 前 論	5
§ 1 洪水調節作用並びに基本公式	5
§ 2 従來の數式的解析法とその批判	8
第Ⅱ章 本 論	13
§ 3 時間流入量曲線式	13
§ 4 水位流出量曲線式	26
§ 5 水位水表面積曲線式	29
§ 6 時間流出量曲線式	35
§ 7 特別な場合の時間流出量曲線式	39
第Ⅲ章 計 算 例	42
結 論	52
Abstract	55

調和分析法を應用せる

洪水調節池の作用に關する研究

緒 言

本論文中に用ひる洪水調節と云ふ術語は天然の湖沼、貯水池或ひは遊水地域などに起る水理現象を意味するものである。

洪水防禦に於ける調節池の効果は古來普く知られてゐる。調節池が他の各種の防水工事に比して一段と優れてゐる點は蓋しその高水位を低めると共に低水位を高める作用を有してゐる故であらう。灌漑用又は水力發電用の貯水池が洪水時にその防災機能を發揮することは屢々見聞するところである。然るに吾國に於ては利水のための貯水池或ひは天然の湖沼を防水に利用する例は可成り多く見受けられるが、洪水調節を主目的とする調節池の數は決して多いとは云はれない。これは國土が狹小であり稀に勃發する洪水に備へるため廣大な地域を長期間に亘つて無爲に遊ばせておくだけの餘裕のないことが主なる理由と考へられる。從來各種の河川工事が盛んに施行されてゐるにも拘らず未だに洪水の災害は減少の傾向を示して居らない。のみならず諸大河川の流域に於ける土地開發はそれら沿岸に於ける都市發展に伴ふ人口財産の集積と相俟つて寧ろ洪水被害額の増加をさへ招來しつつある状態を呈してゐる。

斯る現状であるから將來に於ける防水事業の重要性は云ふまでもなく、各種の砂防工事及び河川工事の擴充と並行して洪水調節池の増設が實現されなければならない。然るに吾國に於ける洪水調節池の増設は前述の理由に依つて制限を受けざるを得ない實狀にある。この問題に對する一解決案として林學界の先覺者は夙に遊水林なるものを提唱した。吾國は全土の67%に及ぶ森林面積を有する世界屈指の森林國である。凡そ如何なる河川と雖もその流路にして山林内を流過せぬものは先づ皆無と云つてよいであらう。國土の地形より見て平野に調節池を増設することが困難であるとしても上流山林内に遊水林を設ける可能性は充分存してゐると考へられる。この意味からすれば遊水林の提案は正に吾國防災科學界への一大貢獻をなしたものと云ひ得ると思ふ。爾來林學方面に於ても洪水調節問題の研究が開始され殊に森林理水及砂防工學方面の重要な一研究課題となつたのである。

嗣つて洪水調節作用に關する研究の發達過程を顧るに先づ 1895 年オーストリーの A. R. Harlachner 氏の圖式解析法にその端を發したのであるが、これは圖式的試索法であつて實用價值は極く少なかつた。降つて 1912 年にスウェーデンの O. Ekdahl 氏が數値積分に依る解

析法と共に圖式解析法を發表し、初めて實用に供せられたのである。更に 1921 年には吾國水理學の泰斗物部長穗博士がこれを一層簡易化實用化され、茲に洪水調節作用の圖式的解析法は略完成の域に達した。然るに一方調節作用に關する數式的解析法換言すれば調節池を通過する流量の時間に對する變化の状態を表はす公式所謂時間流出量曲線式に關する研究は遺憾乍ら前者に比して甚だ立遅れの状態にある。調節池からの流出量と時間との關係式の誘導は從來可成り多くの學者に依つて試みられた。然し調節作用の基本公式が微分方程式であり而もこれが一般の場合に解き得られないと云ふ最大の障害があるため、誘導された公式はいづれも一般性を缺除してゐる。即ち流入量・流出量・調節池の地形などを數式で表現する際に可成り無理な假定が行はれてゐるのである。

以上述べた洪水調節作用の數式的解析法に於ける假定を各方面より再検討し從來のものより一層普遍的且實用的な時間流出量曲線式の誘導を試みたのが本論文の内容であり、これを要約すれば次の如くである。

(1) 從來の各種解析法は洪水調節作用の微分方程式の解法を可能ならしめるため基本因子たる時間流入量曲線式の選定を第二次的のものとして取扱つた點が甚だ遺憾であつた。従つてそれら曲線式の適用は極めて小範圍に限られてゐたのである。筆者はこの點に先づ力を注ぎ可成り複雑な形の流入量曲線に對しても相當の精度を以て適合せしめ得、而も後に行ふ微分方程式解法に當つて容易に積分の可能な時間流入量曲線原式として三角函數の級數所謂 Fourier の級數を採用した、即ち時間に對する流入量の關係を表現するのに調和分析法の應用を試みて成功したのである。

(2) 尙前記微分方程式解法に必要な他の條件としての調節池の地形に關する公式即ち水位と池内水表面積との關係に就いて詳細な吟味を行ひ、池形實測の結果から水位水表面積曲線式を求める際の合理的な係數決定方法を示したのである。

緒言を終るに當り終始御懇篤なる御指導と御鞭撻を賜つた東京帝國大學教授伊藤武夫博士に深厚なる感謝を獻げる次第である。尙農學部森林理水及砂防工學教室の助手藤井眞一農學士、大竹正博君並びに矢島爽君には計算、製圖その他の點で援助を受けたことが尠くない。茲に併せて謝意を表する次第である。

昭和 17 年 9 月

東京帝國大學農學部森林理水及砂防工學教室にて

第 I 章 前 論

§ 1 洪水調節作用並びに基本公式

洪水調節作用は水理學的には流量調節或ひは流量遲滞の作用であるが、實際的見地よりすれば河川に於て上流から流下して來る多量の水を途中で一時留止して下流へは小さい流量に變化して流し出すやうな能を云ふのである。これは又流量曲線（嚴密には時間流量曲線）の扁平化作用など、稱してもよいであらう。太く短い流量を細く長いものに變形するからである。調節作用が調節池の容積殊に水表面積の大きさに比例することは茲に多言を要しないと思ふ。

今調節池に入る流量を流入量、これより出る流量を流出量と呼ぶことにする。流入量は調節池内の水位の上昇を促す。然し一方に流出があるから若し流入量が時間に對して變化しなければ水流連續性に依つて（流入量）＝（流出量）でなければならない。即ち平衡状態にあるのである。流入量が時間に對して變化するときには調節作用が現はれる。今流入量が平衡状態を破つて増加を始めたとすれば池内の水位は上昇を起す。而して一方流出量も水位の上昇に伴つて増加を始めるのである。この際流入量の同じ割合の増加に對しても調節池の面積が大きいほど水位上昇の割合は小さく、これに伴ふ流出量増加の割合も小さい。何れにせよ（流入量）＞（流出量）の間は水位は引續き上昇し、この状態は（流入量）＝（流出量）になるまで續く。次ぎに流入量が最大値を経て減少を始める場合を考へよう。このときに於ても直ちに（流入量）＜（流出量）とはならず或る期間内は依然（流入量）＞（流出量）の状態にある。この間に於ては水位は増加の割合は減少するが上昇は續けてゐる筈である。然し流入量は減少の状態にあり流出量は増加の状態にあるのであるからその差は漸次縮小され或る時期に於て必ず（流入量）＝（流出量）の状態が出現し、このとき水位従つて流出量は最大値に達する。これ以後流入量が減少を續ければ水位は下降を始めるからこれに伴つて流出量も減少を始める。斯くして流入量が減少してゐる間は（流入量）＜（流出量）で、流入量が一定となるか或ひは再び増加して（流入量）＝（流出量）になる時期までこの状態が續く。以上のように流出量の最大値は流入量のそれと同時に現はれることなく必ず遅れて現はれる。この結果流出量は流入量に比してその最大値が低められることになるのである。

茲に微少な時間 dt を考へこの間に於ける調節池への平均流入量を Q 、調節池からの平均流出量を q 、溜水の變化量を dV とし、蒸發及び滲透などに因る消失量を無視し得るものとすれば

$$Qdt = qdt + dV \dots\dots\dots (1)$$

の関係が成立する。これが調節作用を表はす基本公式である。而して調節作用の解析に於ては一般に

$$\text{平均流入量は時間の函数} \quad Q = F(t) \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{平均流出量は水位の函数} \quad q = f(h) \dots\dots\dots(3)$$

$$\text{調節池水表面積は水位の函数} \quad A = \varphi(h) \dots\dots\dots(4)$$

$$\text{溜水變化量は水位の函数} \quad dV = A dh = \varphi(h) dh \dots\dots\dots(5)$$

(但し dh は dt 間内に於ける水位の變化量)

として與へられる。依つて(1)式は

$$\left. \begin{array}{l} Qdt = qdt + A dh \\ \text{或ひは } F(t)dt = f(h)dt + \varphi(h)dh \end{array} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

の形で表はされる。

洪水調節作用の解析は要するに調節された後の流量曲線を求めることに他ならない。従つて(1)或ひは(6)の微分方程式が一般の場合に解き得られ、水位が時間の函数例へば

$$h = \psi(t) \dots\dots\dots(7)$$

として表はすことが出来れば問題はない。それは(7)式を(3)式に入れることに依つて

$$q = f\{\psi(t)\} \dots\dots\dots(8)$$

が得られ、これが即ち時間流出量曲線式となるからである。

以上は時間 t と水位 h とに関する微分方程式であり洪水調節作用の解析には専らこの形が用ひられてゐた。然し調節作用の基本公式はこの形のみに限られるわけではない。時間 t と流出量 q とに関する微分方程式に依つても洪水調節作用の原理を表はし得るものである。⁽¹⁾⁽²⁾

勿論この両者は變數を異にした形の上の異ひがあるだけで本質的には何ら異なる處はないが時として後者に依る方が都合のよい場合が少くない。依つて次ぎにこれに關して述べておく。

先づ(3)式より

$$dq = f'(h)dh$$

を得、これと(5)式とから dh を消去すれば

$$dV = \frac{\varphi(h)}{f'(h)} dq \dots\dots\dots(9)$$

を得る。次ぎに(9)式の h を(3)式に依つて q に置換して

(1) J. C. Stevens: Discussion of Functional Design of Flood Control Reservoirs. Proceedings American Society of Civil Engineers, Vol. 66 No. 3 (1940)

(2) 拙譯 : J. C. Stevens に依る洪水調節作用の解法、拙著「洪水調節池設計に就いて」の追録、砂防71號(昭和15年)

$$\frac{\varphi(h)}{f(h)} = \theta(q) \dots\dots\dots (10)$$

とすれば(9)式は

$$dV = \theta(q)dq \dots\dots\dots (11)$$

然るとき(1)式は

$$Qdt = qdt + \theta(q)dq \dots\dots\dots (12)$$

となる。

扱て次に上記(6)及び(12)の微分方程式解法の問題に移るのであるが、嚮にも述べた通り一般の場合には解き得られない。流入量が或る特種な形の式で表はされ且つ調節池の形状と流出口の形状との間に或る特別な関係が存する場合に限られる。先づ微分方程式を解くための必要条件を考へると次のようである。

$$(6) \text{ 式 } Qdt = qdt + A dh$$

を變形して

$$A dh + (q - Q) dt = 0$$

として $A = P$, $q - Q = R$ とすれば

$$P dh + R dt = 0$$

微分方程式の理論に従へば解法可能の場合は次の3種の条件中の何れかが満足される以外にはないのである。

$$(a) \quad \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial h}$$

$$(b) \quad \frac{1}{R} \left(\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial R}{\partial h} \right) = \text{常數或ひは } h \text{ のみの函數}$$

$$(c) \quad \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial R}{\partial h} \right) = \text{常數或ひは } t \text{ のみの函數}$$

これらの条件に對して問題の微分方程式を吟味してみよう。

(a) の場合には $\frac{\partial \varphi(h)}{\partial t} = \frac{\partial \{f(h) - F(t)\}}{\partial h}$ でなければならない。然るに左邊は0、右邊は $f'(h)$ であるからこの条件は満足されない。唯例外として $f(h) = (\text{常數})$ の場合が考へられるが、これは水位の變化に對して流出量が一定と云ふことである。流出口の大きさが自由に變化するものであればこのような調節は不可能ではないが、これは最高水位決定の問題であつて時間流出量曲線式誘導の問題ではなくなる。

(b) の場合には $\frac{1}{q-Q} \{-f(h)\}' = (\text{常數或ひは } h \text{ のみの函數})$ でなければならない。從つて $Q = (\text{常數})$ の場合に限りこの条件は満足される。即ち流入量が一定の場合である。

(c) の場合には $\frac{1}{A} \{-f(h)\} = (\text{常數或ひは } t \text{ のみの函數})$ でなければならない。從つて

$\frac{f'(h)}{A} = (\text{常数})$ の場合に限りこの条件は満足される。

以上を要すれば洪水調節作用の微分方程式を解くための必要条件は

$$\begin{aligned} Q &= F(t) = \text{常数} \\ \text{又は } \frac{dq}{dh} &= \frac{f'(h)}{\varphi(h)} = \text{常数} \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

の 2 種である。

更に (12) 式

$$Qdt = qdt + \theta(q)dq$$

に就いてこの吟味を行ふとすれば、前式を

$$\theta(q)dq + (q - Q)dt = 0$$

のように變化して $\theta(q) = P$, $(q - Q) = R$ とおいて前と同様の手續きを行へばよい。

(a) $\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial q}$ の条件に関しては $\frac{dq}{dt} = 0$ でなければならない。依つて $q = (\text{常数})$ の場合にのみ満足される。

(b) $\frac{1}{R} \left(\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial R}{\partial q} \right) = (\text{常数或は } q \text{ のみの函数})$ の条件に関しては $\frac{1}{q - Q} = (\text{常数或は } q \text{ のみの函数})$ でなければならない。依つて $Q = (\text{常数})$ の場合にのみ満足される。

(c) $\frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial R}{\partial q} \right) = (\text{常数或は } t \text{ のみの函数})$ の条件に関しては $\frac{1}{\theta(q)} = (\text{常数或は } t \text{ のみの函数})$ でなければならない。依つて $\theta(q) = (\text{常数})$ の場合にのみ満足される。

然るに (10) 式はに依れば $\frac{\varphi(h)}{f'(h)} = \theta(q)$ で前の場合と全く同一の条件が得られる。

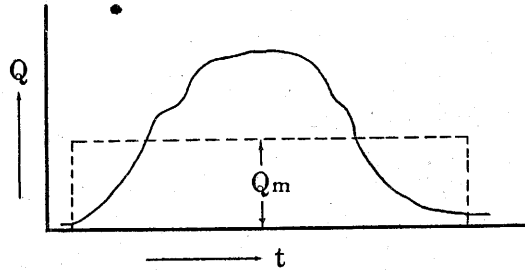
§ 2 従來の數式的解析法とその批判

現今までに發表された洪水調節作用の數式的解析法の種類は可成り多い。而して各研究者たちの努力は専ら調節作用の微分方程式の解法の點に費されたと云ふべく、事實この研究の發達経路を觀るに微分方程式を解くための必要條件を満足する假定に關する研究の歴史に他ならないのである。筆者の紹介しようとしてゐる解析法も畢竟過去に於けるこれら研究者たちの業績を基礎として組立てられたものであるから本論を始めるに先立つて一應過去に於ける代表的の解析法を述べておくのも無意義ではないと思ふ。但し單なる文献の羅列を避け各解析法の立脚する假定の種類に従ひ系統的に記することとする。

(A) $Q = F(t) = (\text{常数})$ とする假定に立脚する解析法

この理論に於ては實際には山形を呈してゐる時間流入量曲線をその總量に於て等しい矩形と見做すのである。換言すれば考へる期間内の總流入量がその平均量を以て同期間内一様に流れたと假定するのである。斯る洪水流量に對し U.S.A. の C. J. Posey 及び Fu-Te I 兩

第 1 圖



氏は“Equivalent uniform flood”の名稱を與へてゐる。⁽³⁾この假定の下に於ける微分方程式の解法は比較的簡單である。

$Q=Q_m$ とすれば (6) 式は

$$Q_m dt = q dt + A dh$$

となり、これを變形して

$$dt = \frac{A dh}{Q_m - q} \quad \dots\dots\dots (14)$$

今流出口が矩形の場合を考へ $q = ch^{\frac{3}{2}}$ とすれば前式は

$$dt = \frac{A dh}{Q_m - ch^{\frac{3}{2}}} = \frac{A dh}{Q_m \left(1 - \frac{ch^{\frac{3}{2}}}{Q_m}\right)}$$

茲で $\frac{c}{Q_m} = a^{\frac{3}{2}}$ とおけば

$$dt = \frac{A dh}{Q_m \left(1 - a^{\frac{3}{2}} h^{\frac{3}{2}}\right)} \quad \dots\dots\dots (15)$$

これが $Q=(\text{常數})$ の假定に依る解析法の原式である。

(1) $A=\text{常數 } A_c$ の場合⁽⁴⁾⁽⁵⁾

$$\int dt = \frac{A_c}{Q_m} \int \frac{dh}{1 - a^{\frac{3}{2}} h^{\frac{3}{2}}}$$

$$t = \frac{2A_c}{aQ_m} \left(\frac{1}{3} \log_e \frac{\sqrt{1 + \sqrt{ah} + ah}}{1 - \sqrt{ah}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2\sqrt{ah} + 1}{\sqrt{3}} \right) + C$$

$t=0$ のとき $h=h_0$ とすれば

$$C = -\frac{2A_c}{aQ_m} \left(\frac{1}{3} \log_e \frac{\sqrt{1 + \sqrt{ah_0} + ah_0}}{1 - \sqrt{ah_0}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2\sqrt{ah_0} + 1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\text{依つて } t = \frac{2A_c}{aQ_m} \left[\frac{1}{3} \log_e \frac{\sqrt{1 + \sqrt{ah} + ah}}{1 + \sqrt{ah_0} + ah_0} \frac{1 - \sqrt{ah_0}}{1 - \sqrt{ah}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{2\sqrt{ah} + 1}{\sqrt{3}} - \right. \right.$$

(3) C. J. Posey & Fu-Te I: Functional Design of Flood Control Reservoirs. Proceedings A. S. C. E. Vol. 65 No. 8 (1939)

(4) Parker: Equalising Effect Produced by Reservoir. Parker: The Control of Water (1932)

(5) 鶴見一之: 湖水の貯水力に就いて, 土木學會誌 第2巻 5號 (大正5年)

積 $A=\varphi(h)$ を適當に定めて微分方程式の解法を試みたのがこの種類に屬する解析法で、その代表的のものに下記の2法がある。

(1) $A=\text{常數 } A_c, q=ch$ の場合

調節池水表面積が水位に對して一定 A_c で流出量が水位に正比例するとの假定である。

$$\frac{f'(h)}{\varphi(h)} = \frac{c}{A_c} = \text{-(常數)}$$

であるから明かに前記の條件を満足する。微分方程式(6)にこの關係を入れると

$$\frac{dh}{dt} + \frac{c}{A_c} h = \frac{1}{A_c} Q \dots\dots\dots (16)$$

これは線形一次微分方程式であるから變數置換に依り容易に解き得られる。その結果を示せば (§6 参照)

$$h = \frac{1}{A_c} e^{-\frac{c}{A_c} t} \left\{ \int Q e^{\frac{c}{A_c} t} dt + C \right\}$$

然るに $q=ch$ であるから

$$q = \frac{c}{A_c} e^{-\frac{c}{A_c} t} \left\{ \int Q e^{\frac{c}{A_c} t} dt + C \right\} \dots\dots\dots (17)$$

この積分常數は $t=0$ のとき $q=0$ ならば

$$C = - \left[\int Q e^{\frac{c}{A_c} t} dt \right]_{t=0}$$

として求められる。

流入量曲線式として

$$Q = q_0 \sin \omega t$$

を用ひれば、時間流出量曲線式は $t=0$ のとき $q=0$ として⁽⁶⁾

$$\begin{aligned} q &= \frac{c}{A_c} e^{-\frac{c}{A_c} t} q_0 \int e^{\frac{c}{A_c} t} \sin \omega t dt \\ &= \frac{q_0 c}{A_c^2 \omega^2 + c^2} (c \sin \omega t - A_c \omega \cos \omega t) \\ &= \frac{q_0 c}{\sqrt{A_c^2 \omega^2 + c^2}} \sin \left[\omega t - \arctan \frac{A_c \omega}{c} \right] \end{aligned}$$

となる。但し $\arctan \frac{A_c \omega}{c}$ は流出量の位相の遅れである。

(2) $A=K h^{\frac{1}{2}}, q=ch^{\frac{3}{2}}$ の場合

これは矩形流出口に關するもので東郷成藏氏に依る美事な解析法である。⁽⁷⁾

$$\frac{f'(h)}{\varphi(h)} = \frac{3c}{2K} = \text{常數}$$

であるから微分方程式は解ける。(6) 式に表題の關係を入れると

$$\frac{dh}{dt} + \frac{c}{K} h = \frac{1}{K} Q h^{-\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (18)$$

(6) 本間仁：貯水池の調節作用，同氏著：水理學（昭和11年）

(7) 東郷成藏：貯水池洪水調節の理論的解法，農業土木研究 第6巻第3號（昭和9年）

これは Bernoulli の式と稱せられ $z=h^{1+\frac{1}{2}}$ として置換すれば

$$\frac{dz}{dt} + \frac{3}{2} \frac{c}{K} z = -\frac{3}{2K} Q$$

即ち線形一次微分方程式となり、この解は

$$z = e^{-\frac{3c}{2K}t} \left\{ \frac{3c}{2K} \int e^{\frac{3c}{2K}t} Q dt + C \right\}$$

である。然るに $q=ch^{\frac{3}{2}}=cz$ であるから

$$q = e^{-\frac{3c}{2K}t} \left\{ \frac{3c}{2K} \int Q e^{\frac{3c}{2K}t} dt + C \right\} \dots\dots\dots (19)$$

この積分常数は $t=0$ のとき $q=0$ ならば

$$C = -\frac{3c}{2K} \left[\int Q e^{\frac{3c}{2K}t} dt \right]_{t=0}$$

として求められる。

流入量曲線式として東郷氏は次ぎの 2 種を擧げて居られる。

(i) 一個の極大を有する曲線で廣大な流域に用ひる式

$$F(t) = \frac{Q_{max} \left[t(t_2 - t) \left(\frac{t_2}{t_1} - 1 \right) \right]^m}{\left[t_1(t_2 - t_1) \left(\frac{t_2}{t_1} - 1 \right) \right]^m}$$

式中 Q_{max} = 最大流入量, m = 任意の正整数, t_1 = 流入量最大となるまでの時間, t_2 = 流入量の終るまでの時間, $\left(\frac{t_2}{t_1} - 1 \right)$ = 正整数なることを要する。

(ii) 比較的狭小な流域に於ける流(入)量曲線は多くの山と谷を有する複合曲線と見て下記 4 種の曲線式に依つて表はし得る小區分にち各個別に積分を行ひこれを連結する。

第 1 種 流入量の増加が加速度的の場合 $F(t) = \frac{Q_i}{t_i^m} t^m$

第 2 種 流入量の増加が減速度的の場合 $F(t) = \frac{Q_i}{t_i^{2m+1}} t^{2m+1}$

第 3 種 流入量の減少が加速度的の場合 $F(t) = \frac{-Q_i}{t_i^m} t^m$

第 4 種 流入量の減少が減速度的な場合 $F(t) = \frac{-Q_i}{t_i^{2m+1}} t^{2m+1}$

(但し t_i 及び Q_i は各區分の時間並びにその間の流入量の變化量, m は正整数)

以上で過去に於ける著名な洪水調節作用の數式的解析法の紹介を了へたのであるが、次に總括的の批判を試みることにする。

先づ流入量を一定と假定する解析法に就いて考へる。問題の流入量はその繼續期間内に於て略一様に流れると見做される場合には勿論この假定を用ひて差支へない。然し時間流入量曲線がこのような簡単な形を示す場合は殆んどあり得ず、殊に洪水の際の曲線は必ず山形を呈し尙屢々數個の山と谷を有する不規則な形をも呈することは實例に徴しても明らかであ

る。そのみならず斯る無理な假定の下に微分方程式を解いてもその結果として得られる時間と水位の関係式は本節 (A) の (1)(2) の例に見る通り頗る複雑な形となる。又これらの関係式から時間流出量曲線式を誘導するには先づ水位を時間を變數とする函數で表はさなければならないのであつて、これはそう簡単には出来ない。

次ぎに流入量が時間と共に變化する場合の解析法に就いて考へる。これに於ても水位流出量曲線式と水位水表面積曲線式との間に $\frac{f'(h)}{\varphi(h)} = (\text{常數})$ の條件を満足すべき特殊の關係が成立しなければならない。即ち一般には流出口の形狀に依つて水位流出量曲線式が定まるから水位水表面積曲線式に或る假定が附せられることになる。既に本節 (B) の (1)(2) に述べたようにこの假定にも相當の無理はあるけれども前の假定に較べれば合理性が大きい。それは水位水表面積曲線式の係數 K の定め方に少しく工夫をすればこの解析法に依つて導かれる時間流出量曲線式の應用性を大ならしめることが出来るのである。これを具體的に云へば洪水調節堰堤を築設する場合に安全度の高い設計資料が得られるように K を定めることが出来るといふ意味であるがこの詳細は本論に譲る。尙この假定に依る解析法の最大の特徴は微分方程式の解が $h=f(t)$ の形となり従つて容易に時間流出量曲線式を導き得ることである。

第 II 章 本 論

§ 3 時間流入量曲線式

時間流入量曲線式 $Q=F(t)$ は次ぎの條件を具備したものでなければならない。

- (1) 時間 t と流入量 Q との關係を最もよく表はすこと
- (2) $F(t)$ が積分可能であること、殊に洪水調節作用の微分方程式が線形一次形の場合には $e^{\alpha t}F(t)$ の積分が可能であること

洪水の際の時間流量曲線式として今日までに發表されたものには次ぎの種類がある。

- (a) 鉛直軸の拋物線⁽⁸⁾
- (b) 三角形即ち直線 (山地川に對して)⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾
- (c) cosine 曲線 (平地川に對して)⁽⁹⁾
- (d) sine 曲線 (§ 2(B)(1) 参照)

(8) P. Klunzinger : Spiegeländerung für Zu- und Abflussparabeln. Ph. Forchheimer : Hydraulik (1924)

P. Klunzinger の近似解法 物部長穂 : 水理學 (昭和 8 年)

同 上 淺野 好 : 開水路の水理 (昭和 12 年)

(9) 物部長穂 : 著者の近似公式

同 氏著 : 水理學 (昭和 8 年)

(10) 黒澤吉代治 : 貯水池の遊水作用に就て

土木學會誌 第 25 卷第 5 號 (昭和 14 年)

(e) 確率曲線⁽¹¹⁾

$$(f) \text{ 特種曲線 } F(t) = \frac{Q_{\max} \left[t(t_2 - t) \left(\frac{t_2}{t_1} - 1 \right) \right]^m}{\left[t_1(t_2 - t_1) \left(\frac{t_2}{t_1} - 1 \right) \right]^m} \quad (\S 2(B)(2) \text{ 参照})$$

以上各種の流入量曲線式は比較的簡単ではあるが (b) 及び (f) を除く他はその何れもが最大流量を示す軸に關して對稱と云ふ共通の特徴を有してゐる。然るに實際の洪水曲線は初め急激に上昇して最大となりその後は緩かに減少するような形を呈するのが通例であり、從つて對稱形は適合度が低いことになる。又 (b) の三角形の假定は特種の場合に限られ、又少くとも上昇と下降の 2 種の式を用ひなければならぬ缺點がある。(f) の曲線式は他のものに比し優つて居るが積分に際して相當の困難を伴ふ。

以上各種の曲線式の缺點を補ひ流入量の可成り不規則な時間的變化の状態を最もよく表現せしめるために筆者は三角函數の級數所謂有限項の Fourier 級數の應用を試みた。Fourier 級數は

$$y = a_0 + \sum_{r=1}^n (a_r \cos rx + b_r \sin rx) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_n \sin nx \cdots (20)$$

であつて變數 x が $0 \sim 2\pi$ の間の値をとるものである。 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$ は Fourier 係數と呼ばれ、 x 及び y の實測値を同式に入れて得られる觀測式を解いて決定することが出来る。この級數の特徴は項數を多くすれば如何ほどでも實測の曲線に近づかしめ得、實測點と項數とを等しからしめれば總ての點を通過する曲線式が得られることである。即ち與へられた曲線に適合せしめるための係數決定所謂調和分析は項數の増加と共に手數は要するが、この點さへ厭はなければ實際の時間流入量曲線に極めて近似な曲線を得ることが出来るのであつて、この點は從來の如何なる曲線式も追從を許さぬ處である。更に Fourier 級數に依つて表はされた時間流入量曲線式を $Q = F(t)$ とすれば洪水調節作用解析の際線形一次微分方程式を解く上に必要な $e^{at}F(t)$ が可積分となるのである。

流入量 Q と時間 t との關係をこの級數で表はすには $y = Q$ とし x を t の項で置換すればよい。 $0 < x < 2\pi$ であるから (20) 式中の x の代りに $\frac{2\pi}{T}t$ を入れる。但し T は流入量の繼續時間である。依つて (20) 式は

$$Q = a_0 + a_1 \cos \left(\frac{2\pi}{T} t \right) + a_2 \cos 2 \left(\frac{2\pi}{T} t \right) + \cdots + a_n \cos n \left(\frac{2\pi}{T} t \right) + b_1 \sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right) + b_2 \sin 2 \left(\frac{2\pi}{T} t \right) + \cdots + b_n \sin n \left(\frac{2\pi}{T} t \right) \cdots (21)$$

となる。この函数を實測曲線に近似せしめるためには最小二乗法の主義に依り、

$$\int_0^T [Q_0 - Q]^2 dt = \text{最小} \quad (\text{但し } Q_0 \text{ は實測値})$$

の條件を満足するように Fourier 係數 $a_0 a_1 a_2 \cdots a_n; b_1 b_2 \cdots b_n$ を決定すればよい。即ち調和分析を行ふのであつて各係數は次ぎの式に依つて與へられる。

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos k \left(\frac{2\pi}{T} t \right) dt \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin k \left(\frac{2\pi}{T} t \right) dt \end{aligned}$$

この公式に従つて係數を求めるには作圖法・調和解析器に依る法など種々の工夫がなされてゐるが、實用的には次ぎに述べる數值計算様式に依る方が便利である。

これには先づ問題の流入量の繼續期間を等間隔に區分する。區分數は各區分點に相當する時刻の流入量が連續的變化をなしてゐる實際の時間流入量曲線を近似的に表はし得る程度にしなければならない。今この區分數を N とすれば (21) 式は次ぎのように書き改められる。但し $\tau = 0, 1, 2, 3, \dots, (N-1)$ とする。

$$\left. \begin{aligned} Q &= a_0 + a_1 \cos \left(\frac{2\pi}{N} \tau \right) + a_2 \cos 2 \left(\frac{2\pi}{N} \tau \right) + \cdots + a_n \cos n \left(\frac{2\pi}{N} \tau \right) \\ &\quad + b_1 \sin \left(\frac{2\pi}{N} \tau \right) + b_2 \sin 2 \left(\frac{2\pi}{N} \tau \right) + \cdots + b_n \sin n \left(\frac{2\pi}{N} \tau \right) \end{aligned} \right\} \cdots (22)$$

茲で $2n+1 = N$ 即ち Fourier 級數の項數を區分數に等しくすれば N 個の τ の値に對して N 個の觀測式が得られ、これを聯立方程式として解いて N 個の係數 $a_0 a_1 a_2 \cdots a_n; b_1 b_2 \cdots b_n$ を求めることが出来る。斯くして決定された係數を有する式より求めた種々の τ に對する Q の値は實測値と全く一致する。云ひ換へれば Q の實測値を圖上に點記すれば上記の曲線式はその總ての點を通るのである。

然し多數の時間區分と同數の Fourier 係數を決定するには甚だ多くの手數を要するから一般には $2n+1 < N$ の場合が多い。大きい相違を示さぬ限り斯る曲線式が簡單なほど望ましいことは本問題に限らず一般の通則である。これに關しては又後に述べるが $2n+1 < N$ の場合は最小二乗法を應用して實測値から離れる程度の最も少ないように係數を定めるのである。今一定時間毎の N 觀測に對する Q の値を $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_{N-1}$ とした場合の係數の最確値を求めると調和分析法の理論に依り次ぎのように與へられる。

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{N} \left\{ Q_0 + Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{N-1} \right\} = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} Q_r \\
 a_1 &= \frac{2}{N} \left\{ Q_0 + Q_1 \cos \frac{2\pi}{N} + Q_2 \cos \frac{4\pi}{N} + \dots + Q_{N-1} \cos \frac{2(N-1)\pi}{N} \right\} = \frac{2}{N} \sum_{r=0}^{N-1} Q_r \cos \frac{2r\pi}{N} \\
 a_2 &= \frac{2}{N} \left\{ Q_0 + Q_1 \cos \frac{4\pi}{N} + Q_2 \cos \frac{8\pi}{N} + \dots + Q_{N-1} \cos \frac{4(N-1)\pi}{N} \right\} = \frac{2}{N} \sum_{r=0}^{N-1} Q_r \cos \frac{4r\pi}{N} \\
 &\dots\dots\dots \\
 a_n &= \frac{2}{N} \left\{ Q_0 + Q_1 \cos \frac{2n\pi}{N} + Q_2 \cos \frac{4n\pi}{N} + \dots + Q_{N-1} \cos \frac{2n(N-1)\pi}{N} \right\} = \frac{2}{N} \sum_{r=0}^{N-1} Q_r \cos \frac{2nr\pi}{N} \quad \dots(23) \\
 b_1 &= \frac{2}{N} \left\{ Q_1 \sin \frac{2\pi}{N} + Q_2 \sin \frac{4\pi}{N} + \dots + Q_{N-1} \sin \frac{2(N-1)\pi}{N} \right\} = \frac{2}{N} \sum_{r=0}^{N-1} Q_r \sin \frac{2r\pi}{N} \\
 b_2 &= \frac{2}{N} \left\{ Q_1 \sin \frac{4\pi}{N} + Q_2 \sin \frac{8\pi}{N} + \dots + Q_{N-1} \sin \frac{4(N-1)\pi}{N} \right\} = \frac{2}{N} \sum_{r=0}^{N-1} Q_r \sin \frac{4r\pi}{N} \\
 &\dots\dots\dots \\
 b_n &= \frac{2}{N} \left\{ Q_1 \sin \frac{2n\pi}{N} + Q_2 \sin \frac{4n\pi}{N} + \dots + Q_{N-1} \sin \frac{2n(N-1)\pi}{N} \right\} = \frac{2}{N} \sum_{r=0}^{N-1} Q_r \sin \frac{2nr\pi}{N}
 \end{aligned}$$

但し $n = \frac{N}{2}$ のときは a_n の式中の $\frac{2}{N}$ は $\frac{1}{N}$ となり $b_n = 0$ となる。

(23) 式に依り係数を計算する手續は N が 4 の倍数のとき簡単になる。それは $N = 4p$ (p は整数) とすれば r が $0, 1, 2, \dots, (4p-1)$ のとき $\cos \frac{2rs\pi}{N}$ 及び $\sin \frac{2rs\pi}{N}$ ($s = 1, 2, 3, \dots$) は各々 4 回だけ絶対値の等しい値を採るからである。従つて N を 12 或ひは 24 などとすると有利である。以上の方法に依つて決定された係数を有する(21)式が時間流入量曲線式である。

因に(22)式は係数を求める便宜上變數を變更したものに過ぎない。

次に参考迄に時間區分が 4 の倍数の場合の Fourier 係數計算様式を記しておく。

(1) 時間區分數が 12 の場合

(23) の各式に於て $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_{N-1}$ に乗すべき係数を表記すれば第 1 表のようである。

第 1 表

	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8	Q_9	Q_{10}	Q_{11}
$\frac{2r\pi}{12}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{6\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{8\pi}{6}$	$\frac{9\pi}{6}$	$\frac{10\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$
a_0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$a_1 \dots \cos \frac{2r\pi}{12}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$a_2 \dots \cos \frac{4r\pi}{12}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$a_3 \dots \cos \frac{6r\pi}{12}$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
$a_4 \dots \cos \frac{8r\pi}{12}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

$a_5 \cdots \cos \frac{10r\pi}{12}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$a_6 \cdots \cos \frac{12r\pi}{12}$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
$b_1 \cdots \sin \frac{2r\pi}{12}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$b_2 \cdots \sin \frac{4r\pi}{12}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$b_3 \cdots \sin \frac{6r\pi}{12}$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1
$b_4 \cdots \sin \frac{8r\pi}{12}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$b_5 \cdots \sin \frac{10r\pi}{12}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

註: $b_6=0$ となる。

次に第2表 (i) (ii) (iii) を下記の様式に従つて作成する。

第2表 (i)

第2表 (ii)

第2表 (iii)

	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6		a_0	a_1	a_2	a_3		β_1	β_2	β_3
	Q_{11}	Q_{10}	Q_9	Q_8	Q_7				a_6	a_5	a_4			β_5	β_4	
上下の和 (+)	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	(+)	a_0'	a_1'	a_2'	a_3'	(+)	β_1'	β_2'	β_3'
上下の差 (-)		β_1	β_2	β_3	β_4	β_5		(-)	a_0''	a_1''	a_2''		(-)	β_1''	β_2''	

第1表を参考として (23) の各式に於ける Q の係数の等しい項を纏めると

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{12} [Q_0 + (Q_1 + Q_{11}) + (Q_2 + Q_{10}) + (Q_3 + Q_9) + (Q_4 + Q_8) + (Q_5 + Q_7) + Q_6] \\
 a_1 &= \frac{1}{6} [Q_0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \{ (Q_1 + Q_{11}) - (Q_5 + Q_7) \} + \frac{1}{2} \{ (Q_2 + Q_{10}) - (Q_4 + Q_8) \} - Q_6] \\
 a_2 &= \frac{1}{6} [Q_0 + \frac{1}{2} \{ (Q_1 + Q_{11}) - (Q_2 + Q_{10}) - (Q_4 + Q_8) + (Q_5 + Q_7) \} - (Q_3 + Q_9) + Q_6] \\
 a_3 &= \frac{1}{6} [Q_0 - (Q_2 + Q_{10}) + (Q_4 + Q_8) - Q_6] \\
 a_4 &= \frac{1}{6} [Q_0 - \frac{1}{2} \{ (Q_1 + Q_{11}) + (Q_2 + Q_{10}) + (Q_4 + Q_8) + (Q_5 + Q_7) \} + (Q_3 + Q_9) + Q_6] \\
 a_5 &= \frac{1}{6} [Q_0 - \frac{\sqrt{3}}{2} \{ (Q_1 + Q_{11}) - (Q_5 + Q_7) \} + \frac{1}{2} \{ (Q_2 + Q_{10}) - (Q_4 + Q_8) \} - Q_6] \\
 a_6 &= \frac{1}{12} [Q_0 - \{ (Q_1 + Q_{11}) - (Q_2 + Q_{10}) + (Q_3 + Q_9) - (Q_4 + Q_8) + (Q_5 + Q_7) \} + Q_6] \\
 b_1 &= \frac{1}{6} [\frac{1}{2} \{ (Q_1 - Q_{11}) + (Q_5 - Q_7) \} + \frac{\sqrt{3}}{2} \{ (Q_2 - Q_{10}) + (Q_4 - Q_8) \} + (Q_3 - Q_9)] \\
 b_2 &= \frac{1}{6} [\frac{\sqrt{3}}{2} \{ (Q_1 - Q_{11}) + (Q_2 - Q_{10}) - (Q_4 - Q_8) - (Q_5 - Q_7) \}] \\
 b_3 &= \frac{1}{6} [(Q_1 - Q_{11}) - (Q_3 - Q_9) + (Q_5 - Q_7)]
 \end{aligned}$$

$$b_4 = \frac{1}{6} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \{ (Q_1 - Q_{11}) - (Q_2 - Q_{10}) + (Q_4 - Q_8) - (Q_5 - Q_7) \} \right]$$

$$b_5 = \frac{1}{6} \left[\frac{1}{2} \{ (Q_1 - Q_{11}) + (Q_5 - Q_7) \} - \frac{\sqrt{3}}{2} \{ (Q_2 - Q_{10}) + (Q_4 - Q_8) \} + (Q_3 - Q_9) \right]$$

となり第2表に依つて與へられる $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$ の値でこれらを表はせば

$$a_0 = \frac{1}{12} \{ a_0' + a_1' + a_2' + a_3' \}$$

$$a_1 = \frac{1}{6} \left\{ a_0'' + \frac{\sqrt{3}}{2} a_1'' + \frac{1}{2} a_2'' \right\}$$

$$a_2 = \frac{1}{6} \left\{ a_0' + \frac{1}{2} (a_1' - a_2') - a_3' \right\}$$

$$a_3 = \frac{1}{6} \{ a_0'' - a_2'' \}$$

$$a_4 = \frac{1}{6} \left\{ a_0' - \frac{1}{2} (a_1' + a_2') + a_3' \right\}$$

$$a_5 = \frac{1}{6} \left\{ a_0'' - \frac{\sqrt{3}}{2} a_1'' + \frac{1}{2} a_2'' \right\}$$

$$a_6 = \frac{1}{12} \{ a_0' - a_1' + a_2' - a_3' \}$$

$$b_1 = \frac{1}{6} \left\{ \frac{1}{2} \beta_1' + \frac{\sqrt{3}}{2} \beta_2' + \beta_3' \right\}$$

$$b_2 = \frac{1}{6} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} (\beta_1'' + \beta_1'') \right\}$$

$$b_3 = \frac{1}{6} \{ \beta_1' - \beta_3' \}$$

$$b_4 = \frac{1}{6} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} (\beta_1'' - \beta_2'') \right\}$$

$$b_5 = \frac{1}{6} \left\{ \frac{1}{2} \beta_1' - \frac{\sqrt{3}}{2} \beta_2' + \beta_3' \right\}$$

第2表に依つて得られた値を上式に入れ、ば各係数は決定される。又次ぎに示すような計算表に依れば一層便利である。

第3表 時間流入量曲線式の Fourier 係数計算表 (時間區分數12の場合) 第1様式

(i)

	$Q_0 =$	$Q_1 =$ $Q_{11} =$	$Q_2 =$ $Q_{10} =$	$Q_3 =$ $Q_9 =$	$Q_4 =$ $Q_8 =$	$Q_5 =$ $Q_7 =$	$Q_6 =$
上 下 の 利	$a_0 =$	$a_1 =$	$a_2 =$	$a_3 =$	$a_4 =$	$a_5 =$	$a_6 =$
上 下 の 差		$\beta_1 =$	$\beta_2 =$	$\beta_3 =$	$\beta_4 =$	$\beta_5 =$	

(ii)

	$a_0 =$	$a_1 =$	$a_2 =$	$a_3 =$	$\beta_1 =$	$\beta_2 =$	$\beta_3 =$
	$a_6 =$	$a_5 =$	$a_4 =$		$\beta_5 =$	$\beta_4 =$	
上 下 の 和	$a_0' =$	$a_1' =$	$a_2' =$	$a_3' =$	$\beta_1' =$	$\beta_2' =$	$\beta_3' =$
上 下 の 差	$a_0'' =$	$a_1'' =$	$a_2'' =$		$\beta_1'' =$	$\beta_2'' =$	

(iii)

	$a_0' =$	$a_1' =$	$a_2' =$	$a_3' =$	$a_0'' =$	$a_1'' =$	$a_2'' =$
$12a_0$	1	1	1	1	—	—	—
$6a_1$	—	—	—	—	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$6a_2$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	— 1	—	—	—
$6a_3$	—	—	—	—	1	0	— 1
$6a_4$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	—	—	—
$6a_5$	—	—	—	—	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$12a_6$	1	— 1	1	— 1	—	—	—
		$\beta_1' =$	$\beta_2' =$	$\beta_3' =$		$\beta_1'' =$	$\beta_2'' =$
$6b_1$	—	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	—	—	—
$6b_2$	—	—	—	—	—	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$6b_3$	—	1	0	— 1	—	—	—
$6b_4$	—	—	—	—	—	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$6b_5$	—	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	—	—	—

備 考 使用法: (i) の上 2 欄に各時間区分點に於ける流入量實測値を記入し上下の和と差 a, β を求める。(ii) の上 2 欄に a, β を並べ上下の和と差 a', β', a'', β'' を求める。これらを (iii) に記入しその各々に縦欄の数を乘じ、各横欄毎に加へ合せて係數 $a_0 a_1 \cdots a_6 b_1 \cdots b_5$ を求める。

第 4 表 時間流入量曲線式の Fourier 係數計算表 (時間區分數 12 の場合) 第 2 様式

(i)

	$Q_0 =$	$Q_1 =$	$Q_2 =$	$Q_3 =$	$Q_4 =$	$Q_5 =$	$Q_6 =$
		$Q_{11} =$	$Q_{10} =$	$Q_9 =$	$Q_8 =$	$Q_7 =$	
+))	$a_0 =$	$a_1 =$	$a_2 =$	$a_3 =$	$a_4 =$	$a_5 =$	$a_6 =$
-))		$\beta_1 =$	$\beta_2 =$	$\beta_3 =$	$\beta_4 =$	$\beta_5 =$	

(ii)

	$a_0 =$ $a_6 =$	$a_1 =$ $a_5 =$	$a_2 =$ $a_4 =$	$a_3 =$	$\beta_1 =$ $\beta_5 =$	$\beta_2 =$ $\beta_4 =$	$\beta_3 =$
+))	$a_0' =$	$a_1' =$	$a_2' =$	$a_3' =$	$\beta_1' =$	$\beta_2' =$	$\beta_3' =$
-))	$a_0'' =$	$a_1'' =$	$a_2'' =$		$\beta_1'' =$	$\beta_2'' =$	

(iii)

$$A = a_0' + a_2' =$$

$$B = a_1' + a_3' =$$

$$C = a_0'' + \frac{1}{2}a_2'' =$$

$$D = \frac{\sqrt{3}}{2}a_1'' =$$

$$E = \frac{1}{2}\beta_1' + \beta_3' =$$

$$F = \frac{\sqrt{3}}{2}\beta_2' =$$

$$G = a_0' - \frac{1}{2}a_2' =$$

$$H = \frac{1}{2}a_1' - a_3' =$$

$$I = \frac{\sqrt{3}}{2}\beta_1'' =$$

$$J = \frac{\sqrt{3}}{2}\beta_2'' =$$

$$K = a_0'' - a_2'' =$$

$$L = \beta_1' - \beta_3' =$$

$$a_0 = \frac{1}{12}(A' + B) =$$

$$a_1 = \frac{1}{6}(C + D) =$$

$$b_1 = \frac{1}{6}(E + F) =$$

$$a_2 = \frac{1}{6}(G + H) =$$

$$b_2 = \frac{1}{6}(I + J) =$$

$$a_3 = \frac{1}{6}K =$$

$$b_3 = \frac{1}{6}L =$$

$$a_4 = \frac{1}{6}(G - H) =$$

$$b_4 = \frac{1}{6}(I - J) =$$

$$a_5 = \frac{1}{6}(C - D) =$$

$$b_5 = \frac{1}{6}(E - F) =$$

$$a_6 = \frac{1}{12}(A - B) =$$

備 使用法：(i) の上 2 欄に各時間区分點に於ける流入量實測値を記入し上下の和と差 a, β を求める。(ii) の上の 2 欄に a, β を並べ上下の和と差 a', β', a'', β'' を求める。これらの値を用ひて(iii) の左側の諸式より A, B, \dots, L の値を計算し、これらを右側の諸式に入れて係数を求める。

考 $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$

(2) 時間區分數が 24 の場合

(23) の各式に於て $N=24$ として得られる。(1) の場合の第 3 表に相當するものを作れば次表のようである。

第 5 表 時間流入量曲線式の Fourier 係数計算表 (時間区分数 24 の場合)

(i)

	$Q_0 =$	$Q_1 =$	$Q_2 =$	$Q_3 =$	$Q_4 =$	$Q_5 =$	$Q_6 =$	$Q_7 =$	$Q_8 =$	$Q_9 =$	$Q_{10} =$	$Q_{11} =$	$Q_{12} =$
		$Q_{23} =$	$Q_{22} =$	$Q_{21} =$	$Q_{20} =$	$Q_{19} =$	$Q_{18} =$	$Q_{17} =$	$Q_{16} =$	$Q_{15} =$	$Q_{14} =$	$Q_{13} =$	
上下の和	$a_0 =$	$a_1 =$	$a_2 =$	$a_3 =$	$a_4 =$	$a_5 =$	$a_6 =$	$a_7 =$	$a_8 =$	$a_9 =$	$a_{10} =$	$a_{11} =$	$a_{12} =$
上下の差		$\beta_1 =$	$\beta_2 =$	$\beta_3 =$	$\beta_4 =$	$\beta_5 =$	$\beta_6 =$	$\beta_7 =$	$\beta_8 =$	$\beta_9 =$	$\beta_{10} =$	$\beta_{11} =$	$\beta_{12} =$

(ii)

	$a_0 =$	$a_1 =$	$a_2 =$	$a_3 =$	$a_4 =$	$a_5 =$	$a_6 =$	$\beta_1 =$	$\beta_2 =$	$\beta_3 =$	$\beta_4 =$	$\beta_5 =$	$\beta_6 =$
	$a_{12} =$	$a_{11} =$	$a_{10} =$	$a_9 =$	$a_8 =$	$a_7 =$		$\beta_{11} =$	$\beta_{10} =$	$\beta_9 =$	$\beta_8 =$	$\beta_7 =$	
上下の和	$a_0' =$	$a_1' =$	$a_2' =$	$a_3' =$	$a_4' =$	$a_5' =$	$a_6' =$	$\beta_1' =$	$\beta_2' =$	$\beta_3' =$	$\beta_4' =$	$\beta_5' =$	$\beta_6' =$
上下の差	$a_0'' =$	$a_1'' =$	$a_2'' =$	$a_3'' =$	$a_4'' =$	$a_5'' =$		$\beta_1'' =$	$\beta_2'' =$	$\beta_3'' =$	$\beta_4'' =$	$\beta_5'' =$	

(iii)

	$a_0' =$	$a_1' =$	$a_2' =$	$a_3' =$	$a_4' =$	$a_5' =$	$a_6' =$	$a_0'' =$	$a_1'' =$	$a_2'' =$	$a_3'' =$	$a_4'' =$	$a_5'' =$
$24a_0$	1	1	1	1	1	1	1	—	—	—	—	—	—
$12a_1$	—	—	—	—	—	—	—	1	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$
$12a_2$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	—	—	—	—	—	—
$12a_3$	—	—	—	—	—	—	—	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$12a_4$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	—	—	—	—	—	—
$12a_5$	—	—	—	—	—	—	—	1	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$
$12a_6$	1	0	-1	0	1	0	-1	—	—	—	—	—	—
$12a_7$	—	—	—	—	—	—	—	1	$-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$
$12a_8$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	—	—	—	—	—	—
$12a_9$	—	—	—	—	—	—	—	1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$12a_{10}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	—	—	—	—	—	—
$12a_{11}$	—	—	—	—	—	—	—	1	$-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$
$24a_{12}$	1	-1	1	-1	1	-1	1	—	—	—	—	—	—

	$\beta_1' =$	$\beta_2' =$	$\beta_3' =$	$\beta_4' =$	$\beta_5' =$	$\beta_6' =$		$\beta_1'' =$	$\beta_2'' =$	$\beta_3'' =$	$\beta_4'' =$	$\beta_5'' =$
$12b_1$	$-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	1	—	—	—	—	—	—
$12b_2$	—	—	—	—	—	—	—	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$12b_3$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	—	—	—	—	—	—
$12b_4$	—	—	—	—	—	—	—	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$12b_5$	$-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	1	—	—	—	—	—	—
$12b_6$	—	—	—	—	—	—	—	1	0	-1	0	1
$12b_7$	$-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	-1	—	—	—	—	—	—
$12b_8$	—	—	—	—	—	—	—	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$12b_9$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	—	—	—	—	—	—
$12b_{10}$	—	—	—	—	—	—	—	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$12b_{11}$	$-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	-1	—	—	—	—	—	—

流入量曲線の形が不規則な場合には時間区分を多くし而も Fourier 級数の項数を時間区分點に等しくするか或ひは同数ではないにせよ成るべく多くする必要がある。然し一般には洪水曲線は一つの峯を有する比較的滑かな形を持つてゐるから曲線形の特徴を失はぬ限り簡単な式で表はす方が有利であり且その利用價值も大きい。時間区分點數より少ない項数を持つ Fourier 級数を用いる場合には勿論この曲線は各時間区分點に於ける流量實測値とは一致しない。然しこの離れる程度が餘り大きくなければ充分目的に叶ふものである。何故ならば第一に時間区分が既に有限なものであるからこの区分點に於ける實測流量に完全に一致した處でその他の點で近似曲線たる性質に變りはないからである。又一方後に採用する流出量並びに調節池水表面積と水位の關係に就いても或る假定がなされる。これらの事實を併せ考へれば時間流入量曲線式としては數項を有する Fourier 級数を用ひて大差ないことが認められると思ふ。然し如何ほどの項数を採用すべきかに就いては一概には云はれない。従つて手数は要しても全項の係數を決定し、然る後その値の小さいものから順次に省略することに依つて曲線式を簡単なものに變化するのが適當な方法と考へられる。

次ぎに實例に依つて各種時間流入量曲線式の適合度の比較を行つてみよう。時間流量曲線の形は降雨の性質及び流域の状態その他の因子の影響に依つて可成り異なるものである。従つて過去に於ける洪水の際の多數の觀測記錄の統計に基いて洪水時間流量曲線の一般の形が決

定されない以上正確な比較研究は不可能である。然し既に述べたように従來の經驗上洪水曲線は初め急激に上昇の後緩かに長く尾を引いて下降する性質は殆んど總ての洪水に共通な特徴と云ひ得る。従つて斯様な性質を具備する著名な一實例に就いて上記の比較研究を試みることも有意義であると考え。扱て次ぎに採用すべき實例の問題であるが吾國の洪水記録は殆んど洪水水位で表はされてゐるので茲では流量そのものの値を示してゐる U.S.A. Idaho 州 Coeur d'Alene 湖に於ける 1917 年 11 月 27 日～12 月 9 日の洪水の例を採用することにした。11 月 27 日正午を洪水開始時とし 1 日間隔即ち各日の正午に於ける流量を示すと次表のようである。

第 6 表

11月27日正午より起算した日数 (day)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
湖水への流入量 (1,000cf/sec)	20	36	54	74	78	65	55	45	35	30	28	27	24

但し時間流量曲線式として週期函数を用ひる場合は初めと終りの流入量として共に22を用ひるものとする。

比較に用ひる時間流入量曲線式は次ぎの8種類でその結果を示せば下記の通りである。

直線形

- (1) 等量定流形……§2 (A)に於ける “Equivalent uniform flood” に換算したもの
 $Q = 45.8 \cdots (U)$

- (2) 三角形……流量の増加の場合と減少の場合の2種の式を必要とする

$$\left. \begin{aligned} Q &= 21.6 + 15.4t \\ Q &= 96.2 - 6.7t \end{aligned} \right\} \cdots (T)$$

(流量最大は兩直線の交點で $t=3.4$ $Q=73.7$ である。)

sine 曲線形

- (3) 最小二乗法に依つて求めた乗係数を有するもの $Q = 22.0 + 37.1 \sin \frac{\pi}{12} t \cdots (S_t)$
 (4) 最大値を一致せしめるような乗係数を有するもの $Q = 22.0 + 56.0 \sin \frac{\pi}{12} t \cdots (S_m)$

cosine 曲線形

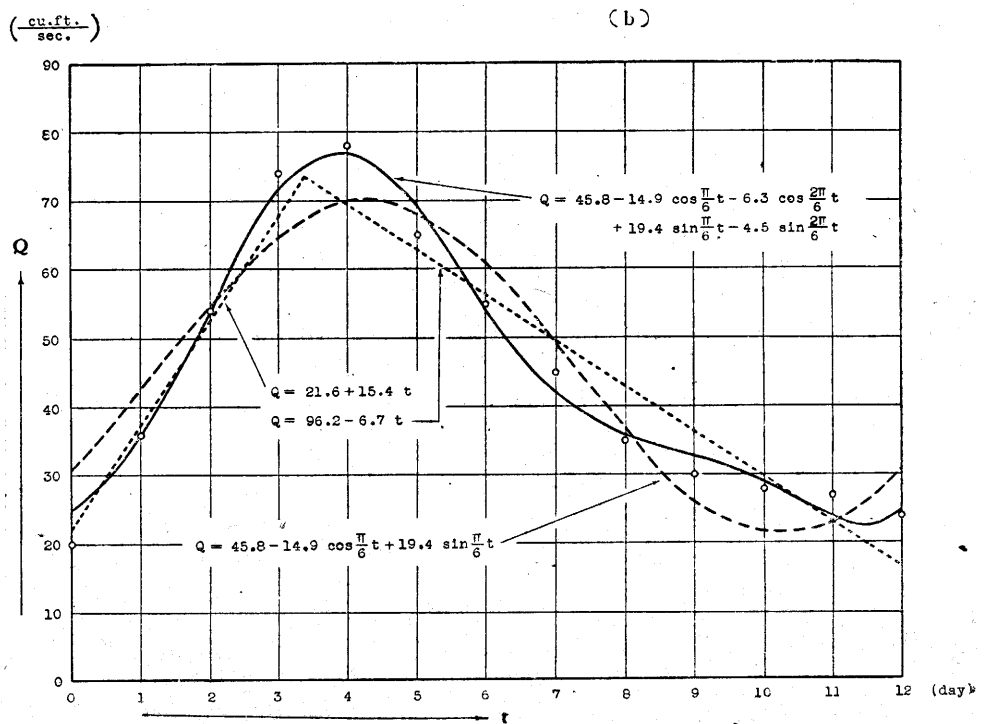
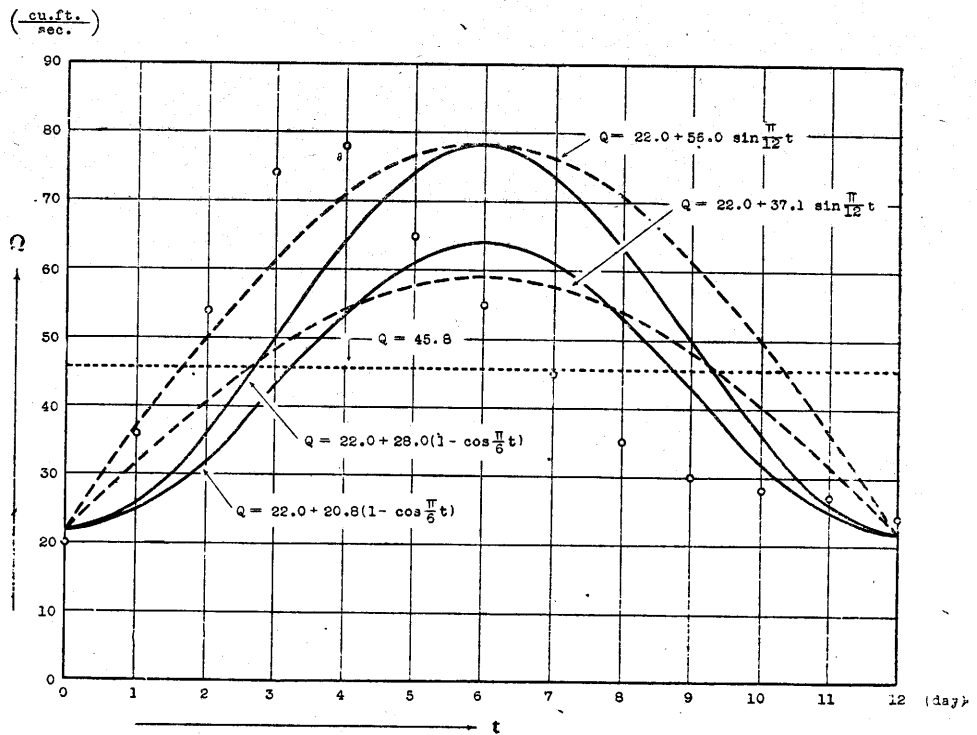
- (5) 最小二乗法に依つて求めた乗係数を有するもの $Q = 22.0 + 20.8(1 - \cos \frac{\pi}{6} t) \cdots (C_t)$
 (6) 最大値を一致せしめるような乗係数を有するもの $Q = 22.0 + 28.0(1 - \cos \frac{\pi}{6} t) \cdots (C_m)$

Fourier 級数形

$$Q = 45.8$$

- (7) 第1調和項まで採用 $-14.9 \cos \frac{\pi}{6} t + 19.4 \sin \frac{\pi}{6} t \cdots (F_1)$
 (8) 第2調和項まで採用 $-6.3 \cos \frac{2\pi}{6} t - 4.5 \sin \frac{2\pi}{6} t \cdots (F_2)$

第 2 圖 (a)



白點は實測流入量を示す

以上各式の曲線のグラフを描けば第2圖(a)及び(b)のようであり、これに依つて大體適合度の比較が出来るが尙参考までに實測値と算出値の差 v の平均値 $\frac{[\pm v]}{n}$ 及び二乗平均値 $\sqrt{\frac{[vv]}{n}}$ (n は實測値の數) を求めると次表のようになる。

第 7 表

式 の 種 類	U	T	S_t	S_m	C_t	C_m	F_1	F_2
$\frac{[\pm v]}{n}$	16.8	4.2	11.5	14.8	12.7	14.5	5.4	1.9
$\sqrt{\frac{[vv]}{n}}$	18.9	5.0	14.0	19.1	16.4	17.5	6.1	2.4

この結果から見ると従來多く用ひられた sine 曲線或ひは cosine 曲線はその適合度が頗る低いことが認められる。一方直線即ち三角形公式の適合度が意外に高いことは興味深い。但しこれは流量の増加と減少の2つの場合に就いて別個の式を用ひなければならないのが缺點である。Fourier 級数の曲線式は第2調和項までを含むものを示したのであるが、それでも他に優れてゐることが解る。同級数は三角函數の和であるから項數を増すことに依つて適合度の高まることは元より數學上當然の理であるが、僅か數項の増加が適合度を飛躍的に高める點は注目に値すると思ふ。

次ぎに調和項數の増加と適合度の關係を見るため前と同様の手續きを行へば第8表が得られる。但し曲線式は

$$Q = 45.8 - 14.9 \cos \frac{\pi}{6} t - 6.3 \cos \frac{2\pi}{6} t - 0.3 \cos \frac{3\pi}{6} t - 0.5 \cos \frac{4\pi}{6} t - 1.3 \cos \frac{5\pi}{6} t - 0.8 \cos \frac{6\pi}{6} t \\ - 19.4 \sin \frac{\pi}{6} t - 4.5 \sin \frac{2\pi}{6} t - 2.5 \sin \frac{3\pi}{6} t + 0.9 \sin \frac{4\pi}{6} t - 0.2 \sin \frac{5\pi}{6} t$$

であり、 $F_1 F_2 \cdots F_6$ はそれぞれ第1第2……第6調和項を累加的に採用した曲線式の代表記號とする。

第 8 表

式 の 種 類	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
$\frac{[\pm v]}{n}$	5.44	1.88	1.24	1.11	0.88	0.70
$\sqrt{\frac{[vv]}{n}}$	6.10	2.38	1.75	1.62	1.17	0.96

第2調和項採用までは $\frac{[\pm v]}{n}$ 及び $\sqrt{\frac{[vv]}{n}}$ の値は急激に減少するが、それ以後の減少の割合は緩慢になる。これに依つて第何項まで採用するか標準が知られる。

更に調和項と云ふことを考慮せず成るべく少い項数を以て成るべく高い適合度を得ようと望むならば係数の大きい項から順次に採用して行けばよいのである。この方法で1項ずつ増加した場合の曲線式を $f_1 f_2 \cdots f_{11}$ で表はし $\frac{[\pm v]}{n}$ 及び $\sqrt{\frac{[vv]}{n}}$ を求めると

第 9 表

式 の 種 類	f_1	$f_2=F_1$	f_3	$f_4=F_2$	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	$f_{11}=F_6$
$\frac{[\pm v]}{n}$	10.55	5.44	3.09	1.88	1.32	0.96	0.98	0.94	0.75	0.72	0.70
$\sqrt{\frac{[vv]}{n}}$	7.22	6.10	3.74	2.38	1.81	1.34	1.30	1.24	1.02	0.99	0.96

となる。

理論上全項採用の場合の式即ち $f_{11}=F_6$ の曲線式は總ての實測點を通る筈であるが洪水の初めと終りの實測値が異なるためその中間の値を用いたことと計算中の4捨5入の関係で0になつて居らないのである。

§ 4 水位流出量曲線式

洪水調節池の流出部には一般に溢流堰が築設される。而して洪水時の大流量を流過せしめるためその放水路には巾の廣い矩形又は梯形が採用されるから次ぎにこれらに對する水位流出量曲線式に就いて考へる。洪水調節用堰堤の背後には廣い湛水池が形成されるので、取扱ひの困難な接近速度は無視して差支へなく、この點は比較的簡單である。

先づ矩形堰ならばその巾が b のものに對して

$$q = cbh^{\frac{3}{2}} \cdots \cdots \cdots (i)$$

であることは從來多數の學者に依つて理論的に導かれ且つ實驗上證明されてゐるから茲に蛇足を附する必要はない。

次ぎに梯形堰であるが、一般には矩形と三角形からの流量の和と見做し、底巾 b 、測法 a (側方傾斜角を α とすれば $a = \tan \alpha$) のものに對して

$$q = c_1 b h^{\frac{3}{2}} + c_2 a h^{\frac{5}{2}} \cdots \cdots \cdots (ii)$$

の理論式が用ひられてゐる。今この堰からの流量を (ii) 式右邊の第1項のみで表はすとすれば、即ち巾 b の矩形堰の流量と見做せば、如何ほどの差異を生ずるかを考へる。今その差の q に對する比を r とすれば

$$r = \frac{c_2 a h^{\frac{5}{2}}}{q} = \frac{1}{\frac{c_1}{c_2 a} \frac{b}{h} + 1} \cdots \cdots \cdots (iii)$$

茲で H. J. F. Gourley 及び B. S. Crimp 兩氏の實驗式⁽¹²⁾

$$q = 1.69b^{1.02}h^{1.47} + 1.32ah^{2.47} \dots\dots\dots(iv)$$

を利用して $\frac{b}{h}$ の種々の値に對する r の値を計算してみよう。但し b の指數は 1 と見做し α の値としては最も普通に用ひられてゐる梯形堰の側法 1 ($\alpha = 45^\circ$) の場合とする。然るとき (iii) 式は

$$r = \frac{1}{\frac{1.69}{1.32} \frac{b}{h} + 1} \dots\dots\dots(v)$$

となりこれから r を求めると第 10 表のようになる。

第 10 表

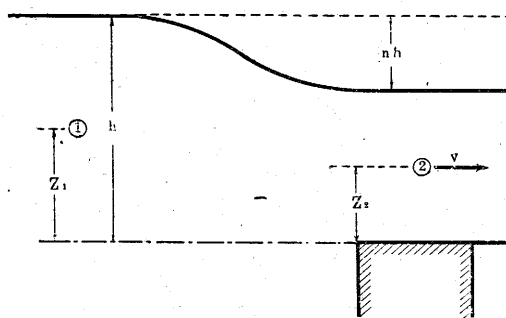
$\frac{b}{h}$	2	5	10	15	20	50
$r(\%)$	28	14	7	5	4	2

即ち梯形堰の流量をその下巾を巾とする矩形堰の流量式で計算するとしても巾が最大水深の 15 倍以上ならば誤差は 5% 以下である。

尙イタリーの C. Cippoletti は側方收縮に依る流量の減少を考慮して $\alpha = \frac{1}{4}$ の梯形堰の有効面積は同じ底巾を有する矩形堰の總面積に等しいことを發見した。⁽¹³⁾ この事實は流量式として (i) 式を用ひても大差のないことを裏書するものと思はれる。

以上は嚴密な意味では尖縁縮流堰に對する公式であつた。實際上調節池に設けられる堰堤は尖縁ではなく相當の厚さを持つた所謂廣頂堰であるからこの點に關して考へる必要がある。最初殆んど流速を有しない水が廣頂堰頂を通過する際の狀態は第 3 圖に示すように初め

第 3 圖



(12) H. J. F. Gourley & B. S. Crimp. Minutes of Proceedings of Inst. C. E. Vol. CC. (1915).

(13) C. Cippoletti: Canal Villoresi (1887).

の水深 h は nh (但し $0 < n < 1$) だけ低下しその代りに流速 v を得る。水深 h の部分に①を、堰頂上の部分に点②を考へ堰頂を通る基準面から計られた兩點の高さを z_1 及び z_2 として

Bernoulli の原理

$$z + \frac{p}{w} + \frac{v^2}{2g} = \text{一定}$$

を適用する。①及び②の有する各種水頭は

點	位置水頭	壓力水頭	流速水頭
①	z_1	$h - z_1$	$\div 0$
②	z_2	$h - nh - z_2$	$\frac{v^2}{2g}$

であり、この和は等しくなければならぬから

$$z_1 + h - z_1 + 0 = z_2 + h - nh - z_2 + \frac{v^2}{2g}, \quad \frac{v^2}{2g} = nh$$

$$v = \sqrt{2g} \sqrt{nh} \dots\dots\dots (vi)$$

巾 b の堰を通過する流量を q とすれば

$$q = b(h - nh)v = \sqrt{2g} \ b \sqrt{nh} (h - nh) \dots\dots\dots (vii)$$

q の値は $n=1$ 及び $n=0$ のとき 0 となるから堰頂に於ける水深が 0 から h に達する間に流速が最大となる場合があり、この最大流速を以て流れる筈である。これに相當する深さを求めるために (vii) の第 1 次微分係数を求め、これを 0 に等しとおく。

$$\frac{dq}{dn} = \sqrt{2g} \ b \frac{1}{2} n^{-\frac{1}{2}} h^{\frac{3}{2}} (1 - 3n) = 0 \dots\dots\dots (viii)$$

$$\text{従つて } n = \frac{1}{3}, \quad h - nh = \frac{2}{3}h \dots\dots\dots (ix)$$

即ち堰頂上の水位が初めのものの $\frac{2}{3}$ となる。この場合の流量は (vii) 式に (ix) 式を入れて

$$q = \frac{2}{3\sqrt{3}} \sqrt{2g} \ b h^{\frac{3}{2}} \dots\dots\dots (x)$$

$$q = cbh^{\frac{3}{2}}$$

の形となる。

この理論は摩擦の無い理想の場合に對するものであるが、摩擦を考慮に入れても實驗上常數 c の値を變化せしめることに依つて充分適合するとされてゐる。

洪水調節池の出口に堰堤がなく直接に天然河川と連つてゐる場合の正確な水位流出量曲線式は簡單には求められないが大略調節池に近接し而も量水に適した箇處に於ける水位流量曲線を應用すればよいと考へられる。調節池から餘り隔ると該處の水位を調節池の水位と見做

すことに無理を生ずるから、量水箇處は出来るだけ調節池に近く選ぶべきである。一般に河川の流量は量水標（水位標）の示す水位の函數として次ぎの形の式で表はされてゐる。

$$q=c(h\pm a)^m \dots\dots\dots (xi)$$

c, a, m は實測結果から定められる係數である。從來發表された m の値は歐洲及び吾國を通じて大體 1.5~2.5 の範圍内にある。 a は天然の河床狀態が常に變化する關係上統計に要する實測値を集める期間を通じて量水標の 0 を流量 0 と一致させることが出来ないために附加された係數である。従つて實測式が定まつた後には $h\pm a$ を以て流量 0 に對する水位を 0 とし計つた水位とすることが出来る。

以上述べたことを總括すれば調節池の水位流出量曲線式は堰堤の有無に拘らず一般に

$$q=ch^m \dots\dots\dots (24)$$

で表はすことが出来るその指數 m は略 1.5~2.5 の値をとるものと云つて差支へないであらう。

§ 5 水位水表面積曲線式

洪水調節作用の微分方程式を解くためには水位水表面積曲線式は

$$A=Kh^n \dots\dots\dots (25)$$

で而も h の指數 n は水位流出量曲線式の h の指數から 1 を減じたもの例へば水位流出量曲線式として前節の (24) を採れば $n=m-1$ でなければならない。従つて調節池の地形實測結果から定める係數は K のみである。調節池の實際の水位水表面積曲線式は水位 0 に對する水表面積が相當の廣さを有してゐるからこれを A_0 とする式

$$A_1=A_0+K_1h_1^n \dots\dots\dots (26)$$

で最もよく表現されるものである。これを水位 0 に對する水表面積が 0 の曲線式 (25) で表はさなければならないのであるから可成りの無理があるがこの點は已むを得ない。

扱て (25) 式の係數 K の決定法には次ぎの 2 種がある。

(1) 最小二乗法に依る決定法

(2) 誘導される時間流出量曲線式を設計に應用する際その設計の安全度を確實にする方針に基く決定法

(1) は從來採用され又最も一般的な方法であるが (2) は筆者の意圖に依るものである。以下これらの詳細を述べる。

(1) 最小二乗法に依る K の決定法

池形實測結果から K を求めるには次ぎのようにする。未知數は K 1 個であるから計算は極めて簡單である。即ち水位 h_1, h_2, \dots, h_i に對する水表面積の實測結果を A_1, A_2, \dots, A_i とすれ

ば誤差式は

$$\left. \begin{aligned} A_1 - Kh_1^n &= v_1 \\ A_2 - Kh_2^n &= v_2 \\ &\vdots \\ A_t - Kh_t^n &= v_t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{故に } [vv] = [A^2] - 2K[Ah^n] + K^2[h^{2n}] \dots\dots\dots (ii)$$

Kの最確値は $[vv]$ を最小にするから

$$\frac{d[vv]}{dK} = -2[Ah^n] + 2K[h^{2n}] = 0 \dots\dots\dots (iii)$$

$$K = \frac{[Ah^n]}{[h^{2n}]}$$

従つて

$$A = \frac{[Ah^n]}{[h^{2n}]} h^n \dots\dots\dots (27)$$

調節池の水位水表面積曲線式が既に(26)式の形で與へられてゐる場合にこれに最も近似な(25)式の係数Kを求めるには次ぎのようにする。今(26)式と(25)式との差

$$A_1 - A = v \dots\dots\dots (iv)$$

を考へ、水位0と豫想の最高水位Hとの間の總てのhに對するvの二乗の和を最小ならしめる。即ち

$$\begin{aligned} [vv] &= \int_0^H (A_0 + K_1 h^{n_1} - K h^n)^2 dh \\ &= \left| A_0^2 h + \frac{K_1^2}{2n_1+1} h^{2n_1+1} + \frac{K^2}{2n+1} h^{2n+1} + \frac{2A_0 K_1}{n_1+1} h^{n_1+1} - \frac{2A_0 K}{n+1} h^{n+1} - \frac{2K_1 K}{n_1+n+1} h^{n_1+n+1} \right|_0^H \\ &= A_0^2 H + \frac{K_1^2}{2n_1+1} H^{2n_1+1} + \frac{K^2}{2n+1} H^{2n+1} + \frac{2A_0 K_1}{n_1+1} H^{n_1+1} - \frac{2A_0 K}{n+1} H^{n+1} - \frac{2K_1 K}{n_1+n+1} H^{n_1+n+1} \end{aligned} \dots\dots\dots (v)$$

$$\frac{d[vv]}{dK} = \frac{2H^{2n+1}}{2n+1} K - \frac{2A_0 H^{n+1}}{n+1} - \frac{2K_1 H^{n_1+n+1}}{n_1+n+1} = 0 \dots\dots (vi)$$

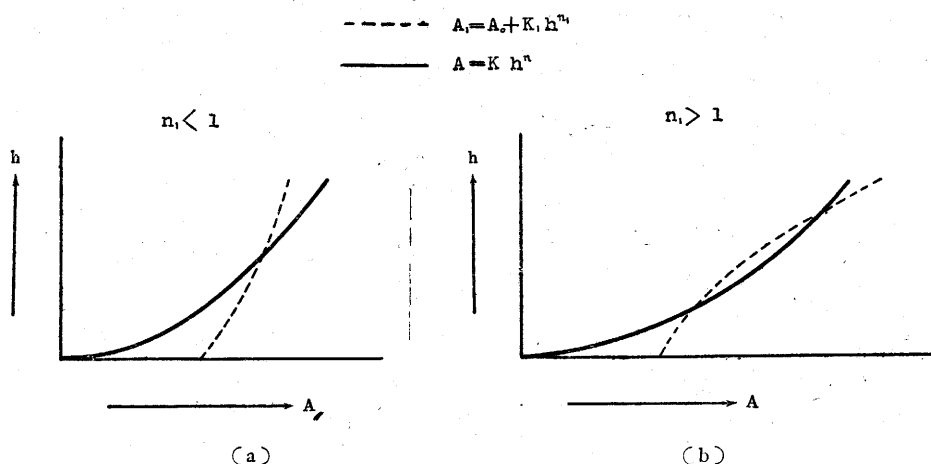
$$K = \frac{2n+1}{H^n} \left(\frac{A_0}{n+1} + \frac{K_1 H^{n_1}}{n_1+n+1} \right) \dots\dots\dots (vii)$$

従つて

$$A = \frac{2n+1}{H^n} \left(\frac{A_0}{n+1} + \frac{K_1 H^{n_1}}{n_1+n+1} \right) h^n \dots\dots\dots (27')$$

以上の方法で求められたKを有する曲線式の示す曲線は實測曲線と1箇處乃至2箇處で交叉する。その模様は大略第4圖(a)及び(b)に示すようである。(27)或ひは(27')の曲線が(26)のその内側にある範囲内では溜水量を過小に見積つて居りそれ以外の範囲では過大に見積つてゐることとなる。故にこの水位水表面積曲線式を用ひて誘導した時間流出量曲線式

第 4 圖



に依つて計算される設計は時々安全でない場合も起り得ることを考慮に入れておかなければならない。

(2) 誘導される時間流出量曲線式を設計に應用する際その設計の安全度を確實にする方針に基くKの決定法

時間流出量曲線式の實用價值を高める意圖を以て筆者が考へた方法で、總ての水位に對して(25)式の與へるAが實測のそれより大きくなならないようにKを定めるのである。この條件を滿足するKの値は1個とは限らないが他の要求として實測結果に最も近似な曲線を欲するのは當然であるから安全の條件を滿足するものの内の最大のKを求めることになる。この方法を行ふに當つては先づ池形實測結果を(26)式で最も近似的に表はす。但し(26)式は A_0, K_1, n_1 の3個の係数を含んでゐるから實測値に對する適合度は極めて大きいと云ふことが出来る。次いでこの曲線に對して常に内側にあるように(25)式のKを決定するのである。この條件を滿足するには總ての h の正值に對して

$$A > A_1 \text{ 即ち } A_1 - A \leq 0 \cdots \cdots \cdots \text{(viii)}$$

であらしめればよい。(viii)の關係は次ぎのように書くことが出来る。

$$A_0 + K_1 h^{n_1} - K h^n \leq 0 \cdots \cdots \cdots \text{(ix)}$$

$$\text{或ひは } h^{-n}(A_0 + K_1 h^{n_1}) \leq K \cdots \cdots \cdots \text{(x)}$$

上式の左邊は h の變化に應じて種々の値をとるから、この極少値を求めKをこれに等しとおけば(viii)式を滿足するものの内の最大値となる。即ち條件に叶ふものの内で原式の表はす曲線に最も近似な曲線式のKを與へるのである。

$$\varphi(h) = h^{-n}(A_0 + K_1 h^{n_1}) \cdots \cdots \cdots \text{(xi)}$$

として $\varphi(h)$ の第1次微分係数を求めれば

$$\begin{aligned}\varphi'(h) &= -nh^{-(n+1)}(A_0 + K_1 h^{n_1}) + n_1 K_1 h^{n_1-1-n} \\ &= -nh^{-(n+1)}\left\{A_0 + \left(1 - \frac{n_1}{n}\right)K_1 h^{n_1}\right\} \dots\dots\dots (xii)\end{aligned}$$

今 $\varphi'(h)$ の附號を吟味すると n と n_1 に關して次ぎの2種の場合が考へられる。

(a) $1 - \frac{n_1}{n} \geq 0$ 即ち $n \geq n_1$ の場合には $\varphi'(h)$ は h の如何に拘らず常に負である。従つて $\varphi(h)$ は常に減少の状態にあつて極小を有しない。(b) $1 - \frac{n_1}{n} < 0$ 即ち $n < n_1$ の場合には $\varphi'(h)$ は h の小さい内は負であるが h の増加に連れて絶對値は小さくなり、0 を經て正になる。従つて $\varphi(h)$ は極小を有することが解る。次ぎに上記2種の場合に於ける K を定め、これから水位水表面積曲線式を求める。

(a) $n > n_1$ の場合

$\varphi(h)$ は h の増加に従つて常に減少する一方で増加はしないから (viii) 式の條件を満足する K の最大値は豫想の最高水位を H と定めこれを (xi) 式に入れて得られる $\varphi(h)$ に等しとおいて

$$K = \frac{A_0 + K_1 H^{n_1}}{H^n} \dots\dots\dots (xiii)$$

とする。従つて水位水表面積曲線式は

$$A = \frac{A_0 + K_1 H^{n_1}}{H^n} h^n \dots\dots\dots (28)$$

となる。この式に依つて表はされる曲線は (26) 式の曲線と $h=H$ の點で交はるがそれ以下では交叉することなく常に同曲線の内側にあり而もこれに最も近似である。但し H に関しては元來最高水位は調節作用解析後に決定されるものであるから豫想に當つては H を相當に大きく定めて安全度を高めるようにすればよいと思ふ。

(b) $n < n_1$ の場合

$\varphi(h)$ の極小値を求めるために $\varphi'(h)=0$ 即ち

$$A_0 + \left(1 - \frac{n_1}{n}\right)K_1 h^{n_1} = 0 \dots\dots\dots (xiv)$$

とおいて h を求めると

$$h = \left\{ \frac{A_0}{\left(\frac{n_1}{n} - 1\right)K_1} \right\}^{\frac{1}{n_1}} \dots\dots\dots (xv)$$

となる。

〔註〕 $\varphi(h)$ の第2次微分係数を求めると

$\varphi''(h) = n(n+1)h^{-(n+2)}\left\{A_0 + \left(1 - \frac{n_1}{n}\right)K_1 h^{n_1}\right\} - nn_1\left(1 - \frac{n_1}{n}\right)K_1 h^{n_1-n-2}$
(xiv) 式の條件を入れると右邊第1項は0となる。従つて $\varphi''(h) > 0$ となるから $\varphi(h)$ は (xv) 式に依つて與へられる h の點で極小となることが證明される。

〔xv〕式を〔x〕式に入れてKに等しとおく。

$$K = \left\{ \frac{A_0}{\left(\frac{n_1}{n} - 1 \right) K_1} \right\}^{-\frac{n}{n_1}} \left\{ A_0 + \frac{A_0}{\left(\frac{n_1}{n} - 1 \right)} \right\}$$

$$K = \frac{n_1}{n} \left\{ \frac{A_0}{\frac{n_1}{n} - 1} \right\}^{1 - \frac{n}{n_1}} K_1^{\frac{n}{n_1}} \dots \dots \dots (xvi)$$

従つて水位水表面積曲線式は

$$A = \frac{n_1}{n} \left\{ \frac{A_0}{\frac{n_1}{n} - 1} \right\}^{1 - \frac{n}{n_1}} K_1^{\frac{n}{n_1}} h^n \dots \dots \dots (29)$$

となる。この式の表はす曲線は〔xv〕式に依つて與へられる h の點で原式の表はす曲線に接する他、凡ゆる點に於て同曲線の内側にある。但し〔xv〕式に依る h が豫想の最高水位 H より大きいときは〔28〕式を用ひるものとする。

終りに〔26〕式 $A_1 = A_0 + K_1 h^{n_1}$ に於ける係數決定法に就いて一言しておく。この形の式に於ける A_0, K_1, n_1 の3個の係數を直接に決定する最小二乗法の正解法はない。依つて先づ適當な方法で A_0 の近似値を定めた後左邊に移して兩邊の對數をとり未知數（決定すべき係數）に關する1次式に變化した上で最小二乗法を適用すればよい。 A_0 の近似値を求めるには種々の方法があるが、 $h=0$ に對する水表面積をそのまま利用しても差支へないのであらう。尙手數を壓はなければ〔26〕式を未知數に關する1次式に近似的に變形して3個の未知數を同時に決定する近似解法に依るのも一法である。

次に参考までに上記（1）及び（2）の方法に依る水位水表面積曲線式決定の簡単な例を示さう。但し原式は $A_1 = A_0 + K_1 h^{n_1}$ 、目的の曲線式は $A = K h^{\frac{1}{2}}$ 、最高水位は $H = 4$ とする。又取扱つた數値の單位は別に指定せず、（1）法に依る K の値を求めるには〔27'〕式に依つた。次掲のグラフ中に於ける長點線は原式、點線は（1）法、實線は（2）法に依つて求めた式の表はす曲線である。

（a） $n > n_1$ の場合の例（第5圖(a)）

原式 $A_1 = 3 + 0.8h^{\frac{1}{2}}$

（1）法に依る曲線式 $A = 2.69h^{\frac{1}{2}}$

（2）法に依る曲線式 $A = 2.14h^{\frac{1}{2}} \dots \dots \dots (28) \text{ 式に依る}$

（b） $n < n_1$ の場合の例（第5圖(b)）

原式 $A_1 = 3 + 0.8h^{\frac{3}{2}}$

（1）法に依る曲線式 $A = 4.13h^{\frac{1}{2}}$

（2）法に依る曲線式 $A = 3.65h^{\frac{1}{2}} \dots \dots \dots (29) \text{ 式に依る}$

(c) 原式の曲線と(2)法に依る曲線との切點の水位がHより大きい場合の例(第5圖(c))

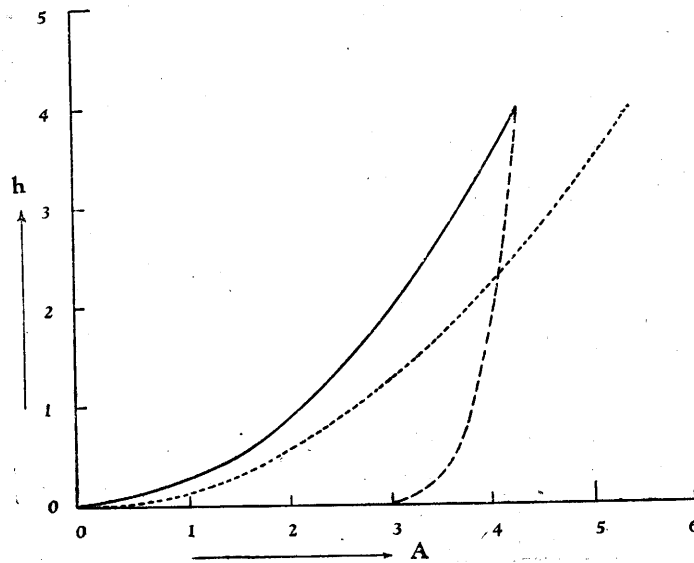
原式 $A = 3 + 0.6h$

(1) 法に依る曲線式 $A = 2.96h^{\frac{1}{2}}$

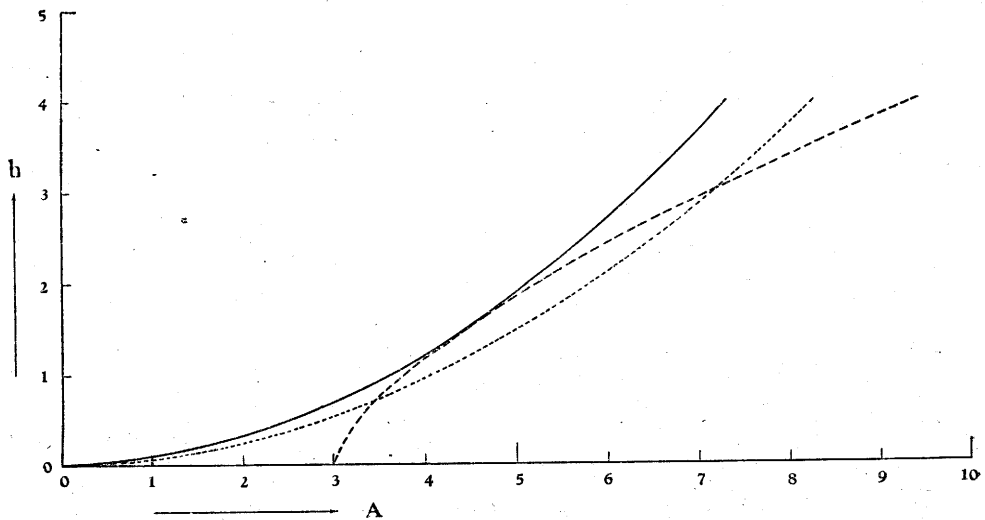
(2) 法に依る曲線式 $A = 2.68h^{\frac{1}{2}}$ (29) 式に依る

$A = 2.70h^{\frac{1}{2}}$ (28) 式に依る

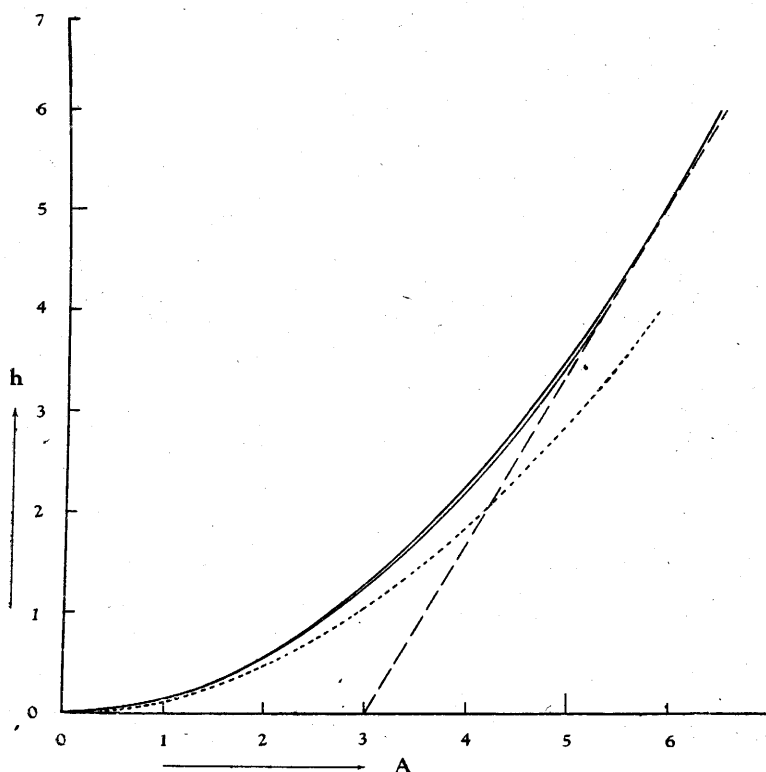
第 5 圖



(a)



(b)



(c)

§ 6 時間流出量曲線式

時間流出量曲線式の誘導に當つては先づ洪水調節作用の微分方程式を解かなければならな

い。(6) 式

$$Qdt = qdt + A dh$$

に $q = ch^m$ 及び $A = Kh^{m-1}$ を入れると

$$Qdt = ch^m dt + Kh^{m-1} dh$$

$$\frac{dh}{dt} + \frac{c}{K} h = \frac{1}{K} Q h^{1-m} \quad \dots\dots\dots (i)$$

これは Bernoulli の式と稱せられる形であつて變數置換に依り線形1次微分方程式となる。即ち

$$z = h^m, \quad h = z^{\frac{1}{m}} \quad \dots\dots\dots (ii)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{m} z^{\frac{1-m}{m}} \frac{dz}{dt} \quad \dots\dots\dots (iii)$$

とにおいて(i)式の h を(ii)(iii)に依り z に置換すれば

$$\frac{1}{m} z^{\frac{1-m}{m}} \frac{dz}{dt} + \frac{c}{K} z^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{K} Q z^{\frac{1-m}{m}}$$

$$\frac{dz}{dt} + \frac{cm}{K}z = \frac{m}{K}Q \dots\dots\dots(\text{iv})$$

これで線形となつたから茲で再び

$$z = uv \dots\dots\dots(\text{v})$$

$$\frac{dz}{dt} = u \frac{dv}{dt} + v \frac{du}{dt} \dots\dots\dots(\text{vi})$$

として (iv) 式の z を u, v に置換すれば

$$u \frac{dv}{dt} + v \frac{du}{dt} + \frac{cm}{K}uv = \frac{m}{K}Q$$

$$u \frac{dv}{dt} + \left\{ \frac{du}{dt} + \frac{cm}{K}u \right\} v = \frac{m}{K}Q \dots\dots\dots(\text{vii})$$

次ぎに v の係数が 0 となるように u を定めると

$$\frac{du}{dt} + \frac{cm}{K}u = 0$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{cm}{K}dt \dots\dots\dots(\text{viii})$$

これを積分して

$$\log u = -\frac{cm}{K}t + C_1$$

$$u = e^{-\frac{cm}{K}t + C_1} = u_0 e^{-\frac{cm}{K}t} \dots\dots\dots(\text{ix})$$

(但し u_0 は $t=0$ のときの u の値である)

u の値を (ix) 式のように定めれば (vii) 式は

$$u \frac{dv}{dt} = \frac{m}{K}Q \dots\dots\dots(\text{x})$$

これを (ix) 式に入れると

$$u_0 e^{-\frac{cm}{K}t} \frac{dv}{dt} = \frac{m}{K}Q$$

$$u_0 dv = \frac{m}{K}Q e^{\frac{cm}{K}t} dt \dots\dots\dots(\text{xi})$$

これを積分すれば

$$u_0 v = \frac{m}{K} \int Q e^{\frac{cm}{K}t} dt + C \dots\dots\dots(\text{xii})$$

然るに (v) 式に依り $z = uv$ であるから、これに (ix) (xii) 式の u, v を代入すれば

$$z = e^{-\frac{cm}{K}t} \left\{ \frac{m}{K} \int Q e^{\frac{cm}{K}t} dt + C \right\} \dots\dots\dots(\text{xiii})$$

(ii) 式に依り $z = h^m$, 又 $q = ch^m$ であるから

$$q = e^{-\frac{cm}{K}t} \left\{ \frac{cm}{K} \int Q e^{\frac{cm}{K}t} dt + C \right\} \dots\dots\dots(\text{xiv})$$

但し (xiv) 式の C は (xiii) 式の C と e との積であるが異なる記號を用ひるに及ばない。積分常數 C を求めるため $t=0$ のとき $q=q_0$ とすれば

$$C = q_0 - \frac{cm}{K} \left[\int Q e^{\frac{cm}{K}t} dt \right]_{t=0} \dots\dots\dots(\text{xv})$$

故に

$$q = e^{-\alpha t} \left\{ a \int Q e^{\alpha t} dt + q_0 - a \left[\int Q e^{\alpha t} dt \right]_{t=0} \right\} \quad \left(\text{但し } \alpha = \frac{cm}{K} \right) \dots\dots (30)$$

或ひは次ぎの形にしておく方が便利のこともある。

$$q = e^{-\alpha t} \left\{ q_0 - a \left[\int Q e^{\alpha t} dt \right]_{t=0} \right\} + a e^{-\alpha t} \int Q e^{\alpha t} dt \dots\dots\dots (30')$$

次ぎに洪水調節作用の微分方程式として (12) 式を用ひるとすれば

$$Q dt = q dt + \theta(q) dq$$

$$\theta(q) = \frac{\varphi(h)}{f'(h)} = \frac{K}{cm}$$

であるから (12) 式は

$$\frac{dq}{dt} + \frac{cm}{K} q = \frac{cm}{K} Q \dots\dots\dots (xvi)$$

となり直ちに線形 1 次微分方程式となるから解法は前の場合より簡単である。即ち (iv) 式中の z に q を, Q の係数 $\frac{m}{K}$ の代りに $\frac{cm}{K}$ を入れた (xiii) 式を求めればこれが解であり, (xiv) 式に同じくなる。

扱て茲で (30) 式或ひは (30') 式中の Q を t に關する Fourier 級數で表はせば目的の時間流出量曲線式が得られることになる。(21) 式は

$$Q = a_0 + a_1 \cos kt + a_2 \cos 2kt + \dots\dots\dots + a_{n-1} \cos(n-1)kt + a_n \cos nkt$$

$$+ b_1 \sin kt + b_2 \sin 2kt + \dots\dots\dots + b_{n-1} \sin(n-1)kt + b_n \sin nkt$$

$$\left(\text{但し } k = \frac{2\pi}{T} \right)$$

既に § 3 に於て述べたように (21) 式の係数を決定した後大きい係数を有する項から適當な項數だけを採用しその和を以て成るべく簡単な形とする方が時間流入量曲線式として利用價值が多いのである。然し實際の洪水曲線の形が不規則で時に Fourier 級數の多くの項を用ひなければ適合度が著しく低下する場合もあるので次ぎには一般的の立場から全項を有するものに就いて述べる。先づ最初に $\int Q e^{\alpha t} dt$ を求めるのであるが茲に一言したいことがある。それは既に § 3 に於て述べたように時間流入量曲線式として Fourier 級數を選定した理由の一つが $Q e^{\alpha t}$ の積分を可能ならしめる點にあることに他ならない。即ち Fourier 級數を以て表はされる函數の積分は同級數を各項毎に積分することに依つて得られ且つその各項と $e^{\alpha t}$ との積 $e^{\alpha t} \sin rkt$ 及び $e^{\alpha t} \cos rkt$ ($r=1,2,3\dots\dots n$) も可積分である。依つて

$$\int Q e^{\alpha t} dt = a_0 \int e^{\alpha t} dt + a_1 \int e^{\alpha t} \cos kt dt + a_2 \int e^{\alpha t} \cos 2kt dt + \dots\dots$$

$$+ a_{n-1} \int e^{\alpha t} \cos(n-1)kt dt + a_n \int e^{\alpha t} \cos nkt dt$$

$$+ b_1 \int e^{\alpha t} \sin kt dt + b_2 \int e^{\alpha t} \sin 2kt dt + \dots\dots$$

$$+ b_{n-1} \int e^{\alpha t} \sin(n-1)kt dt + b_n \int e^{\alpha t} \sin nkt dt \dots\dots (xvii)$$

然るに一般に

$$\int e^{\alpha x} \cos kx dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + k^2} (\alpha \cos kx + k \sin kx) + C_1$$

$$\int e^{\alpha x} \sin kx dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + k^2} (-k \cos kx + \alpha \sin kx) + C_2$$

の公式に依り

$$\begin{aligned} \int Q e^{\alpha t} dt = e^{\alpha t} & \left[\begin{aligned} & \frac{a_0}{a} + \frac{a_1}{a^2 + k^2} \{ \alpha \cos kt + k \sin kt \} + \frac{b_1}{a^2 + k^2} \{ -k \cos kt + \alpha \sin kt \} \\ & + \frac{a_2}{a^2 + (2k)^2} \{ \alpha \cos 2kt + 2k \sin 2kt \} + \frac{b_2}{a^2 + (2k)^2} \{ -2k \cos 2kt + \alpha \sin 2kt \} \\ & \dots\dots\dots \\ & + \frac{a_{n-1}}{a^2 + (n-1)^2 k^2} \{ \alpha \cos (n-1)kt + (n-1)k \sin (n-1)kt \} \\ & + \frac{b_{n-1}}{a^2 + (n-1)^2 k^2} \{ -(n-1)k \cos (n-1)kt + \alpha \sin (n-1)kt \} \\ & + \frac{a_n}{a^2 + n^2 k^2} \{ \alpha \cos nkt + nk \sin nkt \} + \frac{b_n}{a^2 + n^2 k^2} \{ -nk \cos nkt + \alpha \sin nkt \} \end{aligned} \right] + C \\ & = e^{\alpha t} \left[\frac{a_0}{a} + \sum_{r=1}^n \frac{1}{a^2 + r^2 k^2} \{ (a a_r - r k b_r) \cos rkt + (r k a_r + a b_r) \sin rkt \} \right] + C \dots (xviii) \end{aligned}$$

次ぎに $t=0$ の場合を考えると

$$\left[\int Q e^{\alpha t} dt \right]_{t=0} = \frac{a_0}{a} + \sum_{r=1}^n \frac{1}{a^2 + r^2 k^2} (a a_r - r k b_r) + C \dots\dots\dots (xix)$$

従つて時間流出量曲線式は (30') 式に (xviii) 及び (xix) の兩式を入れて得られる。

$$\begin{aligned} q = e^{-\alpha t} & \left\{ q_0 - a_0 - \sum_{r=1}^n \frac{a}{a^2 + r^2 k^2} (a a_r - r k b_r) \right\} \\ & + a_0 + \sum_{r=1}^n \frac{a}{a^2 + r^2 k^2} \{ (a a_r - r k b_r) \cos rkt + (r k a_r + a b_r) \sin rkt \} \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

尙 (31) 式中の各項を纏めて説明しておけば下記のようなである。

q = 流出量

q_0 = 初めの時刻に於ける流出量

a_0, a_r, b_r = 時間流入量曲線式に於ける Fourier 係数

n = 時間流入量曲線式の項数に關係のある數

$k = \frac{2\pi}{T}$ (但し T は流入量繼續時間)

$\alpha = \frac{cm}{K}$ (c, m, K は水位流出量曲線式 $q = ch^m$ 及び水位水表面積曲線式 $A = Kh^{m-1}$ に於ける係数)

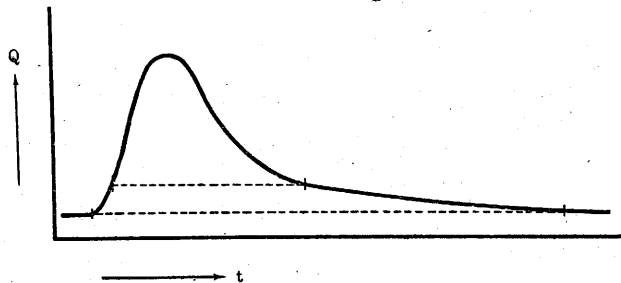
又計算に當り常用對數表を用ひるとすれば $e^{\alpha t} = 10^{0.4343 \alpha t}$

§ 7 特別な場合の時間流出量曲線式

これまでに述べた時間流出量曲線式は時間流入量曲線式が適用される洪水継続期間の範囲内に於ける曲線を表はすものである。この事實はそれらの曲線式が週期函数であることから容易に認められると思ふ。従つてこの期間内に洪水の全流入量が流れ出して仕舞はないことも當然である。最大の流出量とその出現の時刻を知ることのみを以て目的とするならば、これまでに求めた曲線式で充分であるけれども洪水流入の開始當初から又元の平水位に戻るまでの時間内に於ける流出状態の全貌を知ることにも時に甚だ重要である。本節ではこの點に關して述べるのであるが、これは要するに洪水流入終止後の時間流出量曲線式の誘導に他ならない。

洪水継続期間としては嚴密には平水位が増高を開始した時刻から再び元の平水位に復歸するまでの期間を採用するのが建前である。然し乍ら一般の洪水流量はその性質上初めは急激な割合の増加をなし最大流量に達して後は平水位に復するまでに相當の長い時間を要するもので、その曲線は最大が中央より前方に甚しく偏つてゐる形を呈する。斯る曲線を Fourier 級数を以て近似的に表はすには級数の多くの項を必要とすることは既に屢々言及した處であつて時間流入量曲線式従つて時間流出量曲線式は複雑になる。依つて第 6 圖に示すように實

第 6 圖



際は初めの平水位より稍高い水位を以て洪水流入開始時と定め、後に再びこの水位に戻る時刻までの間を洪水継続期間と見做すと都合のよい場合が尠くない。この方法に依るとすれば必然的に同期間の前後に於ける洪水流入量を別個に取扱ふことになる。然してこれらに對して週期函数を適用することは出来ないが前の流入量はその増加率が大きく従つて時間も短いから一般には無視し得る程度であり、後の流入量は直線的の變化をなすものと見做して差支へない。要するに問題は直線的の變化をなす時間流入量式とその特別な場合としての一定流入量とに對する時間流出量曲線式を誘導することに歸着する。

(1) 流入量が直線的に変化する場合

$$\left. \begin{array}{l} \text{最初の時刻に於ける流入量} = Q_0 \\ \text{時間に對する流入量の變化率} \frac{dQ}{dt} = a \end{array} \right\} \dots\dots\dots (i)$$

とすれば

$$Q = Q_0 + at \dots\dots\dots (ii)$$

これを (30) 式に入れて

$$\begin{aligned} q &= e^{-\alpha t} \left\{ a \int (Q_0 + at) e^{\alpha t} dt + q_0 - a \left[\int (Q_0 + at) e^{\alpha t} dt \right]_{t=0} \right\} \\ &= e^{-\alpha t} \left\{ Q_0 e^{\alpha t} + a e^{\alpha t} \left(t - \frac{1}{\alpha} \right) + q_0 - \left(Q_0 - \frac{a}{\alpha} \right) \right\} \\ q &= e^{-\alpha t} \left\{ q_0 - \left(Q_0 - \frac{a}{\alpha} \right) \right\} + at + \left(Q_0 - \frac{a}{\alpha} \right) \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

これは流入量が増加の状態にある場合であるが減少の状態にある場合の式は a を含む項の前の附號を變じて得られる。即ち

$$q = e^{-\alpha t} \left\{ q_0 - \left(Q_0 + \frac{a}{\alpha} \right) \right\} - at + \left(Q_0 + \frac{a}{\alpha} \right) \dots\dots\dots (32')$$

これが洪水流入終止後の流出状態を示す曲線式である。

(2) 流入量が一定の場合

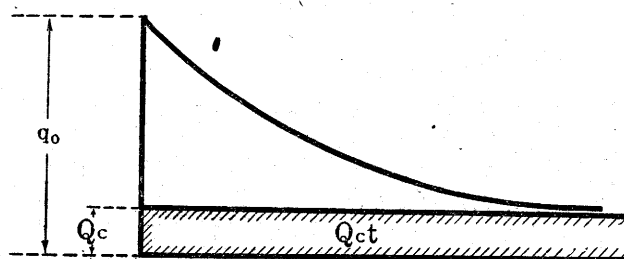
(30)式に於て $Q = Q_c$ とすれば

$$\begin{aligned} q &= e^{-\alpha t} \left\{ e \int Q_c e^{\alpha t} dt + q_0 - a \left[\int Q_c e^{\alpha t} dt \right]_{t=0} \right\} \\ &= e^{-\alpha t} \left\{ Q_c e^{\alpha t} + q_0 - Q_c \right\} \\ q &= e^{-\alpha t} (q_0 - Q_c) + Q_c \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

この式に依れば q が Q_c に等しくなるのは $t = \infty$ のときであるが、これは $q = ch^m$, $A = Kh^{m-1}$ の假定が行はれたためである。然してこれは實際に流出量曲線を求める際には些して支障とはならない。今時間を無限大として求めた理論上正しい全流出量と或る有限の時刻までの流出量合計との差異に就いて考へてみよう。

全流出量は (33) 式を積分して得られる。

第 7 図



$$\int_0^t q dt = -\frac{q_0 - Q_c}{a} \left| e^{-\alpha t} \right|_0^t + Q_c \left| t \right|_0^t = \frac{q_0 - Q_c}{a} (1 - e^{-\alpha t}) + Q_c t \dots (iii)$$

今一定流入量を除いた場合即ち第7圖に於ける Q_c を表はす水平線上より上の部分に就いて考へるものとする。然るとき時刻0に於ける溜水量は $\frac{q_0 - Q_c}{a}$ であり、無限大の時刻までにその全部が流出する。一方有限の時刻 t までの流出量合計は $\frac{q_0 - Q_c}{a} (1 - e^{-\alpha t})$ である。従つてその差は $\frac{q_0 - Q_c}{a} e^{-\alpha t}$ となり、この全流出量に對する比を求めれば

$$r = e^{-\alpha t} \dots \dots \dots (iv)$$

である。次ぎに一例として

$$q = ch^m = 50h^{\frac{3}{2}} (\text{m}^3/\text{min})$$

$$A = Kh^{m-1} = 30,000h^{\frac{1}{2}} (\text{m}^2)$$

のような場合を採れば t を時間單位のものとして

$$a = \frac{cm}{K} \times 60 = 0.15$$

従つて

$$r = e^{-\alpha t} = 10^{-0.4343\alpha t} = \frac{1}{10^{0.0662t}}$$

となる。種々の t に對する r の値を計算すれば第11表のようになり、この場合には50時間まで求めればその差異は0.05%にしか過ぎないことが解る。殊にこの値は洪水流入終止時以後に於ける流出量の誤差の割合であるから全流出量に對しては遙かに小さくなることは明かである。

第 11 表

t (hr)	$r = \frac{1}{10^{0.0662t}}$	t (hr)	$r = \frac{1}{10^{0.0662t}}$
0	1.	10	0.22
1	0.86	20	0.05
2	0.74	30	0.01
3	0.63	40	0.002
4	0.54	50	0.0005
5	0.47		

第 III 章 計 算 例

問題を簡単にするため與へられた條件を下記のようなものとする。

各時刻に於ける流入量

時 刻 (hr)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
流 入 量 (m^3/min)	20	62	122	180	265	302	278	240	178	140	65	32	20

流出量と水位の関係 (水位流出量曲線式) $q = ch^m = 50h^{\frac{3}{2}}$ (m^3/min)

調節池水表面積と水位の関係 (水位水表面積曲線式) $A = Kh^{m-1} = 30,000h^{\frac{1}{2}}$ (m^2)

最初の時刻に於ける流出量は流入量に等しく $q_0 = 20$ (m^3/min)

先づ時間流入量曲線式として項数 12 の Fourier 級数を用いるとすれば

$$Q = a_0 + a_1 \cos kt + a_2 \cos 2kt + a_3 \cos 3kt + a_4 \cos 4kt + a_5 \cos 5kt + a_6 \cos 6kt \\ + b_1 \sin kt + b_2 \sin 2kt + b_3 \sin 3kt + b_4 \sin 4kt + b_5 \sin 5kt$$

であり, この Fourier 係数を §3 第 4 表の様式に依つて求めれば第 12 表に示す通りである。

第 12 表 時間流入曲線式 Fourier 係数計算表

(i)							
	$Q_0 = 20$	$Q_1 = 62$ $Q_{11} = 32$	$Q_2 = 122$ $Q_{10} = 65$	$Q_3 = 180$ $Q_9 = 140$	$Q_4 = 265$ $Q_8 = 178$	$Q_5 = 302$ $Q_7 = 240$	$Q_6 = 278$
+))	$a_0 = 20$	$a_1 = 94$	$a_2 = 187$	$a_3 = 320$	$a_4 = 443$	$a_5 = 542$	$a_6 = 278$
-))		$\beta_1 = 30$	$\beta_2 = 57$	$\beta_3 = 40$	$\beta_4 = 87$	$\beta_5 = 62$	
(ii)							
	$a_0 = 20$ $a_6 = 278$	$a_1 = 94$ $a_5 = 542$	$a_2 = 187$ $a_4 = 443$	$a_3 = 320$	$\beta_1 = 30$ $\beta_5 = 62$	$\beta_2 = 57$ $\beta_4 = 87$	$\beta_3 = 40$
+))	$a_0' = 298$	$a_1' = 636$	$a_2' = 630$	$a_3' = 320$	$\beta_1' = 92$	$\beta_2' = 144$	$\beta_3' = 40$
-))	$a_0'' = -258$	$a_1'' = -448$	$a_2'' = -256$		$\beta_1'' = -32$	$\beta_2'' = 30$	
(iii)							

$$A = a_0' + a_2' = 298 + 630 = 928$$

$$B = a_1 + a_3' = 636 + 320 = 956$$

$$C = a_0'' + \frac{1}{2} a_2'' = -258 - \frac{256}{2} = -386$$

$$D = \frac{\sqrt{3}}{2} a_1'' = 0.866 \times -448 = -388$$

$$a_0 = \frac{1}{12} (A + B) = +157.0$$

$$a_1 = \frac{1}{6} (C + D) = -129.0$$

$$b_1 = \frac{1}{6} (E + F) = +35.1$$

$$a_2 = \frac{1}{6} (G + H) = -3.2$$

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}\beta_1' + \beta_3' &= \frac{92}{2} + 40 = 86 & b_2 &= \frac{1}{6}(I + J) = -9.0 \\
F &= \frac{\sqrt{3}}{2}\beta_2' &= 0.866 \times 144 = 124.7 & a_3 &= \frac{1}{6}K = -3.0 \\
G &= a_0' - \frac{1}{2}a_2' &= 298 - \frac{630}{2} = -17 & b_3 &= \frac{1}{6}L = +8.7 \\
H &= \frac{1}{2}a_1' - a_3' &= \frac{636}{2} - 320 = -2 & a_4 &= \frac{1}{6}(G - H) = -2.5 \\
I &= \frac{\sqrt{3}}{2}\beta_1' &= 0.866 \times -32 = -27.7 & b_4 &= \frac{1}{6}(I - J) = -0.3 \\
J &= \frac{\sqrt{3}}{2}\beta_2' &= 0.866 \times -30 = -26 & a_5 &= \frac{1}{6}(C - D) = +0.3 \\
K &= a_0' - a_2' &= -258 + 256 = -2 & b_5 &= \frac{1}{6}(E - F) = -6.5 \\
L &= \beta_1' - \beta_3' &= 92 - 40 = 52 & a_6 &= \frac{1}{12}(A - B) = -2.3
\end{aligned}$$

従つて時間流入量曲線式は

$$\begin{aligned}
Q &= 157.0 - 129.0\cos kt - 3.2\cos 2kt - 0.3\cos 3kt - 2.5\cos 4kt + 0.3\cos 5kt - 2.3\cos 6kt \\
&\quad + 35.1\sin kt - 9.0\sin 2kt + 8.7\sin 3kt - 0.3\sin 4kt - 6.5\sin 5kt
\end{aligned}$$

となる。

次に時間流出量曲線式として (31) 式

$$\begin{aligned}
q &= e^{-\alpha t} \left\{ q_0 - a_0 - \sum_{r=1}^n \frac{a}{a^2 + r^2 k^2} (aa_r - rkb_r) \right\} \\
&\quad + a_0 + \sum_{r=1}^n \frac{a}{a^2 + r^2 k^2} \left\{ (aa_r - rkb_r) \cos rkt + (rka_r + ab_r) \sin rkt \right\}
\end{aligned}$$

を用ひるとすればこの式に前表から求めた a_0, a_r, b_r の値を入れればよいのである。但しこの場合それらの単位の採り方には充分注意を要する。茲では q は m^3/min 単位で求められるべきであり a_0, a_r, b_r も同様に m^3/min 単位であるから a 及び k もそれに相當するものでなければならない。計算に用ひる諸項をその単位を揃へて列記すれば

a_0, a_r, b_r = 前表参照

$$q_0 = 20$$

$$a = \frac{\text{cm}}{\text{K}} = \frac{50 \times \frac{1}{2}}{30,000} = 0.0025$$

$$k = \frac{\pi}{6 \times 60} = 0.0087$$

これは t を min 単位とする場合であるが、実際上は t を一時間単位とする方が都合がよいことが多い。このためには $e^{-\alpha t}$ の a と $\cos rkt$ 及び $\sin rkt$ の k は時間単位のものとして

$$e^{-\alpha t} = e^{-0.0025 \times 60t} = 10^{-0.086t}$$

$$k = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

のように選ぶ。但し $\frac{a}{a^2+r^2k^2}$ の k は他の項と同じ単位にすることは勿論である。

以上の諸数値を用いて時間流出量曲線式の各係数を決定するには第 13 表の様式に依るのが便利である。

第 13 表 時間流出量曲線式係数計算表

r	1	2	3	4	5	6	
r^2	1	4	9	16	25	36	
r^2k^2 ($k=0.0087$)	0.00007569	0.00330276	0.0068121	0.0121104	0.00189225	0.00272484	
a	0.0025						
a^2	0.00000625						
$a^2+r^2k^2$	0.00008194	0.00330901	0.0068746	0.0121729	0.00189850	0.00273109	
$\frac{a}{a^2+r^2k^2}$	30.5101	8.0904	3.6366	2.0537	1.3168	0.9154	
ar	-129.0	-3.2	-0.3	-2.5	+0.3	-2.3	
aa_r	-0.323	-0.008	-0.001	-0.006	+0.001	-0.006	
b_r	+35.1	-9.0	+8.7	-0.3	-6.5	0	
rb_r	+35.1	-18.0	+26.1	-1.2	-32.5	0	
rkb_r	+0.305	-0.157	+0.227	-0.010	-0.283	0	
$aa_r - rkb_r$	-0.628	+0.149	-0.228	+0.004	+0.284	-0.006	
$\frac{a}{a^2+r^2k^2}(aa_r - rkb_r)$	-19.2	+1.2	-0.8	+0.0	+0.4	-0.0	$\cos rkt$ の係数
ab_r	+0.088	-0.023	+0.022	-0.001	-0.016	0	
ra_r	-129.0	-6.4	-0.9	-10.0	+1.5	-13.8	
rka_r	-1.122	-0.056	-0.008	-0.087	+0.013	-0.120	
$rka_r + ab_r$	-1.034	-0.079	+0.014	-0.088	-0.003	-0.120	
$\frac{a}{a^2+r^2k^2}(rka_r + ab_r)$	-31.5	-0.6	+0.1	-0.2	-0.0	-0.1	$\sin rkt$ の係数

上表に依る計算値を (31) 式に入れて

$$q \text{ (m}^3\text{/min)} = \frac{-118.6}{10^{0.0087}} + 157.0 - 19.2 \cos \frac{\pi}{6}t + 1.2 \cos \frac{2\pi}{6}t - 0.8 \cos \frac{3\pi}{6}t + 0.4 \cos \frac{5\pi}{6}t \\ - 31.5 \sin \frac{\pi}{6}t - 0.6 \sin \frac{2\pi}{6}t + 0.1 \sin \frac{3\pi}{6}t - 0.2 \sin \frac{4\pi}{6}t$$

を得る。これが所望の時間流出量曲線式であり任意の時刻に對する流出量は洪水期間の最初の時刻を 0 として計つたその時刻までの時間数を上式に入れることに依つて容易に求められる。尚計算を便利にするため $\cos r \frac{\pi}{6}t$ 及び $\sin r \frac{\pi}{6}t$ ($r=1,2,3,4,5,6$) の補助表第 14 表を作れば次のようである。但し半時間毎のものとする。

第 14 表 流出量計算補助表 ($\cos r \frac{\pi}{6} t$, $\sin r \frac{\pi}{6} t$ の値)

t (hr)	$\cos \frac{\pi}{6} t$ $\sin \frac{\pi}{6} t$	$\cos \frac{2\pi}{6} t$ $\sin \frac{2\pi}{6} t$	$\cos \frac{3\pi}{6} t$ $\sin \frac{3\pi}{6} t$	$\cos \frac{4\pi}{6} t$ $\sin \frac{4\pi}{6} t$	$\cos \frac{5\pi}{6} t$ $\sin \frac{5\pi}{6} t$	$\cos \frac{6\pi}{6} t$
0	+1.000 0	+1.000 0	+1.000 0	+1.000 0	+1.000 0	+1.000 0
0.5	+0.966 +0.259	+0.866 +0.500	+0.707 +0.707	+0.500 +0.866	+0.259 +0.966	0 +1.000
1	+0.866 +0.500	+0.500 +0.866	0 +1.000	-0.500 +0.866	-0.866 +0.500	-1.000 0
1.5	+0.707 +0.707	0 +1.000	-0.707 +0.707	-1.000 0	-0.707 -0.707	0 -1.000
2	+0.500 +0.866	-0.500 +0.866	-1.000 0	-0.500 -0.866	+0.500 -0.866	以下五回反覆
2.5	+0.259 +0.966	-0.866 +0.500	-0.707 -0.707	+0.500 -0.866	+0.966 +0.259	
3	0 +1.000	-1.000 0	0 -1.000	以下三回反覆	0 +1.000	
3.5	-0.259 +0.966	-0.866 -0.500	+0.707 -0.707		-0.966 +0.259	
4	-0.500 +0.866	-0.500 -0.865	以下二回反覆		以下三回反覆	
4.5	-0.707 +0.707	0 -1.000		+0.707 -0.707		
5	-0.866 +0.500	+0.500 -0.866		+0.866 +0.500		
5.5	-0.966 +0.259	+0.866 -0.500		-0.259 +0.966		
6	-1.000 0	以下反覆		-1.000 0		
6.5	-0.966 -0.259		-0.259 -0.966			
7	-0.866 -0.500		+0.866 -0.500			
7.5	-0.707 -0.707		+0.707 +0.707			
8	-0.500 -0.866		-0.500 +0.866			
8.5	-0.259 -0.966		-0.966 -0.259			
9	0 -1.000		0 -1.000			
9.5	+0.259 -0.966	+0.966 -0.259				
10	+0.500 -0.866	+0.500 +0.866				
10.5	+0.707 -0.707	-0.707 +0.707				
11	+0.866 -0.500	-0.866 -0.500				
11.5	+0.966 -0.259	+0.259 -0.966				

次ぎに全期間（流入量繼續の）内の流出量の状態を知るため半時間毎の各時刻に於ける流

出量を求めてみよう。これには前表を利用し第 15 表の様式に依つて計算するのが便利であると考へられる。

第 15 表 各時刻に於ける流出量計算表

$$q = \frac{-118.6}{10^{0.066t}} + 157.0 - 19.2 \cos \frac{\pi}{6}t + 1.2 \cos \frac{2\pi}{6}t - 0.8 \cos \frac{3\pi}{6}t + 0.4 \cos \frac{5\pi}{6}t - 31.5 \sin \frac{\pi}{6}t - 0.6 \sin \frac{2\pi}{6}t + 0.1 \sin \frac{3\pi}{6}t - 0.2 \sin \frac{4\pi}{6}t$$

式に依る

t (hr)	$0.066t$	$10^{0.066t}$	$\frac{-118.6}{10^{0.066t}}$	$-19.2 \cos \frac{\pi}{6}t$	$+1.2 \cos \frac{2\pi}{6}t$	$-0.8 \cos \frac{3\pi}{6}t$	$-0.2 \sin \frac{4\pi}{6}t$	$+0.4 \cos \frac{5\pi}{6}t$	$-$ $+157.0$	q
0	0	1.000	-118.6	(-19.2 0)	(+1.2 0)	(-0.8 0)	0	+0.4		20
0.5	0.033	1.079	-109.9	(-18.5 -8.2)	(+1.0 -0.3)	(-0.6 +0.1)	-0.2	+0.1		21
1	0.066	1.164	-101.9	(-16.6 -15.8)	(+0.6 -0.5)	(0 +0.1)	-0.2	-0.3		22
1.5	0.099	1.256	-94.4	(-13.6 -22.3)	(0 -0.6)	(+0.6 +0.1)	0	-0.3		27
2	0.132	1.355	-87.5	(-9.6 -27.3)	(-0.6 -0.5)	(+0.8 0)	+0.2	+0.2		33
2.5	0.165	1.462	-81.1	(-5.0 -30.4)	(-1.0 -0.3)	(+0.6 -0.1)	+0.2	+0.4		40
3	0.198	1.578	-75.2	(0 -31.5)	(-1.2 0)	(0 -0.1)	0	0		49
3.5	0.231	1.702	-69.7	(+5.0 -30.4)	(-1.0 +0.3)	(-0.6 -0.1)	-0.2	-0.4		60
4	0.264	1.837	-64.6	(+9.6 -27.3)	(-0.6 +0.5)	(-0.8 0)	-0.2	-0.2		73
4.5	0.297	1.982	-59.8	(+13.6 -22.3)	(0 +0.6)	(-0.6 +0.1)	0	+0.3		89
5	0.330	2.138	-55.5	(+16.6 -15.8)	(+0.6 +0.5)	(0 +0.1)	+0.2	+0.1		104
5.5	0.363	2.307	-51.5	(+18.5 -8.2)	(+1.0 +0.3)	(+0.6 +0.1)	+0.2	-0.4		118
6	0.396	2.489	-47.7	(+19.2 0)	(+1.2 0)	(+0.8 0)	0	-0.4	+157.0	131
6.5	0.429	2.685	-44.2	(+18.5 +8.2)	(+1.0 -0.3)	(+0.6 -0.1)	-0.2	-0.1		140
7	0.462	2.897	-40.9	(+16.6 +15.8)	(+0.6 -0.5)	(0 -0.1)	-0.2	+0.3		149
7.5	0.495	3.126	-37.9	(+13.6 +22.3)	(0 -0.6)	(-0.6 -0.1)	0	+0.3		154
8	0.528	3.373	-35.2	(+9.6 +27.3)	(-0.6 -0.5)	(-0.8 0)	+0.2	-0.2		157
8.5	0.561	3.639	-32.6	(+5.0 +30.4)	(-1.0 -0.3)	(-0.6 +0.1)	+0.2	-0.4		158
9	0.594	3.926	-30.2	(0 +31.5)	(-1.2 0)	(0 +0.1)	0	0		157
9.5	0.627	4.236	-28.0	(-5.0 +30.4)	(-1.0 +0.3)	(+0.6 +0.1)	-0.2	+0.4		155
10	0.660	4.571	-25.9	(-9.6 +27.3)	(-0.6 +0.5)	(+0.8 0)	-0.2	+0.2		150
10.5	0.693	4.932	-24.1	(-13.6 +22.3)	(0 +0.6)	(+0.6 -0.1)	0	-0.3		142
11	0.726	5.321	-22.3	(-16.6 +15.8)	(+0.6 +0.5)	(0 -0.1)	+0.2	-0.3		135
11.5	0.759	5.741	-20.7	(-18.5 +8.2)	(+1.0 +0.3)	(-0.6 -0.1)	+0.2	+0.1		127
12	0.792	6.194	-19.1	(-19.2)	(+1.2)	(-0.8)	0	+0.4		120

以上は Fourier 級数の全項を用いた時間流入量曲線式から誘導された時間流出量曲線式で

あるが次ぎには項数の少ない簡単な時間流入量曲線を用いる場合の例を示す。

前に求めた時間流入量曲線式の係数を見ると a_1 及び b_1 が他に比して著しく大きいから近似式として

$$Q = a_0 + a_1 \cos kt + b_1 \sin kt$$

即ち $Q = 157.0 - 129.0 \cos kt + 35.1 \sin kt$

を採用することとしこれに依つて各時刻に於ける流入量を計算し、實測流量との差を求めると第 16 表のようになる。

第 16 表 時間流入量曲線近似式に依る算出値と實測値との比較表

t (hr)	$\cos \frac{\pi}{6} t$ $\sin \frac{\pi}{6} t$	$-129.0 \cos \frac{\pi}{6} t$ $+ 35.1 \sin \frac{\pi}{6} t$	$+ 157.0$	Q (m^3/min) (前 2 列の和)	實 測 値 と の 比 較	
					Q の實測値	差
0	$\begin{pmatrix} +1.000 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -129.0 \\ 0 \end{pmatrix}$	+ 157.0	28	20	- 8
1	$\begin{pmatrix} +0.866 \\ +0.500 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -111.7 \\ +17.6 \end{pmatrix}$		63	62	- 1
2	$\begin{pmatrix} +0.500 \\ +0.866 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -64.5 \\ +30.4 \end{pmatrix}$		123	122	- 1
3	$\begin{pmatrix} 0 \\ +1.000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ +35.1 \end{pmatrix}$		192	180	- 12
4	$\begin{pmatrix} -0.500 \\ +0.866 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +64.5 \\ +30.4 \end{pmatrix}$		252	265	+ 13
5	$\begin{pmatrix} -0.866 \\ +0.500 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +111.7 \\ +17.6 \end{pmatrix}$		286	302	+ 16
6	$\begin{pmatrix} -1.000 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +129.0 \\ 0 \end{pmatrix}$		286	278	- 8
7	$\begin{pmatrix} -0.866 \\ -0.500 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +111.7 \\ -17.6 \end{pmatrix}$		251	240	- 11
8	$\begin{pmatrix} -0.500 \\ -0.866 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +64.5 \\ -30.4 \end{pmatrix}$		191	178	- 13
9	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1.000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -35.1 \end{pmatrix}$		122	140	+ 18
10	$\begin{pmatrix} +0.500 \\ -0.866 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -64.5 \\ -30.4 \end{pmatrix}$		62	65	+ 3
11	$\begin{pmatrix} +0.866 \\ -0.500 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -111.7 \\ -17.6 \end{pmatrix}$		28	32	+ 4
12	$\begin{pmatrix} +1.000 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -129.0 \\ 0 \end{pmatrix}$		28	20	- 8

時間流出量曲線の原式は § 6 の (31) 式に於て $r=1$ として得られる。即ち

$$q = e^{-at} \left\{ q_0 - a_0 - \frac{a}{a^2 + k^2} (ax_1 - kb_1) \right\} + a_0 + \frac{a}{a^2 + k^2} \left\{ (ax_1 - kb_1) \cos kt + (ka_1 + ab_1) \sin kt \right\}$$

この式に諸数値を入れると

$$q = \frac{-117.8}{10^{0.066t}} + 157.0 - 19.2 \cos \frac{\pi}{6} t - 31.5 \sin \frac{\pi}{6} t$$

各時刻に於ける流出量を計算すると第 17 表のようになる。

第 17 表 各時刻に於ける流出量計算表

$$q = \frac{-117.8}{10^{0.066t}} + 157.0 - 19.2 \cos \frac{\pi}{6} t - 31.5 \sin \frac{\pi}{6} t$$

t (hr)	$0.066t$	$10^{0.066t}$	(I) $\frac{-117.8}{10^{0.066t}}$	$\cos \frac{\pi}{6} t$ $\sin \frac{\pi}{6} t$	(II) $-19.2 \cos \frac{\pi}{6} t$ $-31.5 \sin \frac{\pi}{6} t$	(III) $+157.0$	q (I)+(II)+(III)
0	0	1	-117.8	$\begin{pmatrix} +1.000 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -19.2 \\ 0 \end{pmatrix}$	+157.0	20
1	0.066	1.164	-101.2	$\begin{pmatrix} +0.866 \\ +0.500 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -16.6 \\ -15.8 \end{pmatrix}$		23
2	0.132	1.355	-86.9	$\begin{pmatrix} +0.500 \\ +0.866 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -9.6 \\ -27.3 \end{pmatrix}$		33
3	0.198	1.578	-74.6	$\begin{pmatrix} 0 \\ +1.000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -31.5 \end{pmatrix}$		51
4	0.264	1.837	-64.1	$\begin{pmatrix} -0.500 \\ +0.866 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +9.6 \\ -27.3 \end{pmatrix}$		75
5	0.330	2.138	-55.1	$\begin{pmatrix} -0.866 \\ +0.500 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +16.6 \\ -15.8 \end{pmatrix}$		103
6	0.396	2.489	-47.3	$\begin{pmatrix} -1.000 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +19.2 \\ 0 \end{pmatrix}$		129
7	0.462	2.897	-40.7	$\begin{pmatrix} -0.866 \\ -0.500 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +16.6 \\ +15.8 \end{pmatrix}$		149
8	0.528	3.373	-34.9	$\begin{pmatrix} -0.500 \\ -0.866 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +9.6 \\ +27.3 \end{pmatrix}$		159
9	0.594	3.926	-30.0	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1.000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ +31.5 \end{pmatrix}$		159
10	0.660	4.571	-25.8	$\begin{pmatrix} +0.500 \\ -0.866 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -9.6 \\ +27.3 \end{pmatrix}$		149
11	0.726	5.321	-22.1	$\begin{pmatrix} +0.866 \\ -0.500 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -16.6 \\ +15.8 \end{pmatrix}$		134
12	0.792	6.194	-19.0	$\begin{pmatrix} +1.000 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -19.2 \\ 0 \end{pmatrix}$		119

茲で参考迄に筆者の時間流出量曲線式に依る算出値と O. Ekdahl 氏の數値積分法に依る算出値との比較を試みることにする。但し O. Ekdahl 氏法に於ては

$$\frac{1}{2}(Q_t + Q_{t+\Delta t}) = \left(\frac{V}{\Delta t} + \frac{q}{2} \right)_{t+\Delta t} - \left(\frac{V}{\Delta t} - \frac{q}{2} \right)_t$$

(式中 Q = 流入量, q = 流出量, V = 全溜水量, 腰記號 t 及び $(t+\Delta t)$ は Δt 時間を隔てた2時刻を表はす)

を原式として作製された第 18 表を補助として計算される。

第 18 表 O. Ekdahl 氏数値積分法 計算補助表

h	V	q	$\frac{V}{\Delta t} - \frac{q}{2}$		$\frac{V}{\Delta t} + \frac{q}{2}$	
(m)	(m ³)	(m ³ /min)	$\Delta t = 60\text{min}$			
0	0	0	0		0	
		(18)			(109)	(127)
0.5	7,071	18	109		127	
		(32)			(199)	(231)
1.0	20,000	50	308		358	
		(42)			(258)	(303)
1.5	36,741	92	566		658	
		(49)			(306)	(356)
2.0	56,568	141	872		1,014	
		(57)			(347)	(403)
2.5	79,055	198	1,219		1,417	

註：本法に依つて流出量を求める方法は下記の如くである。例へば或る時刻 t に於ける流出量 $q_t=18$ (m³/min) とし、それより Δt 即ち 1 時間後の流出量を求めてみよう。 t 時刻に於ける流入量 $Q_t=192$ (m³/min), $t+\Delta t$ 時刻に於ける流入量 $Q_{t+\Delta t}=304$ (m³/min) とする。原式を變形して次の計算を行ふ。

$$\left(\frac{V}{\Delta t} + \frac{q}{2}\right)_{t+\Delta t} = \left(\frac{V}{\Delta t} - \frac{q}{2}\right)_t + \frac{1}{2}(Q_t + Q_{t+\Delta t}) = 109 + \frac{1}{2}(192 + 304) = 357$$

従つて 357 (m³/min) に相當する流出量を求めれば $q_{t+\Delta t} \div 50$ (m³/min) となる。表中にない數値はその前後の數値の間では直線的の變化をするものとして比例計算を行ふのであるからこの補助表は h の間隔の小さいものを作ることが望ましい。補助表から各時刻に於ける流出量の計算を行ふにも第 19 表の様式に依るのが便利である。

第 19 表 各時刻に於ける流出量計算表

時 刻 (hr)	(I) Q	(II) 1 時 間 前 の Q と の 平 均 値	(III) 1 時 間 前 の $\left(\frac{V}{\Delta t} - \frac{q}{2}\right)$	(IV) (II)+(III) $\left(\frac{V}{\Delta t} + \frac{q}{2}\right)$	(V) q
0	20	—	—	—	⊕ 20
1	62	41	121	162	23
2	122	92	140	232	33
3	180	151	202	353	50
4	265	223	308	531	74
5	302	284	455	739	103
6	278	290	635	925	129
7	240	259	797	1056	147
8	178	209	909	1118	156
9	140	159	963	1122	156
10	65	103	963	1066	148
11	32	49	915	964	134
12	20	26	828	854	119

註 i ⊕最初の時刻に於ける流出量はそれまで平衡状態にあつたものとして $Q=q$ とする。

註 ii 計算順序は先づ流入量 (I) を記入し、次いで 1 時間前の流入量との平均値 (II) を計算記入する。次ぎに最初の時刻に於ける流出量 (V) を記入し、この値に相當する $\left(\frac{V}{\Delta t} - \frac{q}{2}\right)$ の値を補助表から求めて次ぎの時刻に相當する行に記入する (III)。(II)(III) の同行の値を加へて (IV) とし、再び補助表に依りこの値に相當する (V) の値を求める。以下同様にこの操作を行つて各時刻に於ける流出量を求めることが出来る。

次ぎに以上 3 種の方法に依つて求めた各時刻に於ける流出量を比較すれば第 20 表のようになり何れも殆んど一致してゐることが解る。

第 20 表 各法に依る流出量算出値

時 刻 (hr)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fourier級数の全項を採用した時間流出量曲線式に依る値(m ³ /min)	20	22	33	49	73	104	131	149	157	157	150	135	120

同上 3 項を採用した式に依る値 (m^3/min)	20	23	33	51	75	103	129	149	159	159	149	134	119
O. Ekdahl 氏法に依る値(m^3/min)	20	23	33	50	74	103	129	147	156	156	148	134	119

更に調節の状況を知るために各時刻に於ける流入量と流出量を一表に纏めると

第 21 表 流入量と流出量の比較表

時 刻 (hr)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
流 入 量 (m^3/min)	20	62	122	180	265	302	278	240	178	140	65	32	20
流 出 量 (m^3/min)	20	22	33	49	73	104	131	149	157	157	150	135	120

但し流出量は Fourier 級数の全項を採用した時間流出量曲線式に依る値である。

以上は洪水流入継続期間内即ち 0 hr から 12 hr までの間の各時刻に於ける流出量であるが次ぎにそれ以後の各時刻に於ける流出量を求めてみよう。但し流入量は初めの平水位 $20\text{m}^3/\text{min}$ に戻り且つその後は変化しないものとする。この場合は (33) 式

$$q = e^{-\alpha t}(q_0 - Q_c) + Q_c$$

に於て $q_0 = 120(\text{m}^3/\text{min})$ 及び $Q_c = 20(\text{m}^3/\text{min})$ とすればよく、結局次ぎの時間流出量曲線式が得られる。

$$q = \frac{100}{e^{0.066t}} + 20$$

但し上式は洪水流入終止時から起算した各時刻に對する流出量を表はすものであるから、これを洪水流入開始時から起算した各時刻に對する流出量を求める公式に變化すれば

$$q = \frac{100}{e^{0.066(t-12)}} + 20$$

となる。

次ぎに上式に依つて各時刻に於ける流出量を算出すれば第 22 表のようになる。

第 22 表 各時刻に於ける流出量計算表 ($q = \frac{100}{e^{0.066(t-12)}} + 20$ 式に依る)

t (hr)				q				t (hr)				q			
洪水 開始	洪水 終止	$10^{0.066t}$	$\frac{100}{10^{0.066t}}$	q (m^3/min)	洪水 開始	洪水 終止	$10^{0.066t}$	$\frac{100}{10^{0.066t}}$	q (m^3/min)	洪水 開始	洪水 終止	$10^{0.066t}$	$\frac{100}{10^{0.066t}}$	q (m^3/min)	
0	12	1.00	100	120	9	21	3.93	25	45	18	30	15.42	6	26	
1	13	1.16	86	106	10	22	4.57	22	42	19	31	17.95	6	26	
2	14	1.36	74	94	11	23	5.32	19	39	20	32	20.90	5	25	
3	15	1.58	63	83	12	24	6.19	16	36	21	33	24.32	4	24	
4	16	1.84	54	74	13	25	7.16	14	34	22	34	28.32	3	23	
5	17	2.14	47	67	14	26	8.40	12	32	23	35	32.96	3	23	
6	18	2.49	40	60	15	27	9.77	10	30	24	36	38.37	3	23	
7	19	2.90	34	54	16	28	11.38	9	29						
8	20	3.37	30	50	17	29	13.25	8	28						

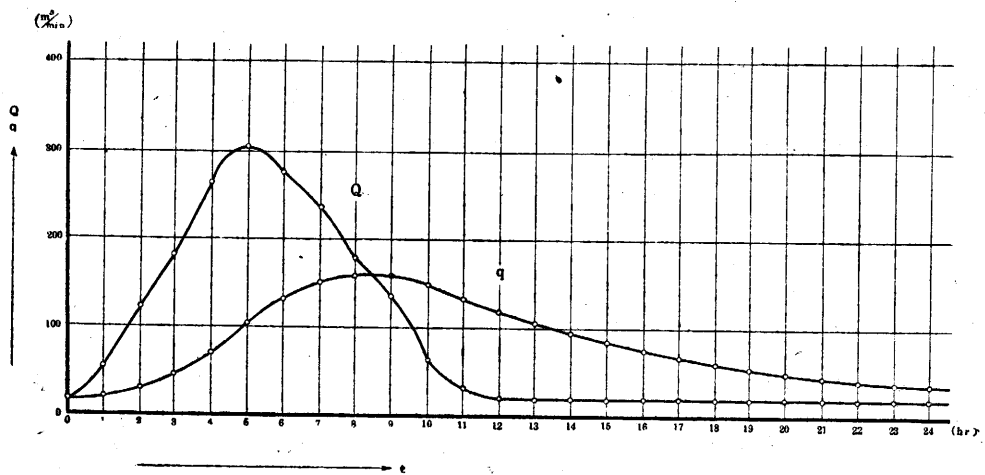
以上の結果から洪水流入量の調節される模様をグラフに表はせば第8圖のようになる。但し洪水流入開始後 24 時間内の結果を示す。

終りに (33) 式を用ひるための流出量の誤差を求めると洪水流入終止時後 24 時間までを採るとすれば §7 の (iv) 式に依り

$$r = e^{-\alpha t} = \frac{1}{10^{0.066 \times 24}} = 0.026 = 2.6\%$$

に過ぎない。これは洪水流入終止後に於ける流出量の誤差の割合であるから全流出量の誤差の割合は極めて小さく實際上無視して差支へない。

第 8 圖



結 論

洪水調節に関する研究は調節池からの時間流出量曲線の誘導を主たる目的とし、圖式解析法と數式的解析法とがあり、後者即ち時間流出量曲線式の誘導は前者に比して一層重要であるにも拘らず、從來試みられた諸解析法はその實用價值が餘りにも低い感がある。それは時間流出量曲線式を求めるに當つては先づ洪水調節作用の微分方程式

$$Qdt = qdt + dV$$

(Q, q, dV は dt 時間内に於ける流入量, 流出量, 溜水量の變化)

を解かなければならないのであり、これがためには時間流入量曲線式及び水位と調節池の水表面積並びに水位と調節池からの流出量との兩關係式が特殊の條件を有することを必要とするからである。

筆者は本論文に於て從來唱へられたものに比し一層實用性のある時間流出量曲線式の誘導を行つたのであり、その結果下記の結論を得た。

(1) 時間洪水流量曲線は一般に山形を呈しその最大は洪水継続期間の中央より前方に現はれるものが多い。従つてこれを一定流量と見做すことは無謀であり、又 sine 曲線, cosine 曲線或ひは確率曲線で表はすとしても相當の無理を伴ふ。但し三角形の直線式は可成りの適合度を有するが、流量増加の場合と減少の場合の2種の式を用ひなければならぬ不便がある。

斯る峯の偏つた山形の時間流入量曲線式としては Fourier 級数が最も適當である。

即ち

$$Q = a_0 + \sum_{r=1}^n (a_r \cos rkt + b_r \sin rkt)$$

但し $k = \frac{2\pi}{T}$ ($T =$ 洪水流入継続時間, $0 < T < t$) $a_0, a_r, b_r =$ Fourier 係数で、與へられた時間流入量曲線から調和分析に依つて決定される。

Fourier 級数の應用に依つて可成りの不規則さを示す實際の時間流入量曲線の數式的表現が可能となり、且つ微分方程式解法の際に必要な條件即ち $Qe^{\alpha t}$ の積分も容易となつた。

(2) 水位 h と調節池流出口からの流出量 q との關係式所謂水位流出量曲線式が

$$q = ch^n$$

のとき水位 h と調節池水表面積 A との關係式所謂水位水表面積曲線式は

$$A = Kh^m \quad (\text{但し } m = n-1)$$

であらねばならぬことは微分方程式解法に必須の條件である。調節池地形の實測結果からこの式の K を定めるのに最小二乗法を應用することは最も普通に考へられ從來既に多くの人々に依つて唱へられた處であるが、筆者は時間流出量曲線式を實際に應用する際これに依つて得られる調節池設計資料の安全度を確實にすることを目的として次ぎの方法を示した。

即ち先づ調節池地形實測結果に依り水位水表面積曲線式として適合度の高い

$$A_1 = A_0 + K_1 h_1^{m_1}$$

なる原式の係数 A_0, K_1, m_1 を決定し、次式に依つて K を求める。

(i) $m > m_1$ の場合

$$K = \frac{A_0 + K_1 h_1^{m_1}}{h_1^{m_1}}$$

但し h_1 は豫想の最高水位とする。

(ii) $m < m_1$ の場合

$$K = \frac{m_1}{m} \left\{ \frac{A_0}{\frac{m_1}{m} - 1} \right\}^{1 - \frac{m}{m_1}} K_1^{\frac{m}{m_1}}$$

(3) 新しく誘導された時間流出量曲線式は次のようである。

$$q = e^{-at} \left\{ q_0 - a_0 - \sum_{r=1}^n \frac{a}{a^2 + r^2 k^2} (aa_r - rkb_r) \right\} \\ + a_0 + \sum_{r=1}^n \frac{a}{a^2 + r^2 k^2} \left\{ (rka_r + ab_r) \sin rkt + (aa_r - rkb_r) \cos rkt \right\}$$

但し式中

q = 流出量, q_0 = 初めの時刻に於ける流入量, a_0, a_r, b_r, n, k = 時間流入量曲線式中の

各項, $a = \frac{cm}{K}$ (c, m, K は (2) 中に示されてある曲線式中の係数)

ABSTRACT

A Study with the Aid of Harmonic Analysis of the Flood Controlling Function of Reservoirs.

The main object in studying the flood controlling effect of reservoirs is to deduce the outflow-time curve from a given reservoir. Of the numerous solutions of this problem, the graphical analysis of O. Ekdahl, Sweden (1912), N. Mononobe, Japan (1921), etc., show a highly advanced stage of solution, whereas in the theoretical analysis of the problem, that is, the equational expression for the outflow-time curve, nothing so far formulated can be compared with the preceding graphical analyses. The reason given for this is that the differential equation covering the equalizing effect of the waterflow due to the reservoir can be solved only when the equation is of special type, with the result that various assumptions have to be made regarding the depth-capacity curve and the depth-outflow curve of the reservoir, as well as the inflow-time curve of the flood. The assumption of "Equivalent uniform flood" by C. J. Posey and Fu-Te I is well known. For the flood inflow, others have used a sine curve, a cosine curve, a probability curve, etc., but, seeing that the shape of an actual flood curve is such that its peak appears much earlier than at the middle of the entire period of flood, with the exception of certain special cases, anyone of these scarcely fits in with an actual flood curve.

To compensate for this drawback the writer used Fourier series and succeeded in deducing the outflow-time curve, a summary of the procedure of which is as follows:

The inflow Q into the reservoir during a small time interval dt must be equal to the sum of the outflow q and the storage dV during that time interval, evaporation and percolation losses being neglected. Thus,

$$Q dt = q dt + dV \dots\dots\dots (1)$$

This is the fundamental equation expressing the flood controlling effect caused by the reservoir. Usually,

Inflow is given as a function of time: $Q = F(t)$

Outflow is given as a function of water depth: $q = f(h)$

Area of water surface is given as a function of water depth: $A = \varphi(h)$

Storage is given as a function of water depth: $dV = A dh = \varphi(h) dh$,

where dh is the increment of depth during the time dt . Equation (1) may be written

$$\left. \begin{aligned} F(t) dt &= f(h) dt + \varphi(h) dh \\ \text{or } \frac{dh}{dt} + \frac{f(h)}{\varphi(h)} &= \frac{F(t)}{\varphi(h)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

To solve the above differential equation we need one of the following conditions:

$$(i) \frac{\partial \varphi(h)}{\partial t} = \frac{\partial \{f(h) - F(t)\}}{\partial h}$$

$$(ii) \frac{1}{f(h) - F(t)} \left[\frac{\partial \varphi(h)}{\partial t} - \frac{\partial \{f(h) - F(t)\}}{\partial h} \right] = \text{a constant or a function of } h$$

$$(iii) \frac{1}{\varphi(h)} \left[\frac{\partial \varphi(h)}{\partial t} - \frac{\partial \{f(h) - F(t)\}}{\partial h} \right] = \text{a constant or a function of } t$$

Condition (i) is satisfied only when $f(h) = \text{a constant}$. It is apparent that a case like this can hardly be expected in practice.

Condition (ii) is satisfied only when $F(t) = \text{a constant}$. "Equivalent uniform flood" must be used for the solution under this assumption.

Condition (iii) can be satisfied if $\frac{f'(h)}{\varphi(h)} = \text{a constant}$. This assumption has a wider application than the preceding two.

The outflow from a reservoir can be satisfactorily expressed by a monomial exponential function

$$q = ch^m \dots\dots\dots (3)$$

where m has a value about 1.5 for the Weir type of outlet. Here we recognize the assumption that the area of the water surface of the reservoir can also be approximated by a function:

$$A = Kh^n \dots\dots\dots (4)$$

If exponent n is equal to $m-1$, equation (2) becomes solvable, being

$$\frac{f'(h)}{\varphi(h)} = \frac{cm}{K} = \text{a constant.}$$

Substituting (3) and (4) in (2), we have

$$\frac{dh}{dt} + \frac{c}{K} h = \frac{1}{K} F(t) h^{1-m} \dots\dots\dots (5)$$

This is called Bernoulli's equation, which can be reduced to linear form by substituting $z = h^m$.

The solution of equation (5) is

$$z = h^m = e^{-\frac{cm}{K}t} \left\{ \frac{m}{K} \int F(t) e^{\frac{cm}{K}t} dt + C \right\} \dots\dots\dots (6)$$

Substituting it in equation (3), we have

$$q = e^{-at} \left\{ a \int F(t) e^{at} dt + C \right\} \dots\dots\dots (7)$$

where $a = \frac{cm}{K}$

By giving q_0 for inflow when $t=0$,

$$C = q_0 - a \left[\int F(t) e^{at} dt \right]_{t=0} \dots\dots\dots (8)$$

Putting (8) in (7), we have

$$q = ae^{-at} \int F(t) e^{at} dt + e^{-at} \left\{ q_0 - a \left[\int F(t) e^{at} dt \right]_{t=0} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

Expressing the inflow in terms of the time t by using Fourier series, we have

$$F(t) = a_0 + a_1 \cos kt + a_2 \cos 2kt + \dots\dots\dots + a_n \cos nkt \Big\} \dots\dots\dots (10) \\ + b_1 \sin kt + b_2 \sin 2kt + \dots\dots\dots + b_n \sin nkt \Big\}$$

where $k = \frac{2\pi}{T}$ (T = entire flood period)

The Fourier coefficients $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$; b_1, b_2, \dots, b_n are obtained with the aid of "Harmonic analysis".

The advantage of applying Fourier series is that, by increasing the number of terms of the series, the curve can be made to approximate infinitely the original curve of observation. Practically, however, only a few terms are sufficient to represent a flood curve, provided it has only one peak. To find $\int F(t) e^{at} dt$ in equation (9) we simply integrate term by term the series,

$$\begin{aligned} \int F(t) e^{at} dt &= a_0 \int e^{at} dt \\ &\quad + a_1 \int e^{at} \cos kt dt + a_2 \int e^{at} \cos 2kt dt + \dots \\ &\quad + a_{n-1} \int e^{at} \cos (n-1)kt dt + a_n \int e^{at} \cos nkt dt \\ &\quad + b_1 \int e^{at} \sin kt dt + b_2 \int e^{at} \sin 2kt dt + \dots \\ &\quad + b_{n-1} \int e^{at} \sin (n-1)kt dt + b_n \int e^{at} \sin nkt dt \\ &= \frac{a_0}{a} + \frac{a_1}{a^2 + k^2} \{a \cos kt + k \sin kt\} \\ &\quad + \frac{b_1}{a^2 + k^2} \{-k \cos kt + a \sin kt\} \\ &\quad + \frac{a_2}{a^2 + (2k)^2} \{a \cos 2kt + 2k \sin 2kt\} \\ &\quad + \frac{b_2}{a^2 + (2k)^2} \{-2k \cos 2kt + a \sin 2kt\} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \frac{a_{n-1}}{a^2 + (n-1)^2 k^2} \{a \cos (n-1)kt + (n-1)k \sin (n-1)kt\} \\ &\quad + \frac{b_{n-1}}{a^2 + (n-1)^2 k^2} \{-(n-1)k \cos (n-1)kt + a \sin (n-1)kt\} \\ &\quad + \frac{a_n}{a^2 + n^2 k^2} \{a \cos nkt + nk \sin nkt\} \\ &\quad + \frac{b_n}{a^2 + n^2 k^2} \{-nk \cos nkt + a \sin nkt\} \end{aligned}$$

Whence we may write

$$\int F(t) e^{at} dt = e^{at} \left[\frac{a_0}{a} + \sum_{r=1}^n \frac{1}{a^2 + r^2 k^2} \{ (aa_r - rkb_r) \cos rkt + (rka_r + ab_r) \sin rkt \} \right] \dots (11)$$

Since, when $t=0$,

$$\left[\int F(t) e^{at} dt \right]_{t=0} = \frac{a_0}{a} + \sum_{r=1}^n \frac{1}{a^2 + r^2 k^2} (aa_r - rkb_r) \dots (12)$$

substituting (11) and (12) in (9), we have the outflow-time curve

$$\begin{aligned} q &= e^{-at} \left\{ q_0 - a_0 - \sum_{r=1}^n \frac{a}{a^2 + r^2 k^2} (aa_r - rkb_r) \right\} \\ &\quad + a_0 + \sum_{r=1}^n \frac{a}{a^2 + r^2 k^2} \{ (aa_r - rkb_r) \cos rkt + (rka_r + ab_r) \sin rkt \} \dots (13) \end{aligned}$$

Now let us consider equation (4) $A = Kh^n$. Equation (3), namely, $q = ch^m$ being

determined first and the value of n being given necessarily equal to $m-1$, there is left only one coefficient K , the value of which we may choose for approximation. Ordinarily, the method of least squares may be used for obtaining the most probable value of K .

From the standpoint of practical application the writer adds another method of determining K , the results being

- (1) In the case $n > n_1$

$$K = \frac{A_0 + K_1 H^{n_1}}{H^n}$$

where $H = a$ presumed maximum water depth

- (2) In the case $n < n_1$

$$K = \frac{n_1}{n} \left\{ \frac{A_0}{\frac{n_1}{n} - 1} \right\}^{1 - \frac{n}{n_1}} K_1^{\frac{n}{n_1}}$$

where A_0 , K_1 , and n_1 are constants and the exponent in the depth-water surface equation,

$$A_1 = A_0 + K h^{n_1},$$

which may be made to approximate to a very large extent the original curve of observation.

Since the outflow-time curve deduced with K , thus determined, never shows a smaller maximum outflow than the actual one, it provides safe data for designing the outlet of a flood controlling reservoir.

(September 1942)