鉄道高架橋周辺の地盤の低周波振動に関する基礎的研究

昭和 55年 8月

長岡技術科学大学　工学部　建設系

小長井　一男

目次

Ch 1 序論

§1-1 はじめに

近年 鉄道車輌の高速化及び輸送量の増大に伴い、その走行時の地盤振動が大きな社会問題としてクローズアップされている。一口に地盤振動といっても様々なケースがあり、個々の状況に応じた診断・対策が要求されるが、現在この問題の解決を非常に困難にしている要因として、対象としている地盤の複雑さ，不均質さがその最たるものとしてあげられよう。従って、本研究で取り扱う事象も、以下の条件を備えたものに限定する。

(1) 構造物は杭基礎を持つピアに支持された単純支持桁であること。

(2) 走行車輌は新幹線用電車(16輌編成)とする。

(3) 対象とする区間が列車の加速，減速区間でなく、ほぼ一定速度で車輌が通過するものとする。

(4) 地盤は平坦で、近似的に半無限等方弾性体，もしくは一様な厚さを持つ表層を半無限の基層上に載せているとみなせるものであること。

以上の条件をみると、あまりに単純化された事象のみ取り扱う観があることは否定できないが、列車走行時の振動が問題となる人口稠密な都市部は、その多くが(4)の条件に近い沖積層上に立地する為，これらの条件を備えたものに対象を限定することが、極端に特殊な地域のみに焦点を絞ることにはならないと考える。

§1-2 本研究の目的

本研究は、新幹線高架橋周辺の地盤振動の伝播機構がどのような因子によって左右されているのかの解明を試みるものである。高架橋上を列車が走行して励起されたエネルギーは、主に

(1) 軌道構造，桁というフィルターを通り、支承よりピアに入力されて地盤に逸散していく。

(2) 音として直接，振動による被害を受けている対象に伝播し、対象の振動を励起する。

という二通りの径路を辿ると考えられるが定量的には(1)の径路を介するものが支配的であると思われる。従って、本研究で解明すべき点として

(i) 支承を介しピアに入力される力の形状

(ii) 伝達系であるピア・地盤系の振動特性

(iii) アウトプットとしての地盤振動の特性

といった三項目に焦点を絞る。(i)に関しては、支承部にゴムを用いた高架橋でこの支承部の変位を測定し、ピアへの入力の算定を試みる。この結果をふまえ、ピアへの入力を支配すると思われる新幹線車輛の車軸配置，列車速度，スパン，桁の重量，曲げ剛性等の諸要素に考察を加える。(ii)に関しては，波動の地中逸散を考慮して，複素バネとしての地盤に支持された杭基礎の動特性のシミュレーションモデルにより，伝達系の諸特性を考察する。また相反定理を動的な問題に拡張し，杭基礎加振時の地表の振動の算定を試みる。(iii)に関しては，上記システムの出力としての地盤振動が，(i)(ii)で触れた諸因子のみならず，加振源

であるピアが複数連立することによる影響も受けることに着目し，実際の高架橋の周辺地盤の振動測定データーを基に橋脚間隔と地盤振動との関連を検討する。尚本論文では22Hz以下の低周波振動を対象とする。

Ch 2 列車走行時に橋脚に入力される力

§2-1 はじめに

高架橋上を列車が走行する際の地盤振動は、高架橋橋脚の加振により励起されるものと考えることができる。一般に振動問題は、入力、伝達系、出力の三つを把握しなければならないが、入力として橋脚を加振する力を想定した場合、伝達系としては橋脚と地盤の相互作用を考えねばならない。もっともこの橋脚への入力も、列車の車輪よりの入力が軌道構造、桁等の伝達系を介してきたものであり、このように橋脚への入力を橋脚以下のシステムへの外力として設定することは、列車が走行し、その為に地盤振動が励起されるという全体的なシステムを支承部を境に二分することに相当する。この支承部に載る桁、車輌を仮に上部システムと称し、支承以下の橋脚、地盤を下部システムと称することにする。橋脚への入力は上部システムよりのアウトプットであり、下部システムへのインプットでもある。

岡山県倉敷市上東地区に山陽新幹線の庄架道橋がある。この高架橋では、支承部にフレシパッド（合成ゴムと鉄板を互層に重ねたパット）を用いており、この変位を測定すれば、これに支承のバネ係数を乗ずることでピアへの入力を算定することができる。従って、このピアへの入力の算定を主目的として、庄架道橋での振動測定を行なった。本測定においては、この支承部変位の他、橋脚及び地盤の振動も同時に測定している。これはいわゆる下部システム（橋脚・地盤系）の出力の一部である。下部システムにおいては入力と出力の一部が測定されているので、伝達系を推定することは可能であるが、測定現地より500 mの地点に山陽放送のアンテナがあり、出力である橋脚、地盤の加速度記録にかなりのノイズをとらえてしまった為、特に低周波

のシグナル検出が困難となり，伝達系の算定作業は行なっていない。以上の理由から，本章においては，上部システムのアウトプットとしての支承反力を検討する。

§2-2 庄架道橋における振動測定

2-2-1 測定の概要

本測定は昭和51年12月に岡山県倉敷市上東地区の山陽新幹線の庄架道橋において行なわれた。(Fig. 2-2-1) 現地は岡山市と倉敷市のほぼ中間，笹ヶ瀬川付近の沖積平野上に位置し，G.L.下12m

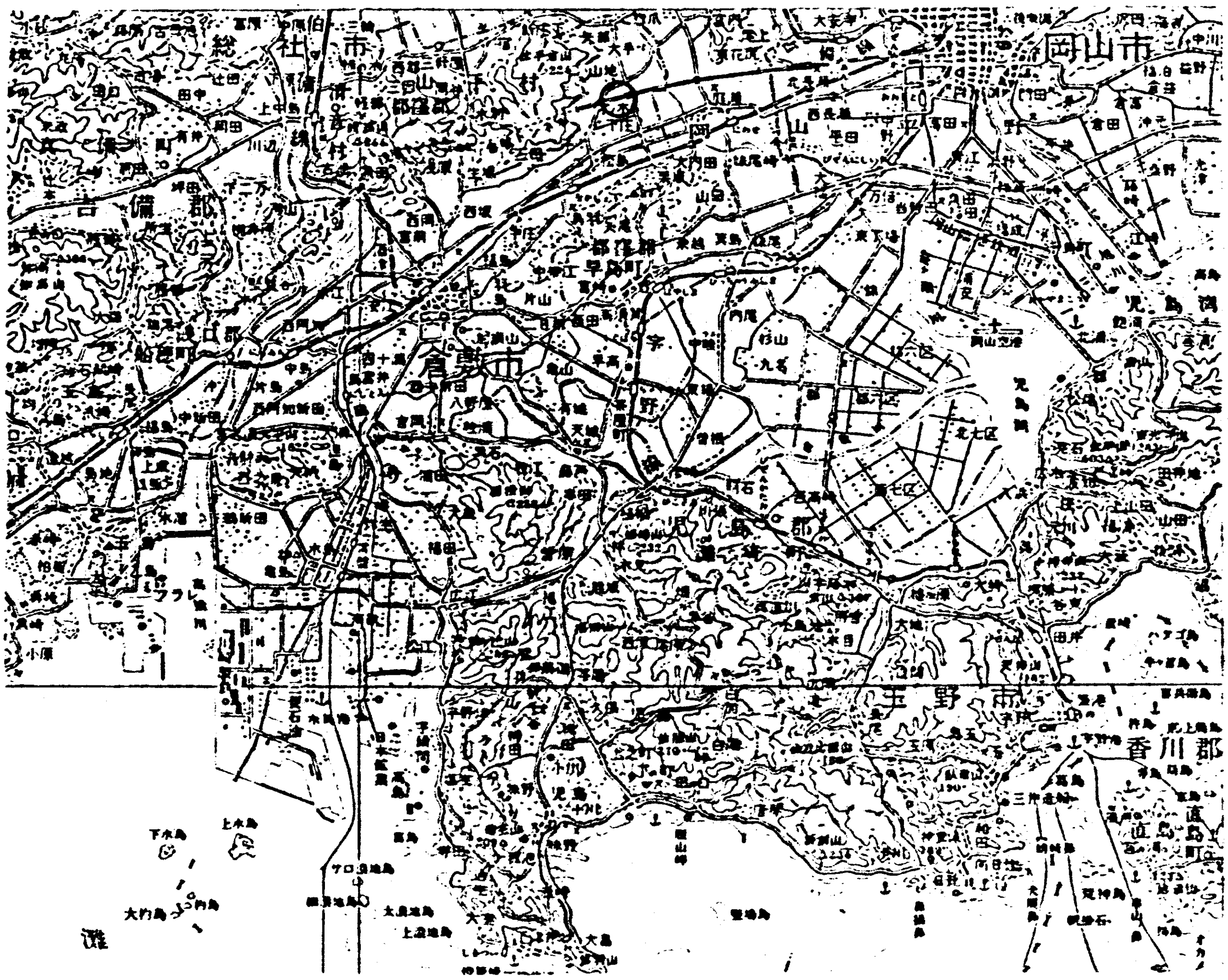


Fig. 2-2-1 庄架道橋周辺地形図
(円内)
(国土地理院 1/200000 岡山)

までは シルト質粘土等からなるN値1以下の沖積層で、その下に砂礫からなるN値50以上の洪積層が横たわっている。また沖積層内にはレンズ状にN値10～20程度の砂層が存在する。Fig. 2-2-2に現地の地質柱状図を示しておく。

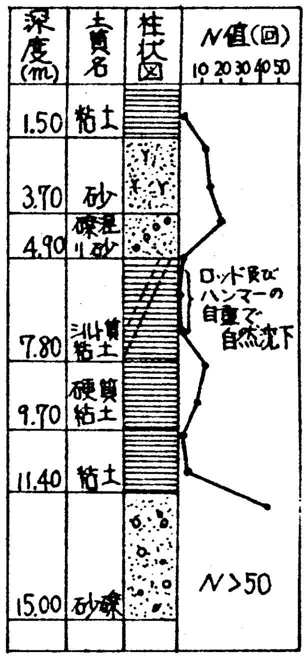


Fig. 2-2-2 現地地質柱状図

測定を行なった高架橋は，上部構造がPCI型単線4主桁で，上り線桁が厚さ10cmのフレシパッド沓(合成ゴムと鉄板を互層に重ねた沓)，下り線桁が鉄沓を介し同一の橋脚で支持された複線構造物である。なおフレシパッド沓の場合は桁と橋脚の間に落脱防止の為のストッパーが設置されている。高架橋のスケルトンをFig 2-2-3に示す。

また軌道はスラブ軌道を用い，レール継目は付近にない。

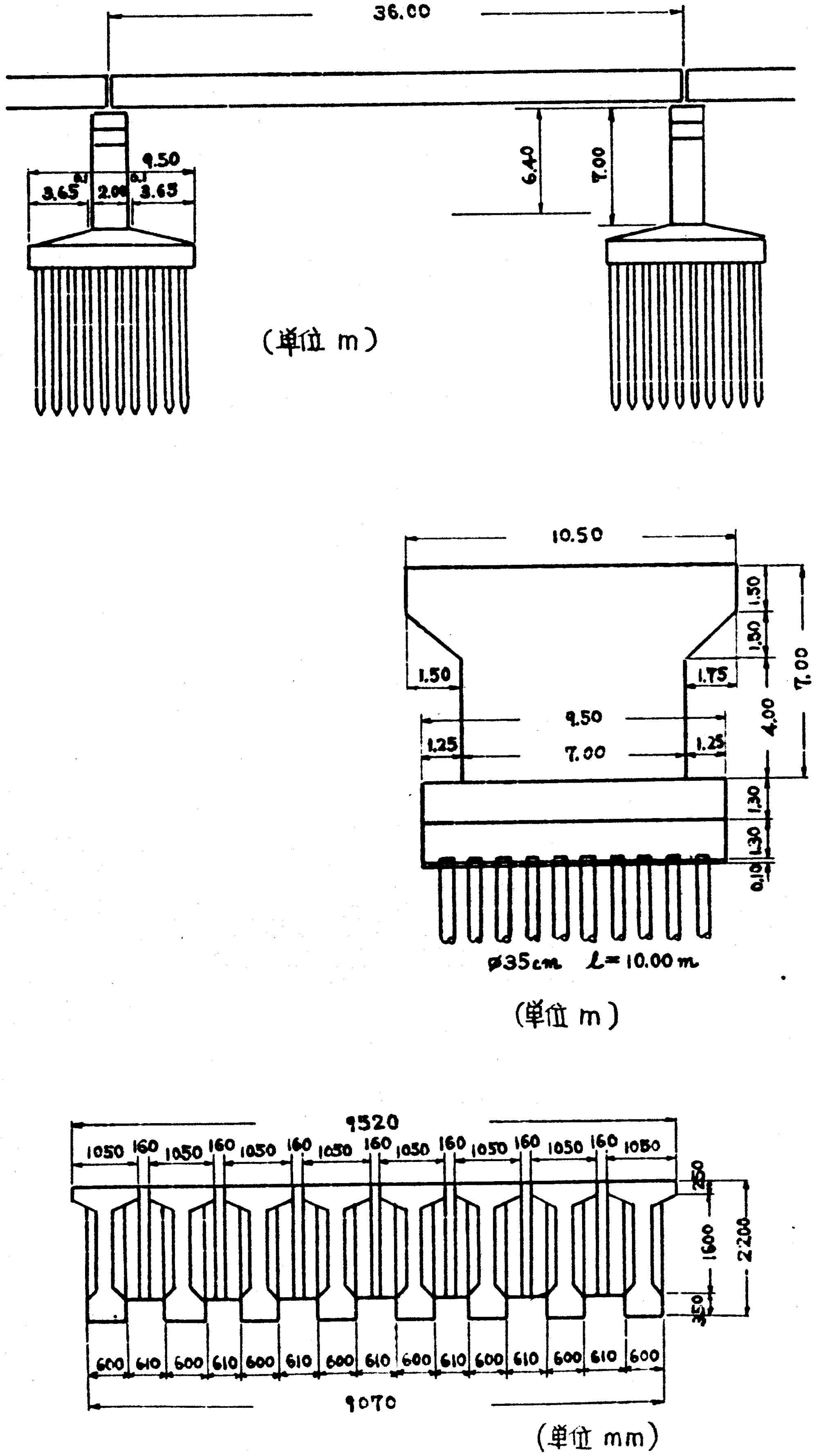


Fig. 2-2-3 庄架道橋概形

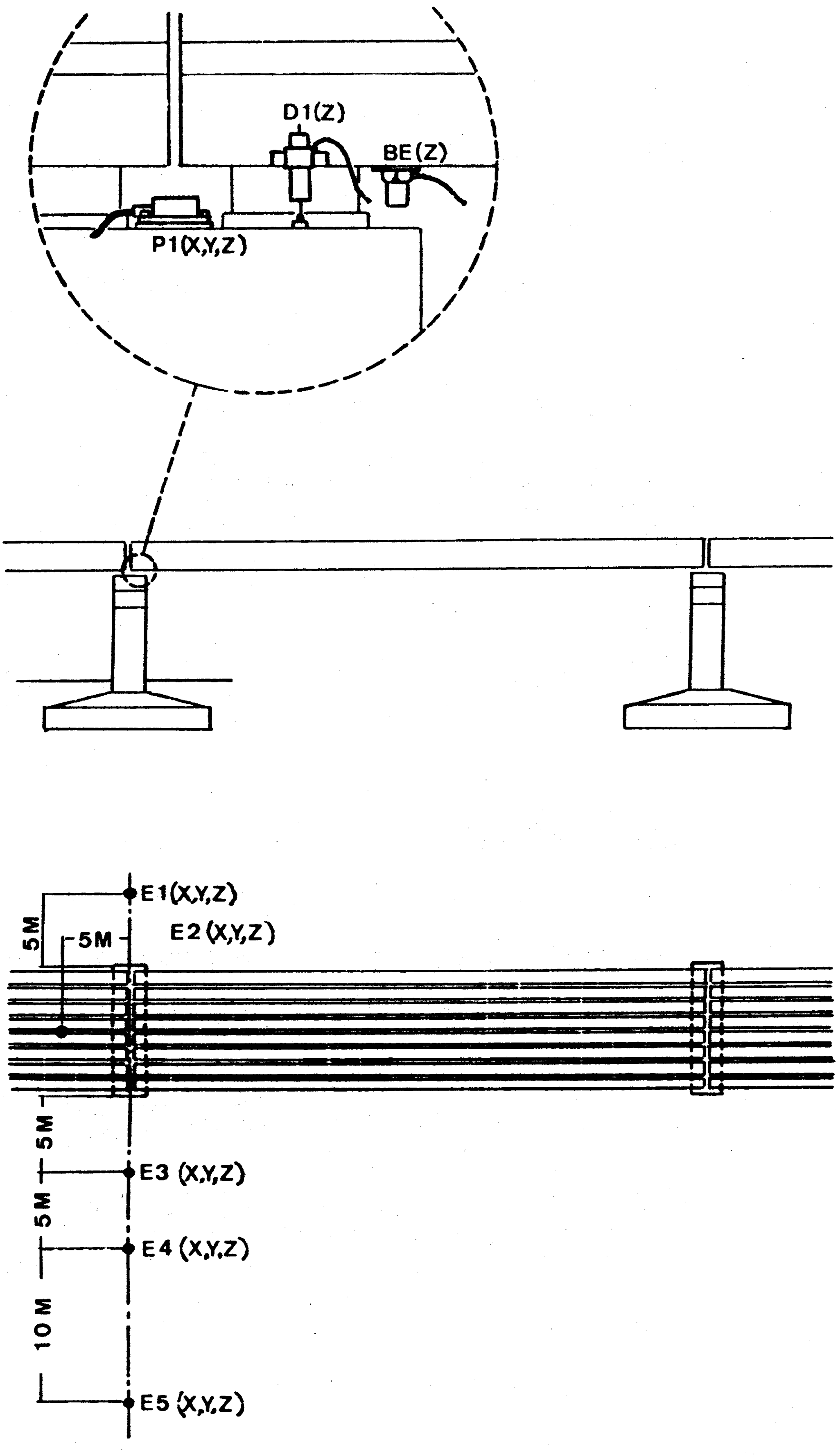


Fig. 2-2-4　測定点の位置

◎ 測定点の配置及びデーター収録

測定点の配置をFig. 2-2-4に示す。この図において，Xは橋軸直角方向，Yは橋軸方向，Zは鉛直方向である。橋脚，地盤からなる下部システムに注目した為，測点の多くはピアと地盤に集中した。以下に測定点と使用機器の対応を示す。

Table 2-2-1

測点	換振量	換振器	
BE	ACCELERATION	542-A	EMIC
P1 P2 E1 E2	ACCELERATION	BG-901	ENDEVCO
D1	DISPLACEMENT	D-10B	ワシダ測器
E3～E5 (X,Y) E3～E5 (Z)	ACCELERATION	SA-151 SA-152	東京測振

各々のピックアップは，その設置において，被測定体との固着が必要な為Fig. 2-2-4における測点BE, P1, P2, D1については，計器専用の台座をアルミ板で作成し，それにボルトでピックアップを固定し，台座と被測定体を樹脂系の接着剤で固着した。P1及びE1～E5に関しては石膏を用いた。なおピックアップの仕様はAppendix 3を参照されたい。

これらの測点よりの出力は，レールに貼り付けたゲージ（マーカーとして使用）よりの出力とともに，専用のアンプで増幅され，磁気テープに記録される。この収録データーのモニターはシンクロスコープ及び電磁オシログラフに依った。Fig. 2-2-5にそのブロックダイヤグラムを示す。

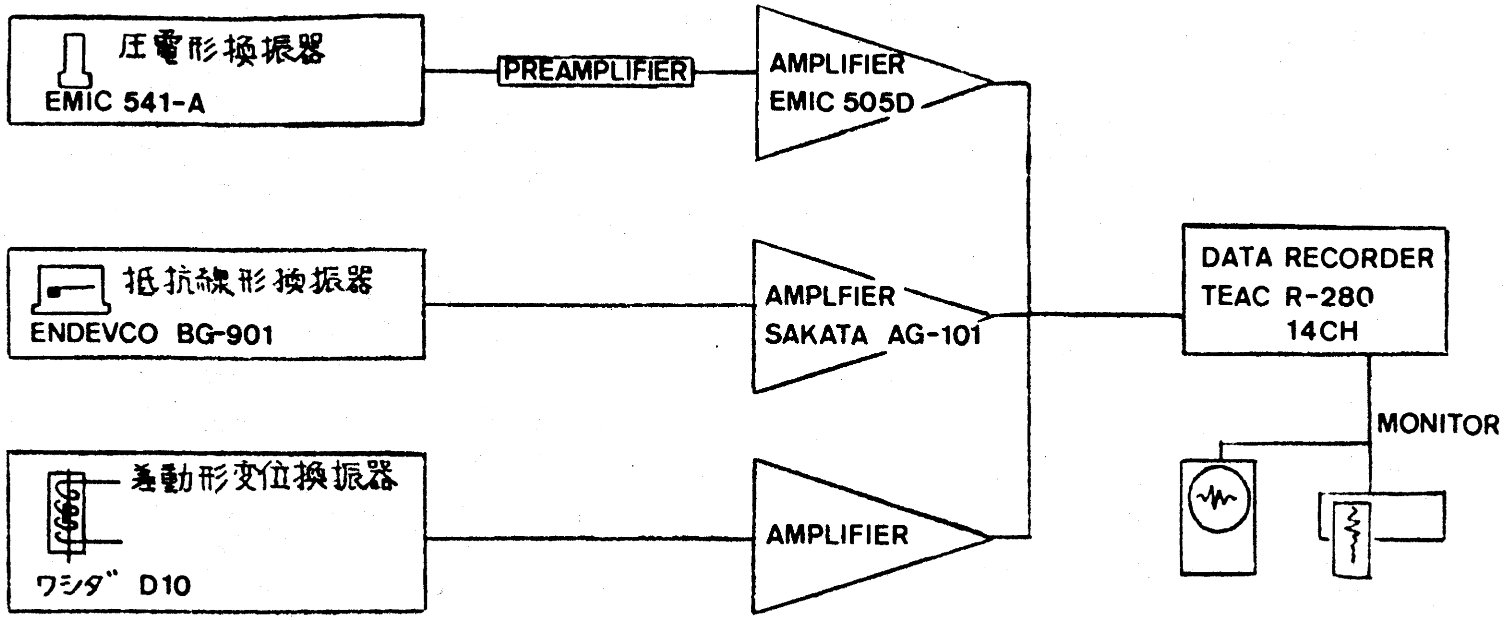
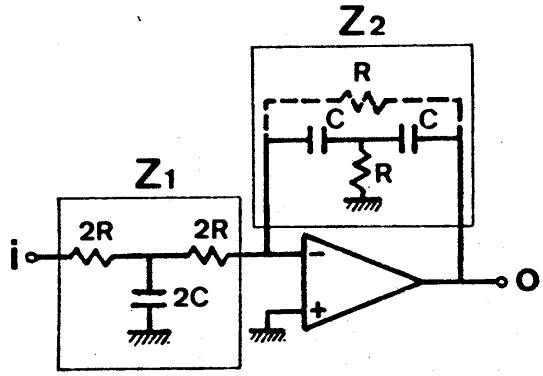


Fig. 2-2-5 測定系ブロックダイヤグラム

2-2-2 測定結果

支承変位の測定値をFig 2-2-6に示す。図中(a)は測点D1の差動コイル形変位計の出力であるが、(b)は桁端BEの加速度記録を二重積分※し低周波成分によるドリフトを落としたものである。上に記した列車の概形はマーカーの出力をもとに書き加えた。この図において(a)(b)は特に2.2Hz成分の挙動がよく似ており、ピア、地盤の持つインピーダンスが低振動数領域で、支承のバネ定数に比べかなり大きいことが推測される。

※桁端の加速度の二重積分は、アナログ量のまま以下の回路を通して行なわれた。



図中の▷はオペアンプであり、端子 i に入った電圧は $-Z_2/Z_1$ 倍され端子 o に出力される。Z_1, Z_2 は各々の枠内のインピーダンスであり、

$$Z_1 = 4R(1 + 2CR \cdot i\omega)$$

$$Z_2 = -(1 + 2CR \cdot i\omega)/RC^2\omega^2$$

となる。よって

$$-Z_2/Z_1 = 1.0/4R^2C^2(i\omega)^2$$

となり、二重積分が実行できる。なお R_0 を付けると $\omega=0$ のとき Z_2 のインピーダンスは R_0 となりドリフトが防止できる。

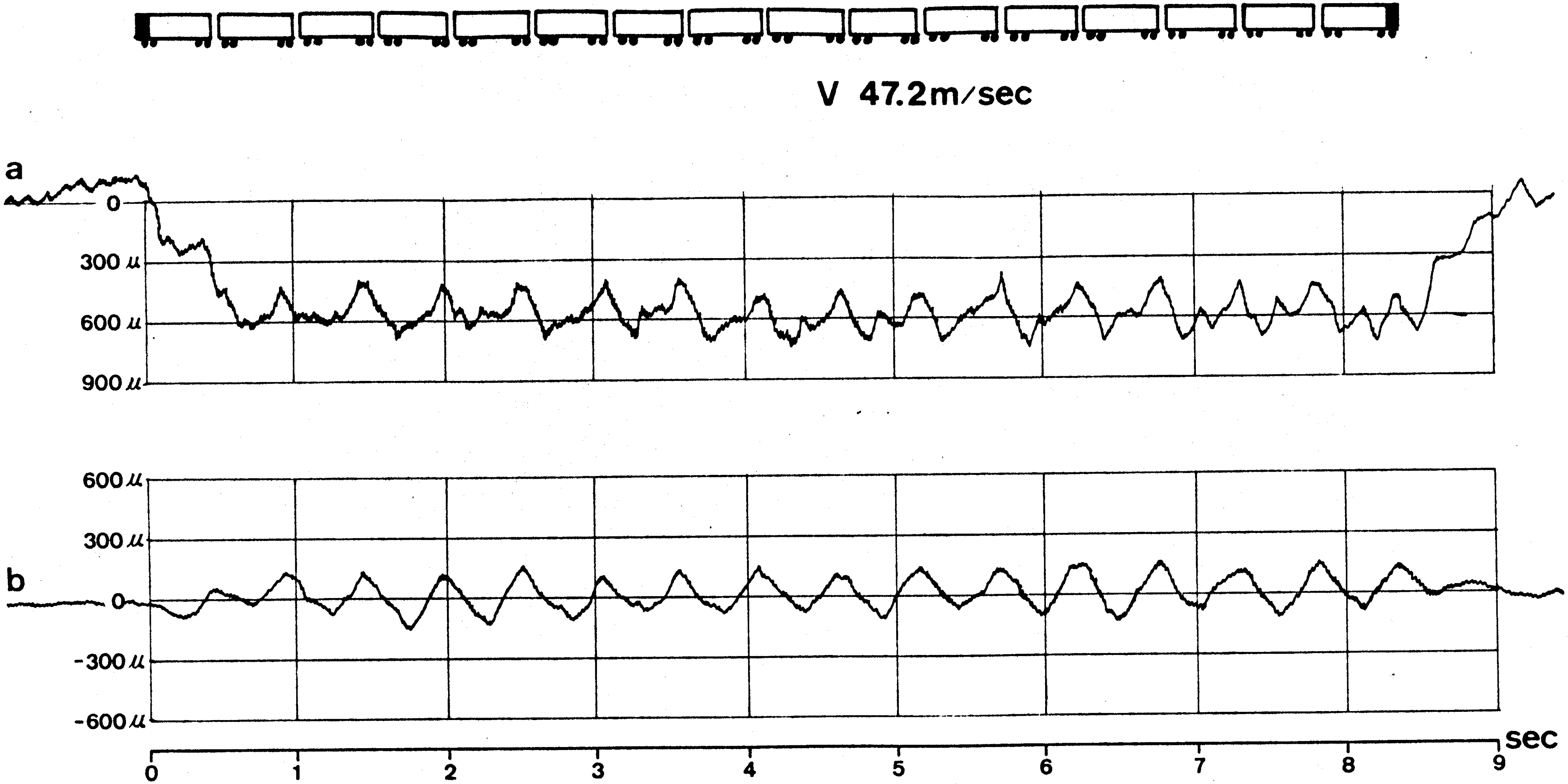


Fig. 2-2-6 支承変位測定値(a)と桁端加速度の二重積分値(b)との比較

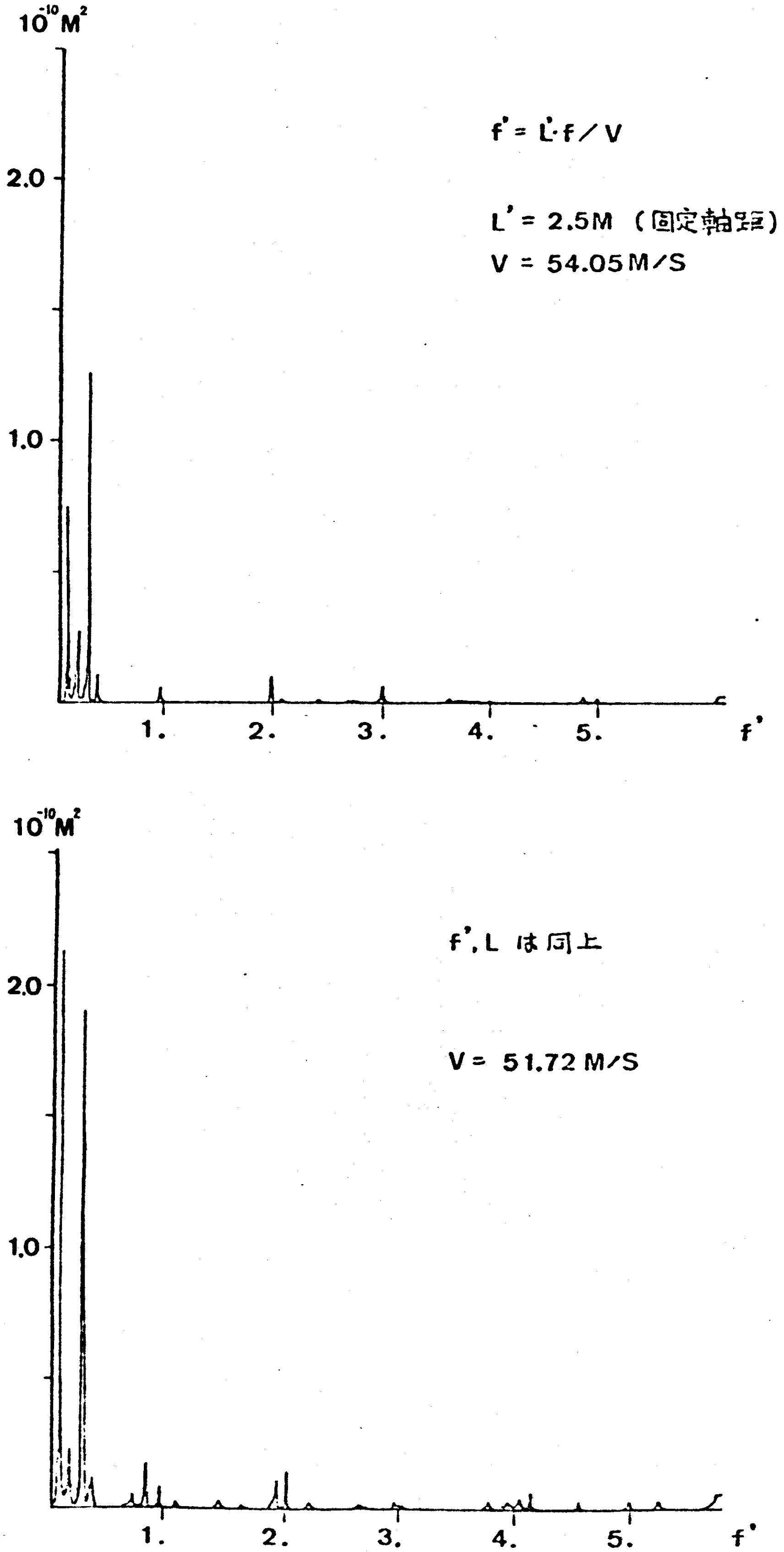


FIG. 2-2-7 床架道橋の支承変位の複素フーリエ係数の自乗値

この支承部変位の複素フーリエ係数の絶対値の自乗をFig.2-2-7に示す。横軸には、列車速度 V (m/s) 固定軸距 ℓ (= 2.5 m) で無次元化した振動数 $f'(=f\cdot\ell/V)$ を示す。列車速度を 55 m/s とおくと無次元化振動数 f' が 1 であることは $f=22$ Hz に相当する。なおこのスペクトルを求めるにあたりバイアスを除く目的でデータレコーダーよりの出力を切断周波数 3Hz，減衰性能 24dB/oct のバンドパスフィルターに通している。このFig.2-2-7を見ると 2.2 Hz の整数倍の振動数成分が卓越することがわかる。特に 22 Hz（無次元化振動数 $f'=1$）の整数倍の振動数成分の卓越が著しく、全体的に振動数が増すにつれ振幅が小さくなる様子がわかる。

この複素フーリエ係数の自乗値はハイブリッド計算システム HIDAS 2000E により算出したものである。この処理系のブロックダイヤグラムをFig.2-2-8に示す。

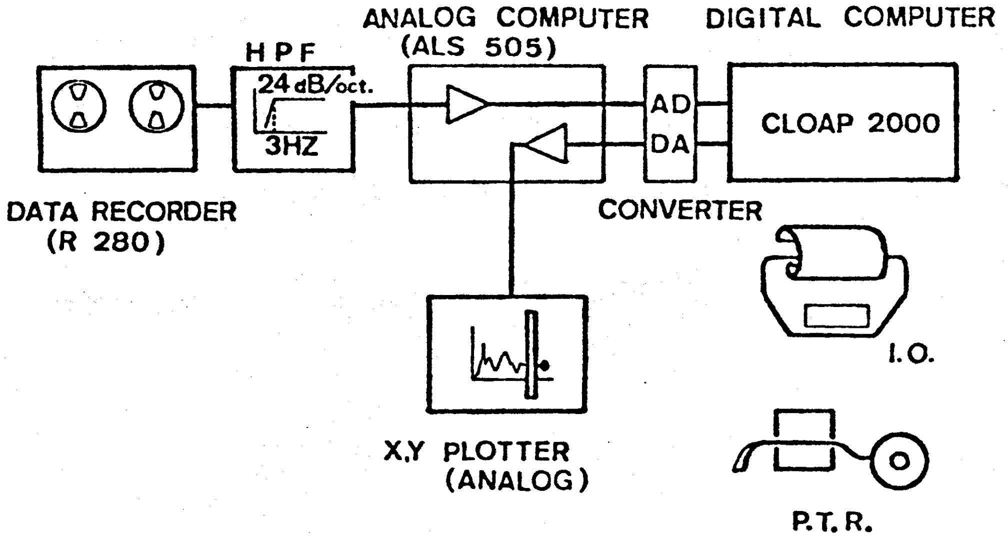


Fig.2-2-8

データレコーダーよりの出力はハイ・パス・フィルター（H.P.F）を通過後アナログ計算機で定数倍されディジタルコンピューターよりのSTM（SENSE TIME）命令で一定時間（0.004sec）刻みにA-D変換され，アキュムレーターを介しディジタルコンピューター内のコアメモリーに記憶される。この後スペクトルを計算しその結果は I.O でハードコピーとして出力される他，再びD-A変換されプロッターにより図化される。

§2-3 測定結果の検討

Fig. 2-2-6, Fig. 2-2-7に示した支承変位は、ピアへの入力に比例すると考えられる。この特性を知る為には、車輪より軌道に入力される力が解明されなければならない。しかし、この力の測定は種々の制約で困難であり、手許にそのデータがない。従ってこれを定荷重が新幹線車輌の車軸間隔で走行するものとすると、測定値に見られた卓越振動の発現を巧妙に説明できる。一つの車輪、すなわち一つの定荷重が走行したときの支承反力を $p(t)$, 全車輪が走行したときの支承反力を $P(t)$ とおくと、

$$P(t)=\sum_{j=1}^{n} p(t-\Delta t_j) \qquad \text{----(2-3-1)}$$

と表現される。Δt_j は最初の車輪が通過してから j番目の車輪が通過するまでの時間であり $\Delta t_1=0$ である。また n は新幹線車輌の全車軸数で、一車輌に4軸，全車輌数が16輌であるので，nは64となる。フーリエー変換を $\mathcal{F}$ で表現すると(2-3-1)式のフーリエー変換は

$$\mathcal{F}(P(t))=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} p(t-\Delta t_j)\cdot e^{-i\omega t}\,dt$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} p(t-\Delta t_j)\cdot e^{-i\omega(t-\Delta t_j)}\cdot e^{-i\omega\Delta t_j}\,d(t-\Delta t_j)$$

$$=\sum_{j=1}^{n} e^{-i\omega\Delta t_j}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} p(t_j)\cdot e^{-i\omega t_j}\,dt_j \qquad \text{但し } t_j=t-\Delta t_j$$

$$=\sum_{j=1}^{n} e^{-i\omega\Delta t_j}\cdot\mathcal{F}(p(t)) \qquad \text{----(2-3-2)}$$

となる。ここで $\sum_{j=1}^{n} e^{-i\omega\Delta t_j}$ を仮りに重み関数 (weighting function)

と称し W と表記する。つまり

$$W(f\cdot \ell/V)=\sum_{j=1}^{n} e^{-i\omega\Delta t_j} \qquad \text{----(2-3-3)}$$

となる。( )内の $f\cdot\ell/V$ は，既に Fig 2-2-7 で用いた無次元化振動数で，f は振動数，ℓ は固定軸距（2.5 m），V は列車速度である。新幹線の車軸配置（Fig. 2-3-1）を想定し，重み関数を計算したものを Fig. 2-3-2 に示す。横軸には無次元化振動数 $f'(=f\cdot\ell/V)$ とともに V＝55 m/s（＝200 Km/h）としたときの振動数 f も併記する。縦軸は重み関数 $W(f\cdot\ell/V)$ の絶対値である。この図は測定データに見られた卓越振動数をよく説明する。重み関数の絶対値は無次元化振動数が 0，1，2，3，--- と整数値をとった時，64 となり最大になる。これは Fig 2-3-1 の新幹線車輌の車軸配置を見れば明らかなように，任意の 2 つの車軸間距離の最大公約数が固定軸距に等しい 2.5 m であることに依る。列車速度 V，固定軸距 ℓ（＝2.5 m）を用い Δt_0 を

$$\Delta t_0=\ell/V \qquad \text{----(2-3-4)}$$

と定めると（2-3-3）式のエクスポネンシャルの肩の Δt_j は j の如何にかかわらず Δt_0 の整数倍になる。即ち

$$\Delta t_j=m\cdot\Delta t_0=m\cdot\ell/V \qquad \text{----(2-3-5)}$$

となる。m は 0 を含む整数である。（2-3-5）式を（2-3-3）式に代入すると

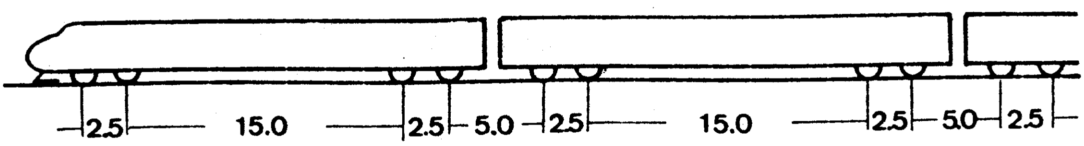


Fig. 2-3-1 新幹線車輌の車軸配置

f ； 振動数

l ； 固定軸距

v ； 列車速度

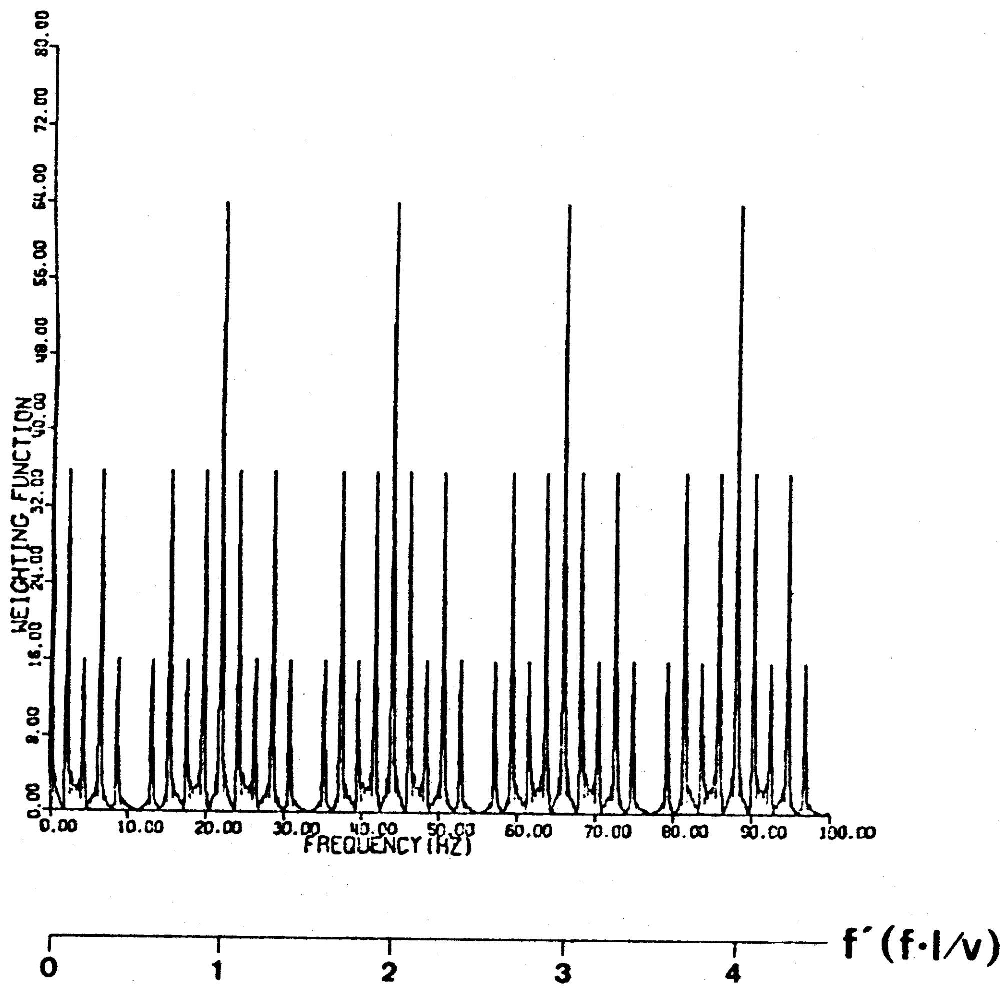


Fig. 2-3-2 重み関数の絶対値

$$w(f\cdot\ell/v)=\sum_{j=1}^{n} e^{-i\cdot 2\pi f\cdot m\ell/v}$$

$$=\sum_{j=1}^{n} e^{-2\pi i\cdot m\cdot f\ell/v} \qquad \text{----(2-3-6)}$$

となる。さらに $f\cdot\ell/v$ なる無次元化振動数が整数の場合，$m\cdot f\ell/v$ も当然整数になり

$$w(f\cdot\ell/v)=\sum_{j=1}^{n} 1$$

$$=n=64 \qquad \text{----(2-3-7)}$$

となることがわかる。

次に (2-3-2)式の $\mathcal{F}(p(t))$ であるが，これを支配する要因としては桁の曲げ剛性，単位長さ当たりの重量，スパン等が考えられ，解析的にこれを求めるにはモーダルアナリシスが有効である。このモーダルアナリシスに依る一車軸走行時の支承変位，及び支承反力の計算値は Fig.2-3-3 に示す。計算上の仮定は以下のとおりである。

(1) 桁はベルヌイ・オイラー梁とする。

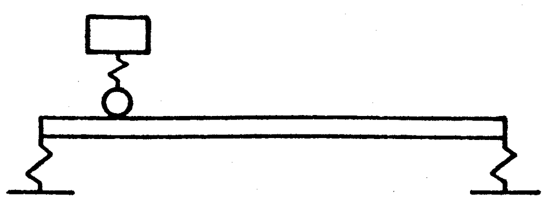
(2) ピア，地盤系は剛体で不動とする。

(3) 支承部は線形のバネとする。

(4) 車体の重量は各車軸に等分し，線形のバネを介し車軸に支えられるものとする。また車軸及び車輪の重量は無視する。

(5) 計算に用いるモードは5次までとする。

次にこのモデルの概形を示しておく。



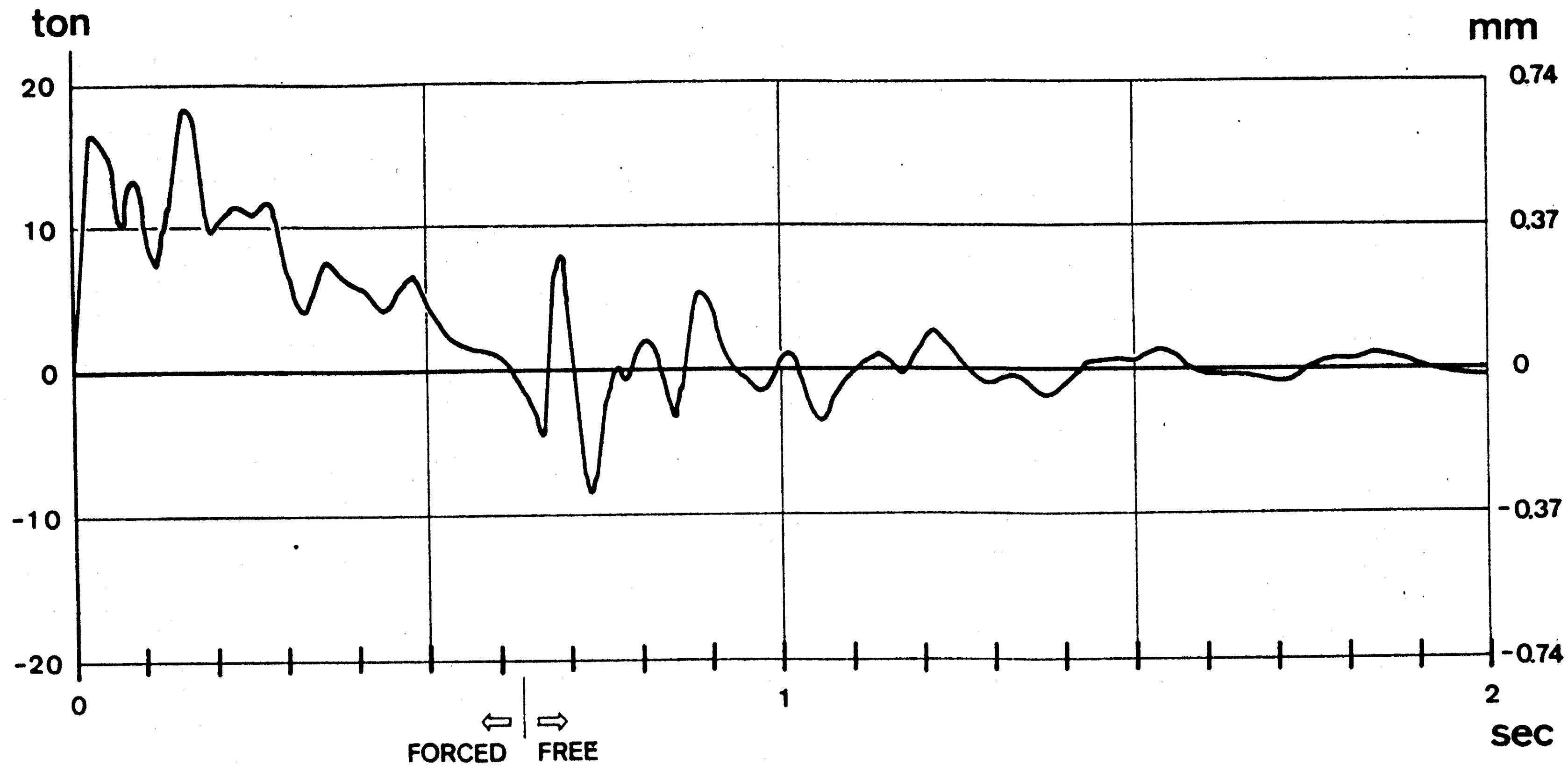
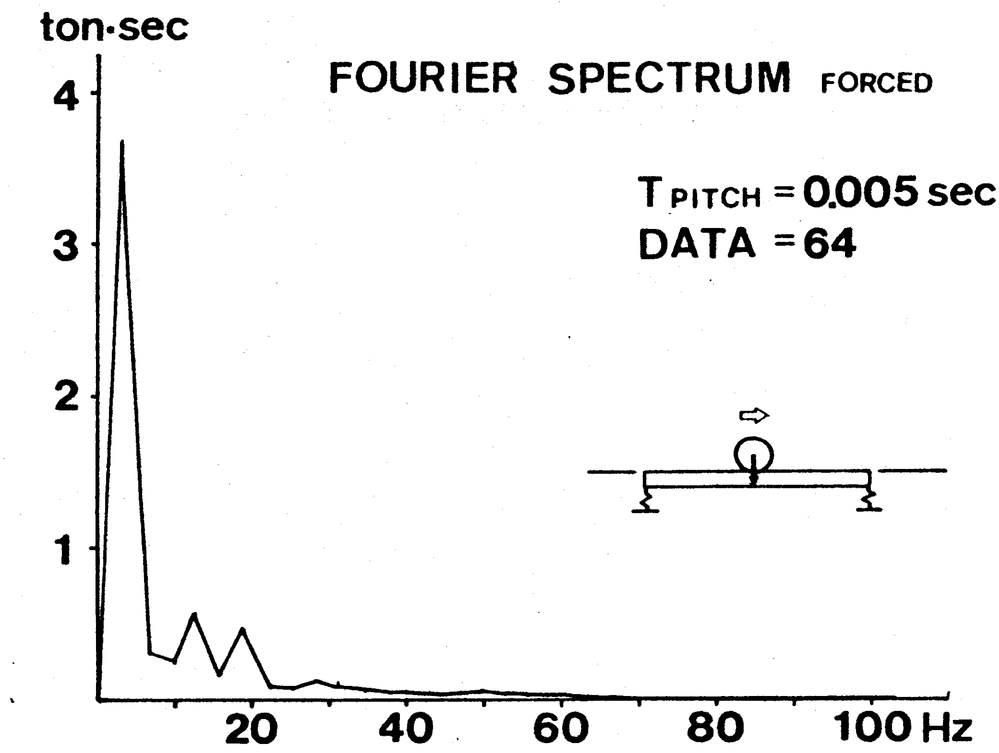


Fig. 2-3-3 モーダルアナリシスによる一車軸通過時の
支承反力及び支承変位の計算値



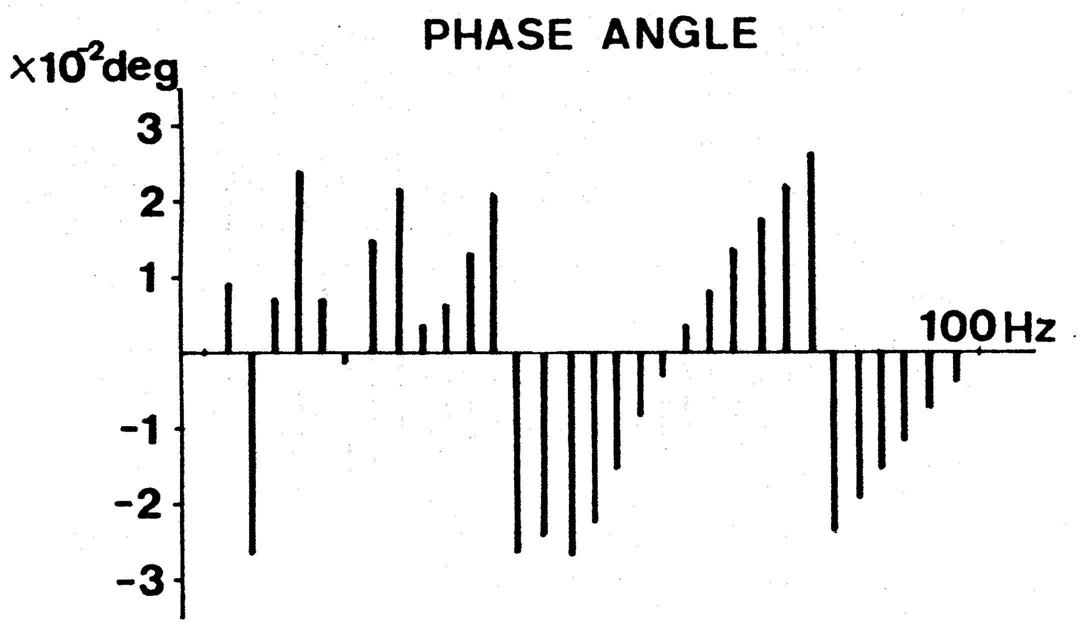
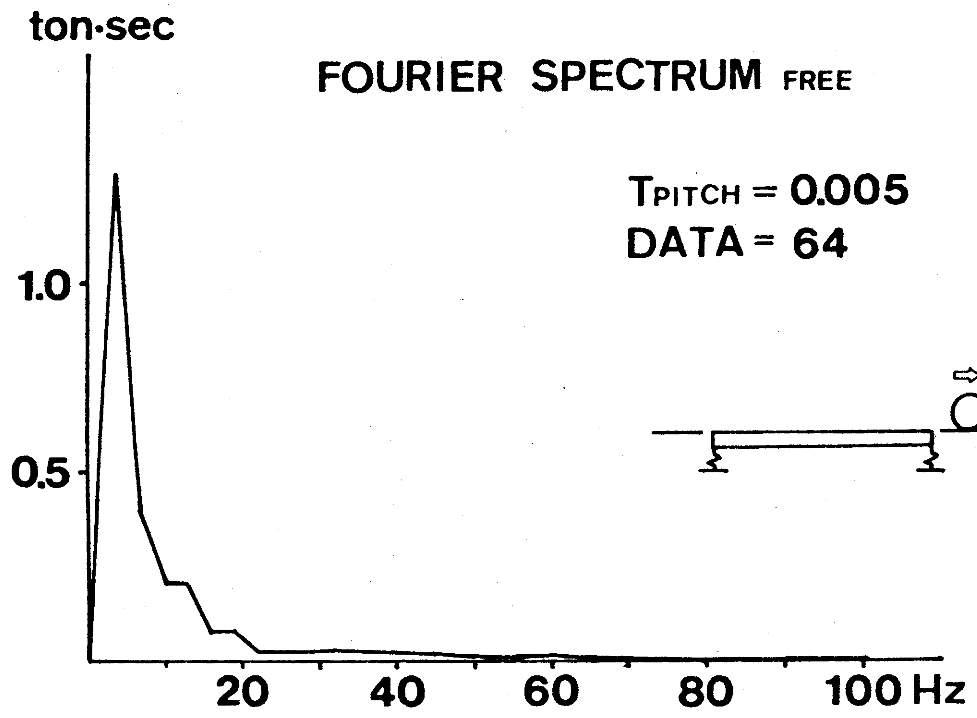


Fig. 2-3-4 車軸が桁上に存在する時の支承反力(計算値)の
フーリエースペクトル



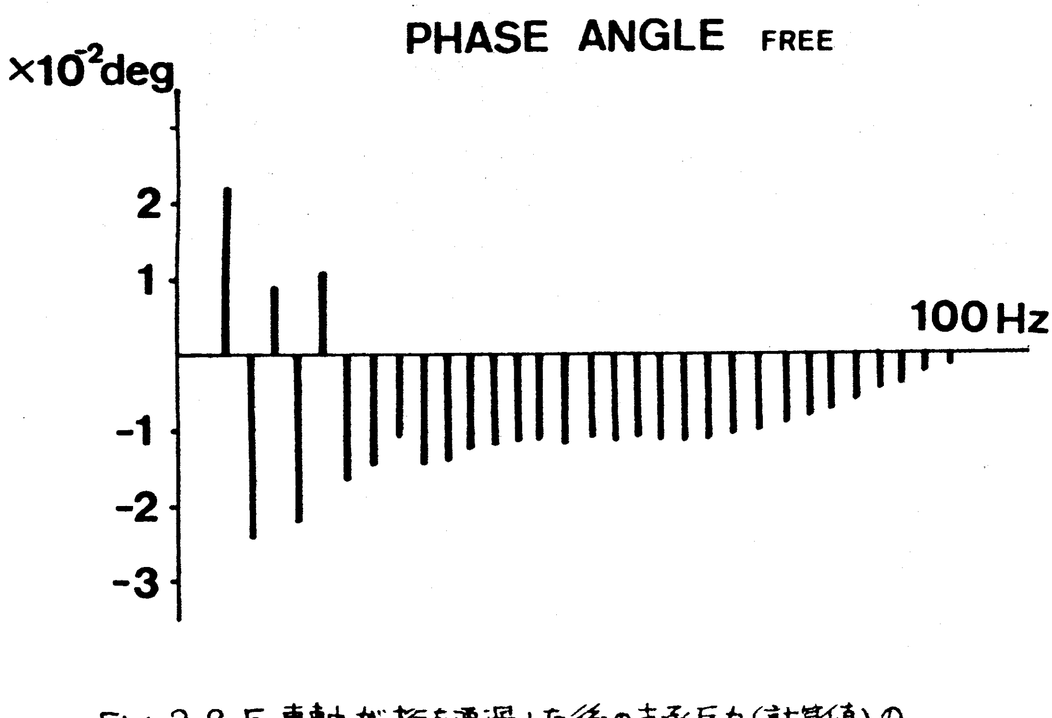


Fig. 3-2-5 車軸が桁を通過した後の支承反力(計算値)の
フーリエースペクトル

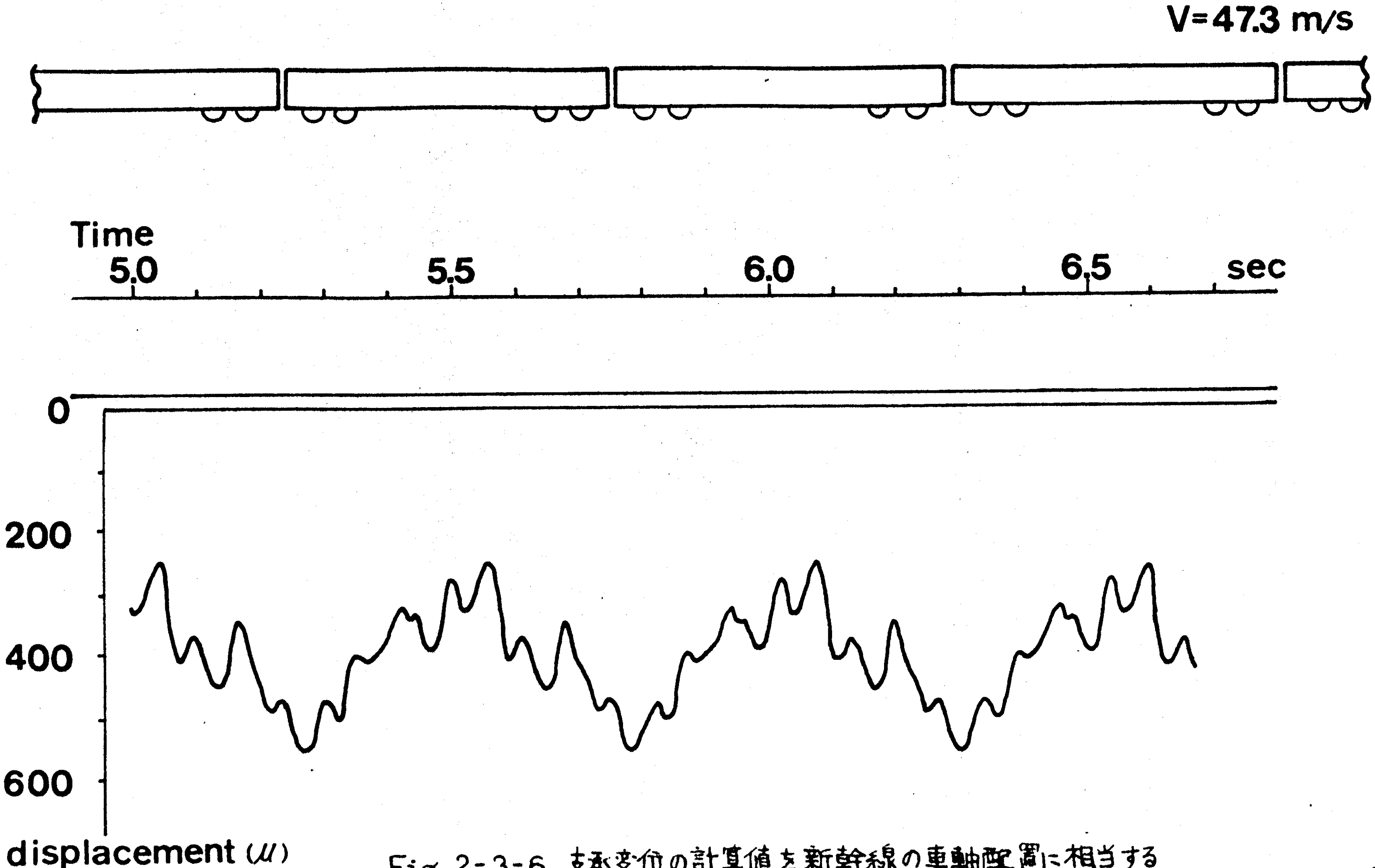
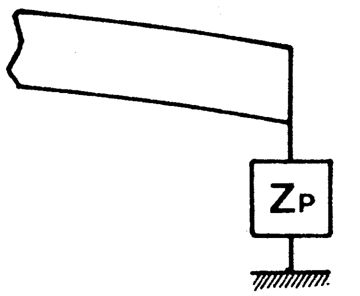


Fig. 2-3-6 支承変位の計算値を新幹線の車軸配置に相当する
時間差だけずらして重ね合わせたもの

Fig. 2-3-3の支承変位のフーリエースペクトルをFig. 2-3-4，Fig. 2-3-5に示す．Fig. 2-3-4ではサンプリングタイムが0.32秒で，この間に車軸は桁上を走行する．Fig. 2-3-5においては車軸が桁を通過した後にサンプリングを開始している。ともに振動数が増すにつれてスペクトルの絶対値は減少していく。この支承変位（Fig. 2-3-3）を新幹線の車軸配置に相当する時間差だけずらして重ね合わせたものをFig. 2-3-6に示す。これは支承変位の実測値（Fig. 2-2-6 (a)）とよく一致する。この手法では，各車軸が桁に進入する時点における，車軸上の質量の位置速度の初期条件を，最初の車軸が桁に進入する時点のそれとすべて等しくおくことになるが，このことは計算結果に大きな差異を与えないようである。

このようにモーダルアナリシスによる支承反力の解析解は，測定された支承の変位から換算した支承反力とよく一致する．しかし支承のバネ定数が小さいということにより，この観測された支承反力は，鉄道のような一般的な高架橋の支承反力と，低周波領域を除いては，かなり性格を異にすることを考慮に入れておかなければならない。一般に梁を伝播する曲げ波が，Z_pなるインピーダンスにより支持された端点で反射した場合，反射波の振幅の



入射波の振幅に対する比 r は

$$r = \frac{Z_B - Z_P}{Z_B + Z_P}$$

と与えられる。Z_B は桁の曲げに関する特性インピーダンスで，桁の曲げ剛さを EI 桁材の比重を γ，桁の断面積を A，重力加速度を g とすると

$$Z_B = i \cdot EI \cdot \left(\frac{\gamma \cdot A}{EI \cdot g}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \omega^{\frac{3}{2}}$$

と表現される。在来線高架橋の PC 4主桁を想定した場合 Z_B 中の $EI\left(\frac{\gamma \cdot A}{EI \cdot g}\right)^{\frac{3}{4}}$ は $48.3\ \mathrm{ton \cdot m^{-1} sec^{\frac{3}{2}}}$ という値をもつ。これに対し，Z_P として弾性支承を考慮せずピア・地盤系のインピーダンスを考えた場合，その絶対値は 後に3章の Fig 3-7-4 (pp.100) に示す，ピア 地盤系の加速度応答より，最小値をとる共振振動数においても $1.2 \times 10^8\ \mathrm{ton \cdot m^{-1}}$ という大きな値を持っている。従って 100 Hz 以下の地盤振動で問題となりうる周波数範囲では Z_P の絶対値は Z_B の絶対値に比べ はるかに大きく，桁は ほぼ両端支持梁に等しい挙動を示すと考えられる。また Z_P として弾性支承の影響を考慮した場合，Z_P は ほぼ支承のバネ定数 26800 $\mathrm{ton \cdot m^{-1}}$ に等しく，10Hz で Z_B の絶対値は Z_P の絶対値を越してしまう。従ってこれ以上の振動数領域で一般的な鉄道の支承反力を論ずる場合には，新たに両端支持，あるいは ピア 地盤系の持つインピーダンスを境界条件においた モーダル アナリシスを実行する必要がある。

モーダル アナリシスでは，このように 支承以下，ピア・地盤系のインピーダンス，桁の曲げ剛さ，スパン等 様々な要素を変えて 桁の挙動を解析することが可能であるが，これらの各因子が個別に支承反力に及ぼす影響がいまーつ釈然としない。そこで これらの諸因子のうち 高架橋のスパンに焦点を絞り これが支承反力に与える影響に関して考察を進めることにする。

そこで仮りに一車軸走行時の支承反力を Fig. 2-3-7の破線のように

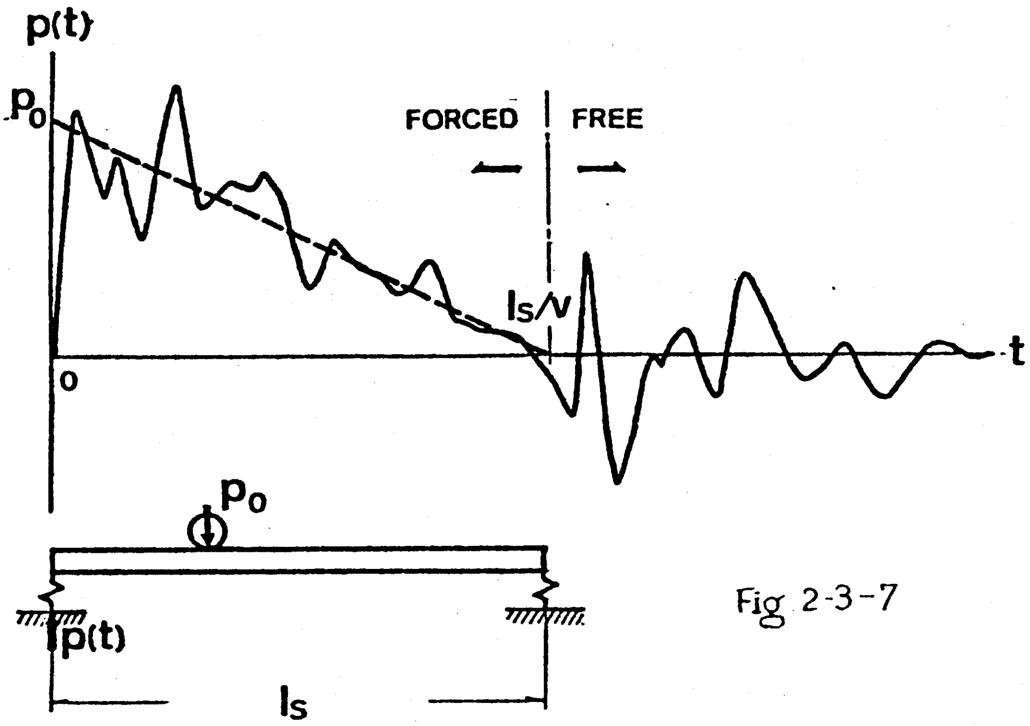


Fig 2-3-7

$$p(t) = \begin{cases} -\dfrac{p_0 \cdot V}{\ell_s}(t - \ell_s/V) & 0 \leq t \leq \ell_s/V \\ 0 & t<0 \quad \ell_s/V < t \end{cases}$$

----(2-3-8)

とおく。これは支承のバネ定数を無限大とし，桁に関しては，その質量を0とするか．曲げ剛性を無限大としたことを意味している。このp(t)のフーリエー変換値は

$$\mathcal{F}(p(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= -\frac{p_0 \cdot V}{\ell_s} \cdot \int_0^{\ell_s/V} (t - \ell_s/V) \cdot e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \frac{p_0\cdot l_s}{V}\left[\frac{-i}{\left(\frac{\omega\cdot l_s}{V}\right)} + \frac{\left(1-e^{-i\left(\frac{\omega\cdot l_s}{V}\right)}\right)}{\left(\frac{\omega\cdot l_s}{V}\right)^2}\right] \qquad \text{----(2-3-9)}$$

となる。これを見ると支承反力のフーリエースペクトルは ω に反比例する項と ω^2 に反比例する二項の和で表現されている。 $\frac{\omega\cdot l_s}{V}<1$ の範囲では (2-3-9)式の右辺の第二項が支配的だが $\frac{\omega\cdot l_s}{V}>1$ では第一項が支配的になる。山陽新幹線高架道橋の場合、スパンが 35.2 m であり $V=55 m/s$ (200 km/h) とすれば 0.25 Hz を境に支配的な項が異なることになる。(2-3-9)式の絶対値を $p_0\cdot l_s/V$ で割り無次元化したスペクトルを Fig. 2-3-8 に示す。

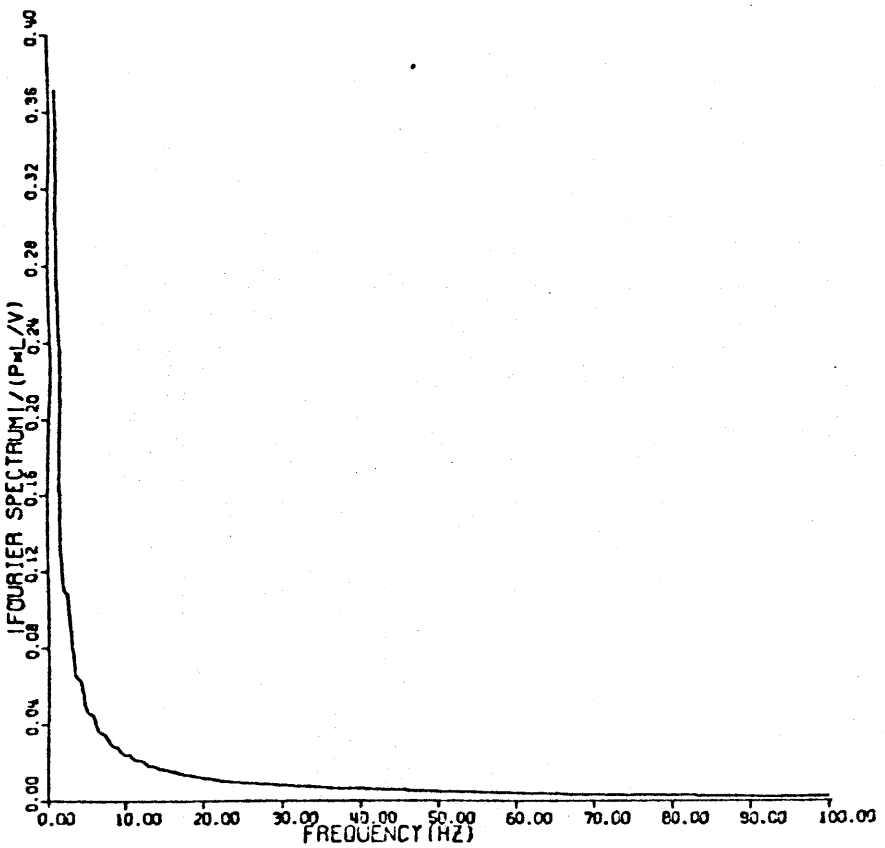


Fig. 2-3-8 式(2-3-9)の絶対値／$\left(\frac{p_0\cdot l_s}{V}\right)$

(2-3-9)式を(2-3-2)式に代入して得られた $\mathcal{F}(P(t))$ の絶対値を $p_0 \cdot l_s/V$ で割り無次元化したスペクトルを Fig. 2-3-9 に示す。これは Fig. 2-3-8 の $\mathcal{F}(p(t))/(p_0 \cdot l_s/V)$ に Fig. 2-3-2の重み関数をかけたものに相当する。この Fig. 2-3-9 を見ると，重み関数のピークに相応する卓越振動数成分が振動数が増すにつれ双曲線状に小さくなっていく様子がわかる。なおこのスペクトルは 0.1 Hz きざみにディジタル X-Y プロッターに書かせたものであるが，低振動数成分がきわめて大きい（0 Hz 成分は無限大）為 0.8 Hz よりのスペクトル値を図化している。

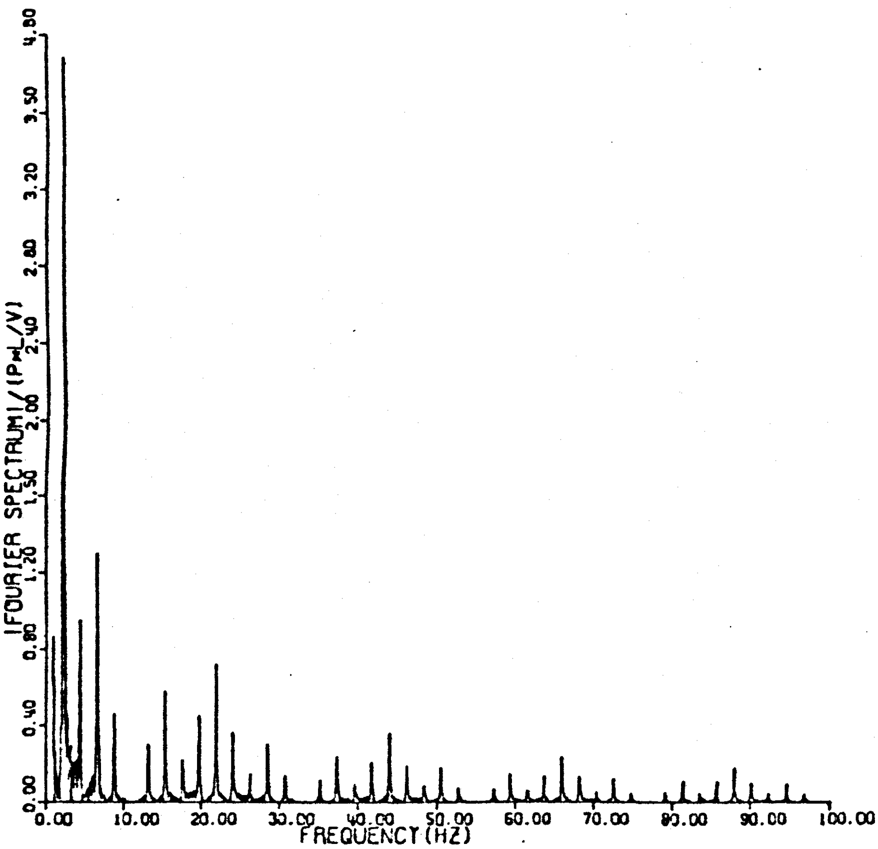


Fig. 2-3-9 $|\mathcal{F}(p(t))| \times W1$
(2-3-9)式　(重み関数 Fig 2-3-2 pp 17)

また この無次元化されたフーリエ・スペクトルの絶対値(Fig. 2-3-9)の自乗値をFig. 2-3-10に示す。これと支承変位測定値の複素フーリエ係数の絶対値の自乗値(Fig. 2-2-7)とを比較すると、その形状は互いによく似ているものの2.2Hz成分に関しては、測定された支承変位のスペクトルの自乗値の方がかなり小さい。これは実測値をA-D変換する際バイアスを除く目的で切断周波数3Hz 減衰性能24dB/octのハイ・パス・フィルターを用いた為であると考えられる。このフィルターの特性を考慮してFig. 2-3-10に修正を加えたものをFig. 2-3-11に示す。

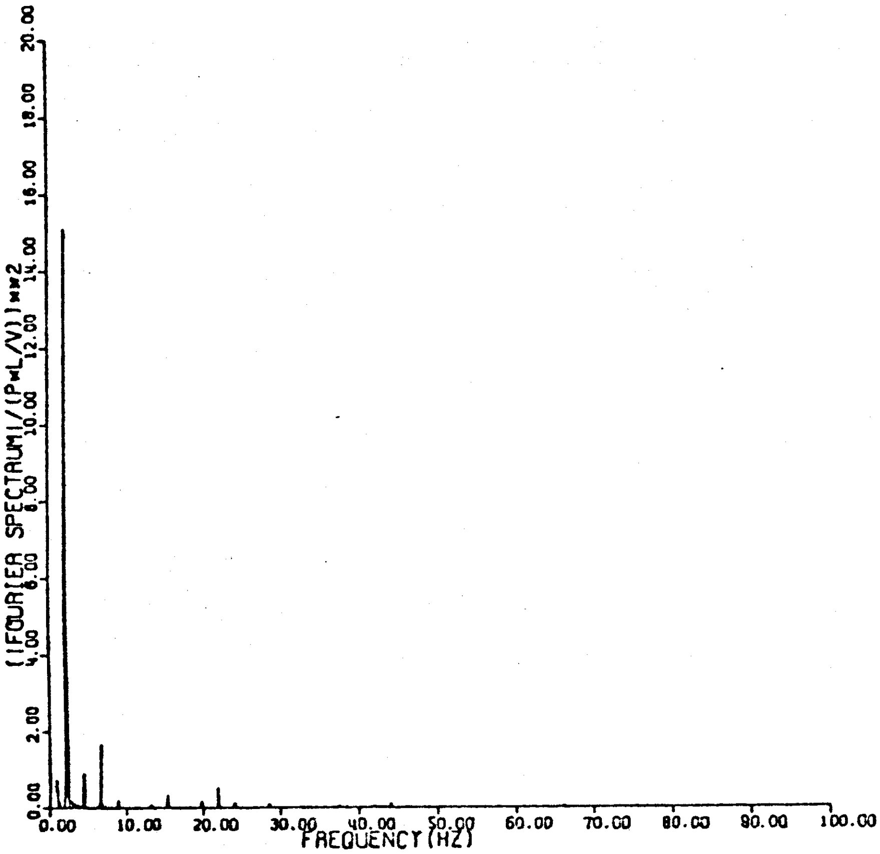


Fig. 2-3-10 $[|\mathcal{F}(P(t))|/(\frac{P_0 l}{V})]$の自乗値
(Fig. 2-3-9)

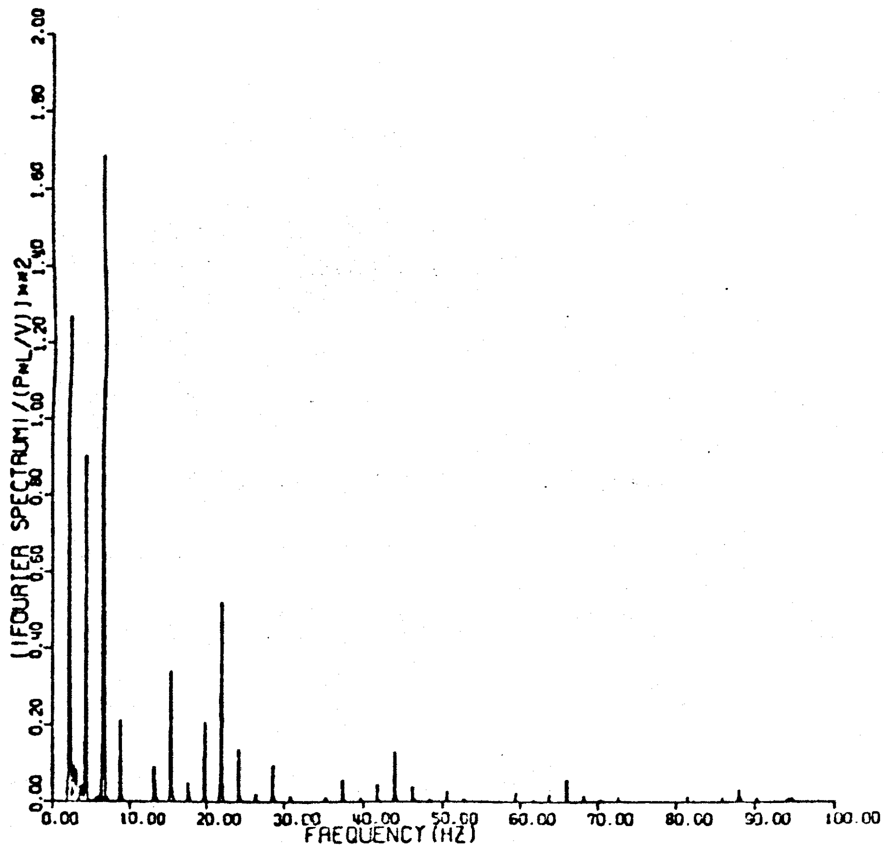


Fig. 2-3-11 ハイパスフィルターの特性を考慮した
$[|\mathcal{F}(P(t))|/(\frac{P_0 l}{V})]^2$の修正値

§2-4 橋脚間隔が橋脚への入力に及ぼす影響

前節までは支承反力のみの検討であるが、最終的にはピアに入力される力に触れておかなければならない。ピア上には上り下り各軌道に対し二組ずつの支承を載せているので、一車軸が走行した時ピアに入力される力 $p(t)$ は (2-3-8) 式にならい

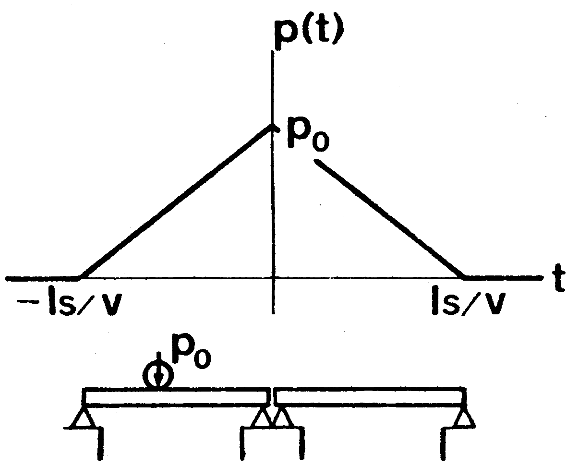


Fig. 2-4-1

$$p(t)=\begin{cases}\dfrac{p_0 V}{\ell_s}(t+\ell_s/V) & -\ell_s/V<t\leqq 0\\ \dfrac{p_0 V}{\ell_s}(t-\ell_s/V) & 0<t\leqq \ell_s/V\\ 0 & t\leqq -\ell_s/V,\ \ell_s/V\leqq t\end{cases}$$

----(2-4-1)

と表現する。このフーリエ変換は

$$\mathcal{F}(p(t))=\frac{p_0\cdot\ell_s}{V}\left[\frac{\sin\left(\frac{\omega\ell_s}{2V}\right)}{\left(\frac{\omega\ell_s}{2V}\right)}\right]^2 \qquad \text{----(2-4-2)}$$

となり、この概形をFig. 2-4-2にプロットする。$\frac{\omega\ell_s}{2V}=n\pi$ のときには、$\mathcal{F}(p(t))=0$ となることは、(2-4-2)式より明らかである。(2-3-3)式で定義された重み関数はFig. 2-3-2に示すように、列車速度200km/hのとき2.2Hzの整数倍に卓越振動数が出現する為、$\frac{\omega\ell_s}{2V}\left(=f\cdot\frac{\ell_s}{V}\right)$ にこの2.2Hzを代入した時、$\frac{\omega\ell_s}{2V}=n\pi$ となれば橋脚へ入力される力には2.2Hzの整数倍の卓越振動数成分は存在しなくなる。この場合、橋脚間距離 ℓ_s は車輌長25mの整数倍になる。仮に $\ell_s=25$m

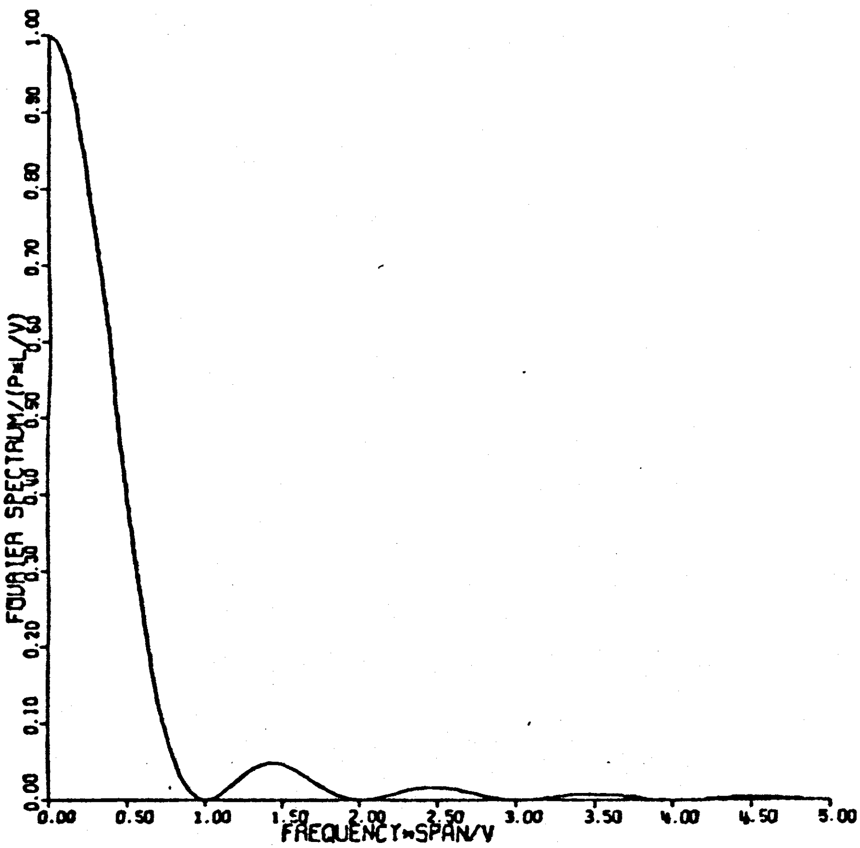


Fig. 2-4-2　(2-4-2)式／($\frac{P_0 \ell}{V}$)

とし、以上のことを周波数領域から時間領域に移し換えると、Fig.2-4-3に示すように個々の車軸の走行による橋脚への入力(実線)を加え合わせた P(t)(破線)が、静的載荷のような形状を示すことを意味している。このような現象が、実際の高架橋で発現するのであれば、防振対策上大きな示唆を与えるものと考える。

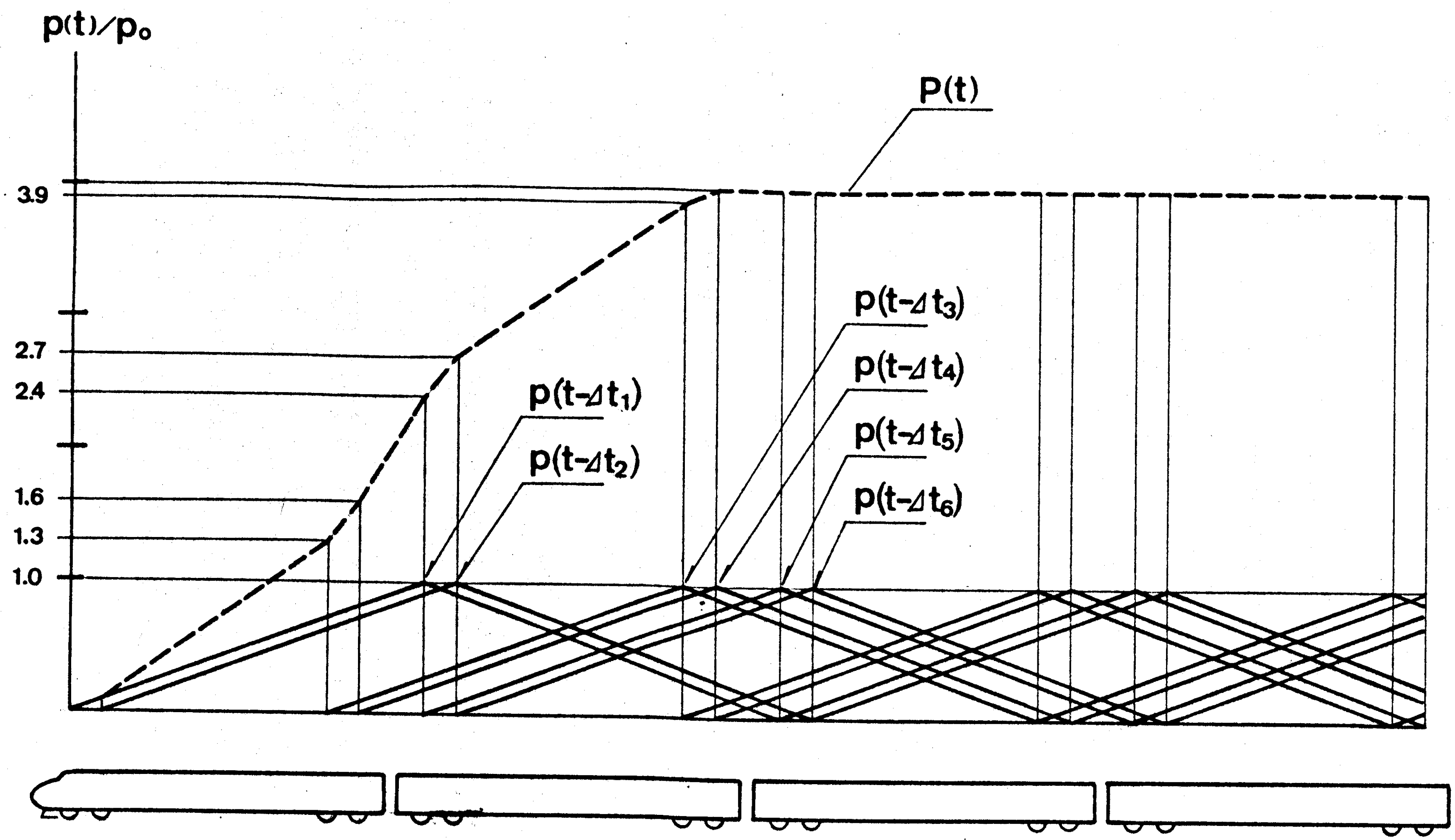


Fig. 2-4-3 桁の曲げ剛性及び支承のインピーダンスが無限大の場合の橋脚への入力

Ch3　橋脚加振に伴う地盤振動伝播

§3-1　はじめに

前章で触れたように，高架橋橋脚への入力の特性が把握できたので，次に橋脚加振に伴う地盤振動の発現のメカニズムを解明する必要がある。本章で取り扱う対象は §1-2 で述べたように，半無限弾性体もしくはその上に一様な厚さの表層を載せたと考えられる平坦な地盤上の，杭基礎に支持されたピアに限定する。

§3-2　既往の研究

従来この問題に関するシュミレーションモデルとしては，有限要素法が多用されるか，三次元弾性波としてエネルギー的に最も大きく寄与しているレーリー波だけで地表の振動を追跡するといった手法のみ用いられていた。有限要素法は複雑な基礎構造，層構造を持つ対象に対し，フレクシブルな応用が可能であり利点も大きいが，次のような欠陥を持っていると考えられる

(1) 反射波が起こらないような系の境界条件としてのインピダンスは，本来周波数の関数であり，これを計算のつど設定するのは大変な労力を要求される。

(2) 衝撃的な入力の場合，反射波の影響を小さくする手法としては，扱う系を大きくし，反射波の到達時間を遅らせる等の方法が考えられるが，要素数の増大は計算誤差を累積させる。また要素数は増やさず，各要素の大きさを増せば，波長の短いものは取り扱えなくなってくる。まして，衝撃的な入力のように高周波成分を含む問題においてはなおさらである。

田村，中村[1](1976)は(2)の欠陥に対し，境界条件が固定と自由という正反対の二つの系に対し有限要素法を用い，その解の重ね合わせで第一次の反射波を打ち消すという手法を提案した。この手法により応答を求め得る時間の制約は緩くなり，見掛け上モデルを拡張することができる。しかし，第二次以上の反射波に関してはこの限りでなく，ここにこの手法の限界がある。新幹線高架橋周辺の地盤振動の場合，入力の継続時間は極めて長く，この手法を用いることは適切でない。また波動の伝播をモーダルアナリシスを用いて解析しているため，各振動モードの計算誤差による波動の分散(dispersion)が発現するのではないかと懸念される。

また地表の振動をすべてレーリー波の寄与として解析する手法は，その根拠をLamb, H.[2](1904)からMiller, G.F., & H., Persey[3](1955)に至る一連の弾性波動論に求めている。Lamb, H.[2](1904)は半無限等方弾性体の表面の一点を法線方向に正弦加振した時の弾性体内の変位を解いた。この解は複雑な複素積分の形(Appendix 1 (A-1-1)~(A-1-3)式)で表現されるが，Miller, G.F., & H., Persey[4](1954)により加振点よりの距離Rの大きい所での近似式が示された。これは最大傾斜線法を用いて得られたもので実体波(P波，S波)は加振源を中心に半球状の波頭となり$1/R$に比例する距離減衰で逸散していき，またレーリー波は加振源を中心に円筒状の波頭となり，円筒の半径をrとすると$1/\sqrt{r}$の距離減衰で逸散していることを示した。さらにMiller, G.F., & H., Persey[3](1955)は，この時P波，S波，レーリー波に分担されるエネルギーの比が，ポアソン比0.25の場合，P波7%，S波26%，レーリー波67%となり，半無限等方弾性体表面の一点を法線方向に加振した時，レーリー波の影響が遠方では最も大きいことを示した。さらにポアソン比を変えて，数値計算したものをFig. 3-2-1に示す。この計算はMiller, G.F., & H., Persey[3]

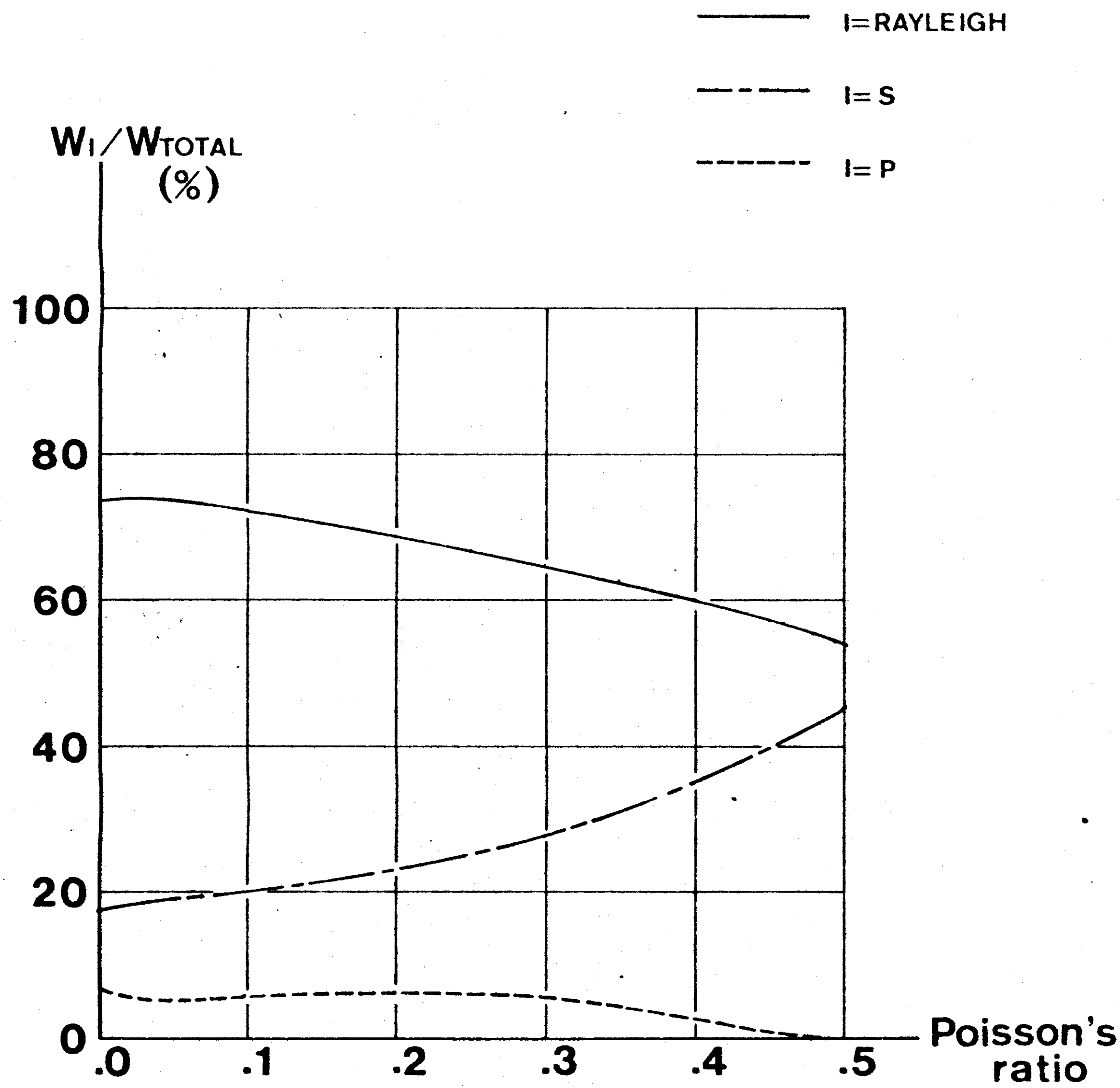


Fig. 3-2-1 **Partition of energy between elastic waves**

(1955)の示した手法により、東大大型計算機 HITAC 8700－8800を用いて実行したものである。多くの地盤はポアソン比が0.4以上であり、レーリー波に分担されるエネルギーの比率はポアソン比の増加と共に減少する。しかし、地表面においては実体波の距離減衰は$1/R^2$に比例し、依然レーリー波の寄与が支配的である。

以上の理由から、高架橋からの距離が十分大きい地点の振動をすべてレーリー波の寄与として解析する手法は妥当であると考えられる。また状況に応じては、層構造に起因するレーリー波の分散を組み入れることも可能である。しかし、加振点から地表の着目点までの距離が波長に比べ短い所では、レーリー波の影響は小さく、この手法は適当ではない。特に新幹線走行時に励起される2.2Hz 等の振動数では、仮に軟弱な地盤を想定しそこでのS波速度が50～100 m/s としても、一波長は25m以上となり、新幹線沿線のかなりの地域がその中に含まれる。

以上のように、有限要素法，並びにレーリー波による近似法のいずれも本論文で対象とする高架橋周辺地盤の振動を検討するには不向きであり、新しいシミュレーションモデルが必要になると考える。

§3-3 動的な相反定理

一般に地中構造物の加振に伴う地表の振動は，その構造物が地盤に及ぼす応力分布が既知であれば，この重みを地中の点加振に伴う地表の着目点の変位の解に乗じ，総和をとることで求めることができる。従って地中の一点加振に伴う地表の変位を求める必要がある。

仮に地盤を半無限弾性体とすると，弾性体内加振に伴う表面上の点の変位は解析的に求めることが可能であるが，この結果は相反定理を動的な領域に拡張し，半無限弾性体表面の点加振に伴う弾性体内の変位の解（Lamb[2]（1904），妹沢[5]（1929））を以ってして代用できることを示している。

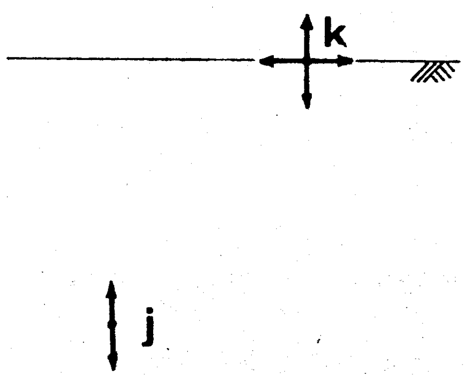


Fig.3-3-1

半無限弾性体内の一点を鉛直方向に加振する場合を例にとると，Fig.3-3-1に示すように j点に鉛直方向に振動的集中荷重 $e^{i\omega t}$ が加わった時の k点の鉛直方向変位は，k点に鉛直方向に $e^{i\omega t}$ なる力を加えた時の j点の鉛直方向変位に等しく，また j点に鉛直方向に振動的集中荷重 $e^{i\omega t}$ が加わった時の k点の水平方向変位は，k点に水平方向に $e^{i\omega t}$ なる力を加えた時の j点の鉛直方向変位に等しくなる。

§3-4 杭基礎加振時の周辺摩擦力及び先端支持力

3-4-1 伯野(1977)の杭基礎アドミッタンスシミュレーションモデル

地中の点加振に伴う地上の変位を算出できるとすると，杭基礎の周辺摩擦力分布，及び先端支持力を求める必要が生ずる。従来杭基礎の水平方向加振時の応答に関しては Penzien[6] の方法等が存在したが，この手法の欠点として波動の逸散による影響を定性的に考慮できないことが挙げられる。Penzien は地盤のコンプライアンスとして，半無限等方弾性体内の一点に水平に集中荷重を加えた時の変位解，いわゆる Mindlin の解を利用したが，これを動的な点加振に伴う変位解で置き換えた手法が伯野[7](1977)により提案された。これは動的な Penzien の手法ともいうべきものである。橋脚加振時の地盤振動は鉛直方向に加振され発現する成分も大きいと考えられるので本論文では伯野のアイデアを踏襲し，新たに杭基礎の鉛直方向アドミッタンスのシミュレーションモデルを作成することにする。

伯野の杭基礎の水平方向アドミッタンス・シミュレーションモデルの概要は以下のとおりである。

(1) 杭は多質点に分割する

(2) 半無限弾性体内の点を水平に加振した時の変位は無限弾性体内の点加振に伴う変位の解 (Lamb (1903)) の鏡像をとることで代用する。(Fig. 3-4-1 (a))

(3) (2)で求まる変位の解を $w(r, z, \omega)$ と書くとコンプライアンスマトリックスの要素 W_{jj} (j番目の質点を絶対値1の力 $e^{i\omega t}$ で加振した時の同じ要素の変位) は $w(0, R_0, \omega)$ で表現する。但し R_0 は杭の半径である。また W_{ij} $(i \neq j)$ は i点と j点の中心間距離を r_{ij} とした場合 $w(r_{ij}, R_0, \omega)$ で表現する。(Fig 3-4-1 (b))

以上の概要を概念的な図に示すと以下のようになる。

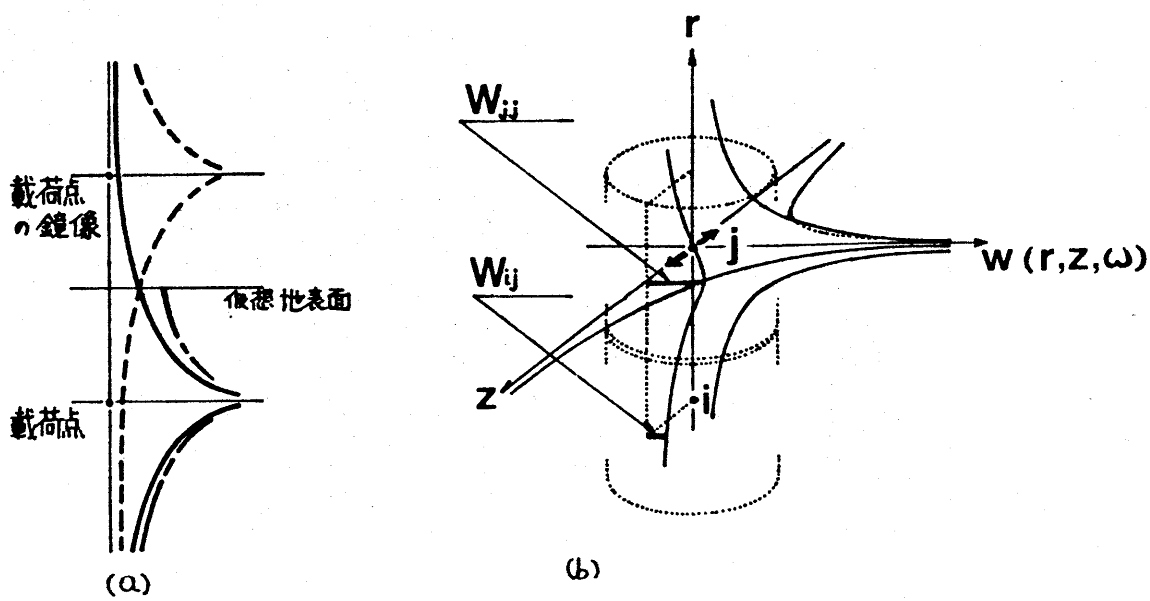


Fig. 3-4-1　伯野のモデルにおけるコンプライアンス

この伯野のモデルを用いて実際のPC杭の杭頭変位応答を計算した値と，測定値との比較をFig. 3-4-2 及び Fig. 3-4-3に示しておく。このPC杭は埼玉大学構内に打ち込まれたもので杭頭水平加振時の杭の挙動の測定は同大学，建設基礎工学科の町田研究室において行なわれた。この杭は次項で触れる杭の鉛直方向アドミッタンスのシミュレーションモデルを検証する為の測定でも用いたので，杭の諸元や地盤の詳細な様子は §3-5 (pp 72~)を参照されたい。

Fig. 3-4-2 は杭の分割数の影響を見る為のものであり，Fig. 3-4-3は表層(Fig. 3-5-1参照)のS波速度をパラメータとしたときの杭頭変位である。計算された変位応答の共振振動数の方が観測された共振振動数より高いがこれは加振時の地盤内の歪の増大による非線形な挙動の発現の他に地表近くで杭の変位が大きく杭の打ち込まれている穴の拡大が杭と地盤の付着を不完全にしている為とも考えられる。

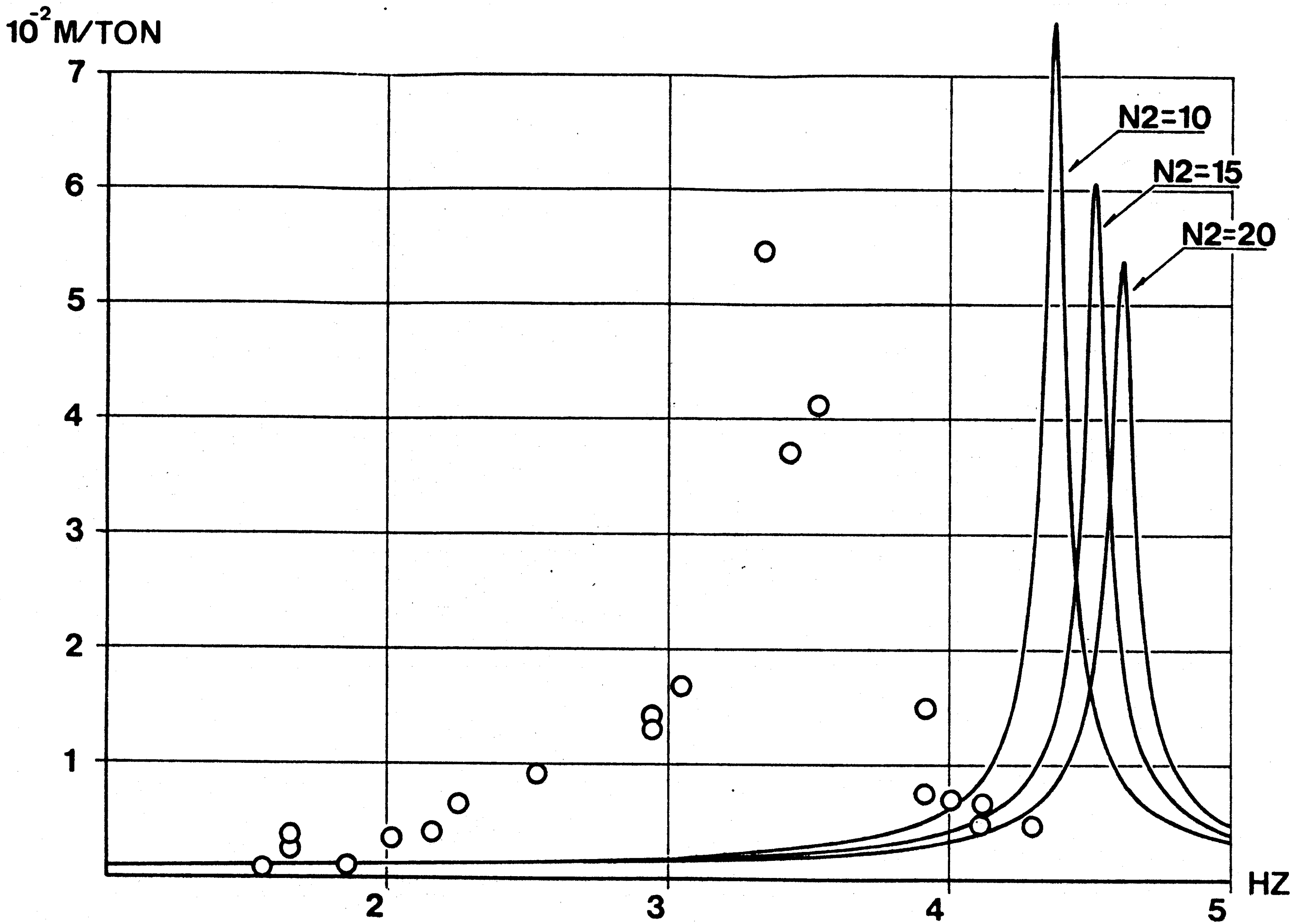


Fig.3-4-2 埼大構内 PC杭の水平方向アドミッタンス（分割数を変えた計算値を示す）

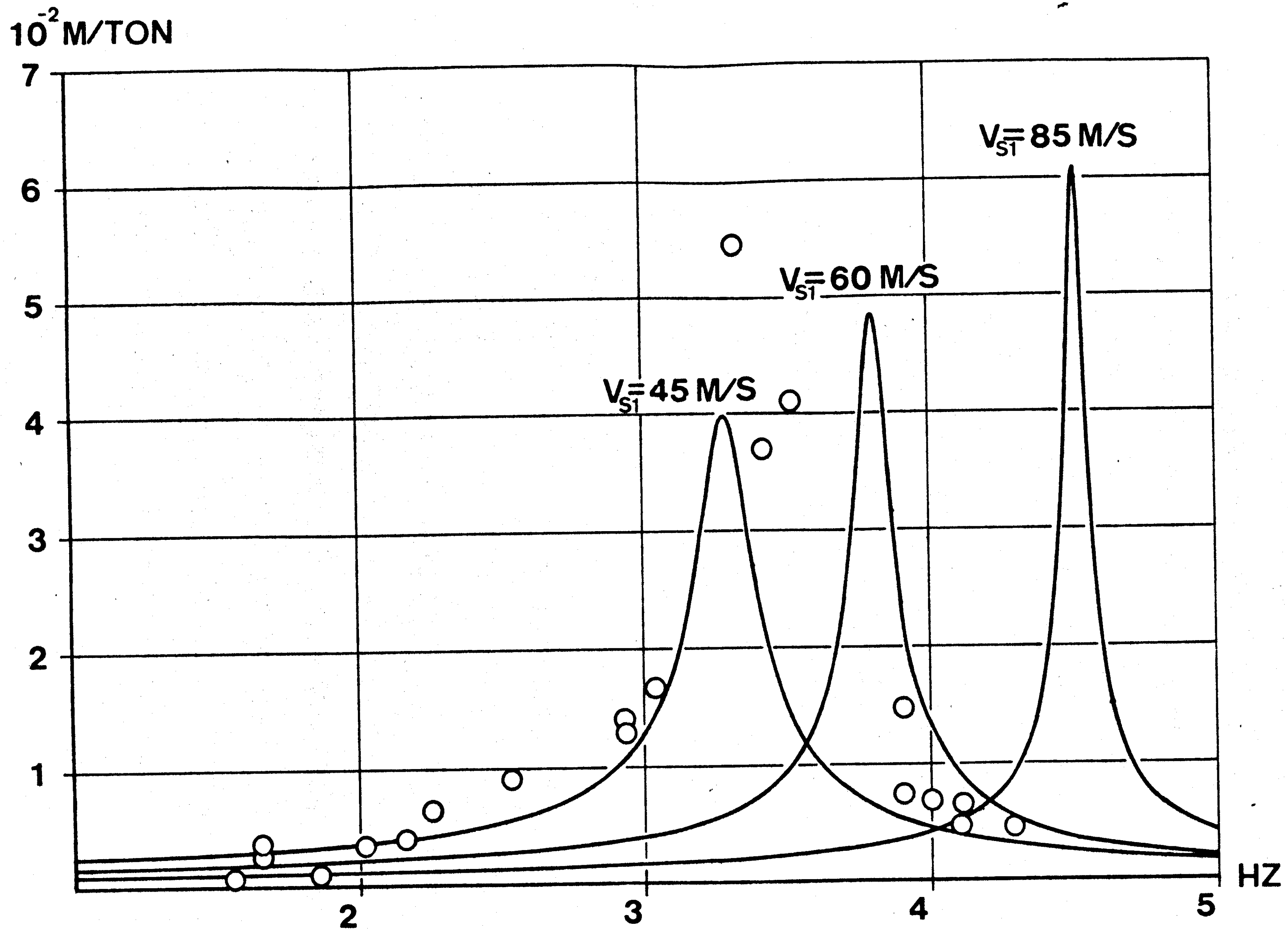


Fig.3-4-3 埼大構内 PC 杭の水平方向 アドミッタンス (表層のS波速度を変えた計算値を示す。)

しかし ここで 測定値と計算値を比較する以前に，モデルの適用上 問題となる点として 以下の諸項目が挙げられる。

(1) 既に前ページの Fig. 3-4-1 (b) に示したような コンプライアンス の決め方では，コンプライアンス マトリックスの要素 W_{jj} は j点の位置が一定であれば 分割数に依存せず常に一定である。これは物理的に不都合である。

(2) 地盤内を伝播する S波の波長に比べ 杭半径の大きい場合は このコンプライアンスは適用すべきでない。それは，加振源である杭要素の中心から半径に等しい距離 離れた点の変位で表現するコンプライアンスが，位相差の面からもその妥当性を失なっているからである。

埼玉大学構内の PC杭は S波速度 85~185 m/s の沖積層に打ち込まれた外径 15 cm の杭であり，高々 10 Hz までの振動数領域しか考えない場合には 上記 (2) の項目は問題にならない。しかし (1) で触れた事項は，杭の形状，地盤の物性，振動数の如何に拘らず常に問題となり，この手法は妥当な分割数を決定する根拠を欠いている。

本論文で取扱う地盤の振動問題では 高架橋橋脚の基礎のような 波長に比べ スケールの大きい構造を対象とする為 (1) のみならず (2) も解決しなければならない事項となる。従って 伯野 のモデルにとらわれない 新しいコンプライアンスを考える必要がある。

3-4-2 杭基礎の鉛直方向加振時のアドミッタンス・シミュレーション モデル

本論文で作成し用いる杭基礎の鉛直方向アドミッタンスのシミュレーションモデルも伯野のモデルと同様，以下の条件を具備するものである。

(1) 杭は多質点系とする。

(2) コンプライアンス マトリックスは波動の逸散を定性的に考慮できるものとする。

但しコンプライアンスの定め方は伯野の方法に依らない。以下本手法の重要なポイントとなるコンプライアンスから論を進めることにする。

◎コンプライアンス

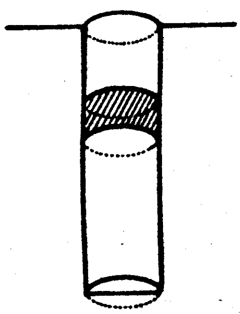


Fig. 3-4-4

本来，杭基礎を多質点に分割しそのアドミッタンスを求める際，Fig. 3-4-4 に示すような地中の孔壁に，分割した杭要素に相応する剛性を持った質量0の円柱（斜線部）をあてがい，これに $e^{i\omega t}$ なる力を加えた時の孔壁の変位をもってコンプライアンスとするのが最も妥当な解を与えるものと思われる。しかしこの厳密解を解析的に求めることは，煩雑な境界条件の為，極めて困難であり，これに代わりうる3つの近似解を考えることとする。

その一つは，無限長の円柱状の孔内の一部に帯状のブーシネスク的な剪断応力を加えこれによる変位を考えるものである。即ち孔内の一部の円筒状の孔壁に

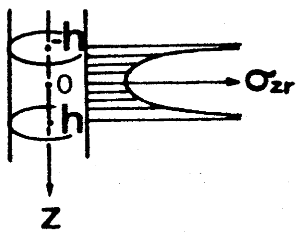


Fig. 3-4-5

$$\sigma_{zr}(z) = \begin{cases} \dfrac{Qe^{i\omega t}}{2\pi R_0\sqrt{h^2 - z^2}} & |z| < h \\ 0 & |z| > h \end{cases} \qquad \text{----(3-4-1)}$$

なる剪断応力分布を考える。これを孔壁全面で積分すると $Qe^{i\omega t}$ となる。孔壁のラジアル方向の変位は，杭の要素が孔を埋めた状態で拘束されるのでこれを 0 とおく。この場合地盤（無限等方弾性体内）の Z 方向変位 u_z は

$$u_z = -\frac{j \cdot Qe^{i\omega t}}{2\pi^2 A\mu}\int_0^\infty \left\{ \frac{\zeta^2}{\sqrt{\gamma^2-\zeta^2}} \frac{H_0^{(2)}(\sqrt{\gamma^2-\zeta^2}\,a)}{H_1^{(2)}(\sqrt{\gamma^2-\zeta^2}\,A)} + \sqrt{1-\zeta^2}\,\frac{H_0^{(2)}(\sqrt{1-\zeta^2}\,a)}{H_1^{(2)}(\sqrt{1-\zeta^2}\,A)} \right\} J_0(\zeta H) \cdot \cos\zeta b \cdot d\zeta \qquad \text{---(3-4-2)}$$

但し

ζ；積分変数　　　　$Q \cdot e^{i\omega t}$；加振力

μ；地盤の剪断弾性定数

V_s；S波速度

V_p；P波速度

$j = \omega / V_s$，$a = r \cdot j$，$b = z \cdot j$，$\gamma = V_s / V_p$，$A = R_0 \cdot j$

と計算された※。この複素積分を数値計算したものの一例を Fig. 3-4-6 に示す。この計算例のように剪断応力の加わるリング状の部分の寸法が，S波の波長に比べ，さほど大きくない場合にはリング状の部分の変位はほぼ均一になり，剛体的な挙動をするようである。しかし，この解をコンプライアンスとして用いる場合，表面や，杭先部に相当する孔底での波動の反射の影響が表現されない。表面の影響は，既に Fig. 3-4-1 (a) (pp 40) にその概念を示したように鏡像をとることで近似できるが，孔底での弾性波の反射の影響をも (3-4-2) 式に組み入れることは困難である。特に分割された杭の要素が孔底に近い場合は，孔底での弾性波の反射の影響は無視し難い。

※ この式の誘導は Appendix 2 に示す。

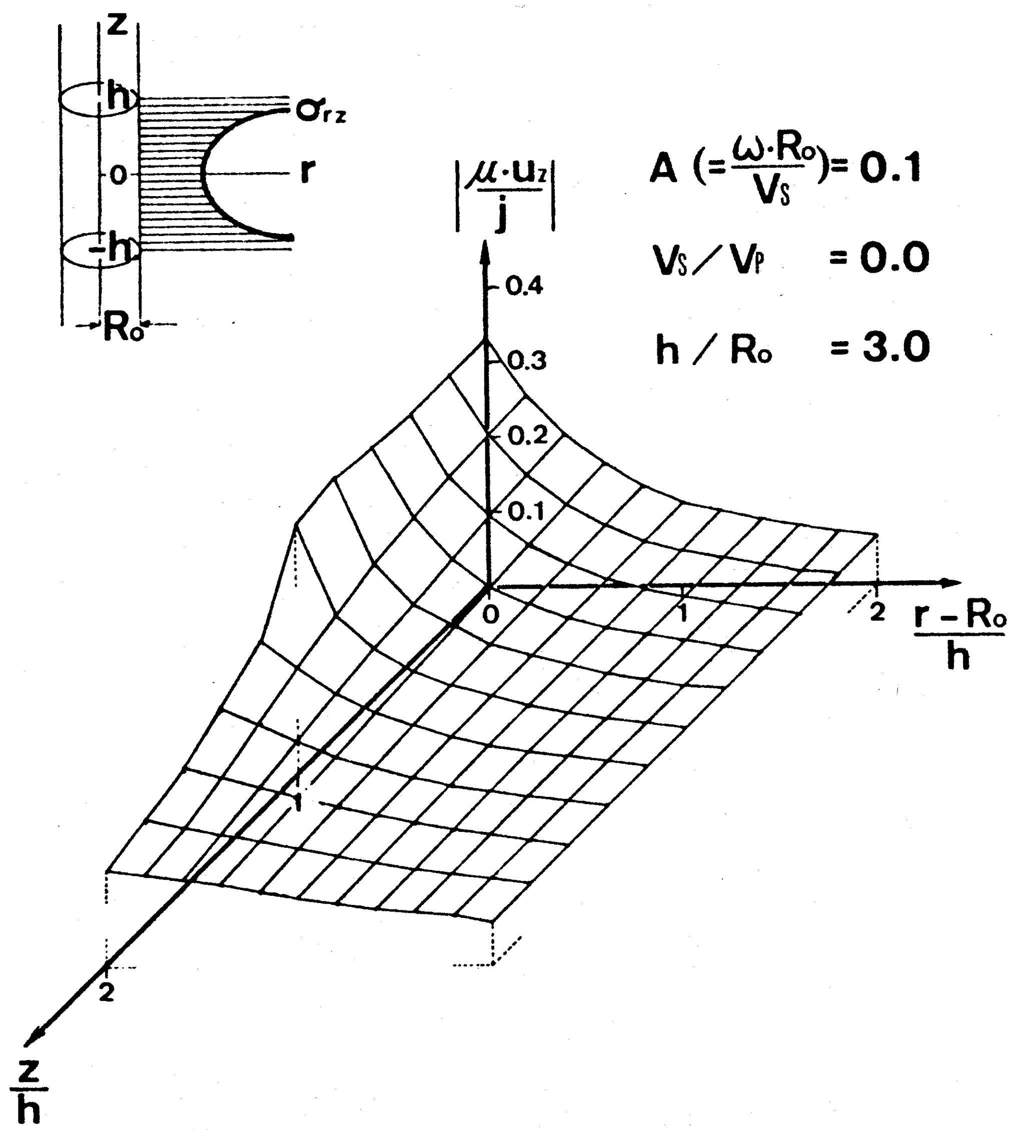


Fig. 3-4-6　無限弾性体内の無限長の円孔内の一部にブーシネスク的な分布をもつ剪断応力が加わった時の弾性体内変位の絶対値

第2のコンプライアンスの近似解として，第1の近似解と同様無限長の円筒状の孔を想定し，この中の一部に帯状の等分布剪断応力を加えた時の変位を考えてみる．既ち孔内の一部の円筒状の孔壁に

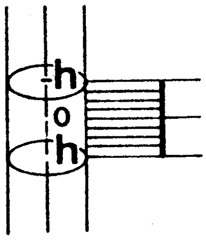


Fig. 3-4-7

$$\sigma_{zr}(z)=\begin{cases}\dfrac{Qe^{i\omega t}}{4\pi R_0\cdot h} & |z|<h\\[2ex] 0 & |z|>h\end{cases}$$

----(3-4-3)

なる剪断応力分布を考える。これを孔壁全面で積分すると当然 $Qe^{i\omega t}$ となる．先程の近似解と同様孔壁のラジアル方向の変位を拘束すると地盤（無限等方弾性体内）の z 方向変位 u_z は

$$u_z=-\frac{j\cdot Qe^{i\omega t}}{2\pi^2 A\mu}\int_0^\infty\left\{\frac{\zeta^2}{\sqrt{\gamma^2-\zeta^2}}\frac{H_0^{(2)}(\sqrt{\gamma^2-\zeta^2}\,a)}{H_1^{(2)}(\sqrt{\gamma^2-\zeta^2}\,A)}+\sqrt{1-\zeta^2}\,\frac{H_0^{(2)}(\sqrt{1-\zeta^2}\,a)}{H_1^{(2)}(\sqrt{1-\zeta^2}\,A)}\right\}\cdot\frac{\sin(\zeta H)}{\zeta H}\cos(\zeta b)\,d\zeta$$

----(3-4-4)

（記号は pp.45 の (3-4-2)式に同じ）

と計算された。[*] この複素積分を数値計算したものの一例を Fig.3-4-8 に示す。先程の第1のコンプライアンスの近似解の数値計算例と比較するとリング状の載荷部分の変位は一様でなく，その絶対値も1~2割大きくなっている。この近似解も孔底での波動の反射の影響を組み入れることはできないが，応力分布はさきほどの近似解と異なり要素の境で無限大となることはなく現実に近いものと考えられる。

※ この式の誘導は Appendix 2 に示す。

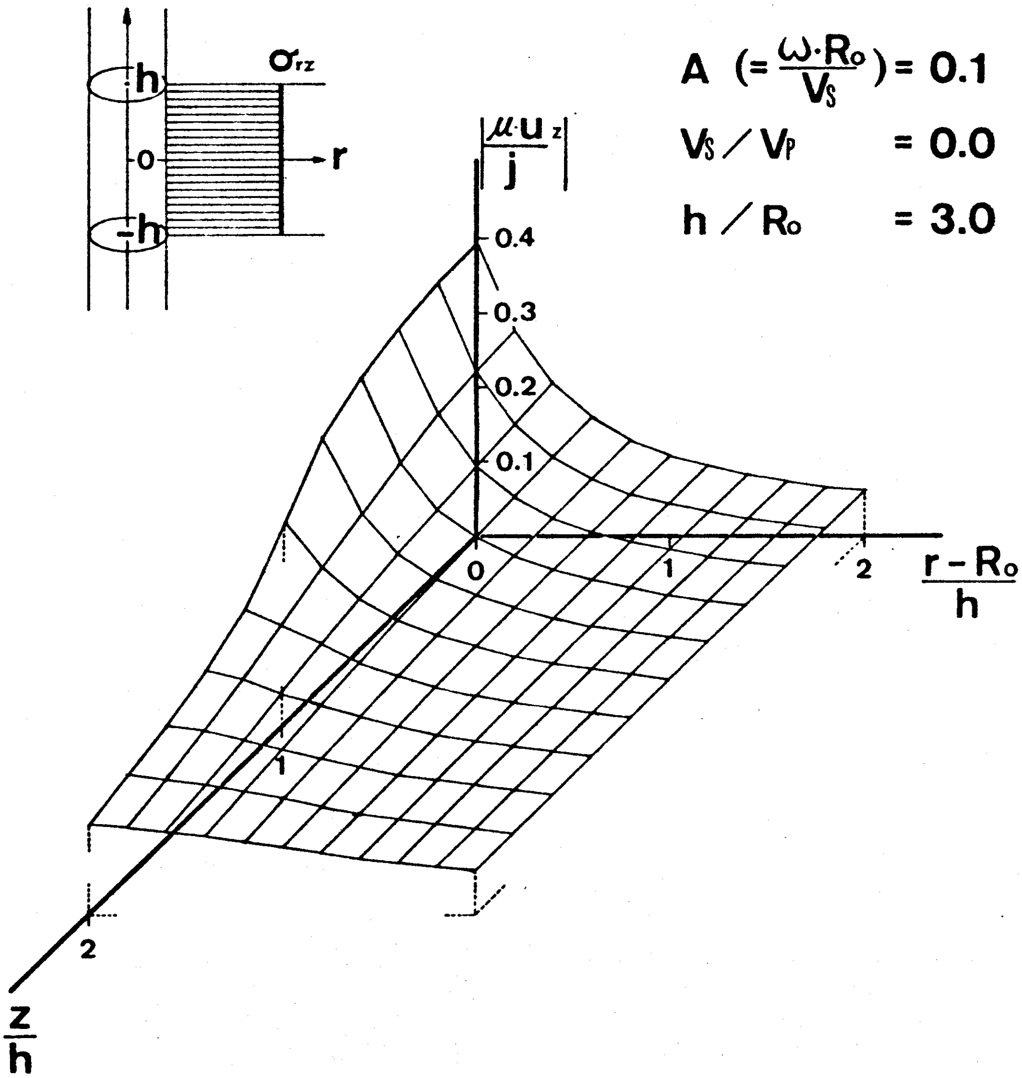
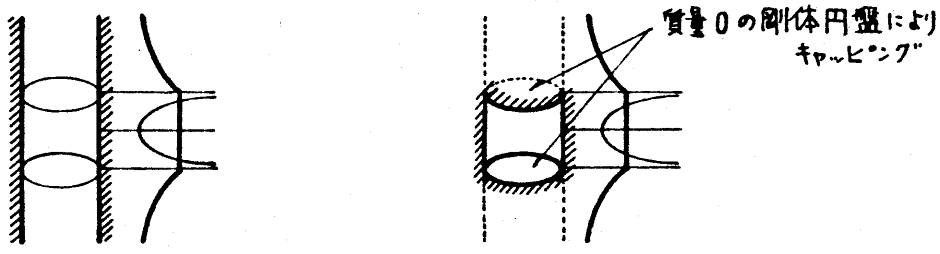


Fig. 3-4-8 無限弾性体内の無限長の円孔内の一部に一様な剪断応力が加わった時の弾性体内変位の絶対値

第3のコンプライアンスの近似解として，無限等方弾性体内に有限長の円柱状の空洞があり，この側面にこの空洞壁面の，円柱の軸方向の変位がすべて一定になるような分布の剪断応力を加えた状態を考えてみる。先程の第1及び第2のコンプライアンスの近似解との概念的な差異はFig. 3-4-9のようになる。



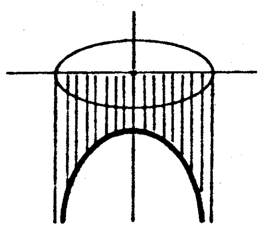
(a)　　(b)

Fig. 3-4-9

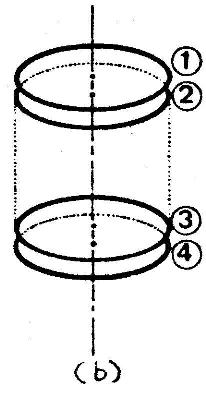
すなわち第3の近似解では第1,第2の近似で用いた無限長の円柱孔を載荷リングの幅を除いてすべて埋めつくした形態となる。この解も直接求めることは困難であるので，次のような手順による近似解で代用する。

(1) 無限弾性体内に円盤状の面を考え，ここにブーシネスク的な直応力が分布するものとする。(Fig. 3-4-10 (a))

(2) この円盤状の面を4枚 Fig. 3-4-10 (b) に示すように重ねる。このとき円盤①と円盤②の間，及び円盤③と円盤④の間隙の直応力はほぼ0となり，さらにブーシネスク的な直応力分布により，円盤の面外変位が小さければ，既に



(a)



(b)

Fig. 3-4-10

Fig. 3-4-9 (b) に示した空洞の上部，及び底部の剛体円盤（質量=0）によるキャッピングとほぼ等しい状態が発現する。

(3) 次に円盤②と③の間に挟まれた円筒状の土の変位はその全体積にわたり，ほぼ等しくなると考えられるので，この円筒の慣性力を，2枚の円盤②，③に加わる力から差し引けば，残りの力に対する円筒の変位がこのケースの近似解を与える。地表面の影響は，鏡像を用いて表現する。

この解を求める第一段階として円盤状の面内にブージネスク的な直応力の分布が発現する時の変位を求めておかなければならない。直応力分布はこの円盤を含む平面内で

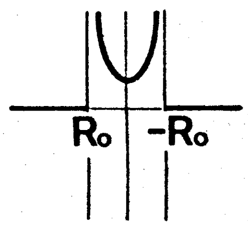


Fig. 3-4-11

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} \dfrac{Qe^{i\omega t}}{2\pi R_0} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{R_0^2 - r^2}} & |r| < R_0 \\ 0 & |r| > R_0 \end{cases} \quad \text{----(3-4-5)}$$

と与えられる。σ_{zz} を円盤上で積分すると $Qe^{i\omega t}$ となる。このときの弾性体内の変位は次式で与えられた。※

$$u_z = \frac{jQe^{i\omega t}}{4\pi A\mu} \int_0^\infty \left\{ \sqrt{\zeta^2-\gamma^2} \cdot e^{-b\sqrt{\zeta^2-\gamma^2}} - \frac{\zeta^2}{\sqrt{\zeta^2-1}} e^{-b\sqrt{\zeta^2-1}} \right\} \sin \zeta A \cdot J_0(\zeta a)\, d\zeta \quad \text{----(3-4-6)}$$

但し

ζ；積分定数　　　　$Qe^{i\omega t}$；加振力

μ：地盤の剪断弾性定数

V_s；S波速度

V_p；P波速度

$j = \omega / V_s$ ， $a = r \cdot j$ ， $b = z \cdot j$ ， $\gamma = V_s / V_p$ ， $A = R_0 \cdot j$

※この式の誘導は Appendix 2 に示す。

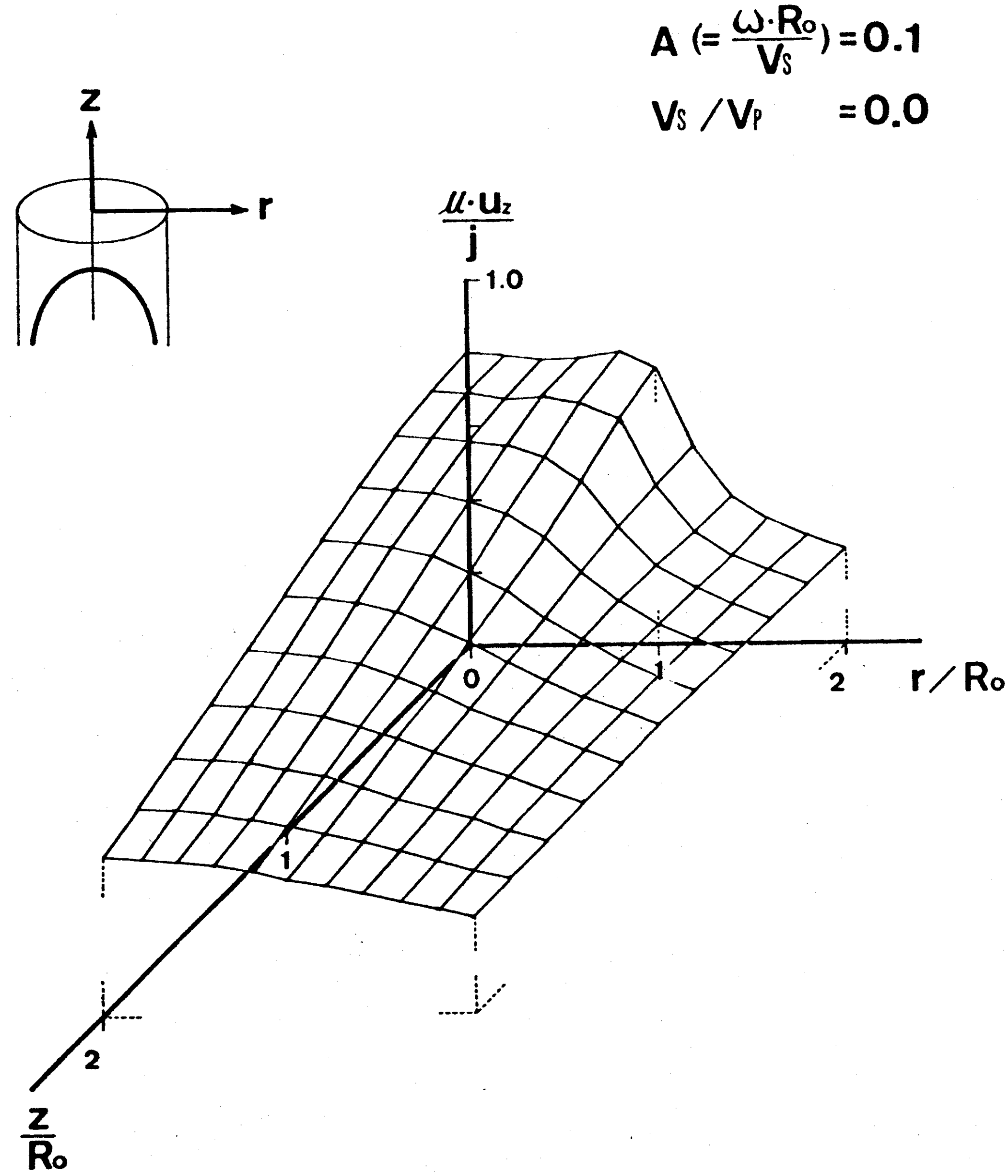


Fig. 3-4-12 無限弾性体内の円盤状の領域にブーシネスク的な分布の振動する直応力が働いた時の弾性体内変位の絶対値

この複素積分の数値計算例を Fig. 3-4-12 に示す。第1のコンプライアンスの近似解の計算例（Fig. 3-4-6 pp.46）同様，円盤の半径が地盤内のS波の波長に比べさほど大きくない場合には円盤内の変位はほぼ均一になり剛体的な挙動を示すようである。既に Fig. 3-4-10 (b) (pp.49) で示したように この円盤を4枚重ね合わせ，2枚の円盤 ② ③ に挟まれた円柱部の変位を考える。この円柱部も含めた地盤内の変位の分布状況は Fig. 3-4-14 (a)，(b) に示すような形になる。この円筒部の平均的変位を $\tilde{u}_z$，2枚の円盤 ② ③ に働く力の和を $\tilde{Q}\cdot e^{i\omega t}$，円筒部を支える地盤のスティフネスを k とおくと

$$\tilde{Q}\cdot e^{i\omega t} = k\tilde{u}_z + m\cdot\ddot{\tilde{u}}_z$$

$$= \left\{k - \omega^2\rho\frac{2\pi A^2\cdot H}{j^3}\right\}\tilde{u}_z \quad \text{---(3-4-7)}$$

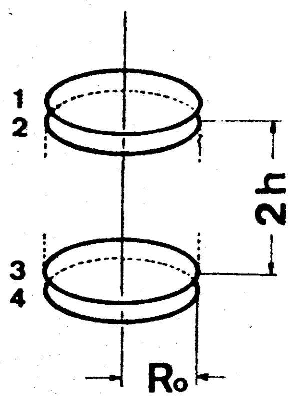


Fig. 3-4-13

但し

ρ；地盤の密度

V_s；S波速度

R_o；円盤の半径

$2h$；円盤②と③の距離

m；円筒部の質量

$A = j\cdot R_o \qquad H = j\cdot h$

となる。この k の逆数が求めるコンプライアンスである。$\tilde{u}_z$ は既に (3-4-6) 式に与えられたような形で

$$\tilde{u}_z = \frac{j\cdot\tilde{Q}e^{i\omega t}}{4\pi A\mu}\, u \qquad \text{----(3-4-8)}$$

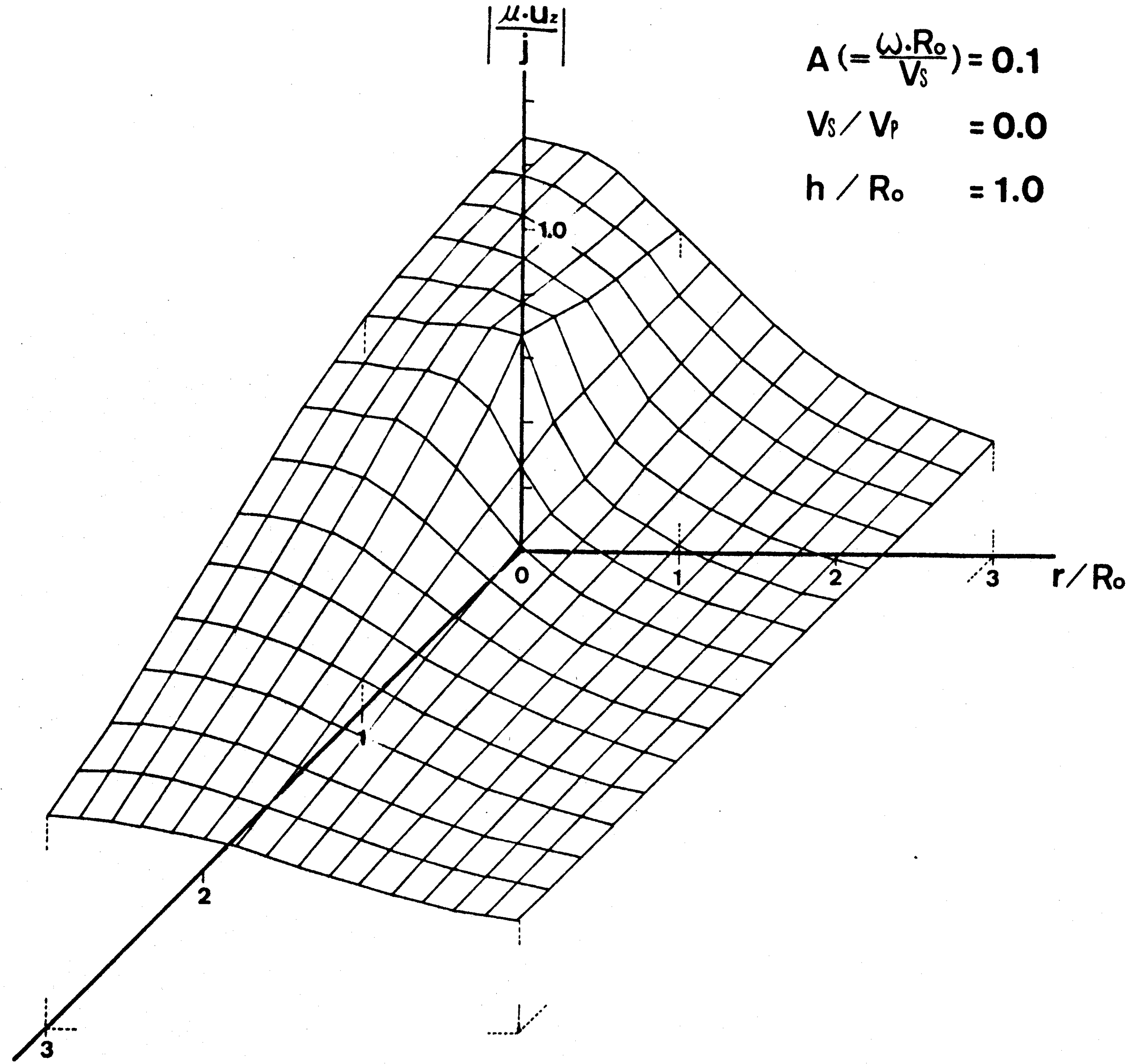
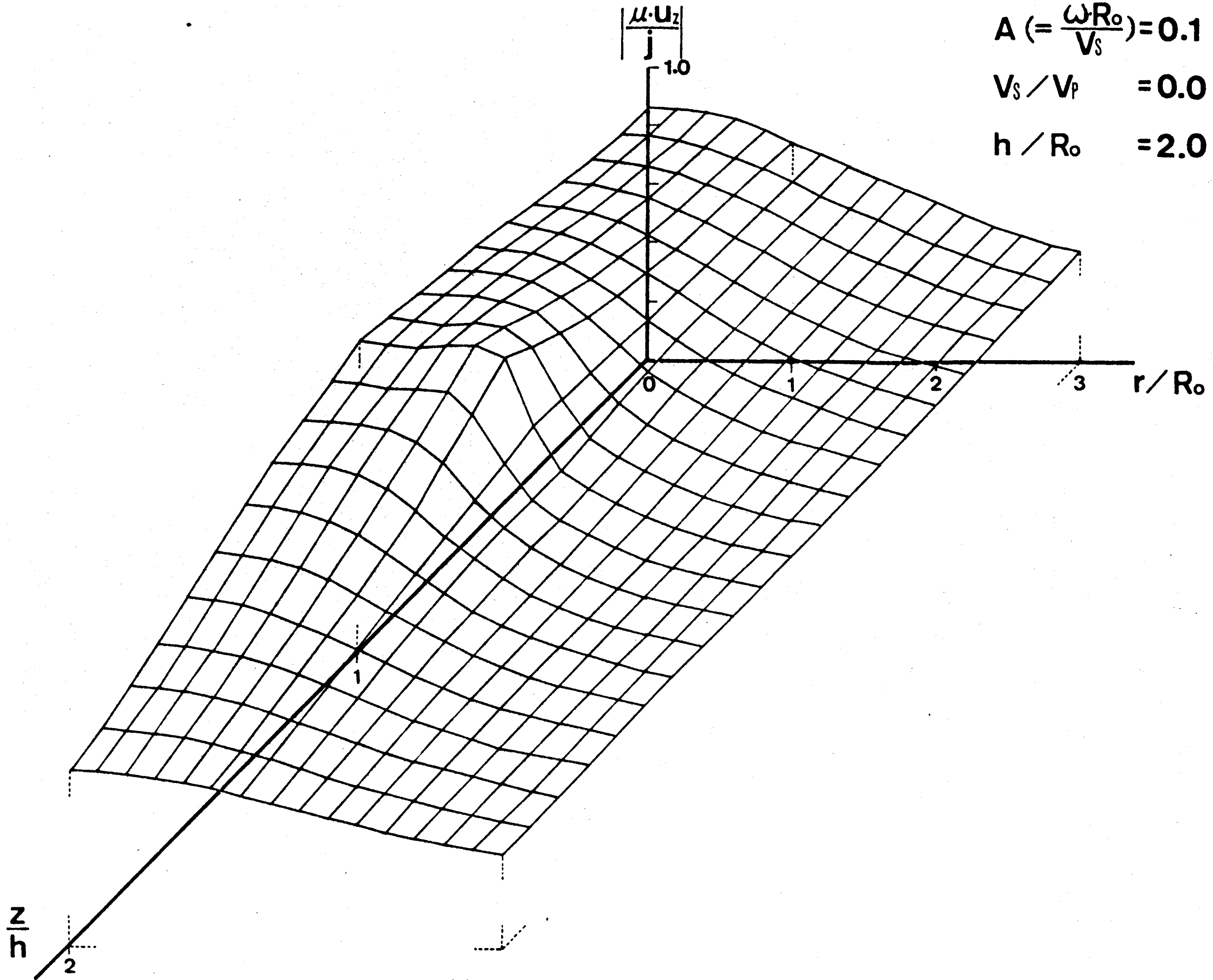


Fig. 3-4-14 (a)　　Fig 3-4-12に示した円盤による変位を 円盤を2R 離して重ね合わせる。



$\left|\frac{\mu \cdot u_z}{j}\right|$
1.0
$A\ (= \frac{\omega R_o}{V_S}) = 0.1$
$V_S / V_P = 0.0$
$h / R_o = 2.0$
0
1
2
3
r / R_o
1
2
$\frac{z}{h}$

Fig. 3-4-14 (b)

と与えられるので これを (3-4-7)式に代入すると

$$k = \frac{4\pi A\mu}{j u} + \frac{\mu}{j} 2\pi A^2 \cdot H \qquad \text{----(3-4-9)}$$

さらに無次元化した形として

$$\frac{k \cdot j}{\mu} = \frac{4\pi A}{u} \left\{ 1 + \frac{AH}{2} u \right\} \qquad \text{----(3-4-10)}$$

が与えられる. この逆数は無次元化したコンプライアンスとなる.

以上は 杭先を除いた部分に関するコンプライアンスの近似解であるが 杭先の要素を支える地盤のコンプライアンス Win (nは杭先に相応する要素のナンバー)に関しては 別途 検討が必要である。 Wnnとして 本論文では既に Fig 3-4-10 (a) (pp. 49) に示したような ブーシネスク的な直応力分布を持つ円盤状領域の変位を利用することにする。つまり (3-4-6)式 (pp. 50) を

$$u_z = W(r, z, \omega) \cdot Q e^{i\omega t} \qquad \text{----(3-4-11)}$$

但し $$W(r, z, \omega) = \frac{j}{4\pi A\mu} \int_0^\infty \left\{ \sqrt{\zeta^2 - \gamma^2}\, e^{-b\sqrt{\zeta^2-\gamma^2}} - \frac{\zeta^2}{\sqrt{\zeta^2-1}} e^{-b\sqrt{\zeta^2-1}} \right\} \sin \zeta A \, J_0(\zeta a) \, d\zeta$$

(各記号の詳細は pp 50 参照)

とおいた時

$$W_{nn} = W(0, 0, \omega) + W(0, 2l_p, \omega) \qquad \text{----(3-4-12)}$$

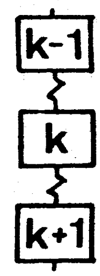
と定める。 l_pは 杭先より 地表面(仮想)までの距離であり, 上式は この仮想地表面に対し鏡像を置いたことを意味している。

W_{in} (nは杭先に相応する要素の番号) で $i \neq n$ の場合，既に述べた周辺摩擦で支えられる要素に関するコンプライアンスの近似解 W_{ni} を用いることにする。つまり $W_{in} = W_{ni}$ となりコンプライアンスマトリックスの対称性は保たれる。

以上の手続きを踏むことで杭の要素を支える地盤のコンプライアンスマトリックス $[W]$ を求めることができる。このコンプライアンスマトリックスの逆マトリックス $[W]^{-1}$ が地盤の反力マトリックスである。

◎ 杭の剛性マトリックス

(1) 杭の中間の要素に関して



$$F_k = K_{k-1}(z_{k-1} - z_k) - K_k(z_k - z_{k+1})$$

$$= K_{k-1} \cdot z_{k-1} - (K_{k-1} + K_k) \cdot z_k + K_k z_{k+1} \qquad \text{----(3-4-13)}$$

ここで $K_k = K_{k-1} = E \times A / dz$

但し Eは杭材のヤング率，Aは杭の断面積

dzは分割された杭の要素長

Fig 3-4-15

(2) 杭頭では

$$F_1 = -K_1 (z_1 - z_2) \qquad \text{----(3-4-14)}$$

(3) 杭先では

$$F_n = K_{n-1}(z_{n-1} - z_n) \qquad \text{----(3-4-15)}$$

以上より

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ \\ F_n \end{Bmatrix} = \frac{EA}{dz} \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \text{0} & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \text{0} & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \\ z_n \end{Bmatrix} = [K]\{z\} \qquad \text{----(3-4-16)}$$

◎系の運動方程式

k番目の要素の質量をM_kと書き、変位を改めてZ_kと表現すると

(3-4-　) 及び (3-4-　)式より

$$\begin{bmatrix} M_1 & & & & & \\ & M_2 & & & \mathbb{0} & \\ & & M_3 & & & \\ & & & M & & \\ & \mathbb{0} & & & \ddots & \\ & & & & & M_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Z}_1 \\ \ddot{Z}_2 \\ \vdots \\ \\ \\ \ddot{Z}_n \end{Bmatrix} = -\left([\mathbb{K}] + [\mathbb{W}]^{-1}\right) \cdot \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ \\ \\ Z_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ \\ \\ F_n \end{Bmatrix} \quad \text{----(3-4-17)}$$

簡略に書くと

$$[\mathbb{M}]\{\ddot{\mathbb{Z}}\} + ([\mathbb{K}] + [\mathbb{W}]^{-1})\{\mathbb{Z}\} = \{\mathbb{F}\} \quad \text{----(3-4-18)}$$

調和振動状態を想定して

$\{\mathbb{F}\} = \{\mathbb{F}_0\} e^{i\omega t}$　　$\{\mathbb{Z}\} = \{\mathbb{Z}_0\} e^{i\omega t}$　　とおくと

$$(-\omega^2[\mathbb{M}] + [\mathbb{K}] - [\mathbb{W}]^{-1})\{\mathbb{Z}_0\} = \{\mathbb{F}_0\} \quad \text{----(3-4-19)}$$

よって

$$\{\mathbb{Z}_0\} = (-\omega^2[\mathbb{M}] + [\mathbb{K}] - [\mathbb{W}]^{-1})^{-1}\{\mathbb{F}_0\} \quad \text{----(3-4-20)}$$

一点載荷の場合、外力のベクトル$\{\mathbb{F}_0\}$は載荷点に相当する要素のみ値を持ち他は0となる。杭頭に$F_0 e^{i\omega t}$なる力を加えるものとすると

$$\{\mathbb{F}_0\}^T = \{F_0,\ 0,\ 0,\ \cdots\ 0\} \quad \text{----(3-4-21)}$$

(3-4-21)式に対する (3-4-20)の解を求めると

$$\left.\begin{aligned} &\{|\mathbb{Z}_0/F_0|\} && \text{----}\ \omega\ ;\ \text{変位応答曲線} \\ &\{-\mathrm{Arg}(\mathbb{Z}_0/F_0)\} && \text{----}\ \omega\ ;\ \text{位相差曲線} \end{aligned}\right\}$$

となりアドミッタンスを求めることができる。

また ここで得られた杭の各要素の変位ベクトル $\{Z_0\}$ に地盤の反力マトリックス $[W]^{-1}$ を乗ずることで周辺摩擦力ベクトル $\{f\}$ を求めることができる。即ち

$$\{f\} = [W]^{-1} * \{Z_0\} \qquad \cdots\cdots (3\text{-}4\text{-}22)$$

となる。この $\{f\}$ の要素 f_i を入力として地中を加振した時の変位の解を要素数だけ計算し加え合わせることで地表の変位を求めることができる。

3-4-3 特殊な境界条件を持つ杭のアドミッタンスの厳密解との比較に依る コンプライアンスの近似解の検討

ある特殊な境界条件を持つ杭のアドミッタンスの厳密解※を求め，これと先程述べた３種のコンプライアンスの近似解を用いた手法によるアドミッタンスの解を比較し その適用の妥当性，問題点を検討する。

対象とする杭の境界条件は以下のように定める。

① 杭は互いに平行な不動の無限剛体平面 α_1 α_2 に挟まれた内径 $2a$，外径 $2b$，長さ l の弾性体である。

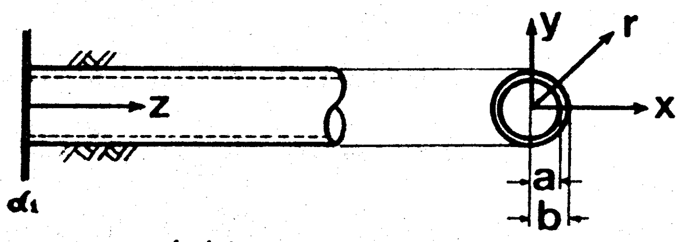


Fig. 3-4-16

② 杭の周囲には 2枚の剛体平面に挟まれて無限の拡がりを持つ 等方弾性体とみなせる土が存在する。

③ 杭も土も 剛体壁面 α_1 α_2 によって杭の軸方向の変位は完全に拘束されるが ラジアル方向の変位は滑動が自由であり拘束されない。

④ 杭と地盤の付着は完全であり 変位と応力の連続条件が成立する。

以上の境界条件は 次のように定式化される。

$$
\left.
\begin{array}{llll}
z=0,\ l & \text{にて} & u_z=0 & u_z'=0 \quad (a) \\
r=a & \text{にて} & \sigma_{rr}=0 & \sigma_{zr}=f(z) \\
r=b & \text{にて} & u_r=u_r' & u_z=u_z' \\
 & & \sigma_{rr}=\sigma_{rr}' & \sigma_{zr}=\sigma_{zr}'
\end{array}
\right\} (b) \quad \cdots(3\text{-}4\text{-}23)
$$

（ダッシュ（′）の無いものが杭，あるものが地盤に対応する量である。）

※ これと同じ境界条件の杭の強制変位による応答は 1971年に 後藤尚男 土岐憲三 高田至郎等によって 解かれている。

(3-4-23)の(a)式のような境界条件を満たす，杭及び地盤の変位，応力は以下のように与えられる。

$$u_r=\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\{k_{1m}\cdot H_1^{(2)}(k_{1m}\cdot r)\cdot A_m+n_m\cdot H_1^{(2)}(k_{2m}\,r)\,B_m+k_{1m}\,H_1^{(1)}(k_{1m}\cdot r)\cdot C_m$$
$$+n_m\cdot H_1^{(1)}(k_{2m}\cdot r)\cdot D_m\}\cos n_m z\cdot e^{i\omega t} \qquad \text{----}(3\text{-}4\text{-}24)$$

$$u_z=\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\{n_m\cdot H_0^{(2)}(k_{1m}\cdot r)\cdot A_m-k_{2m}\,H_0^{(2)}(k_{2m}\cdot r)\cdot B_m+n_m\cdot H_0^{(1)}(k_{1m}\cdot r)\,C_m$$
$$-k_{2m}\cdot H_0^{(1)}(k_{2m}\cdot r)\,D_m\}\sin n_m z\cdot e^{i\omega t} \qquad \text{----}(3\text{-}4\text{-}25)$$

$$\sigma_{rr}=\sum_{m=1,3,5}^{\infty}[\{(\lambda\bar{l}^2+2\mu k_{1m}^2)H_0^{(2)}(k_{1m}\cdot r)-2\mu\,k_{1m}H_1^{(2)}(k_{1m}\cdot r)/r\}A_m$$
$$+2\mu n_m\cdot k_{2m}(H_0^{(2)}(k_{2m}\,r)-H_1^{(2)}(k_{2m}\cdot r)/(k_{2m}\cdot r))\cdot B_m$$
$$+\{(\lambda\bar{l}^2+2\mu k_{1m}^2)H_0^{(1)}(k_{1m}\cdot r)-2\mu k_{1m}H_1^{(1)}(k_{1m}\cdot r)/r\}C_m$$
$$+2\mu n_m\cdot k_{2m}(H_0^{(1)}(k_{2m}\cdot r)-H_1^{(1)}(k_{2m}\cdot r)/(k_{2m}\cdot r))\,D_m]\cos n_m z\cdot e^{i\omega t} \qquad \text{----}(3\text{-}4\text{-}26)$$

$$\sigma_{zr}=\sum_{m=1,3,5}^{\infty}[-2\mu n_m k_{1m}\,H_1^{(2)}(k_{1m}r)\,A_m+\mu\,(j^2-2n_m^2)\cdot H_1^{(2)}(k_{2m}\,r)\cdot B_m$$
$$-2\mu n_m k_{1m}\,H_1^{(1)}(k_{1m}\,r)\,C_m+\mu(j^2-2n_m^2)\,H_1^{(1)}(k_{2m}\,r)\cdot D_m]\sin n_m z\;e^{i\omega t} \qquad \text{----}(3\text{-}4\text{-}27)$$

$$u_r'=\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\{k_{1m}'\cdot H_1^{(2)}(k_{1m}'\cdot r)\cdot E_m+n_m\cdot H_1^{(2)}(k_{2m}'\cdot r)\cdot F_m\}\cos n_m z\;e^{i\omega t} \qquad \text{----}(3\text{-}4\text{-}28)$$

$$u_z'=\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\{n_m\cdot H_0^{(2)}(k_{1m}'\cdot r)\,E_m-k_{2m}'H_0^{(2)}(k_{2m}'\cdot r)\cdot F_m\}\sin n_m z\;e^{i\omega t} \qquad \text{----}(3\text{-}4\text{-}29)$$

$$\sigma_{rr}'=\sum_{m=1,3,5}^{\infty}[\{(\lambda'\bar{l}'^2+2\mu'k_{1m}'^2)H_0^{(2)}-2\mu'k_{1m}'H_1^{(2)}(k_{1m}'\cdot r)/r\}E_m$$
$$+2\mu'n_m\cdot k_{2m}'(H_0^{(2)}(k_{2m}'\,r)-H_1^{(2)}(k_{2m}'\cdot r)/(k_{2m}'\,r))\}F_m]\cos n_m z\;e^{i\omega t} \qquad \text{----}(3\text{-}4\text{-}30)$$

$$\sigma_{zr}'=\sum_{m=1,3,5}^{\infty}(-2\mu'n_m\,k_{1m}'H_1^{(2)}(k_{1m}'r)\,E_m+\mu'(j'^2-2n_m^2)\,H_1^{(2)}(k_{2m}'\cdot r)\,F_m]\sin n_m z\;e^{i\omega t} \qquad \text{---}(3\text{-}4\text{-}31)$$

但し

ω ; 加振円振動数　　　$H_{\nu}^{(i)}$; ν階の第i種ハンケル関数

V_s ; S波速度（杭内）

V_p ; P波速度（杭内）

ℓ ; 杭長

$n_m = m\pi/\ell$　　$k_{1m}^2 = (\omega/V_p)^2 - n_m^2$　　$k_{2m}^2 = (\omega/V_s)^2 - n_m^2$

$l^2 = (\omega/V_p)^2$　　$j^2 = (\omega/V_s)^2$

（ダッシュ（′）のないものが杭，あるものが地盤に対応する量である。）

A_m, B_m, C_m, D_m, E_m, F_m は未定係数であり既に(3-4-23)の(b)に示した6個の境界条件式により決定される。杭内の $r=a$ の内壁に働く $f(z)$ として $f(z) = \sin n_m z$ を用いると，(3-4-24)～(3-4-31)式の $\sum_{m=1,3,5}^{\infty}$ 内は特定の m に関する項しか残らないので計算が容易になる。仮に $n_m (= m\pi/\ell)$ の m を1として この時の杭の軸方向変位の厳密解を求めることにする。

数値計算上の入力データは以下のとおりである。

○杭

杭長 (ℓ) 40m　　外径 (b)／内径 (a) = 2.0　　V_p = 4600 m/s

V_s = 2900 m/s　　杭材の比重 = 2.4　ton/m³

◎地盤

V_p = 1500 m/s　　V_s = 85.0 m/s　　土の比重 = 1.6　ton/m³

杭の外径は 0.25 m, 0.5 m, 1.0 m ; 2.0 m の 4段階に変化させた。この計算結果は Fig. 3-4-17 に示すとおりである。縦軸は杭中央部($\ell/2$ 点)の杭内壁の変位を示している。杭の断面が小さく、その剛性が地盤の中で大きな影響力を持たないうちは、剛体壁 α_1, α_2 間の地盤内での S波の重複反射に起因する振動数成分が卓越するが、杭の外径を大きくするにつれ、杭内を伝播する P波の重複反射による振動数成分が卓越するようになる。

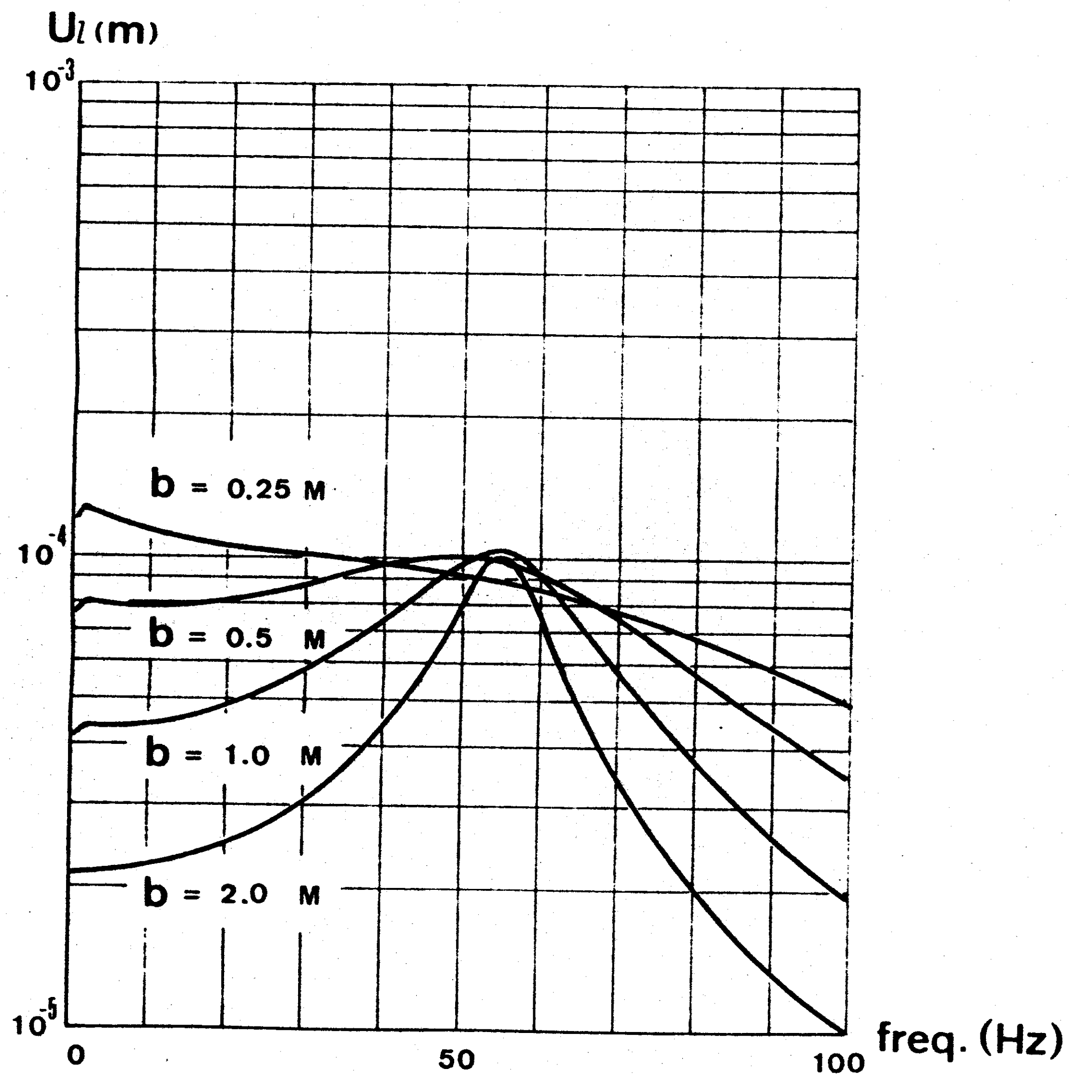


Fig. 3-4-17. 杭(Fig. 3-4-16)の $\ell/2$ 点の変位応答

これに対し前項で触れた3種のコンプライアンスの近似解を用いた手法によりこの杭の変位応答を計算してみる。計算上の仮定は以下の通りである。

(1) 杭の分割された要素長を dZ とすると j番目の要素には

$$f(z) = 2\pi b \cdot dz \cdot \sin \frac{(j-0.5)dz}{\ell}$$
$$= 2\pi b \cdot dz \sin \frac{(j-0.5)}{n} \qquad \text{----(3-4-32)}$$

なる力がその内壁に働くものとする。

(2) 第3のコンプライアンスの近似解は前項(pp.)に示すとおり弾性体内に円盤状の載荷領域を考え、ここに動的なブージネスク荷重が働いているものとし、このような円盤を離散的に重ね合わせ、後に円盤に挟まれた円柱状の土の慣性力をさし引くという手法により求めている。この円盤に挟まれた円柱状の土が全体的にほぼ同位相で動く為には、円盤の間隔を大きくしない方が望ましい。従ってこの計算においては要素長は地盤内S波波長の1/8以内におさえることにする。

(3) 前項で触れたコンプライアンスの近似解は本来無限の弾性体を対象とするものであった為杭両端の固定壁面、α_1, α_2 を鏡と見立てて逆位相の鏡像をおくことで代用する。

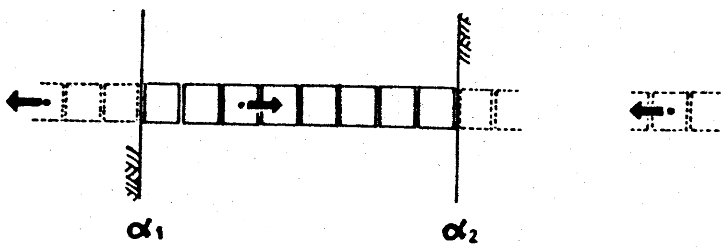


Fig 3-4-18 鏡像のとり方

(4) 杭の分割数は 20, 40, 80の 3段階で行なったが 変位の絶対値にはっきりとした差が現われないので N=20の計算値のみを図示する。但し 第3のコンプライアンスの近似解 (pp で述べた円盤を4枚重ねる手法) による場合には、杭の要素長によって求めうる周波数領域が 前ページ (2)の条件により限定される為に分割数 20, 40, 80 各々のケースの変位応答の計算値を示しておく。

以上の条件、仮定をもとに この杭の中央 (1/2点) の変位の近似解と厳密解を Fig. 3-4-19 ~ Fig. 3-4-21 において比較する。図面の内容は以下の通りである。

Fig. 3-4-19 第1のコンプライアンス近似解 (pp. 44) を用いた杭の1/2点変位応答 (太い実線) と 厳密解 (細い破線) との比較

Fig 3-4-20 第2のコンプライアンス近似解 (pp. 47) を用いた杭の1/2点変位応答 (太い実線) と 厳密解 (細い破線) との比較

Fig. 3-4-21 第3のコンプライアンス近似解 (pp. 49) を用いた杭の1/2点変位応答 (太い実細) と 厳密解 (細い破線) との比較

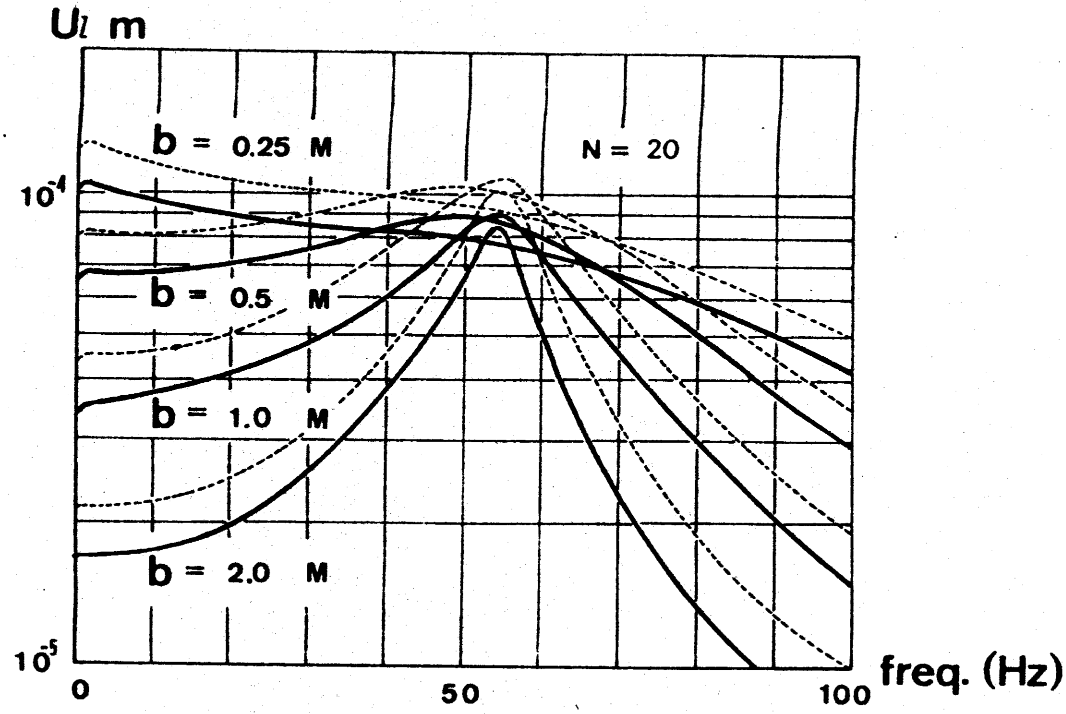


Fig. 3-4-19

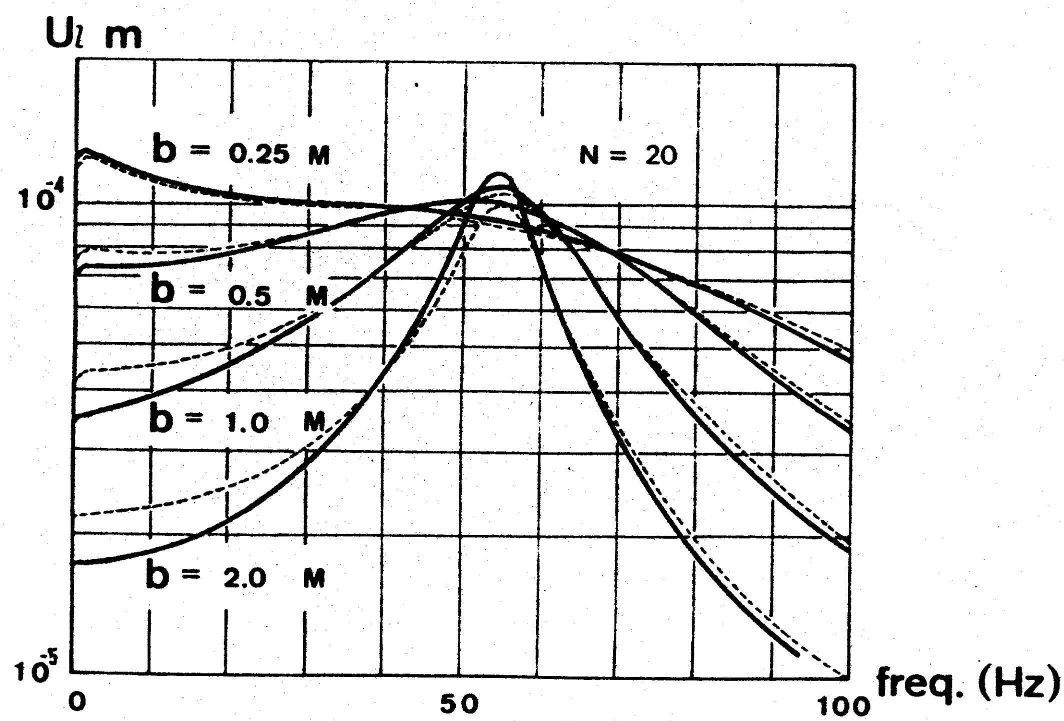


Fig. 3-4-20

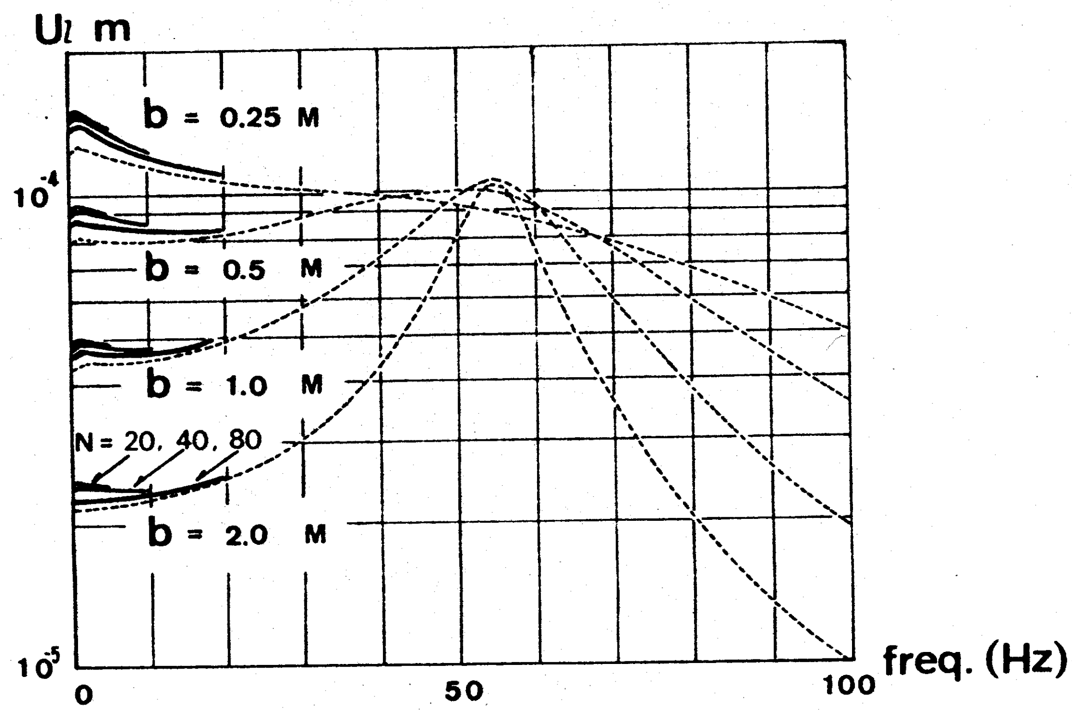


Fig. 3-4-21

Fig. 3-4-19において第1のコンプライアンスの近似解を用いた場合の変位応答の計算値は厳密解と比べ全体的に6~7割ほど小さいが他の2つの近似解による変位応答は厳密解とその挙動が比較的良く符合するようである。特に低振動数領域において、第3のコンプライアンスの近似解を用いた場合の変位応答の計算値は近似の度合が良いと思われる。この手法は高い振動数領域にも適用可能であるがそれだけ分割数を増す必要があり計算が煩雑になるという欠点がある。

これら3つの杭の変位応答の近似解の差異はすべてコンプライアンスの定め方に起因する。この点に関し今少し詳細な検討を行なうことにする。分割された円柱状の杭要素の長さ2Aをその直径$2R_0$で割った値、A/R_0によってコンプライアンスの値も変化する。従って円柱の無次元化半径A ($= \omega \cdot R_0/V_s$)をパラメータとして、W_{jj}(コンプライアンスマトリックスの要素、加振した要素自体の変位)に$\omega \cdot /V_s/\mu$(μは剪断弾性定数)を乗じ無次元化したものをA/R_0の関数として Fig. 3-4-22に示す。この図において第3のコンプライアンスの近似解が横軸A/R_0の中途で途切れているのは先に述べた(2)の条件(pp.63)によって杭の要素長を無制限に延ばせない為である。第1、及び第2のコンプライアンスの近似解はA/R_0を大きくするにつれこの図に書き込んだ2種類の直線β, αに近づいていくようである。

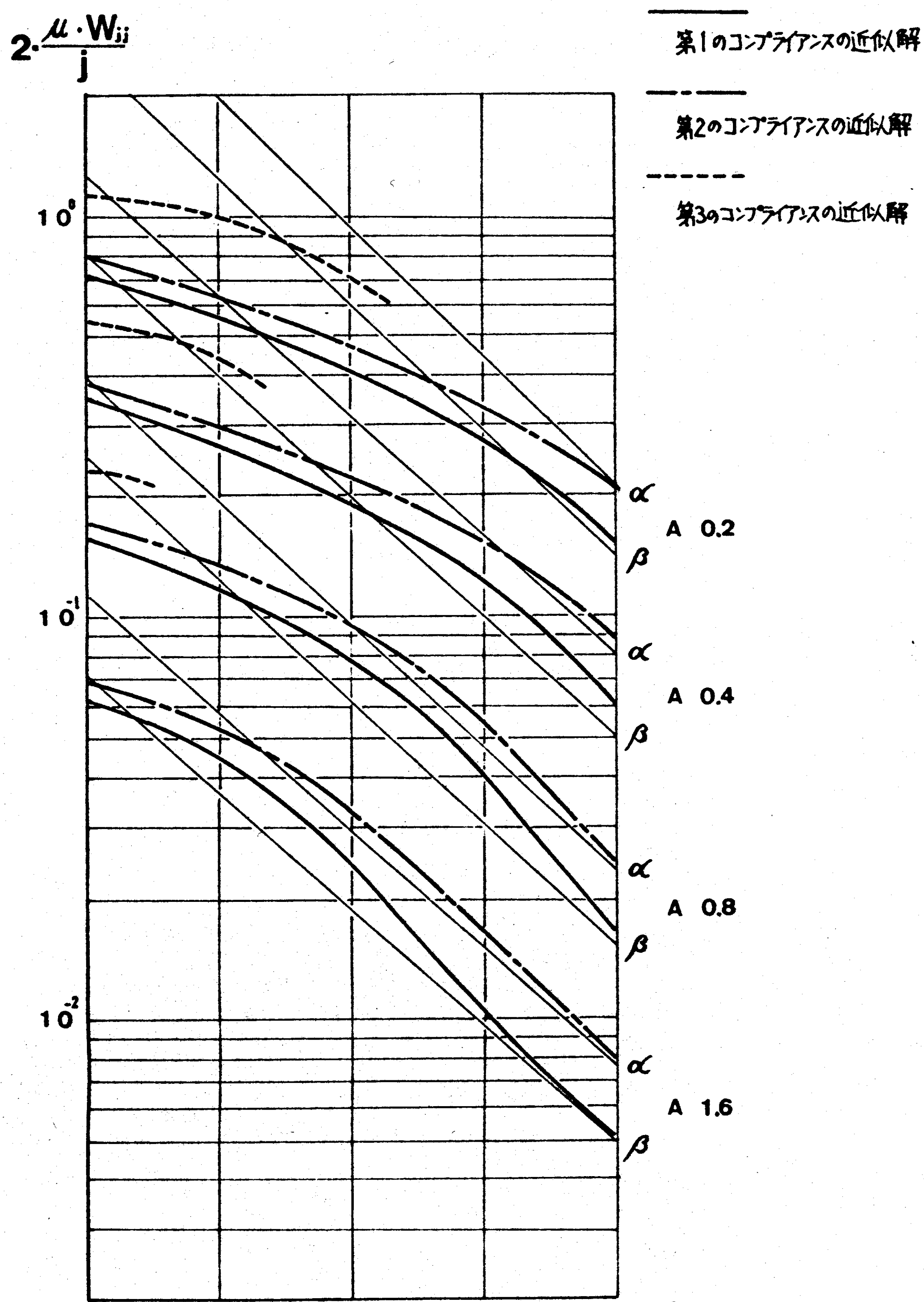


Fig. 3-4-22 杭の分割された要素の h/Ro の関数として

表現したコンプライアンスの近似解

2本の直線β, αは以下のようなものである。

◎直線β

無限弾性体中に無限長の円孔がありこの内壁全面に一様な剪断応力が働いた時の円孔内壁面の変位である。円孔の内壁の半径方向変位は0とする。内壁に働く剪断力は第1のコンプライアンスの近似解を求める上で設定した応力分布((3-4-1)式 pp.44)の $z=0$ における値で

$$\sigma_{zr} = \frac{Q e^{i\omega t}}{2\pi^2 R_0 h} = \tilde{\sigma} \cdot e^{i\omega t} \quad \text{----(3-4-33)}$$

(但し $Q=1$ とする。)

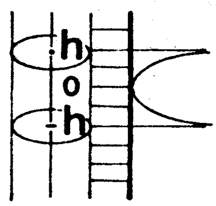


Fig 3-4-23

を用いる。この時弾性体内の変位 U_z は

$$U_z = -\frac{\tilde{\sigma}}{\mu \cdot j} \cdot \frac{H_0^{(2)}(a)}{H_1^{(2)}(A)} \cdot e^{i\omega t} \quad \text{----(3-4-34)}$$

但し

μ; 地盤の剪断弾性定数　　$H_n^{(2)}$; n階の第2種ハンケル関数

V_s; S波速度

R_0; 円孔の半径

r; 半径方向の距離

$j = \omega/V_s$,　$a = j \cdot r$,　$A = jR_0$

と与えられる。杭半径 R_0 が地盤内のS波の波長に比べて大きい場合つまり $A(=\omega \cdot R_0/V_s)$ が大きいとき、(3-4-34)式内のハンケル関数は近似的に指数関数を用いて表現できる。これにより(3-4-34)式はさらに

$$u_z \fallingdotseq -\frac{\tilde{\sigma}}{\mu \cdot j} \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi \cdot a}}\, e^{-i(a-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{\frac{2}{\pi \cdot A}}\, e^{-i(A-\frac{\pi}{4})}} \cdot e^{i\omega t}$$

$$= \frac{\tilde{\sigma}}{\mu \cdot j} \sqrt{\frac{R_0}{r}} \cdot e^{\frac{\pi}{2}i} \cdot e^{i(\omega t - \omega(r-R_0)/V_s)} \quad \text{----(3-4-35)}$$

となる。これは半径方向にS波の速度で進行し $1/\sqrt{r}$ の幾何減衰を示す波動を表現している。さてこの場合の壁面での変位 $\{u_z\}_{r=R_0}$ は $a=A$ として (3-4-34) 式より

$$\{u_z\}_{r=R_0} = -\frac{\tilde{\sigma}}{\mu \cdot j} \cdot \frac{H_0^{(2)}(A)}{H_1^{(2)}(A)} \cdot e^{i\omega t} \quad \text{----(3-4-36)}$$

となる。さらにこの式に $\mu V_s/\omega$ を乗じ無次元化し, $\tilde{\sigma}$ に(3-4-33)式を代入すると

$$\frac{\mu \cdot \{u_z\}_{r=R_0}}{j} = \frac{1}{2\pi^2 A^2 (h/R_0)} \frac{H_0^{(2)}(A)}{H_1^{(2)}(A)}\, e^{i\omega t} \quad \text{----(3-4-37)}$$

となりこの絶対値をFig.3-4-22に直線βとして書き加えた。

⊙ 直線 α

直線βと同様 無限長の円孔の内壁全面に一様な剪断応力が働いた時の内壁の変位であるが 壁面に働く剪断応力は第2のコンプライアンスの近似解を求める上で設定した応力分布((3-4-3)式, pp.47)の $-h<z<h$ における値を用いる。即ち

$$\sigma_{zr} = \frac{Q\, e^{i\omega t}}{4\pi R_0 h}$$

$$= \tilde{\sigma} \cdot e^{i\omega t} \quad \text{----(3-4-38)}$$

よって無次元化した壁面の変位は

$$\frac{\mu \cdot \{U_z\}_{r=R_0}}{j} = \frac{1}{4\pi A^2 (R/R_0)} \frac{H_0^{(2)}(A)}{H_1^{(2)}(A)} \qquad ----(3\text{-}4\text{-}39)$$

となり直線 α は直線 β より $\pi/2$ 倍大きいことになる。

以上の2本の直線に，R/R_0 が大きくなるにつれ 2つのコンプライアンスの近似解が漸近していく様子（Fig 3-4-22）には興味深いものがある。結局 Fig. 3-4-19 及び Fig. 3-4-20 に示した杭の変位応答近似解の差異はこの2本の直線の離隔に起因していると思われる。

杭の応答を計算した時 杭周辺の剪断応力分布に極端に不連続な特異な点が存在しない為にも 第1のコンプライアンスの近似解より，第2 第3の近似解を用いる方がよいと思われる。これらの近似解を用いた杭の変位応答がその厳密解の挙動とよく符合するのは既に Fig. 3-4-20 Fig. 3-4-21 で確認されている。さらに進んで 第2．第3のコンプライアンスの近似解のいずれを用いるべきかという点に関しては，このような両端が固定された壁面で挟まれるという特殊な境界条件を持つ杭の変位応答の計算のみでは議論し難い。しかし一般的な杭基礎の計算にこれらの手法を適用する場合には，2つの近似解で設定した境界条件の差異（Fig. 3-4-9 参照 pp. 49）から，杭半径に比べ杭長の大きくない，"太い杭"に対しては 第3のコンプライアンスの近似解を用いた方がよく "細長い杭"に対しては 第2のコンプライアンスの近似解を用いても充分精度があると考えられる。

§3-5 埼玉大学構内における P.C.杭加振試験

3-5-1 本試験の目的

本試験は前節で提示した，杭基礎の鉛直方向アドミッタンスに関するシミュレーションモデル，及びこのモデルと動的な相反定理より地表の振動を算出することの妥当性を検討する目的で行なわれた。以下に現場のディテイル，杭の諸元，測定系，解析系を示す。

3-5-2 試験の概要

現地は荒川の沖積平野にあり地盤はかなり軟弱である。この地盤

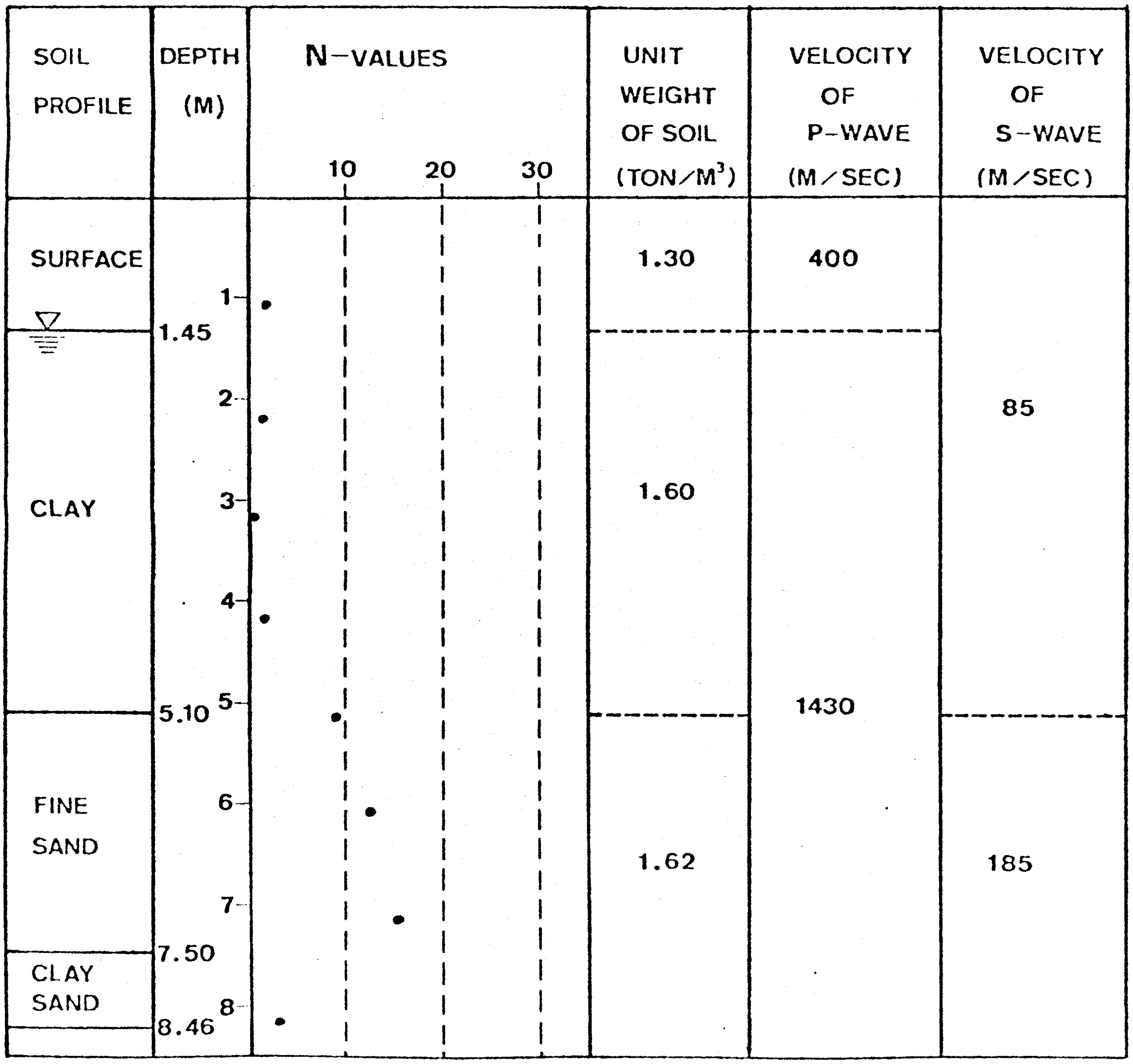


Fig. 3-5-1 埼大構内地質柱状図

の地質柱状図を Fig. 3-5-1 に示す。埼玉大学構内はかなり広い範囲にわたりこのような層が平行に堆積しているものと思われる。地下水面は地表より 1.45m の深さにあり、これより下の地盤においては P波速度は水中のそれとほぼ等しい 1430 m/S になる。

◎ 杭の諸元

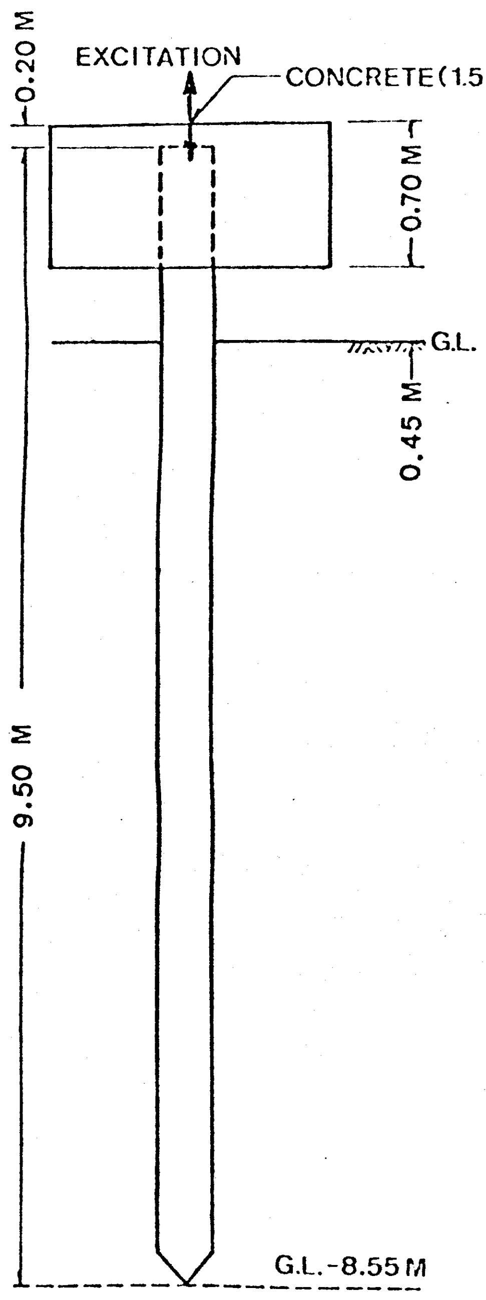


Fig. 3-5-2 埼大構内PC杭概形

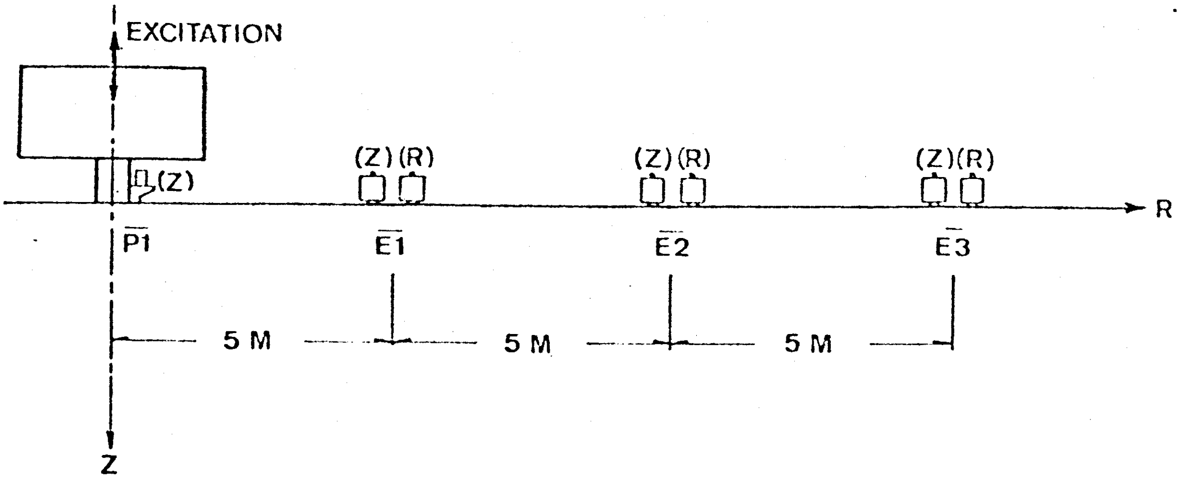
埼玉大学構内に打設された P.C.杭の概形を Fig. 3-5-2 に示す。杭頭には起振器をセットする為に 1.5×1.5×0.7m のコンクリートブロックが付加されている。この P.C.杭の諸元を以下に示す。

〔NCS・PC・PILE の諸元〕

◦外径	300	mm
◦厚さ	60	mm
◦長さ	9.50	m
◦PC鋼線径	7	mm
◦PC鋼線数	12 B	本
◦PC鋼線断面積	4.62	cm^2
◦コンクリート断面積	452	cm^2
◦単位長さ重量	119	kg/m
◦ヤング係数	5×10^5	kg/cm^2

◎測定系

測定点の配置を Fig. 3-5-3 に示す。



ACCELERATION TRANSDUCER

P1(Z)		542−A	EMIC
E1, E2, E3	(Z)	SA−152（改良型）	東京測振
	(R)	SA−151（改良型）	〃

Fig. 3-5-3 測定点の配置

使用検振器の詳細は Appendix 2 に譲る。杭頭の加振は EX-400DL 型起振機（伊藤精機）を用いて行なった。加振振動数は 1~2Hz のきざみで 10Hz から 50Hz まで徐々に上げ、再び 1~2Hz きざみで下げていく方法をとった。この起振器は本来 30Hz 以上には加振振動数を上げることができないが、前節で述べたシミュレーションモデルより、上下動の共振振動数が 35~40Hz であることが予測された為、起振機のプーリを交換し 50Hz まで加振できるようにした。またこの起振機は回転質量型であるので起振力が振動数の自乗に比例して増加していく。その為起振モーメントを 8kg·cm (20~50Hz), 20kg·cm (17~30Hz), 50kg·cm (10~20Hz) と3段階に分けて加振を行なった。

また起振機のコントローラー部の回転数計はプーリーを交換した為使用できず．従って地盤上の測定点 E2 の R方向の加速度応答の信号をディジタルカウンター（TR 5667，タケダ理研）に入力し周波数を測定した。すべてのデータはデーターレコーダ（R-210，TEAC）に収録する。以下に測定系のブロックダイヤグラムを示す。

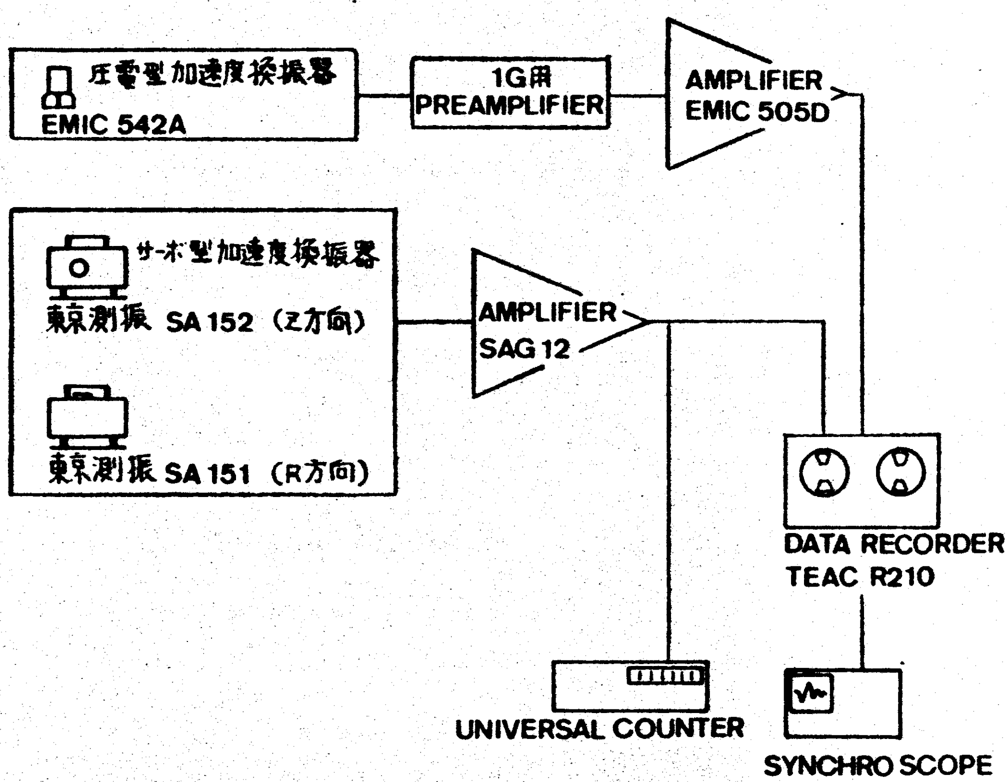


Fig.3-5-4．測定系ブロックダイヤグラム

◎ 解析系

データレコーダー R210 の各チャンネルの出力をディジタルテスターで，また周波数をディジタルカウンターで読みとった。

§3-6 試験結果の検討

3-6-1 杭頭の加速度応答

§3-4で述べた杭の鉛直方向アドミッタンスのシミュレーションモデルにより、前節のFig. 3-5-2に示す埼玉大学構内に打込まれたPC杭頭の加速度応答を、杭の分割数を変えて数値計算した結果をFig. 3-6-1に示す。コンプライアンスとして既に前節で触れた第2(pp.47)、第3(pp.49)の近似解を用いた計算値を併記する。分割数による大きな変化は見られない。(ここではN=40)

i) 地盤

◎表層厚　5.0 m

◎表層内P波速度　1430.0 m/s　◎表層内S波速度　85.0 m/s

◎表層地盤比重　1.6 ton/m^3

◎基層内P波速度　1430.0 m/s　◎基層内S波速度　185.0 m/s

◎基層地盤比重　1.62 ton/m^3

ii) NCS-PC. PILE

◎直径　300.0 mm

◎ヤング率　3.5×10^5 kg/cm^2

◎杭長　9.5 m

◎断面積　452.0 cm^2

◎杭頭付加重量
(起振機+コンクリートブロック)

4.78 ton

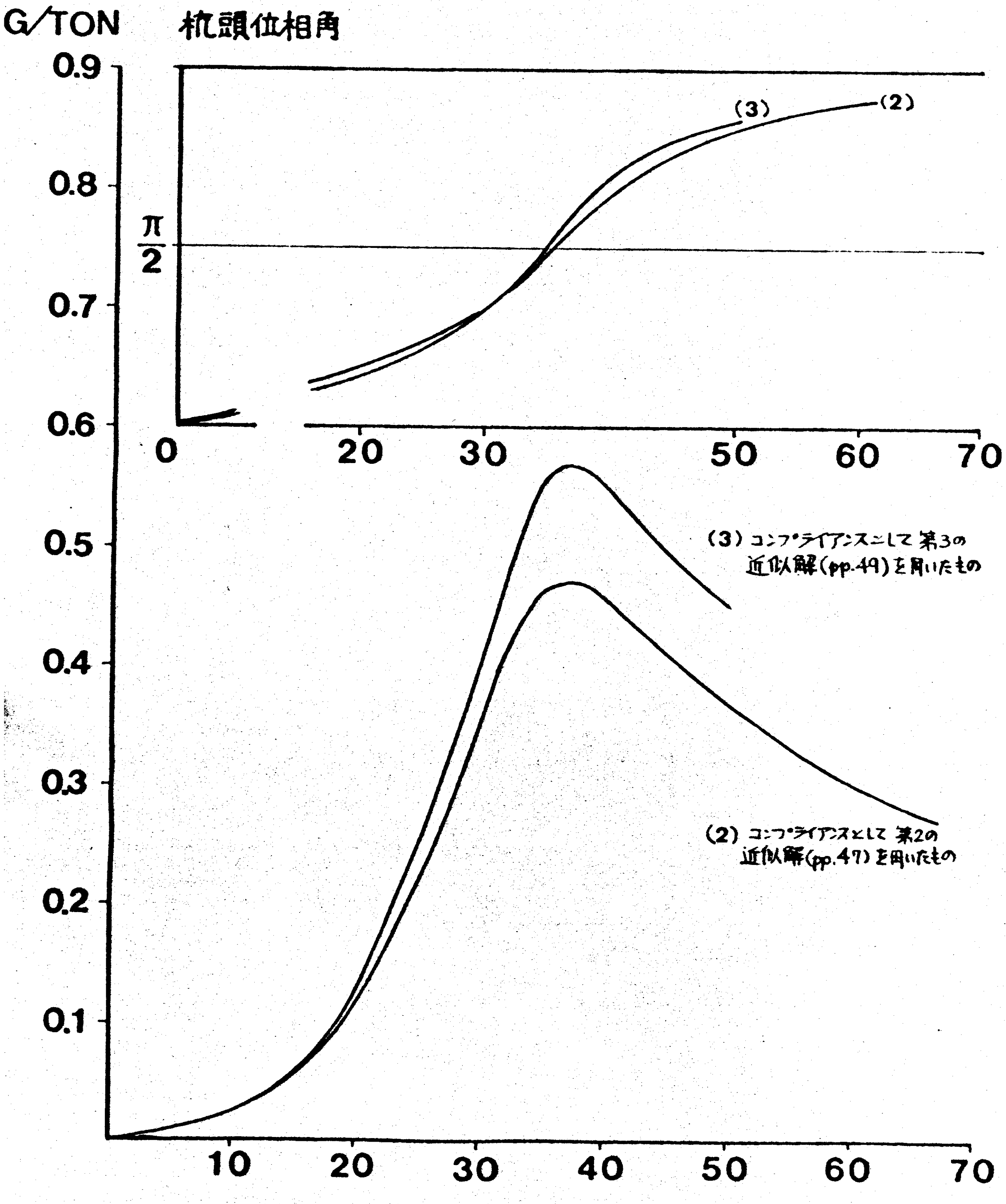


Fig. 3-6-1 杭頭加速度応答

第3の近似解を用いた時の加速度応答の数値計算値に，埼玉大学構内のP.C.杭頭部の測定点P1の出力を重ねてプロットしたものをFig.3-6-2に示す。測定値に見られる共振振動数よりも，計算値の示す共振振動数の方がやや高いがこれには以下の理由が考えられる。

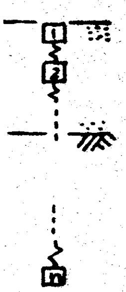
(i) 計算上用いた地盤の弾性波速度が，ボーリング坑内での発破によって求められたものであるので，不均質な地盤内の最も固い部分を強調するような値となっている為

(ii) コンプライアンスマトリックスの要素のうち，基層内の点加振に伴う，表層内のセグメントの変位[※1]，あるいは逆に表層内の点加振に伴う基層内のセグメントの変位[※2]に関する要素は，地表以下がすべて基層と同じ地盤であるとして算出される為

(iii) 地表に近い所では杭体と地盤の付着が完全でなく，その結果，地盤のバネ定数が小さくなっている為

この中で(iii)は，測定された加速度振幅が，計算値より少し大きくなっていることの理由でもあると思われる。

※1，※2　※1は W_{ij} で i が表層 j が下層に存在することである。※2はその逆である。



$$\begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1n} \\ W_{21} & W_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ W_{n1} & \cdots & \cdots & W_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix}$$

セグメントの変位ベクトル　　コンプライアンスマトリックス　　地盤の反力ベクトル

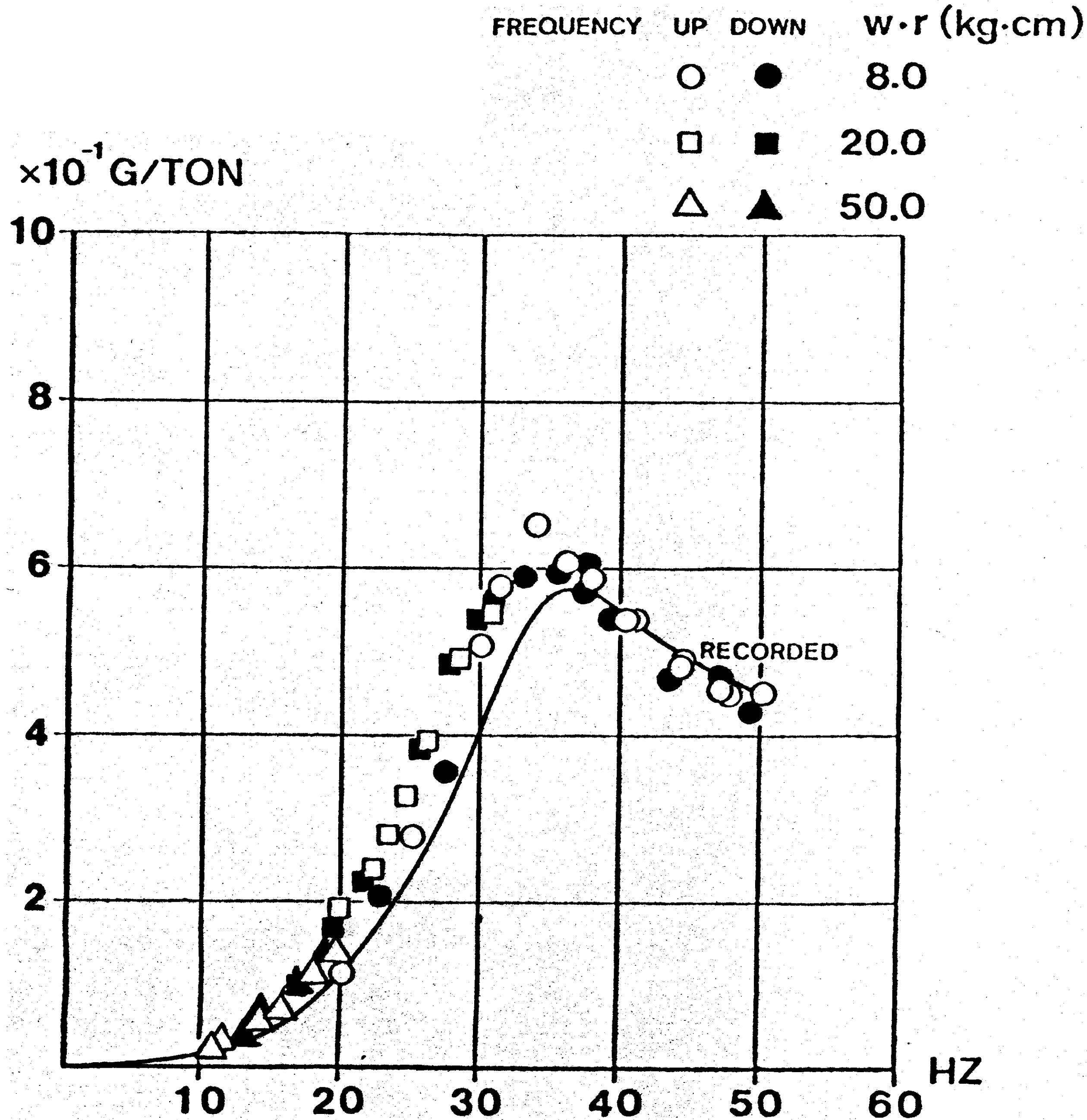


Fig 3-6-2 VERTICAL ACCELERATION RESPONSE
(TOP OF PILE)

Fig. 3-6-2 で杭頭の鉛直方向加速度応答曲線の計算値は，地盤，杭材を線形な材料として得られたものであるので，この計算値と測定値が似ていることは，加速度応答に及ぼす波動の地下逸散に依る減衰の影響が，地盤，杭材の内部減衰以上に支配的であることを示している。

この逸散減衰の影響や，杭の上下動の共振振動数は，地盤の条件が同じでも支持形式が異なれば自ずと変わってくるものと考えられる。以下に杭長の及ぼす影響に対する考察を述べておく。仮に埼玉大学構内と同じ地盤に 3m，6m，9m と長さの異なる杭が打ち込まれていると想定し，§3-4 で示したシミュレーションモデルにより各杭頭の上下方向の変位応答を算出し，これを Fig 3-6-3 に示す。ここで各々の応答曲線より，杭地盤系を等価な一自由度のバネ・マス系に置換することを試みる。(Fig. 3-6-4) 加振振動数が 0 の時の変位よりバネ定数 K が算出され，この K と共振振動数 f_0 よりバネ上の質量 M は

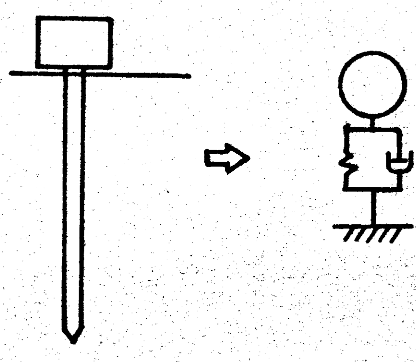


Fig. 3-6-4

$$M \fallingdotseq K/(2\pi f_0)^2 \qquad \text{----}(3\text{-}6\text{-}1)$$

と求めることができる。以下に三本の杭に対する K，f_0，W (=M×G) を示す。

Table 3-6-1

杭長 (M)	k (TON/M)	f_0 (HZ)	W (TON)
3.0	6.0×10^3	16	5.9
6.0	1.6×10^4	29	4.8
9.0	2.2×10^4	35	4.5

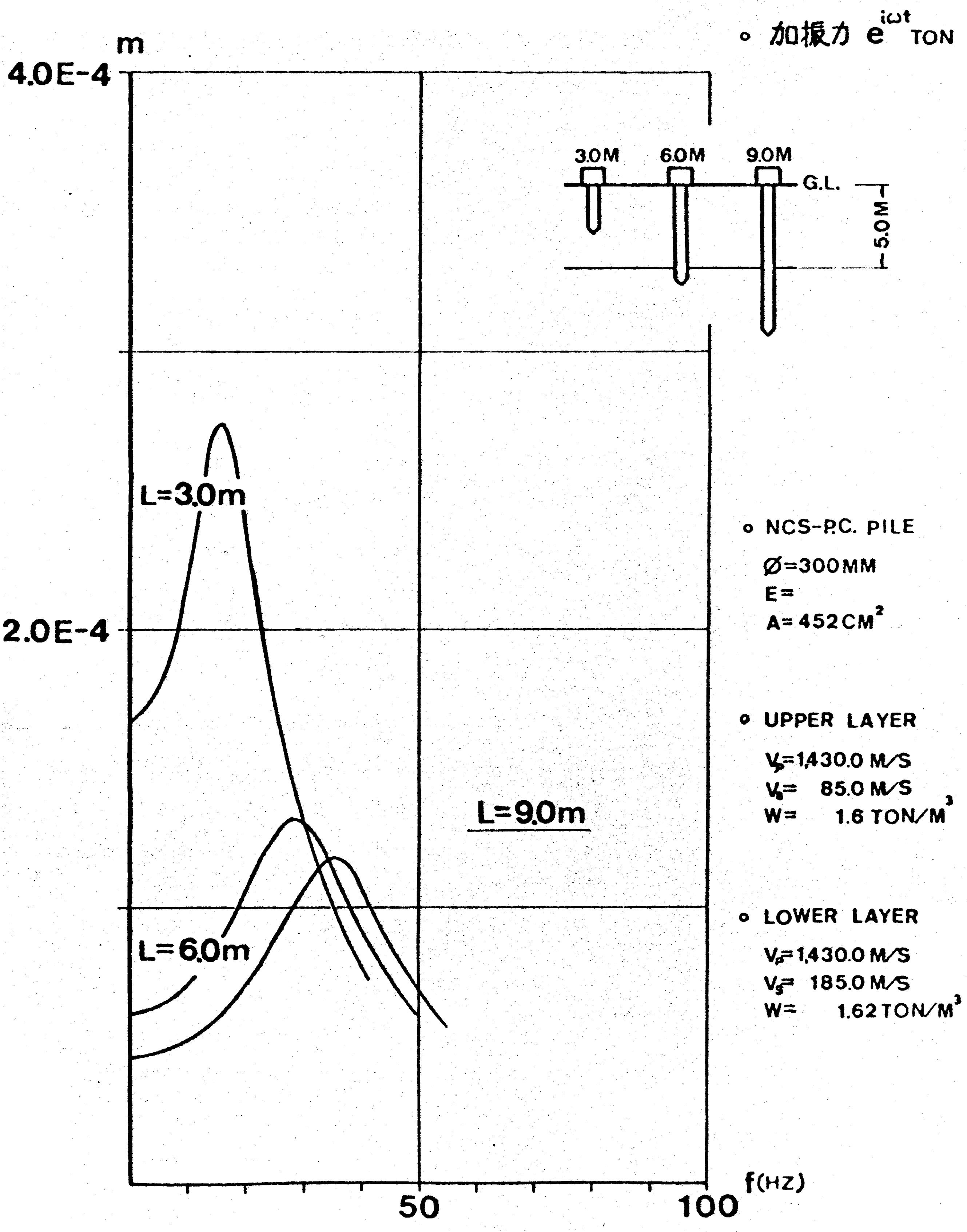


Fig. 3-6-3 杭長がアドミッタンスに及ぼす影響

ここで W は共振振動数 f_0 が小さいものほど大きくなっている。また加振振動数が共振振動数より大きいところでは

$$W \fallingdotseq G/(2\pi f)^2 Y$$

但し G; 重力加速度

Y; 杭頭変位振幅

f; 加振振動数

となり、三本の杭それぞれに対し加振振動数の大きい所での W を算出すると、共に 4.5 ton に近づいていく。これは杭頭に付加されたコンクリートブロックと起振機の重量の和にほぼ等しい値である。

以上のことは構造物基礎の加振という問題に関し、歴史的に文献に繰り返して現われてきた"同位相質量(付加質量)"※が定数ではなく地盤内を伝播する波の波長に依存する量であることを示唆している。

杭長を増し支持層に先端を支持させることはバネ定数を増すことになり、共振振動数は増加する。共振時においては、地盤内を伝播する波の波長は短かく従って付加質量も小さく共振振動数に大きな影響は現われない。ところが杭長を減らし、表層内に杭体が浮いた形になると、杭体の共振振動数は単にバネ定数の減少のみならず、付加質量の増加も相俟って大幅に低下する。

※ フーチング基礎に関するもの

Crockett & Hammond[8] (1949)　　Rao[9] (1961)

杭基礎に関するもの

Penzien[6] (1946)

3-6-2 地表の加速度応答

§3-4の3-4-2項で触れた杭基礎の鉛直方向アドミッタンスのシミュレーションモデルより、杭の分割された要素の変位ベクトルに地盤の反力マトリックス(コンプライアンスマトリックスの逆マトリックス)を乗ずることで杭の周辺摩擦力ベクトルを算出することができる。埼玉大学構内のPC杭を想定して算出した杭の各要素の変位ベクトルをFig. 3-6-5，周辺摩擦力ベクトルをFig. 3-6-6に示す。ともに杭の分割数は10である。変位ベクトルはその絶対値，位相差を補間して連続した曲線で結んでおく。杭長ℓで無次元化した深さ$z/\ell=0.5$を境に周辺摩擦力が不連続になっているのは，この位置が表層と基層の境界面となっていることに依る。Fig 3-6-6より表面，層の境界面及び杭の先端付近に大きな摩擦力が加わることが推測される。

周辺摩擦力ベクトルの各要素を外力として地盤内を加振した時の地表の着目点の振動を要素毎に算出し，これを加え合わせれば杭頭加振に伴う地表の振動を算出することができる。地中の点加振に伴う地表の変位は，§3-3で述べた動的な相反定理により，地表の点加振に伴う地中の変位を表現したLamb[2](1904)の式をもって代用する。このLambの式は複雑な複素積分を含んでおり，この具体的な内容及び数値計算上の技巧はAppendix 1に譲る。ここでLamb[2](1904)の式を用いたということは，地盤を半無限等方弾性体と仮定したことになる。この為表層の存在に起因するレーリー波の分散や，実体波の地層の境界面での反射等の影響は完全に無視される。従って波長に比べ表層厚の大きい所か，あるいは表層内の弾性波速度が基層内のそれと大差ない所で，この手法を適用すべきであると考える。また仮に以上の条件を満たす場所でも加振源である杭よりの距離の大きい所では，表層がエネルギー伝播上のチャンネルとして働くことになり

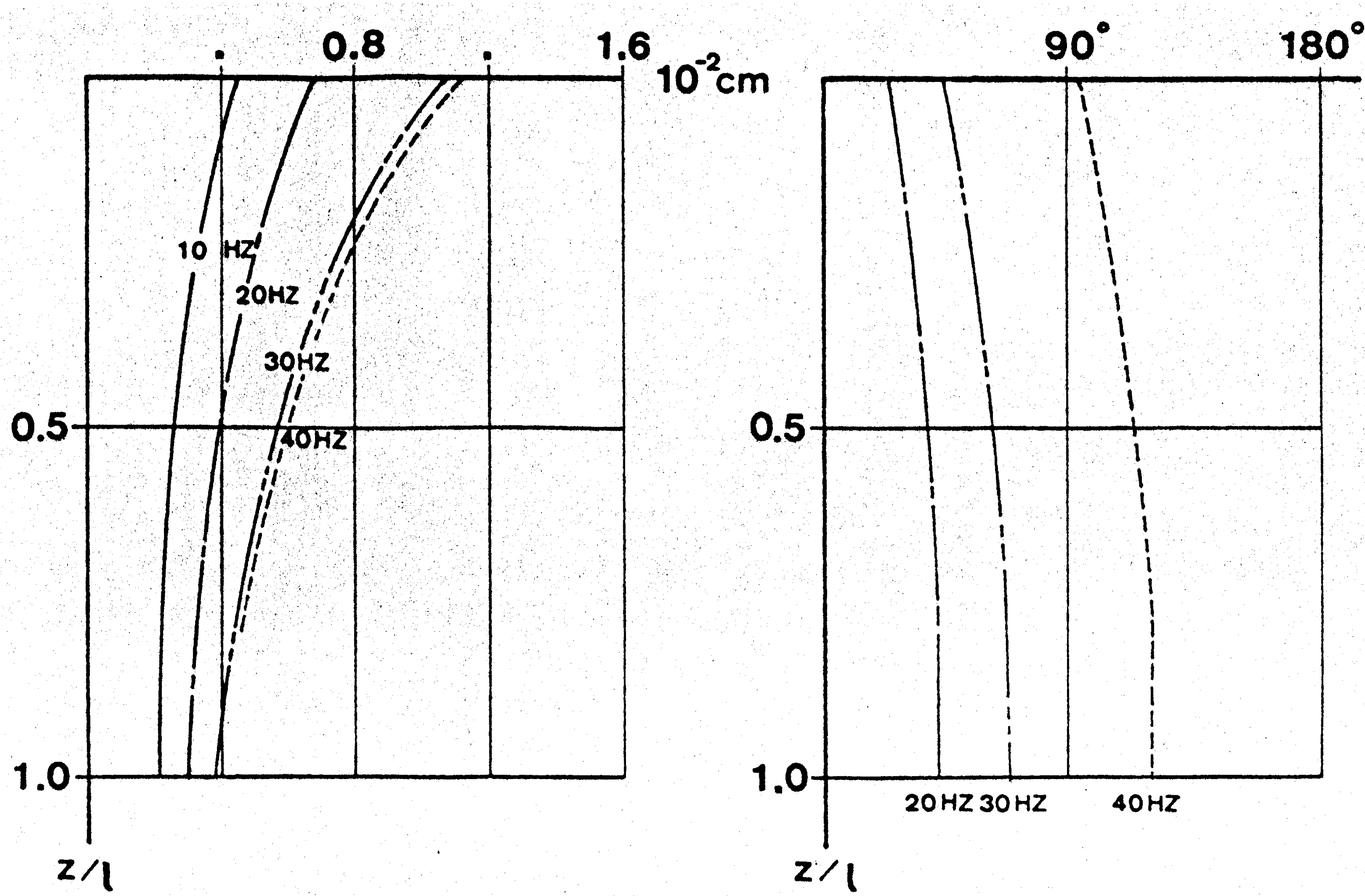


Fig.3-6-5 Displacement Mode of Pile

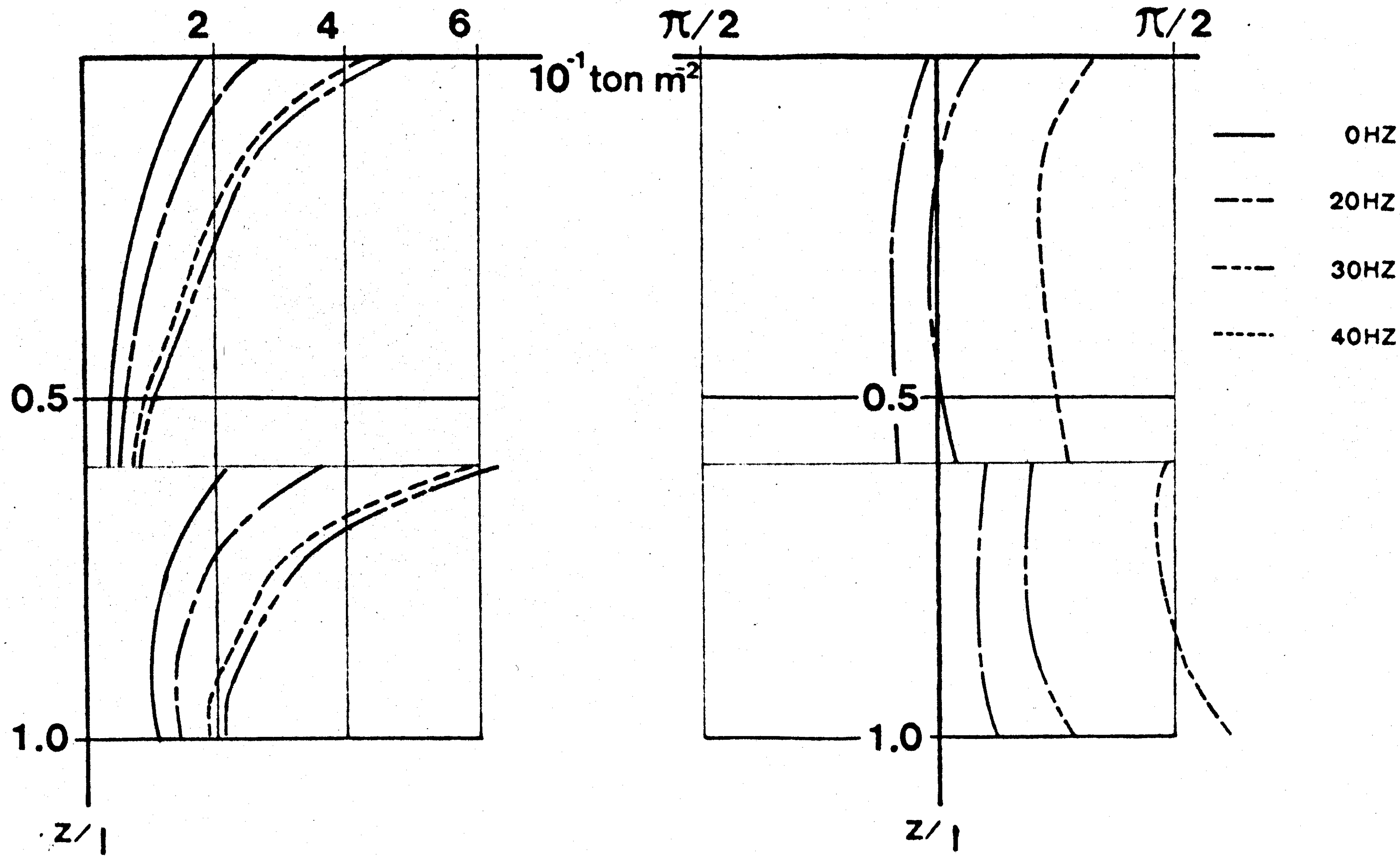


Fig. 3-6-6 Friction Mode of Pile

この手法の適用は避けるべきである。埼玉大学構内のPC杭の杭頭鉛直加振試験では共振振動数は30～40Hzとなり，この範囲でレーリー波，及びS波の波長は2～3mにすぎず，表層，基層の境界面の地表の振動に及ぼす影響は杭近傍では比較的小さいものと考えられる。よって上記の手法に基づき，埼玉大学構内の地下をすべて表層と同じ地質（Fig.3-5-1参照）と仮定し杭頭鉛直加振時の地表の換振器設定地点（Fig.3-5-3参照）の加速度応答を算出した。この絶対値と測定された加速度振幅とをFig.3-6-7～Fig 3-6-9に示す。

全体的に計算値が測定値を上回る傾向が見られるがこれには以下の理由が考えられる。

(i) 地下をすべて表層と同じ地質と仮定したことにより地盤の剛性を過小評価した為

(ii) 実際，地表付近の杭体と地盤の付着は完全でないと考えられ，この為地表付近の杭周辺に大きな摩擦力が働かず，近傍の地表がエネルギー伝播上のチャンネルとならない為

また地表の測定点の水平方向加速度応答の測定値（Fig.3-6-8）に比べ同地点の鉛直方向加速度応答の測定値（Fig.3-6-7）が計算値より小さいのは，杭頭の鉛直加振にわずかながらも偏心があるために本来鉛直動を励起すべきエネルギーの一部が水平動を励起する為に使われたことによると思われる。

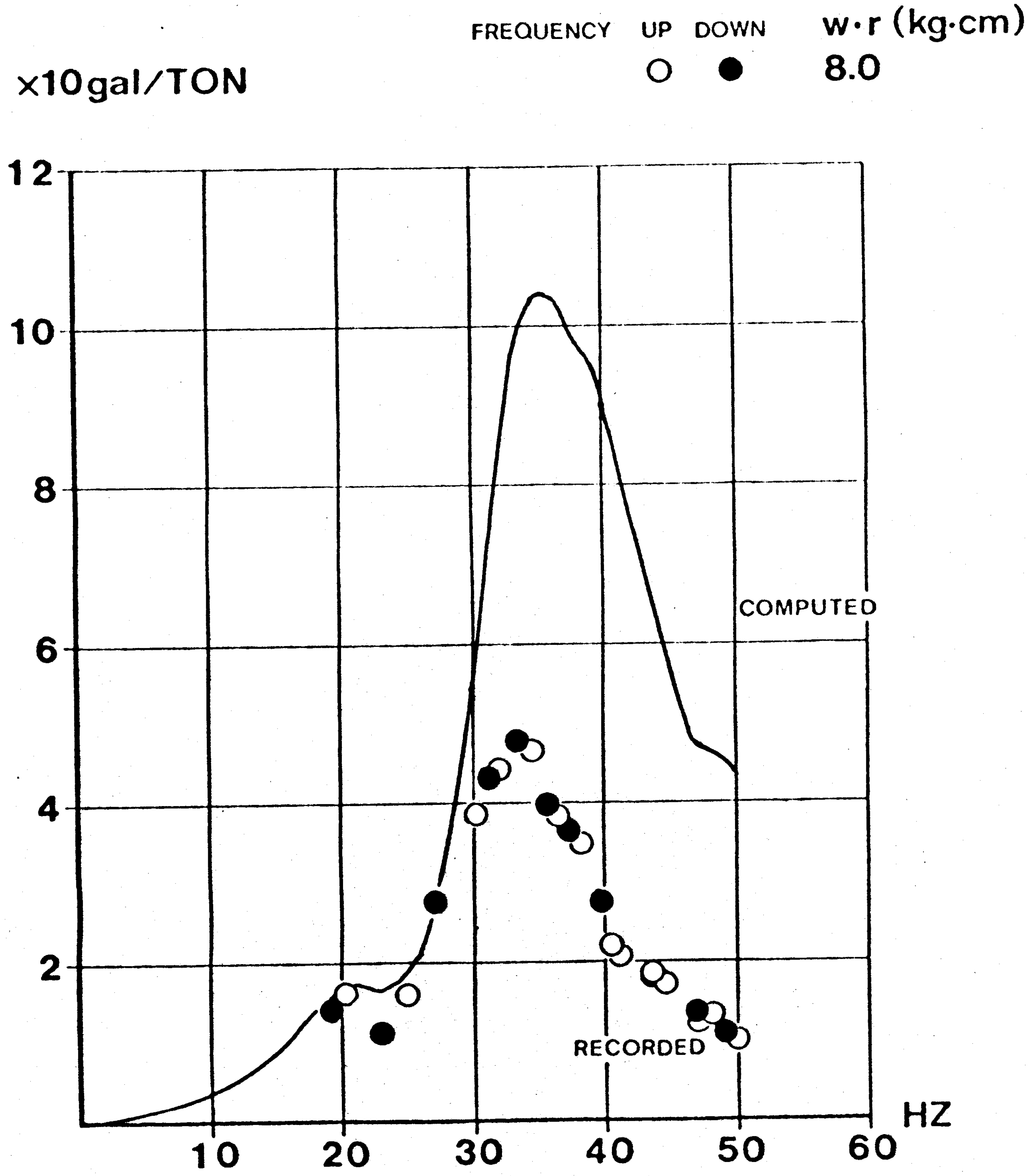


Fig.3-6-7 VERTICAL ACCELERATION RESPONSE OF SURFACE (R=5m)

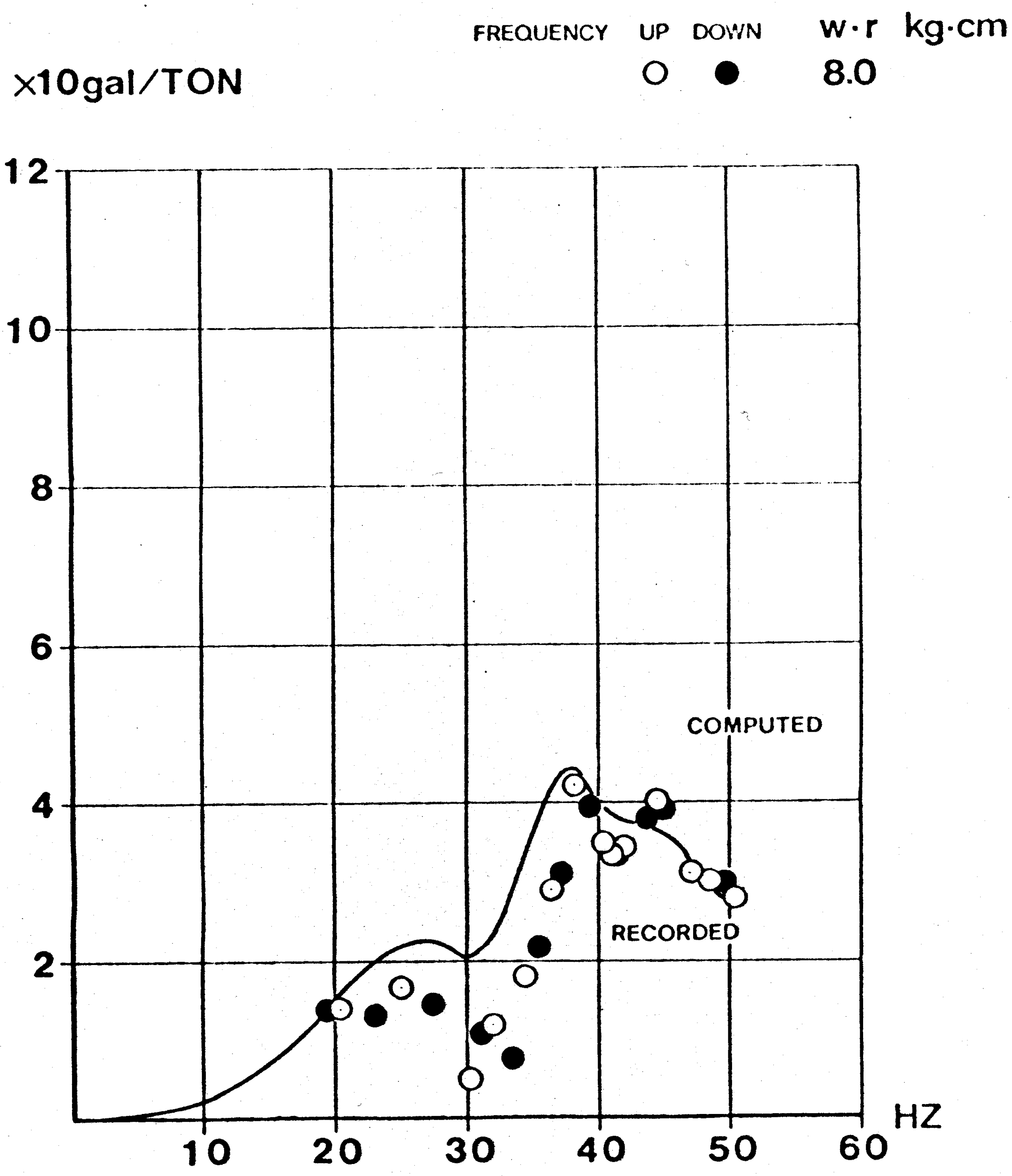


Fig.3-6-8 HORIZONTAL ACCELERATION RESPONSE OF SURFACE R=5m

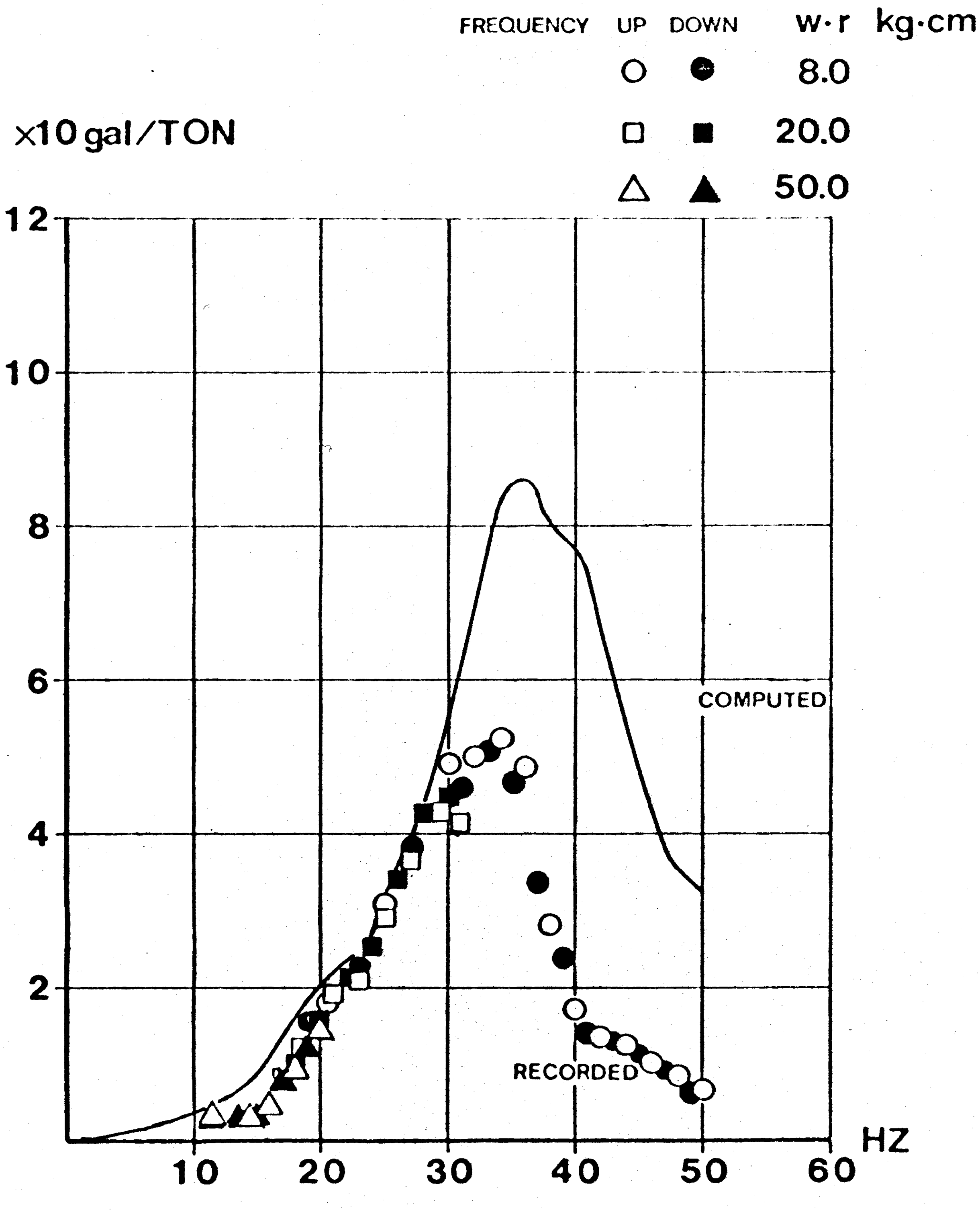


Fig.3-6-9 VERTICAL ACCELERATION RESPONSE OF SURFACE (R=10m)

また地盤の鉛直方向加速度応答の卓越振動数と杭頭鉛直方向の卓越円振動数はともに32~33Hzとなる。これは逸散エネルギーが最大となる振動数にほぼ一致するようである。杭・地盤系のシミュレーションモデルとして本論文で使用した手法は，材料（地盤，コンクリート等）の内部減衰は全く無視し，線形なものとして取り扱っている。従って外力が杭頭に為す仕事はすべて波動の形で地中に逸散していく。外力が杭頭に一周期(T)に為す仕事Eは，外力を $P=P_0\cdot\sin\omega t$ ，杭頭変位を $y=Y_0\sin(\omega t-\varphi)$ とおくと

$$E=\int_0^T P\cdot\dot{y}\,dt$$

$$=P_0\cdot Y_0\,\omega\int_0^T \sin\omega t\cdot\cos(\omega t-\varphi)\,dt$$

$$=\frac{1}{2}P_0Y_0\cdot\omega\cdot\sin\varphi\cdot T$$

$$=\pi\cdot P_0Y_0\cdot\sin\varphi \qquad \text{----(3-6-3)}$$

となる。埼玉大学構内PC杭に関しこれを計算したものをFig. 3-6-10に示す。

ところが，地表の同地点の水平動に着目すると33~34Hz近辺で逆に加速度応答値が小さくなっている。この理由として以下のことが考えられる。分割された杭の各要素より地盤に加わる力を外力として，地表の着目点の変位を求める際の伝達関数としては，§3-3で述べた動的な相反定理によりAppendix 1 の(A-1-6)式（pp. ）を用いる。これは地表（半無限弾性体表面）の水平加振に伴う地中の鉛直方向変位を表現したもので妹沢[5](1929)に詳しい。　この(A-1-6)式内の複素積分を数値計算した結果

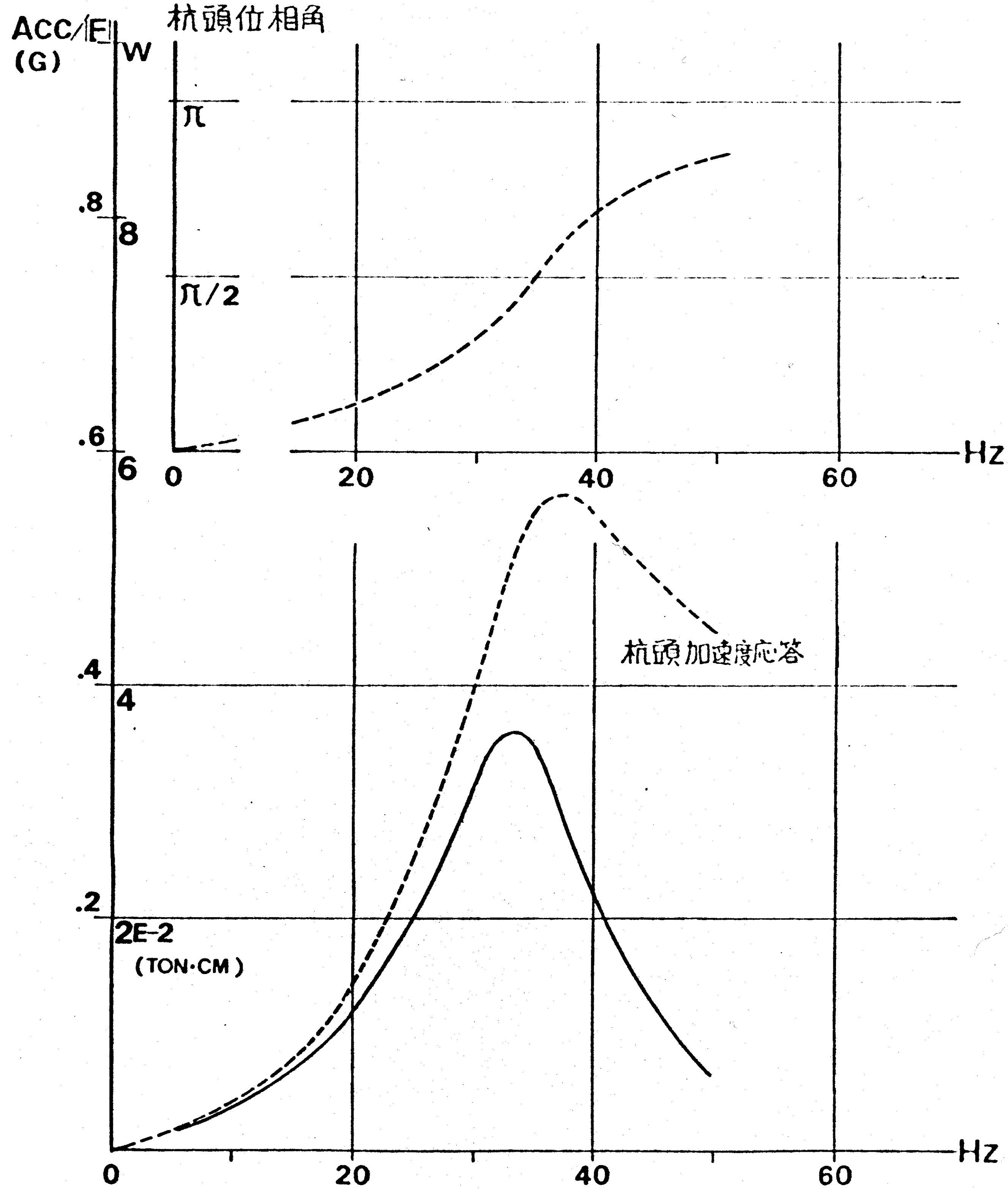


Fig.3-6.10 外力が一周期の間に杭頭に為す仕事

を Appendix 1 の Fig. A-1-11 (pp.)に示す。これは着目点の変位を、静的載荷時の同地点の変位で割った値であり、f_1はその実部 f_2は虚部である。横軸には載荷点より着目点までの距離RをS波の波長の $\frac{1}{2\pi}$ で無次元化した量 $\omega \cdot R/V_s$ をとってあり $\omega R/V_s=0$ のときに

$$f_1 + i f_2 = 1.0 \qquad \text{----(3-6-4)}$$

となるのは当然である。この f_1+if_2 を本論文では変位関数と称する。この変位関数のパラメータとして伏角(dip angle)を用いているが、これは地表の着目点より、杭の分割された要素を見下した角度に相当する。(Fig.3-6-11) Fig. A-1-11は、この伏角が0°のときその変位が、伏角が他の値をとった時の変位に比べ極端に大きくなることを示している。従って杭頭鉛直加振時の地表面の水平動に関しては地表に最も近い杭の分割要素が地盤に加える力の寄与が甚大であると推測される。また既に Fig. 3-6-6 (pp.62)に示したように杭の周辺摩擦力ベクトルの各要素のうち地表に近い要素の絶対値が大きいことも、この傾向をさらに助長するものと考えられる。

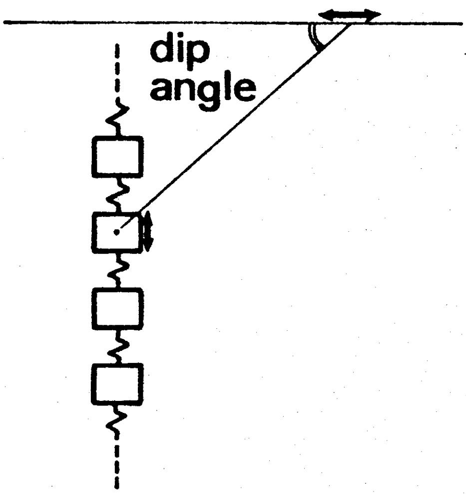


Fig 3-6-11 伏角の定義

これより地表の一点を鉛直加振した時の地表の変位に焦点を絞って考えてみる。地表の加振点より r 離れた地点の加振点を中心に半径方向の水平動 U_r を

$$u_r = P_0 e^{i\omega t} \cdot \frac{1}{2\pi\mu} \cdot \frac{1}{r}(f_1' + i f_2') \qquad \text{-----}(3\text{-}6\text{-}5)$$

但し $P_0 e^{i\omega t}$; 加振力

μ ; 地盤の剪断弾性定数

と表現する。 f_1', f_2' は Appendix 1 の (A-1-6) 式, いわゆる Lamb (1904) の式内の複素積分を実行することにより得ることができる。 この f_1', f_2' は既に田治見, 野嶋等により数値計算されており, 以下にその結果を引用させていただく。 $f_1' + i f_2'$ は 田治見, 野嶋等が 変位関数と称しているものであるが, 本論文で定義した変位関数 (A-1-5 節参照) と定義が異なる事を断わっておく。 鉛直方向変位 u_z も (3-6-5) 式と同様に

$$u_z = P_0 e^{i\omega t} \cdot \frac{1}{2\pi\mu} \cdot \frac{1}{r}(f_1' + i f_2') \qquad \text{----}(3\text{-}6\text{-}6)$$

と表現し, この $f_1 + i f_2$ の絶対値 $\sqrt{f_1^2 + f_2^2}$ を u_r, u_z それぞれについて, S波の波長の $\frac{1}{2\pi}$ で無次元化した距離 $\omega r/V_s$ の関数としてプロットしたものを Fig. 3-6-12 に示す。 またこれより地表の土粒子の軌跡を求め, Fig. 3-6-13にこれを示す。 尚 Fig. 3-6-12 及び Fig. 3-6-13 は 野嶋[10] (1973) より転載したものである。

Fig. 3-6-12を見ると水平方向変位は $\omega r/V_s \fallingdotseq 12$ で極小値をとることがわかる。 埼玉大学構内の表層の S波速度 V_s は 85 m/s で r は 5.0 m であり, 5m 地点の水平動が極小値をとる周波数は Fig. 3-6-8 より 32～33 Hz であり, これより $\omega r/V_s \fallingdotseq 12.0$ となる。 また測定された, 杭より離れ 5m 地点の土粒子の軌跡 (Fig. 3-6-14) も Fig. 3-6-12 と定性的によく一致し, 杭加振時の地表の振動に 地表近くの杭の周辺摩擦力が大きな影響を及ぼしていると考えることができる。

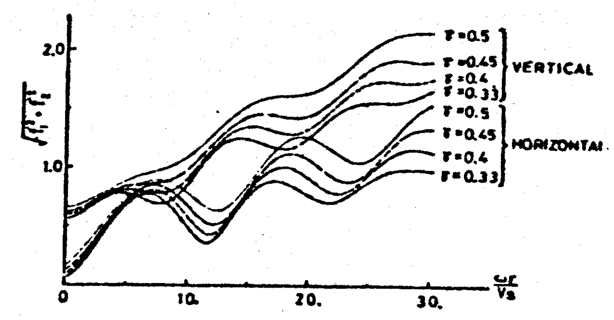


Fig 3-6-12 Absolute values of displacements

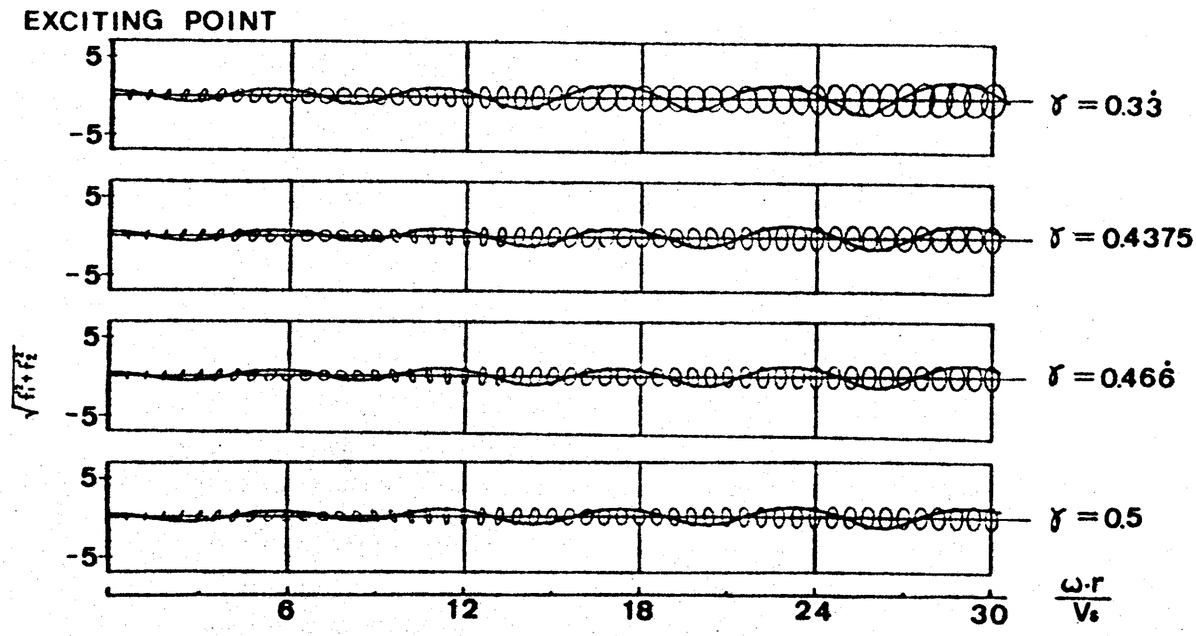


Fig 3-6-13 Computed obits of surface particle at varying ωr/Vs from exciting point.

野嶋[10] (1993) より転載

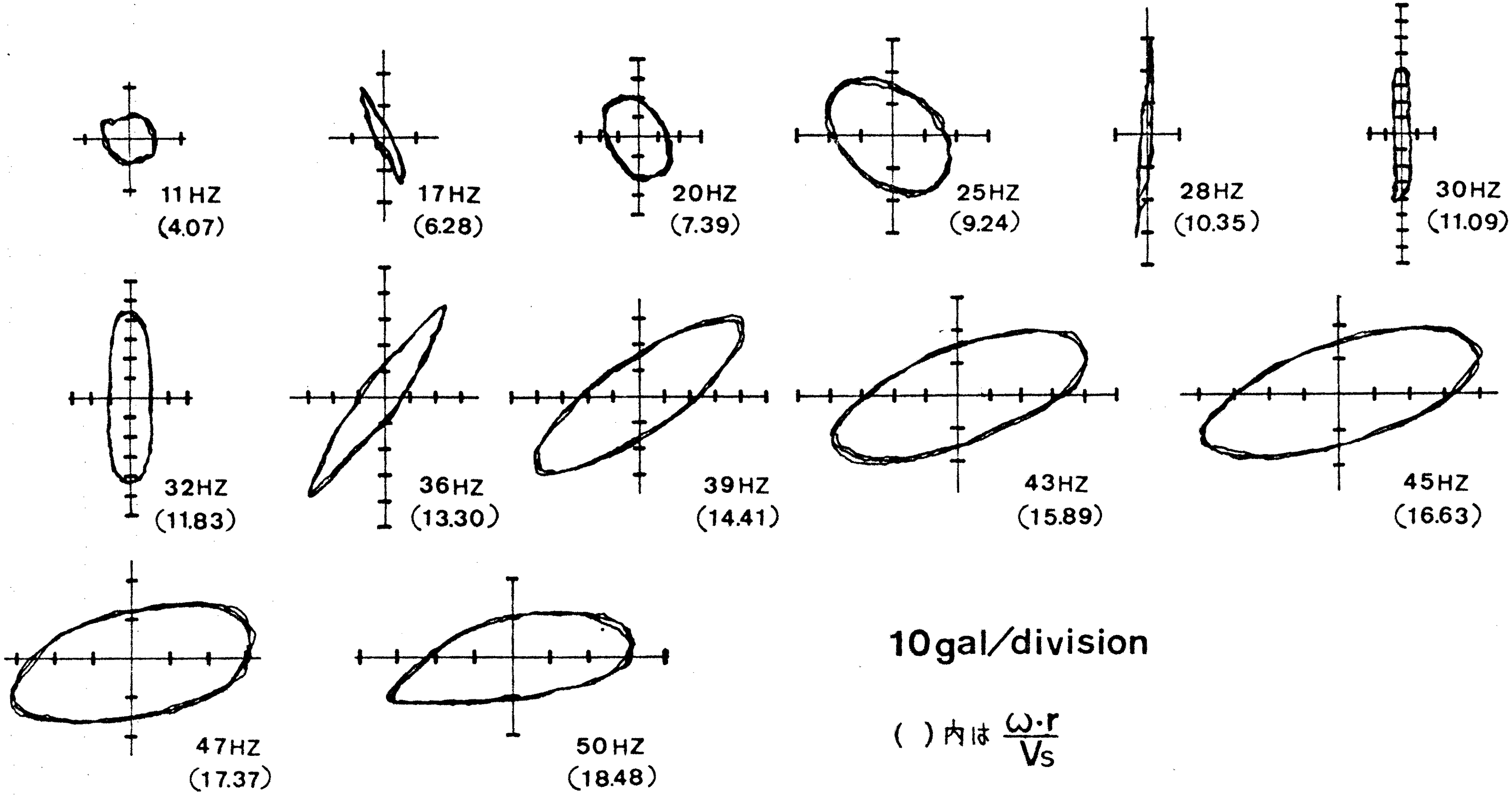


Fig. 3-6-14 PC杭加振時の離れ5m地点の土粒子の軌跡

§3-7 杭基礎を持つ橋脚と地盤の相互作用が地盤振動伝播に及ぼす影響

実際の高架橋橋脚と地盤の相互作用が地盤振動伝播にどのような影響を及ぼすか解明することが本章で目指す最終的な目標である。前節まで主に単杭上に剛体とみなせる質量を載せた構造のアドミッタンスの測定並びにシミュレーションモデルについて論じてきたので群杭上の橋脚を等価なアドミッタンスを持つ,杭頭に剛体とみなせる重量を付加した単杭に置換できれば,この目的にかなう結果が得られるものと考える.(Fig. 3-7-1)

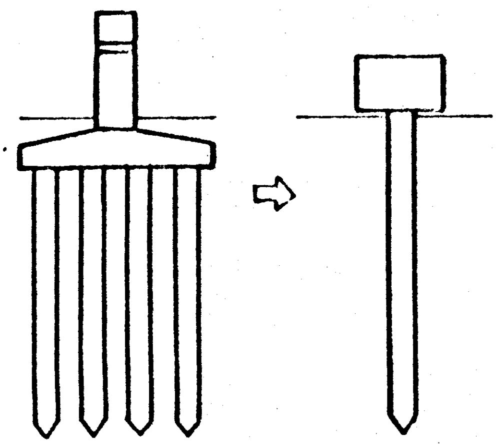


Fig. 3-7-1

ここで橋脚を等価なアドミッタンスを持つ単杭に置換する為に次の操作を行なう。まず Fig. 3-7-1 に示すような橋脚の群杭の総断面積を A_C,群杭に囲まれる土の総断面積を A_E,コンクリートの密度を ρ_C,土の密度を ρ_E とおく。

操作(1)

等価な単杭の断面積 A_P の算定

$$A_P = A_E + A_C + A_V$$

(A_V は杭中の空洞の占める断面積)

操作(2)

等価な単杭の単位長さ当たりの密度 $A_P \cdot \rho_P$ の算定

$$A_P \rho_P = A_E \cdot \rho_E + A_C \cdot \rho_C$$

操作(3)

等価な単杭の長さ L_P の算定

$$L_P = L_G$$ (L_G は群杭の長さ)

操作(4)

杭頭付加質量 M_p の算定

M_p は橋脚のフーチング以上の部分の全質量の和とする。

操作(5)

等価な単杭のヤング率 E_p の算定

$$E_p = (A_E \cdot E_E + A_C \cdot E_C)/A_p$$

(E_E; 地盤のヤング率, E_C ; コンクリートのヤング率)

操作(6)

等価な単杭の半径 R_p の算定

$$R_p = \sqrt{A_p/\pi}$$

A_C, A_E, A_V, ρ_E, ρ_C ---- 等のピアの諸元は表 3-7-1 に示す。ピアの概形は Fig. 2-2-3 (pp. 7) を参照されたい。

Table 3-7-1

A_C (M^2)	A_E (M^2)	A_V (M^2)	L_G (M)
$.859\times10^{1}$	$.626\times10^{2}$	$.876\times10^{1}$	$.126\times10^{2}$
ρ_C ($TON\cdot SEC^2\cdot M^{-4}$)	ρ_E ($TON\cdot SEC^2\cdot M^{-4}$)	E_C ($TON\cdot M^{-2}$)	E_E ($TON\cdot M^{-2}$)
$.23\times10^{1}$	$.17\times10^{1}$	$.5\times10^{7}$	$.157\times10^{5}$

次に支持地盤内の弾性波速度であるが表層に関しては地表にサーボ型換振器を 5m おきに直線上に設置しその一端を打撃する、いわゆる"直接法"により S波速度 $V_s = 171$ m/s P波速度 $V_p = 670$ m/s なる値が得られている。(Fig. 3-7-3) また統計的に S波速度を N値の関数として表現する試みが今井及び金井によってなされている。

今井の式 $V_s \fallingdotseq 76\,\bar{N}^{0.39} = 171$ m/s

金井の式 $V_s \fallingdotseq 19\,\bar{N}^{0.61} = 68$ m/s

(N値は Fig 2-2-2 の地質柱状図 (pp 6) による。)

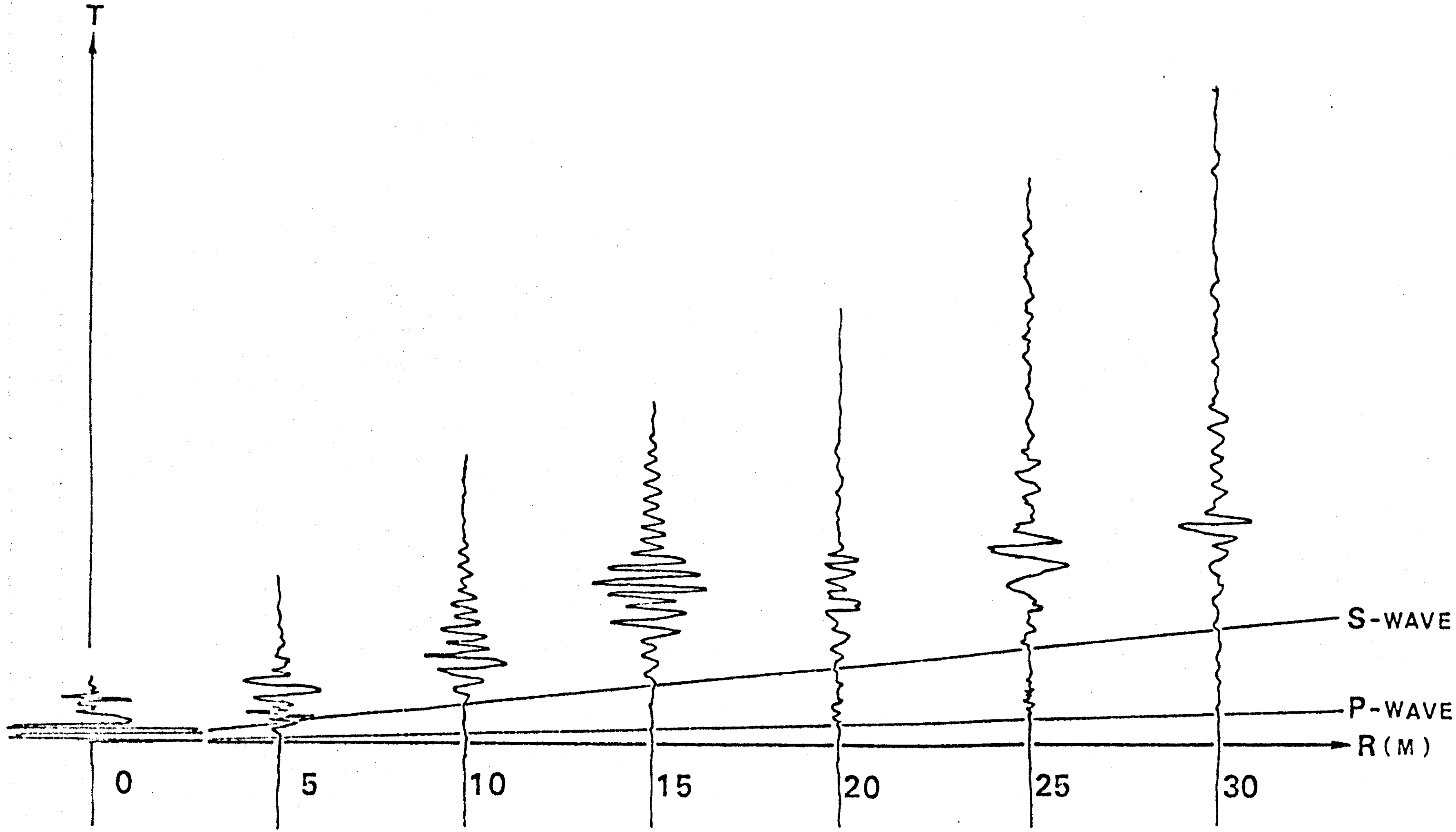


FIG. 3-7-3　地表打撃による波動伝播（庄架道橋周辺地盤）

これは"直接法"による測定結果とさほどかけはなれた数値ではない。従って表層のS波速度は測定により得られた171m/sを用いることにする。またP波速度はG.L.下50cmが地下水面であり，この下でほぼ水中のP波速度に等しくなるとも思われるが，既に§3-2で触れたMiller.G.F.，& H.,Persey(3)(1955)により，P波に分担されるエネルギーはかなり小さく(Fig.3-2-1 pp.36)"直接法"による測定で得られた $V_p = 670$ m/s をそのまま用いることにする。表層の土の比重は粘土の一般的な比重である1.7を採用する。

基層のS波速度はN値50として今井の式，金井の式より得られた値の平均をとり $V_s = 280$ m/s とする。P波速度は水中のそれと等しい1500m/sを用いる。また基層の砂礫の比重を2.0とする。

以上のデータをもとに §3-4 の 3-4-2項で述べた杭基礎鉛直方向アドミッタンスのシミュレーションモデルにより，庄架道橋橋脚頂部の鉛直方向アドミッタンスを算出し，この絶対値に加振円振動数ωの自乗を乗じ，加速度応答に換算したものをFig.3-7-4に示す。※3 1次の固有振動数が15Hz，2次の固有振動数が56Hzとなっており，特に後者の振動数成分の卓越が著しい。比較の為庄架道橋の桁端の測定点BE※1の鉛直方向加速度と，橋脚上の2つの測定点P1，P2※2の鉛直方向加速度の複素フーリエー係数の絶対値の自乗値をFig.3-5-7に示す。桁端の鉛直方向加速度の複素フーリエー係数の絶対値の自乗値を示したのは，これに橋脚・地盤系の持つアドミッタンスの自乗値を乗ずれば P1，P2 の鉛直方向加速度の複素フーリエー係数の絶対値の自乗に比例した値が得られると考えられるからである。桁端BEの鉛直方向変位を $Z_{BE}(t)$，P1，P2の鉛直方向変位を $Z_{p1}(t)$，$Z_{p2}(t)$ とおき $Z_{p1}(t)$ と $Z_{p2}(t)$ はほぼ等しいものと考える。支承のバネ定数をkとおくとピアに伝えられる力P(t)のフーリエースペクトルは

※1，※2 §2-2のFig.2-2-4(pp.8)に測定点の配置を示す。

※3 コンプライアンスは第3の近似解を用いる。

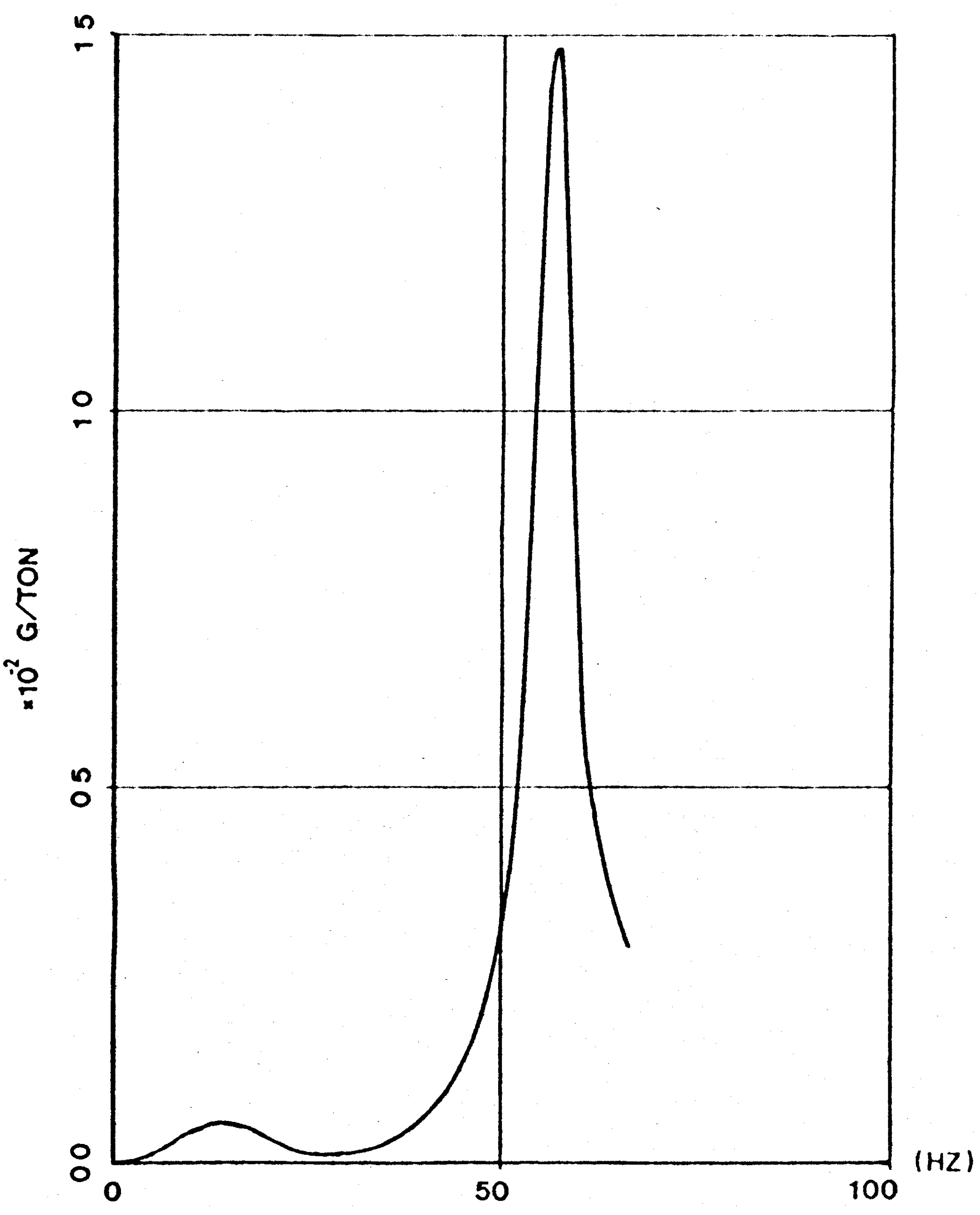


Fig.3-7-4 高架道橋橋脚頂部の加速度応答（計算値）

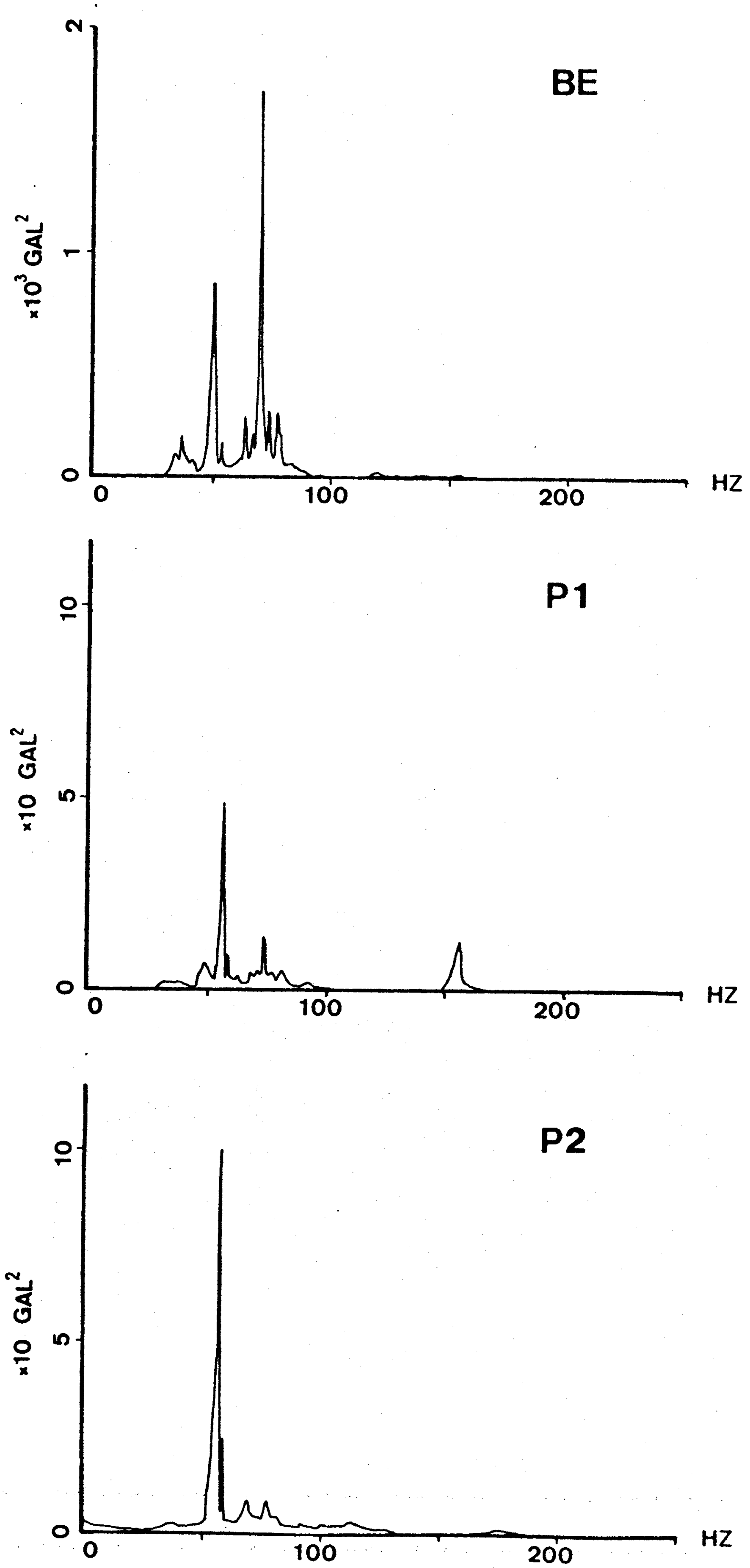


Fig. 3-7-5 各測定点の加速度応答の複素フーリエ係数の絶対値の自乗
(列車走行時)

$$\mathcal{F}(p(t)) = \mathcal{F}(k(z_{BE}(t) - z_p(t))) \qquad ----(3\text{-}7\text{-}1)$$

但し $z_p(t) = z_{p1}(t) = z_{p2}(t)$

またピアの変位 $z_p(t)$ のフーリエースペクトルは，ピア・地盤系のアドミッタンスを $W(\omega)$ とおくと

$$\mathcal{F}(z_p(t)) = W(\omega) \cdot \mathcal{F}(p(t)) \qquad ----(3\text{-}7\text{-}2)$$

と表現される．(3-7-1)式，(3-7-2)式により ピア 地盤系の持つアドミッタンス $W(\omega)$ は

$$W(\omega) = \mathcal{F}(z_p(t)) / k\{\mathcal{F}(z_{BE}(t)) - \mathcal{F}(z_p(t))\} \qquad ----(3\text{-}7\text{-}3)$$

となる。支承のバネ定数 k は支承部にフレシパッド(ゴムと鉄板が互層をなすパッド)を用いてある為に小さく，よって $|z_{BE}| \gg |z_p|$ であると考えられ，これより(3-7-3)式は

$$W(\omega) = \mathcal{F}(z_p(t)) / k\,\mathcal{F}(z_{BE}(t)) \qquad ----(3\text{-}7\text{-}4)$$

となる. Fig 3-7-5 は加速度応答のスペクトルであるので(3-7-4)式をさらに

$$W(\omega) = \mathcal{F}(\ddot{z}_p(t)) / k\,\mathcal{F}(\ddot{z}_{BE}(t)) \qquad ----(3\text{-}7\text{-}5)$$

と書きなおす. 左辺の $W(\omega)$ に ω^2 を乗じたものが Fig. 3-7-4 であり 右辺の分子の自乗値が Fig. 3-7-5 の下2つのスペクトル，分母の自乗値が Fig. 3-7-5 の最上に位置するスペクトルに相当する。

ピアの加速度応答 (Fig 3-7-5 の P1. P2) で 55 Hz が卓越しているが これは Fig. 3-7-4 に現われた第二次の共振に相当するものと考

えられる。

また同時に測定された地表の測定点 E1, E2, E5の鉛直方向加速度の複素フーリエー係数の絶対値の自乗値を Fig. 3-7-6 に示す。ともに 55 Hzの振動数成分の卓越が著しく，このことよりピア・地盤系は，地盤振動伝播上その共振振動数を中心周波数とするバンド・パス・フィルターとして機能するものと考えられる。

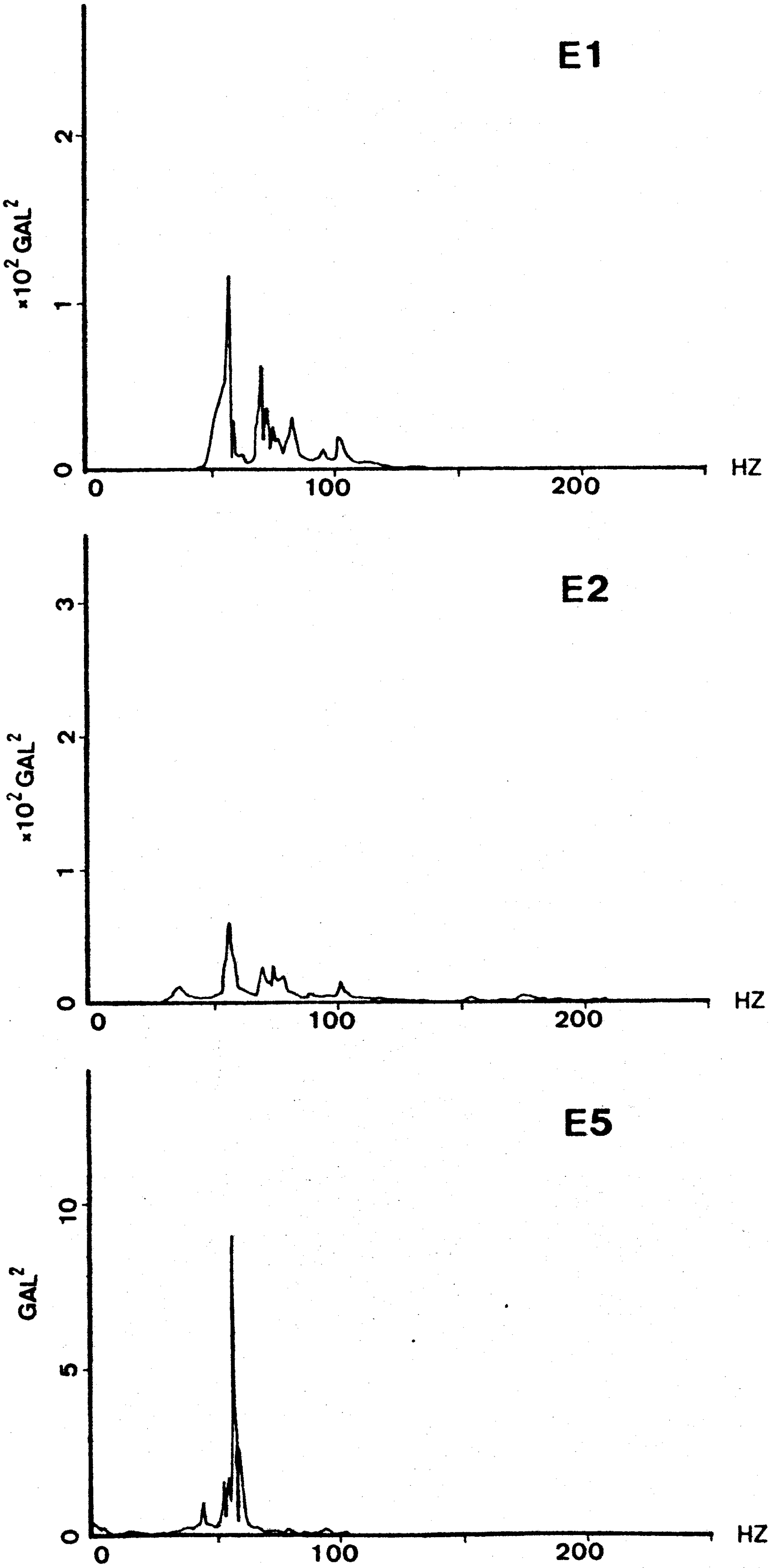


Fig.3-7-6 地上の測定点の加速度記録の複素フーリエー係数の絶対値の自乗

§3-8 杭加振に伴う地表の振動のシミュレーションモデルにおける問題点

杭加振に伴う地表のシミュレーションモデルには，適用上いくつかの限界が存在する。この節ではこうした限界，問題点を整理してみることにする。

(i) 地中加振に伴う地表の振動伝達関数として Lamb, H.[(2)] (1904)の式を用いたことによる問題点

分割された杭のセグメントの地盤加振に伴う地表の振動を算出する伝達関数として Lamb, H.[(2)] (1904) の式を用いているが，これは半無限等方弾性体の点加振に関する波動伝播の式であり，多層構造に伴う波動の反射，屈折及び表面波の分散等の影響を算定できない。従って表層厚が波長に比べ大きいか，あるいは疑似的に半無限等方弾性体とみなせる地盤のみに適用すべきである。

(ii) 分割された杭の要素長が波長に比べ無視し難い大きさになった時の問題点

加振振動数が大きくなり，波長が杭の要素長に比べ小さくなってくると，加振源である拡がりをもった要素周辺からの波動が互いに干渉し，点振源としての仮定が成立し難くなってくる。従って行路差に関する適当な補正を行なうか，杭の分割数を増すかしなければならない。また本論文で用いた Lamb, H. の式の積分の数値計算は無次元化円振動数 $\omega \cdot R/V_s$ （ω；加振円振動数，R；加振点より地表の着目点までの距離，V_s；地盤内S波速度）

が増すにつれ、ほぼこの量に比例して計算時間が増大し、また分割数をふやせばさらに計算量は増大することになる。

従って、これらの点をよく留意して数値計算を実行しなければならない。(ii)の点に関しては Lamb. H. の式内の積分の近似手法(Appendix 1 内の A−1−6 参照)が考えられ、これより算出した地表の振動は Lamb. H. の式をそのまま用いて算出した地表の振動とよく一致したことを付け加えておく。

Ch 4　橋脚間隔が地盤振動に及ぼす影響

§4-1　はじめに

既にCh 2で高架橋橋脚への入力，ch 3で伝達系としての橋脚・地盤系の特性に触れてきて，それらを支配する要因に関する大まかな把握ができたので，出力としての高架橋周辺の地盤振動に話を移す。この高架橋周辺の地盤振動を論ずるにあたっては，ピアへの入力，ピア地盤系の持つ伝達関数の特性のみならず，橋脚が複数存在することによる影響も無視できないと思われる。本章ではこの点に焦点を絞り，複数の高架橋橋脚より放射される波動の干渉に関する検討を行なう。

§4-2 複数の橋脚より地盤に放射される波動の干渉

4-2-1．橋脚が鉛直方向に加振された場合のスパン中央直下の地盤振動

仮に，桁端より橋脚に入力される力によって橋脚が鉛直方向に加振されたとし，この時のスパン中央直下の地盤振動を考えてみる。

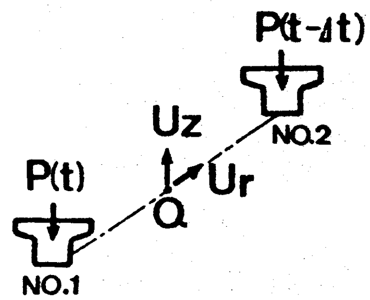


Fig. 4-2-1

この点をFig. 4-2-1に示すようにQとし，同地点の鉛直方向変位をU_z，橋軸方向変位をU_rとする。U_z，U_rに最も大きな影響を及ぼすQ点を挟む二つの橋脚をNO.1，NO.2として，この二つの橋脚の加振だけでQ点の振動が励起されるものと仮定する。最初にNO.1の橋脚にのみP(t)なる力が加わった時のU_z, U_rを考える。NO.1の橋脚を加振した時のQ点の地盤振動のr，z方向変位に関する周波数領域での伝達関数をそれぞれ$T_r(\omega)$，$T_z(\omega)$とすると

$$u_r(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[T_r(\omega)\cdot\mathcal{F}(P(t))\right] \quad \text{----(4-2-1)}$$

$$u_z(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[T_z(\omega)\cdot\mathcal{F}(P(t))\right] \quad \text{----(4-2-2)}$$

但し　$\mathcal{F}$；フーリエー変換　$\int_{-\infty}^{\infty}(\quad)\cdot e^{-i\omega t}dt$

$\mathcal{F}^{-1}$；フーリエー逆変換　$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\quad)e^{i\omega t}d\omega$

という関係が成立する。$T_r(\omega)$，$T_z(\omega)$ という伝達関数は，既にCh3の中で示したように，波動の地中逸散を考慮した杭基礎の鉛直方向アドミッタンスのモデル（§3-4）により算出される杭の周辺摩擦力ベクトル（(3-4-22)式 pp58）を入力として地表の変位をLamb[2]（1904）の式により算出する手法（§3-3）によりシミュレートすることが可能である。

この状態（NO.1の橋脚だけに P(t) なる力が加わっている状態）にさらにNo.2の橋脚に P(t−Δt) なる力が加わった時の u_r，u_z を考える。Q点（スパン中央直下の地表の点）を含み橋軸に直交する平面に対し，地盤及び相方の橋脚が形状的にも質的にも完全に対称であるならば，NO.2の橋脚を加振した時のQ点の変位に関する周波数領域での伝達関数は，(4-2-1)式 (4-2-2)式の $T_r(\omega)$，$T_z(\omega)$ と等しくなる。従って u_r，u_z は

$$\begin{aligned} u_r(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left[T_r(\omega)\cdot\mathcal{F}(P(t))\right] - \mathcal{F}^{-1}\left[T_r(\omega)\cdot\mathcal{F}(P(t-\Delta t))\right] \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left[T_r(\omega)\cdot\{\mathcal{F}(P(t)) - \mathcal{F}(P(t-\Delta t))\}\right] \end{aligned} \quad \text{----(4-2-3)}$$

$$\begin{aligned} u_z(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left[T_z(\omega)\cdot\mathcal{F}(P(t))\right] + \mathcal{F}^{-1}\left[T_z(\omega)\cdot\mathcal{F}(P(t-\Delta t))\right] \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left[T_z(\omega)\cdot\{\mathcal{F}(P(t)) + \mathcal{F}(P(t-\Delta t))\}\right] \end{aligned} \quad \text{----(4-2-4)}$$

となる。(4-2-3)式において右辺第2項の符合が負となり、(4-2-4)式の右辺第2項の符合が正となるのは、橋脚を座標の原点とした時NO.1, NO.2の橋脚という二つの異なる原点から見たQ点の変位のz方向成分は符合が不変であるのに対し、r方向成分は符合が逆転するからである。
ここで話を周波数領域に移し、u_r, u_z のフリエー変換を行なう。
(4-2-3)式 (4-2-4)式より

$$\mathcal{F}(u_r(t)) = T_r(\omega)\cdot\{\mathcal{F}(P(t)) - \mathcal{F}(P(t-\Delta t))\} \quad \text{----(4-2-5)}$$

$$\mathcal{F}(u_z(t)) = T_z(\omega)\cdot\{\mathcal{F}(P(t)) + \mathcal{F}(P(t-\Delta t))\} \quad \text{----(4-2-6)}$$

となる。(4-2-5)式及び(4-2-6)式の右辺の $\mathcal{F}(P(t-\Delta t))$ は次のように変形できる。

$$\mathcal{F}(P(t-\Delta t)) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t-\Delta t)\cdot e^{-i\omega t}dt$$

$$= e^{-i\omega\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty} P(t-\Delta t)\cdot e^{-i\omega(t-\Delta t)}\,d(t-\Delta t)$$

$$= e^{-i\omega\Delta t}\cdot\mathcal{F}(P(t)) \quad \text{----(4-2-7)}$$

(4-2-7)式を(4-2-5)式及び(4-2-6)式に代入すると

$$\mathcal{F}(u_r(t)) = T_r(\omega)\cdot(1-e^{-i\omega\Delta t})\cdot\mathcal{F}(P(t)) \quad \text{----(4-2-8)}$$

$$\mathcal{F}(u_z(t)) = T_z(\omega)\cdot(1+e^{-i\omega\Delta t})\cdot\mathcal{F}(P(t)) \quad \text{----(4-2-9)}$$

(4-2-8)式及び(4-2-9)式内の Δt は $P(t)$ として列車走行時の入力を想定した場合、橋脚間隔 l_s を列車速度 V で割った値 l_s/V に相当する。$\Delta t = l_s/V$ を(4-2-8)式(4-2-9)式に代入すると、

$$\mathcal{F}(u_r(t)) = T_r(\omega)\cdot(1-e^{-i\omega l_s/V})\cdot\mathcal{F}(P(t))$$

$$= T_r(\omega)\cdot 2i\cdot e^{-i\omega l_s/2V}\cdot\sin\left(\frac{\omega l_s}{2V}\right)\cdot\mathcal{F}(P(t)) \quad \text{-----}(4\text{-}2\text{-}10)$$

$$\mathcal{F}(u_z(t)) = T_z(\omega)\cdot(1+e^{-i\omega l_s/V})\cdot\mathcal{F}(P(t))$$

$$= T_z(\omega)\cdot 2e^{-i\omega l_s/2V}\cdot\cos\left(\frac{\omega l_s}{2V}\right)\cdot\mathcal{F}(P(t)) \quad \text{-----}(4\text{-}2\text{-}11)$$

となる。(4-2-10)式及び(4-2-11)式は列車速度 V 及び橋脚間距離 l_s が定まれば、一定間隔で変位のフーリエ振幅が0となる振動数が存在することを示している。このことを $\mathcal{F}(u_r(t))$ について考えてみると、これを0とする条件は(4-2-10)式より

$$\frac{\omega l_s}{2V} = n\pi \quad \text{----}(4\text{-}2\text{-}12)$$

(但し n は整数，π は円周率)

となる。この時Q点(スパン中央直下の地上の点)を挟んで隣接するNO.1, NO.2の二つのピアがどのような運動をしているか考えてみる。既に(4-2-7)式で触れたように、隣接する二つの橋脚の振動の位相差は $e^{-i\omega\Delta t}$ の偏角 $-\omega\Delta t$ で表わされる。Δt は列車速度 V 及び橋脚間隔 l_s により $\Delta t = l_s/V$ と表わされる。よって、二つの橋脚の振動の位相差を φ とすると

$$\varphi = -\frac{\omega l_s}{V} \quad \text{----}(4\text{-}2\text{-}13)$$

となり、さらに(4-2-12)式より

$$\varphi = -2n\pi \qquad \text{-----(4-2-14)}$$

となる。これは隣接する二つの橋脚が完全に同じ位相で振動することを意味している。

同様に（4-2-11）式を0とする条件は

$$\frac{\omega \ell_s}{2V} = \frac{(2n+1)\pi}{2} \qquad \text{-----(4-2-15)}$$

（但し nは整数，πは円周率）

となり，この時隣接する二つの橋脚の振動の位相差φは

$$\varphi = -\frac{\omega \ell_s}{V} = (2n+1)\pi \qquad \text{-----(4-2-16)}$$

となる。これは隣接する二つの橋脚が互いに逆方向に振動することを意味している。

以上のことを整理してみる。（4-2-10）式及び（4-2-11）式より

(1) 隣接する橋脚が同じ位相で正弦加振された場合，その橋脚間中央の地表上の点Qにおいて，U_rは打ち消し合いU_zは強め合う。（Fig. 4-2-2）

(2) 隣接する橋脚が互いに180°の位相差で正弦加振された場合，地表上の点QにおいてU_rは強め合いU_zは打ち消し合う。（Fig. 4-2-3）

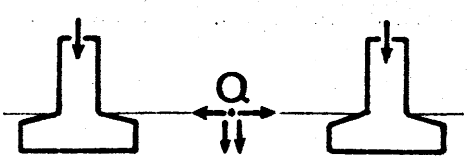


Fig. 4-2-2

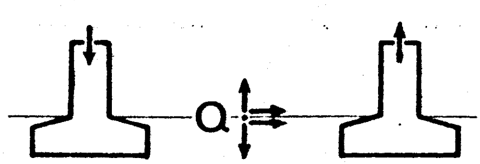


Fig. 4-2-3

また(4-2-10)式及び(4-2-11)式中の$\mathcal{F}(P(t))$を新幹線車輌走行時に橋脚に入力される力のフーリエースペクトルであるとすると、これに関しては既にCh2で詳細に検討している。$\mathcal{F}(P(t))$は(2-3-2)式(pp.15)によって

$$\mathcal{F}(P(t)) = W(f\cdot l/V)\cdot\mathcal{F}(p(t)) \qquad \text{----} (4\text{-}2\text{-}17)$$

但し $W(f\cdot l/V) = \sum_{j=1}^{n} e^{-i\omega\Delta t_j}$　；重み関数

f；振動数　l；固定軸距(2.5m)

V；列車速度　n；新幹線車輌の全車軸数(64)

ω；円振動数($2\pi f$)

$\mathcal{F}(p(t))$；一つの車軸が走行した時橋脚に入力される力のフーリエースペクトル

と表現できる。(4-2-17)式中の$W(f\cdot l/V)$はその概形(Fig. 2-3-2 pp.17)が示すように無次元化振動数$f\cdot l/V$が0.1の整数倍で大きなピークを見せている。列車速度Vを55m/sとした時、$f\cdot l/V = 0.1$は$f = 2.2$Hzとなることを意味している。また一つの車軸が走行した時橋脚に入力される力のフーリエースペクトル$\mathcal{F}(p(t))$として(2-4-2)式(pp.30)を用い(4-2-17)式を(4-2-10)式及び(4-2-11)式に代入すると、

$$\mathcal{F}(U_r(t)) = T_r(\omega)\cdot W(f\cdot l/V)\cdot\frac{2iP_0\cdot l_s}{V}\cdot e^{-i\omega l_s/2V}\cdot\sin\left(\frac{\omega l_s}{2V}\right)\cdot\left[\frac{\sin\left(\frac{\omega l_s}{2V}\right)}{\left(\frac{\omega l_s}{2V}\right)}\right]^2$$

$$\text{----} (4\text{-}2\text{-}18)$$

$$\mathcal{F}(U_z(t)) = T_z(\omega)\cdot W(f\cdot l/V)\cdot\frac{2P_0 l_s}{V}\cdot e^{-i\omega l_s/2V}\cdot\cos\left(\frac{\omega l_s}{2V}\right)\cdot\left[\frac{\sin\left(\frac{\omega l_s}{2V}\right)}{\left(\frac{\omega l_s}{2V}\right)}\right]^2$$

$$\text{----} (4\text{-}2\text{-}19)$$

となる。

再びここで $\mathcal{F}(u_r(t))$ 及び $\mathcal{F}(u_z(t))$ を0とする振動数について考える。既に(4-2-12)式により $\mathcal{F}(u_r(t))$ は $\frac{\omega l_s}{2V}=n\pi$ の時 0になることが示されている。これはさらに

$$f = n\cdot\frac{V}{l_s} \qquad \text{-----(4-2-20)}$$

と書き表わされる。列車速度 V を 55 m/s，橋脚間隔 l_s を仮に 25 m とすると，$\frac{V}{l_s}$ は 2.2 Hz となり $\mathcal{F}(u_r(t))$ を0とする振動数 f は 2.2 Hz の整数倍となる。この振動数は (4-2-18)式 右辺の重み関数 $W(f\cdot l/V)$ のピークが出現する振動数（Fig. 2-3-2 pp. 17）と一致する。このことはQ点の橋軸方向振動のスペクトルに明確な卓越振動数が存在しなくなることを意味している。さらに $\mathcal{F}(u_z(t))$ を0とする振動数については，(4-2-15)式より

$$f = (2n+1)\cdot\frac{V}{2l_s} \qquad \text{-----(4-2-21)}$$

と書き表わされる。また(4-2-19)式の右辺に $\sin\left(\frac{\omega l_s}{2V}\right)$ が含まれていることから，(4-2-20)式を満たす振動数についても $\mathcal{F}(u_z(t))$ は 0となる。(4-2-20)式は

$$f = 2n\cdot\frac{V}{2l_s} \qquad \text{-----(4-2-22)}$$

となり，(4-2-21)式及び(4-2-22)式より $\mathcal{F}(u_z(t))$ を0とする振動数は

$$f = n\cdot\frac{V}{2l_s} \qquad \text{-----(4-2-23)}$$

であればよいことになる。列車速度 V を 55 m/s，橋脚間隔 l_s を仮に

12.5mとすると、(4-2-23)式中の$\frac{V}{2\ell_s}$は 2.2Hzとなり、$\mathcal{F}(u_z(t))$を0とする振動数 f は 2.2Hzの整数倍となる。さきほどと同様、この振動数は(4-2-19)式右辺の重み関数 $W(f\cdot\ell/V)$ のピークが出現する振動数(Fig. 2-3-2 pp. 17)と一致する。このことは、Q点の鉛直方向振動のスペクトルに明確な卓越振動数が存在しなくなることを意味している。

橋脚間隔を12.5mに固定して以上のことを整理してみる。この時、(4-2-18)式及び(4-2-19)式両式に含まれる $\sin\left(\frac{\omega\ell_s}{2V}\right)$ が0となる振動数は2.2Hzの偶数倍の4.4Hz, 8.8Hz ---- となる。この $\sin\left(\frac{\omega\ell_s}{2V}\right)$ はもともと橋脚への入力のスペクトル $\mathcal{F}(p(t))$ {(2-4-2)式 pp. }に含まれていたものであり、12.5mの橋脚間隔を持つ高架橋上を新幹線車輌が走行した場合、その車軸配置によって発現するピアへの入力の2.2Hzの整数倍の成分のうち2.2Hzの偶数倍の成分による加振は存在しないことになる。橋脚の2.2Hzの奇数倍の成分による加振に関しては、隣接する橋脚との位相差が180°となり、相対する二つの橋脚の中央の地盤上(Q点)で橋軸方向の振動は強め合い、鉛直方向の振動は打ち消し合う。従って、橋脚間隔12.5mの新幹線高架橋のスパン中央直下の地盤振動は橋軸方向のみ発現する。但し、橋脚が完全に鉛直方向に加振された場合に限る。

4-2-2 橋脚が橋軸方向に加振された場合のスパン中央直下の地盤振動

次に橋脚が水平橋軸方向に加振された場合のスパン中央直下の地盤振動について考えてみる。4-2-1項と全く同じ手順に従って、橋脚間隔を12.5mに固定した時には以下の結論が得られる。新幹線車輌走行時に橋脚に水平方向に入力される力は、鉛直方向に入力される力と同じく、その車軸配置により2.2Hzの整数倍の振動数成分が卓越すると思われる。このうち2.2Hzの奇数倍の振動数成分は隣接する橋脚で180°位相が異なる。(Fig. 4-2-4) この時相対する二つの橋脚の中央の地表上Q点における地盤振動の橋軸方向成分は打ち消し合い鉛直方向成分は強め合う。これに対し2.2Hzの偶数倍の振動数成分により、隣接する二つの橋脚は完全に同じ位相で加振され、Q点における地盤振動の橋軸方向成分は強め合い、鉛直方向成分は打ち消し合う。(Fig. 4-2-5) 従って、もし12.5mの橋脚間隔を持つ新幹線高架橋上を列車が走行した時、橋脚を水平に加振する力に橋脚を鉛直に加振する力と同じく2.2Hzの偶数倍の振動数成分が含まれないと考えられるならば、Q点における地盤の振動は鉛直方向成分しか励起されない。

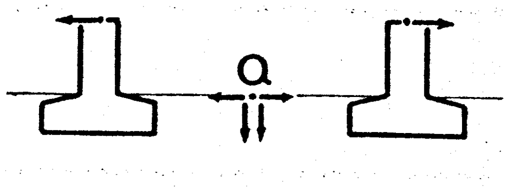


Fig. 4-2-4

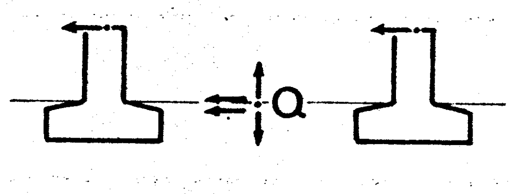


Fig. 4-2-5

4-2-3 橋脚間隔が12.5mの高架橋周辺の地盤振動

4-2-1項及び4-2-2項で高架橋のスパン中央直下の地盤振動について検討してきた。その結果橋脚間隔12.5mの新幹線高架橋の橋脚が、鉛直方向にも橋軸方向にも2.2Hzの奇数倍の振動数成分を含む力によって加振されていると考えられ、この鉛直加振によりスパン中央直下の地盤の橋軸方向振動が、また橋軸方向加振により同地点の鉛直方向振動が励起されるものと思われる。この時の高架橋より橋軸直角方向に遠く離れた地点の地盤振動について、この項で考えてみる。

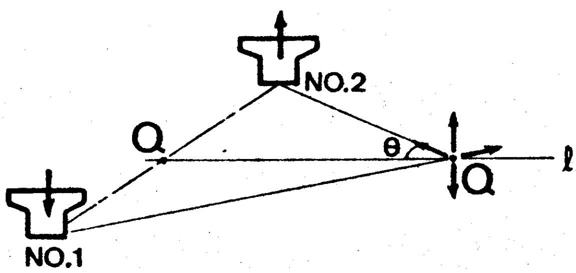


Fig. 4-2-6

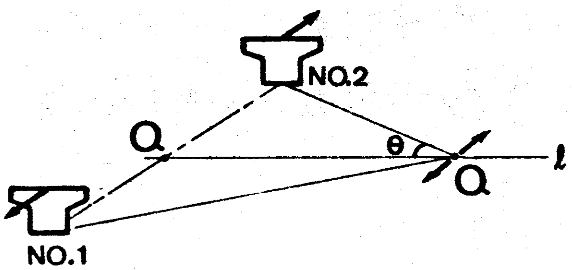


Fig. 4-2-7

Fig. 4-2-6及びFig. 4-2-7に示すように2.2Hzの奇数倍の振動数成分によって隣接する二つの橋脚は互いに180°の位相差でもって加振されることになる。スパン中央直下の地上の点Qを通り、橋軸方向に直角な地表上の直線l'上に着目する点Q'を置く。点Q，点Q'，NO.1（或いはNO.2）の橋脚を結んでできる角度をθとする。橋脚の上下加振により直線l'上の点では、鉛直方向の振動は打ち消し合い、水平方向の振動も$\overline{QQ'}$が大きくなるにつれ、即ちθが小さくなるにつれ打ち消し合うようになると考えられる。

また橋脚の橋軸方向加振により、θが小さいところでのQ'点の橋軸方向の振動は打ち消し合う。 同地点の鉛直方向の振動は、θが小さい場合、このQ'点が加振源である橋脚からみて 加振方向と直角をなす方角にあり、本来起こり得ない。

このように、橋脚間隔12.5mの新幹線高架橋より遠く離れた地点では、隣接する橋脚どうしが互いに180°の位相差をもって加振されることにより、波動が打ち消し合うような干渉を起こすものと考えられる。 もちろんこの現象は、スパン中央直下を通過し、橋軸に直交する直線上にのみ発生する。 これ以外の点に関しても、地盤内を伝播する弾性波の波長が長い場合には、二つの橋脚それぞれからの着目点までの波長で無次元化した距離がほぼ等しくなることが起こり得る。これは相方の橋脚からの伝達関数がほぼ等しくなることを意味し、2.2Hzの奇数倍の振動数成分に関し、波動が打ち消し合う現象が発現すると思われる。 しかし、より厳密には、問題とする二つの橋脚以外の橋脚からの波動の干渉も考慮に入れる必要が生じ、その取り扱いは複雑さを増すことになる。本章では、こうした二次元的な拡がりを持つ地表での波動の干渉を検討する第一段階として、取り扱いの容易な、スパン中央直下を通り橋軸に直交する地表の直線上の点にのみ話を限定する。

§4-3 第一中里架道橋における振動測定

4-3-1 測定の目的

§4-2で述べたように 橋脚間隔12.5mの新幹線高架橋の橋脚は、鉛直方向に2.2Hzの奇数倍の振動数成分を含む力によって加振され、これに伴いスパン中央直下の地盤振動は橋軸方向成分のみ発現すると考えられる。また橋脚が橋軸方向に2.2Hzの奇数倍の振動数成分を含む力によって加振された場合は、スパン中央直下の地盤振動は鉛直動のみ励起されると思われる。但し、橋脚を橋軸方向に加振する力に、2.2Hzの偶数倍の振動数成分が含まれていないと断言することはできない。

以上の現象が実際の新幹線高架橋で発現するか否か調査する目的で、昭和53年3月東海道新幹線第一中里架道橋(東京起点66km)において振動測定を行なった。なお、§4-2の4-2-3項で触れた高架橋から遠く離れた地点での波動の干渉を調査することは、近年住宅の立て込んできた現地の状況から見合わせた。

4-3-2 測定の概要

本測定は昭和53年3月に、神奈川県中郡二宮町の東海道新幹線第一中里高架橋において行なわれた。現地は大磯、国府津間に横たわる起伏の多い洪積地に刻まれた谷間を埋めた平坦な沖積層上にある。測定地点の地質柱状図をFig.4-3-1に示す。支持層上の沖積層はN値1以下のかなり軟弱な地盤である。測定地点は、この沖積層の厚さが最も大きい場所にするように選定された。これは既に§3-4で触れた杭基礎のアドミッタンス及びLamb, H.[2](1904)の式を使用した杭周辺地盤のシミュレーションモデルを用いるのに、地盤内の剪断波の波長

に比べ表層厚の大きい場所が適しているからである。この詳細な理由に関しては §3-8 (pp.105) に譲る。

測定を行なった高架橋はスパン 12.5m の桁を上り線、下り線とも同一の橋脚で支えている。この高架橋の全体図を Fig.4-3-2 に示す。測定地点はこの図において④⑤の橋脚を中心にその周辺地盤に限定する。これはこの地点の地表より支持層までの深さが大きいことと②,③の橋脚の間の道路の舗装及び路上を走行する自動車の影響を避けたことによる。上下線中心から橋軸直角方向にそれぞれ 10.5m の幅は鉄道用地となっており地盤上の換振器はすべてこの区域内に設定する。またこの全体図 (Fig.4-3-2) の左端のアバットメントⒶの脇には保線上軌道に立ち入る為の扉があり、この扉にあけられた覗き窓より水平に軌道内を見るとこの視線上にレール頭面があるので、ここに列車の位置、及び速度を検出する為の光電スイッチを置く。ピックアップの設置状況、測定点の配置に関しては後に詳しく触れる。

深度 (m)	土質名
3.56	盛土
8.08	ピート混じり粘土
14.0	粘土・礫混じりピート
19.5	ピート混じり粘土
22.8	細砂
	細砂

Fig.4-3-1 現地の地質柱状図 (⑤のピア直下)

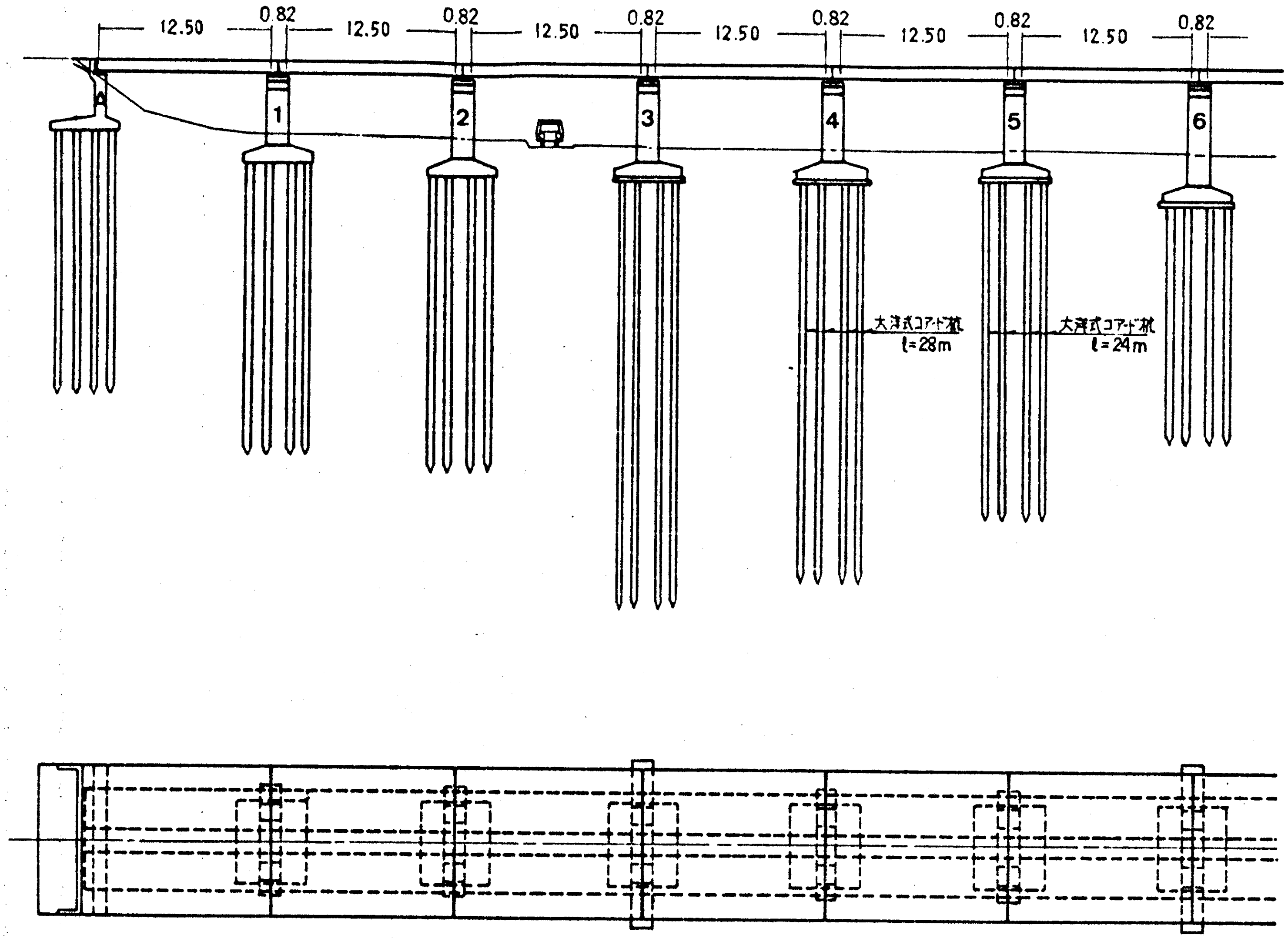


Fig.4-3-2　第一中里架道橋概形

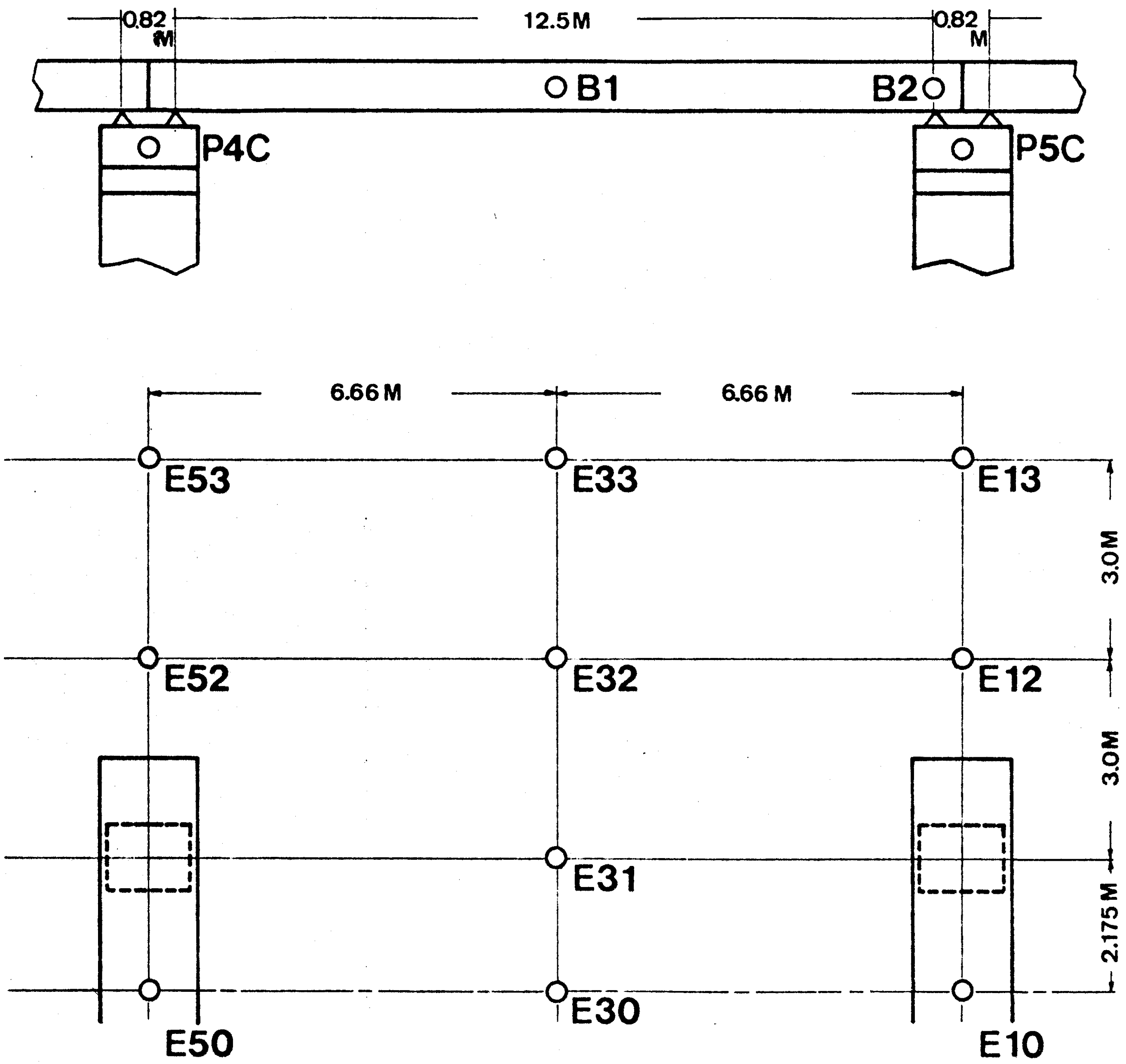


Fig 4-3-3　測定点の配置

○測定点の配置

測定点の配置をFig. 4-3-3に示す。この図において測定点名の頭文字のBは桁，Pは橋脚，Eは地盤上の点を意味する。またBを頭文字に持つ測定点B1，B2は下り線桁上の点である。これは列車進入を検知するマーカー（光電スイッチE3N-30（OMRON）使用）を測定地点より東京寄りの場所に設置せざるを得なかったからであり，従って測定は，下り列車走行に重点を置いて行なわれた。光電スイッチの設置状況はこの後に詳しく触れる。また各測定点においてXは橋軸直角方向，Yは橋軸方向，Zは鉛直方向である．以下に測定点と使用換振器との対応を示す。

Table 4-3-1

測定点	換振量	換振器	
B1（Z） B2（Z）	ACCELERATION	541A 542A	EMIC
P4C P5C（X Y Z）	ACCELERATION	SA151 SA152（Z）	東京測振
E10 E33（X Y Z）	VELOCITY	SM-111S SM-112S(Z)	東京測振

○光電スイッチの設定

列車の位置及び速度検出の為 またデータ解析上AD変換のスタータ―として用いる為，光電スイッチを設置し その出力をすべての測定ケースにおいてデータレコーダーに収録した。この光電スイッチは次の条件を備えたものでなければならない。

(i) 列車運行上，目障りとなるような強烈な可視光を発生しないもの。

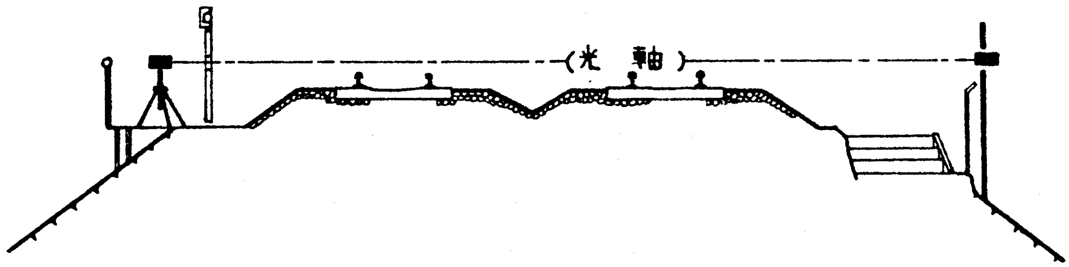
(ii) 日中の外乱光に対しても誤動作のない，光変調(投光部)・復調(受光部)方式であるもの。

(iii) 高速で走行する車輪を検知し得るような応答時間の短いもの。

(iv) 軌道内に光電スイッチを設置できないので 検出可能な距離が15m以上のもの。

(v) 光電スイッチ設置場所は振動が大きく，特に受光部は人の背よりはるかに高い場所にパイプで支持しなければならないため指向角にある程度の広がりが許容されるもの。

以上の条件を満たすものとして E3N-30(オムロン)を使用した。この具体的な仕様は Appendix 3に譲る。Fig.4-3-4に光電スイッチの設置状況を示す。



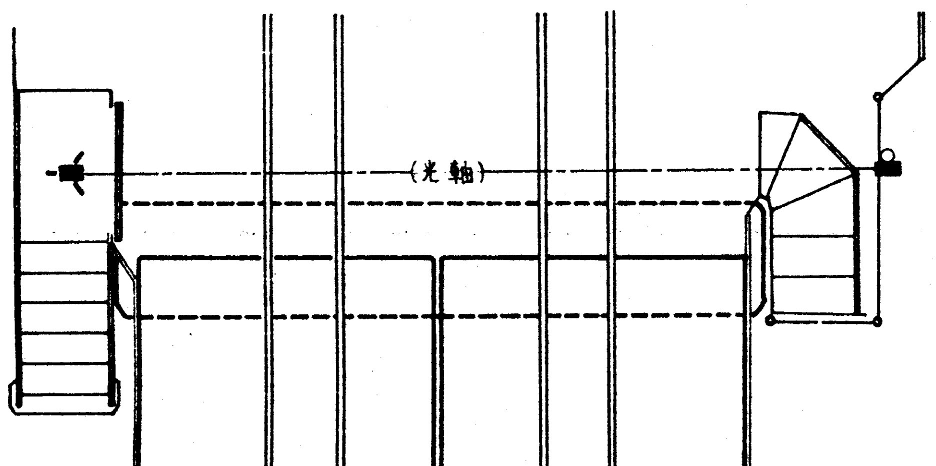


Fig. 4-3-4 光電スイッチの光軸

§4-4 測定結果の検討

4-4-1 隣接する二つの橋脚の位相差

隣接する二つの橋脚上の測定点 P4C, P5C の速度応答波形及びこの複素フーリエ係数の絶対値を Fig.4-4-4～Fig.4-4-7 に示す。これらのデータは ハイブリッド計算システム CLOAPAS 2000E (Fig.2-2-8 pp.14) をAD変換器として用い，データーレコーダ(R280 TEAC)に収録された記録を紙テープに穿孔し，東大大型計算機 HITAC 8700-8800 に依り処理したものである。具体的には光電スイッチの最初のパルスをスターターとしてこのパルスを読み取った後，ハイブリッド計算システム内で設定した待ち時間を経過してAD変換を開始した。(Fig.4-4-1) ここでは待ち時間を 2000. msec としている。従って Fig.4-4-4～Fig.4-4-7 に示す速度波形は列車の先頭のエプロン部が光電スイッチの光軸(Fig.4-3-4 pp.124)を横切ってから2秒後，即ち列車が光電スイッチ設置位置より約110m通過した後のものである。また各々の速度応答波形上に光電スイッチの出力を併記する。但しこれは各測定点の存在する橋脚上に光電スイッチを設置した時の光電スイッチの出力と等しいものに，時間をずらして置き換えたものである。

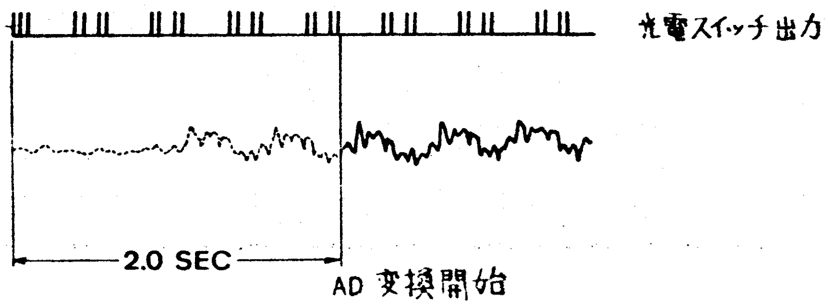


Fig.4-4-1

また Fig. 4-4-4 ～ Fig. 4-4-7 の速度応答波形に重ねて書いた緩やかな曲線は，この速度応答を抵抗，コンデンサー，及びオペアンプ(差動増幅器)を用いて構成したシミュレーテッド・インダクタ・バンド・パス・フィルター(Appendix 3)を通して得られた波形である。この操作は新幹線の車輌長に依存する振動数成分(列車速度 55 m/s の時 2.2 Hz 成分)を抽出する為に行なわれた。従ってフィルターの中心周波数は，列車速度に応じて少しずつ変える必要があるが，ほぼ 2.2 Hz に設定されている。このバンド・パス・フィルターは Fig. 4-4-3 に示すように帯域幅が狭く，この中心周波数付近では，わずかな周波数のずれで位相が大きく変化する。よってこの中心周波数は各列車ごとに厳密に設定されなければならない。その設定は以下の手順で行なう。

(1) このバンド・パス・フィルターは入力端子を二つ持ち，各々に対する出力特性は Fig. 4-4-3 に示すように異なっている。これを入力 A，入力 B と称し，この内，A の入力端子を用いることにする。この時中心周波数における，入力と出力の位相差は 0° となる。

(2) ファンクション・ジェネレーターにより設定する中心周波数に等しい正弦波を発生する。この正弦波の周波数は，ユニバーサル・カウンターでその周期を測定し確認する。

(3) この正弦波をバンド・パス・フィルターに通し出力電圧と入力電圧の位相差が 0° になるようフィルターの中心周波数を設定する。

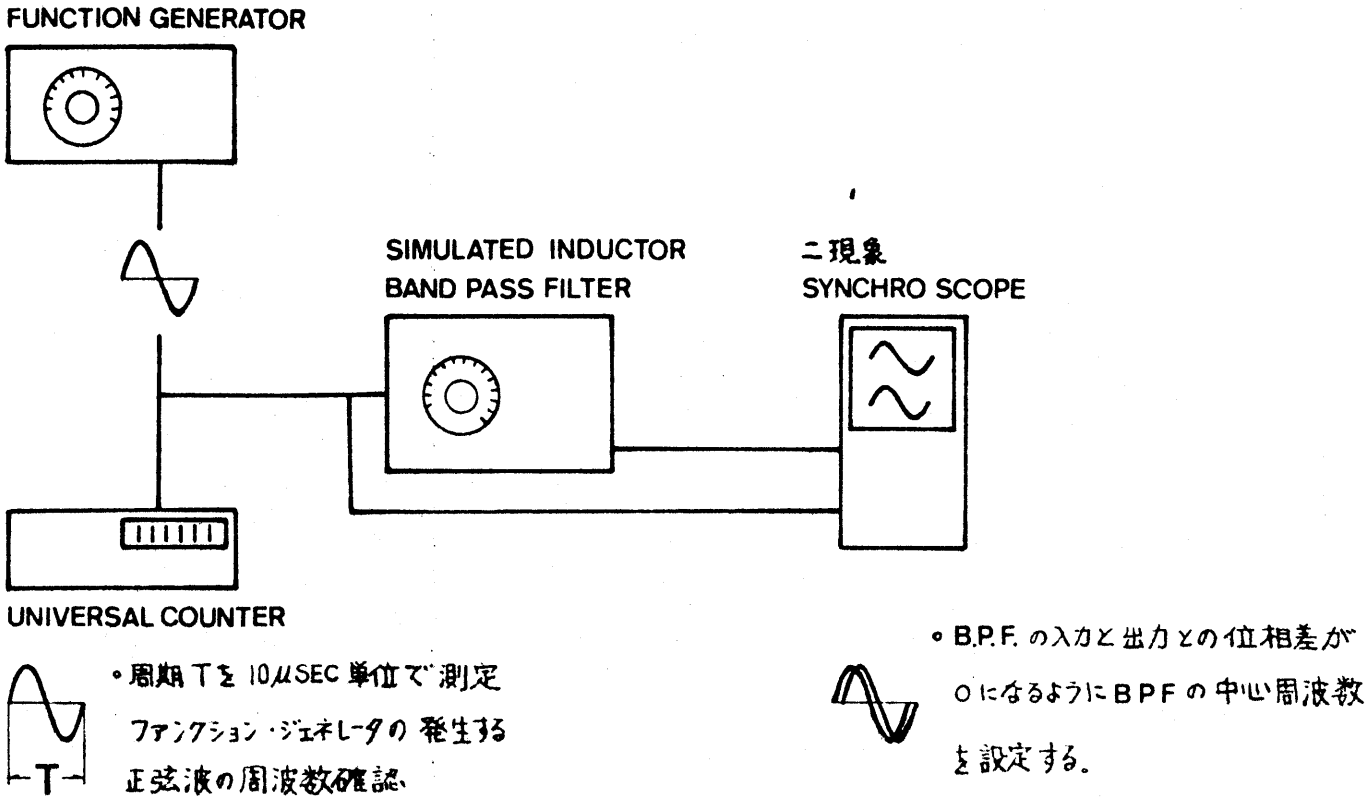


Fig.4-4-2 バンドパスフィルターの中心周波数の設定法

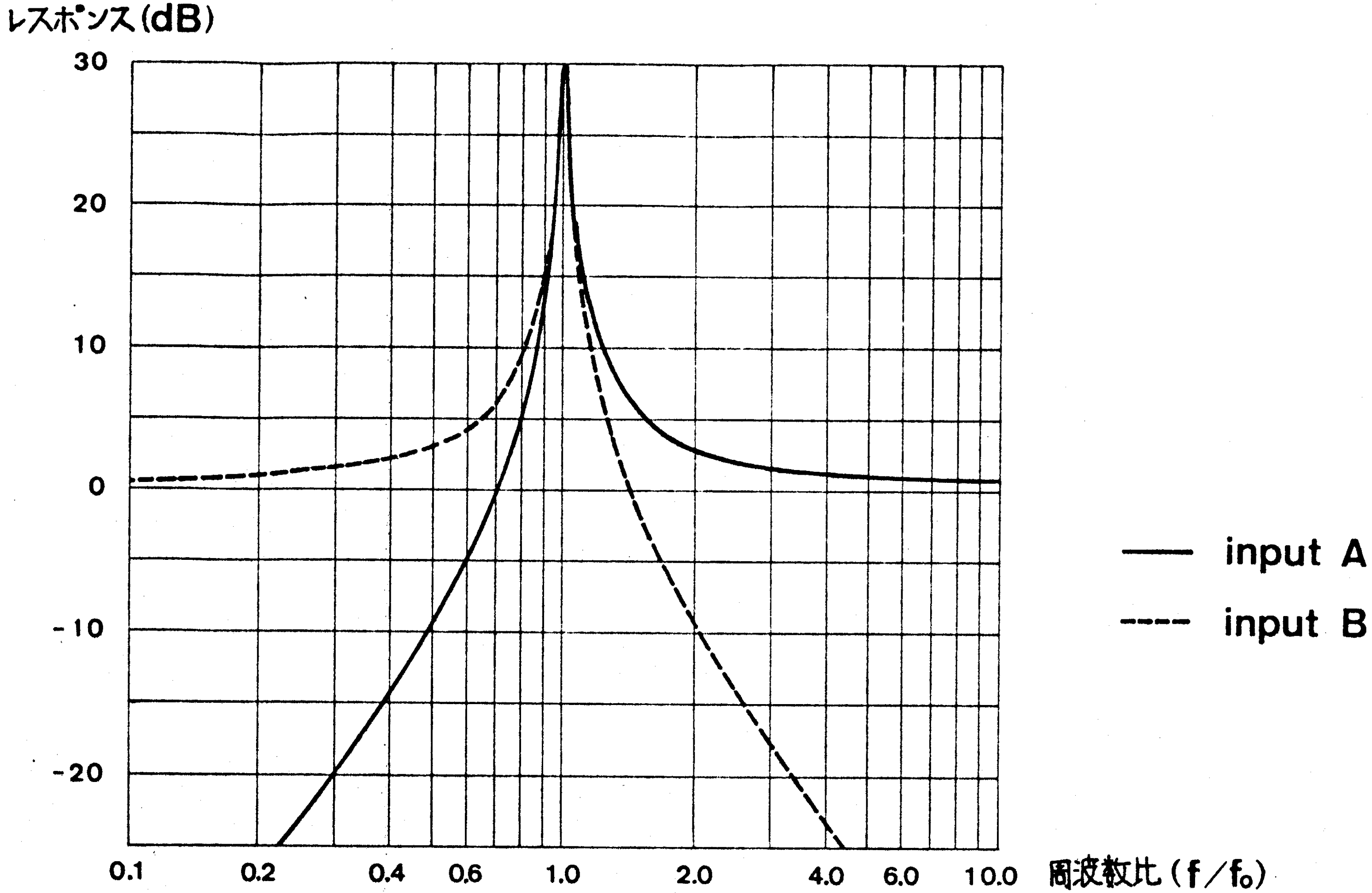


Fig.4-4-3 シミュレーテッド・インダクタ・バンド・パス・フィルターの周波数特性

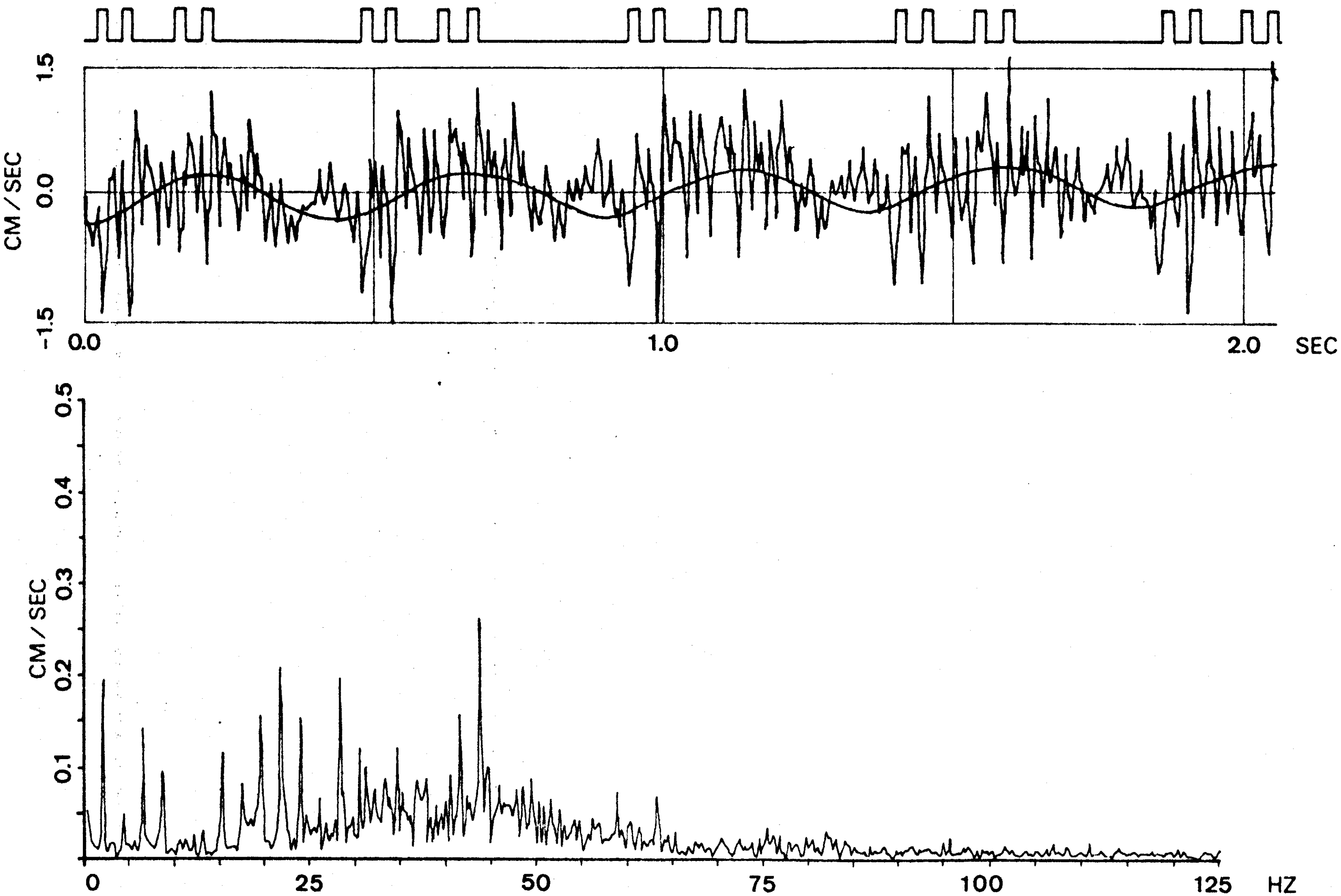


Fig. 4-4-4　**P5C** の z 方向速度記録

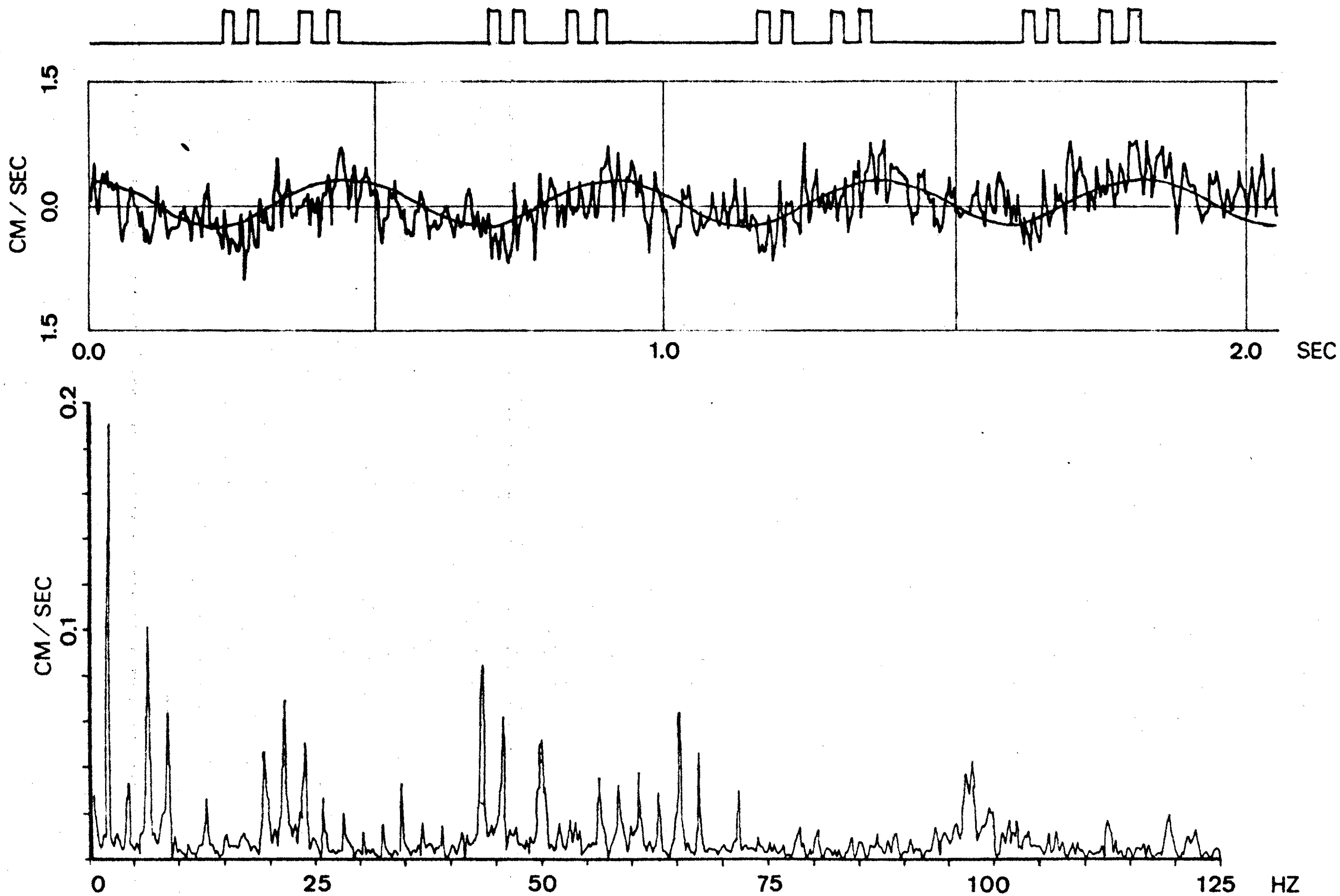


Fig. 4-4-5 **P4C** の Z方向速度記録

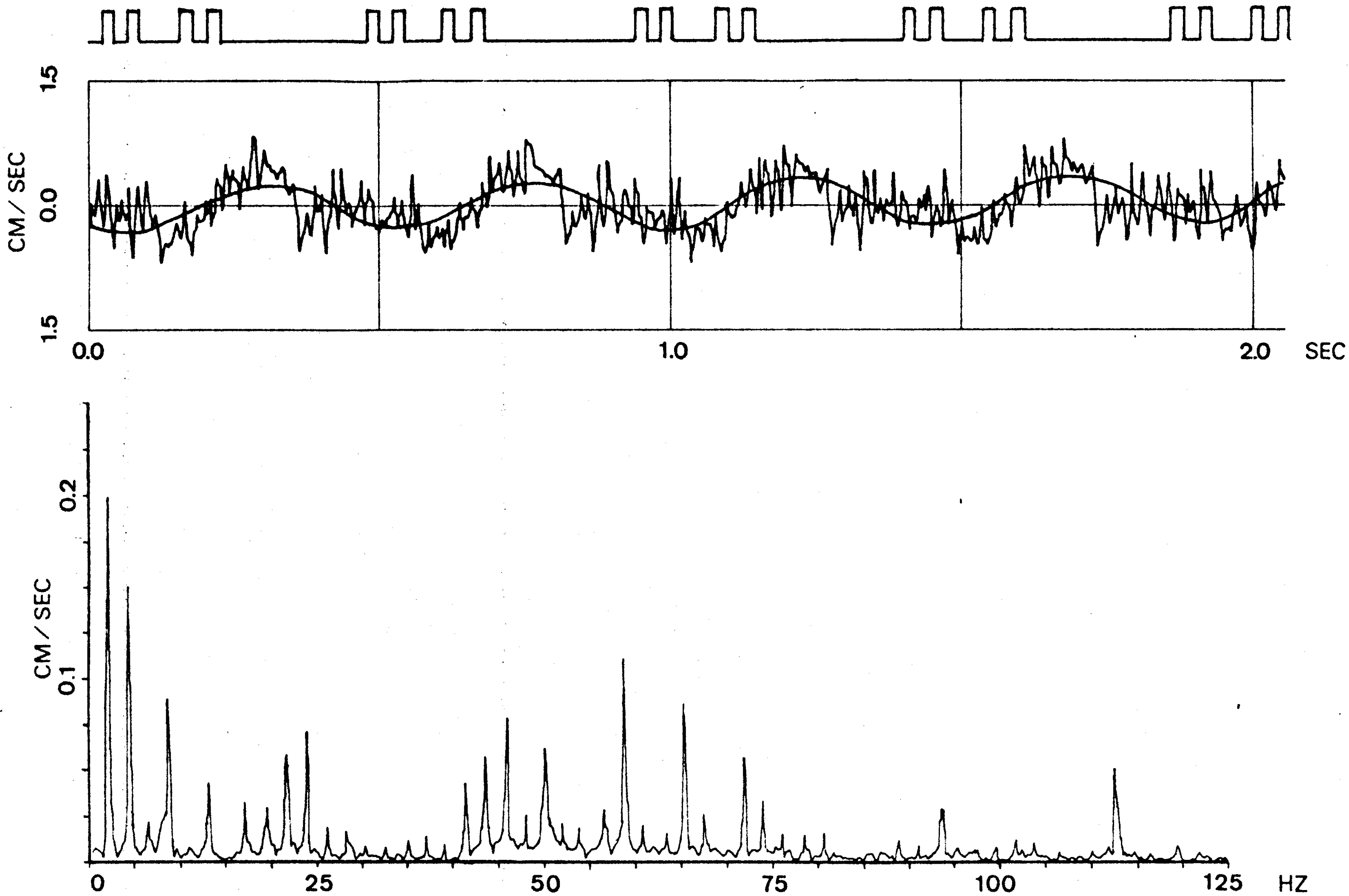


Fig.4-4-6　**P5C** のY方向速度記録

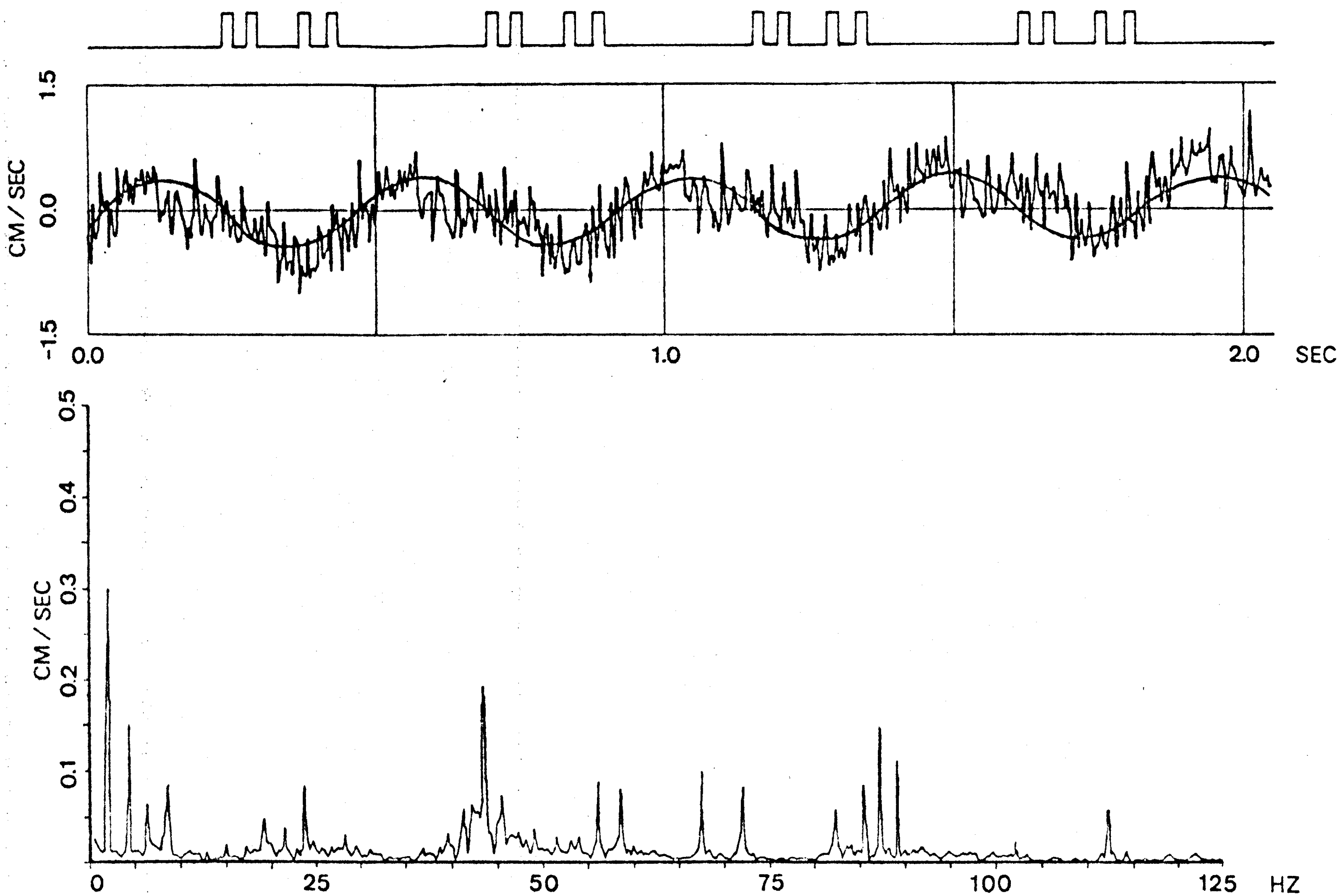
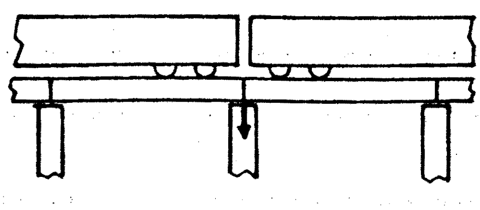


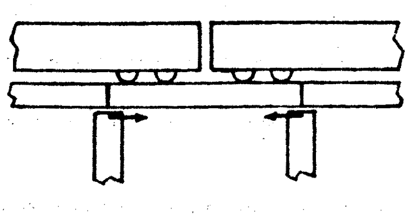
Fig.4-4-6　**P4C**の Y方向速度記録

Fig. 4-4-4のP4C点の鉛直方向速度応答及びFig. 4-4-5のP5C点の鉛直方向速度応答のいずれの複素フーリエ係数の絶対値においても2.2Hzの整数倍の振動数成分が卓越している。このうち低振動数領域に注目すると，4.4 Hz成分が両隣の2.2 Hz，6.6 Hz成分に比べかなり小さく，既に§4-2の4-2-1項内（pp114）で触れたように，橋脚は鉛直方向に2.2 Hzの奇数倍の振動数成分を支配的に含む力によって加振されていると考えられる。しかし橋脚間隔（13.3m）が厳密に車輌長の1/2の12.5mに等しくなく，また桁の曲げ振動の影響もあり，この性質は振動数の高い領域に移行するにつれ発現し難くなってくるようである。

これに対しFig. 4-4-6，Fig 4-4-7に示すように，橋脚頂部の橋軸方向の速度応答は，2.2 Hzの奇数倍の振動数成分のみならず，4.4 Hzのような2.2Hzの偶数倍の振動数成分の卓越も著しい。

また既に§4-2の4-2-1項内（pp 114）で触れたように，隣接する二つの橋脚の，鉛直あるいは橋軸方向振動の2.2Hz成分の位相差はほぼ180°に等しい。（Fig. 4-4-8）また橋脚頂部の同じ測定点において鉛直，橋軸各方向の2.2 Hzの振動数成分は互いに90°の位相差をもっている。このことは各方向の変位の2.2 Hz成分の山あるいは谷の発生する時点の車輌の位置がほぼ橋脚間隔の1/2ずれていることを示している。具体的には車輌の連結部が橋脚直上にさしかかった時鉛直方向変位の2.2Hz成分は負の方向に最大となり，連結部がスパン中央にさしかかったときには橋軸方向変位の2.2Hz成分は，その絶対値が最大となる。（但しこの時点の速度応答（2.2 Hz成分）は0となる。）





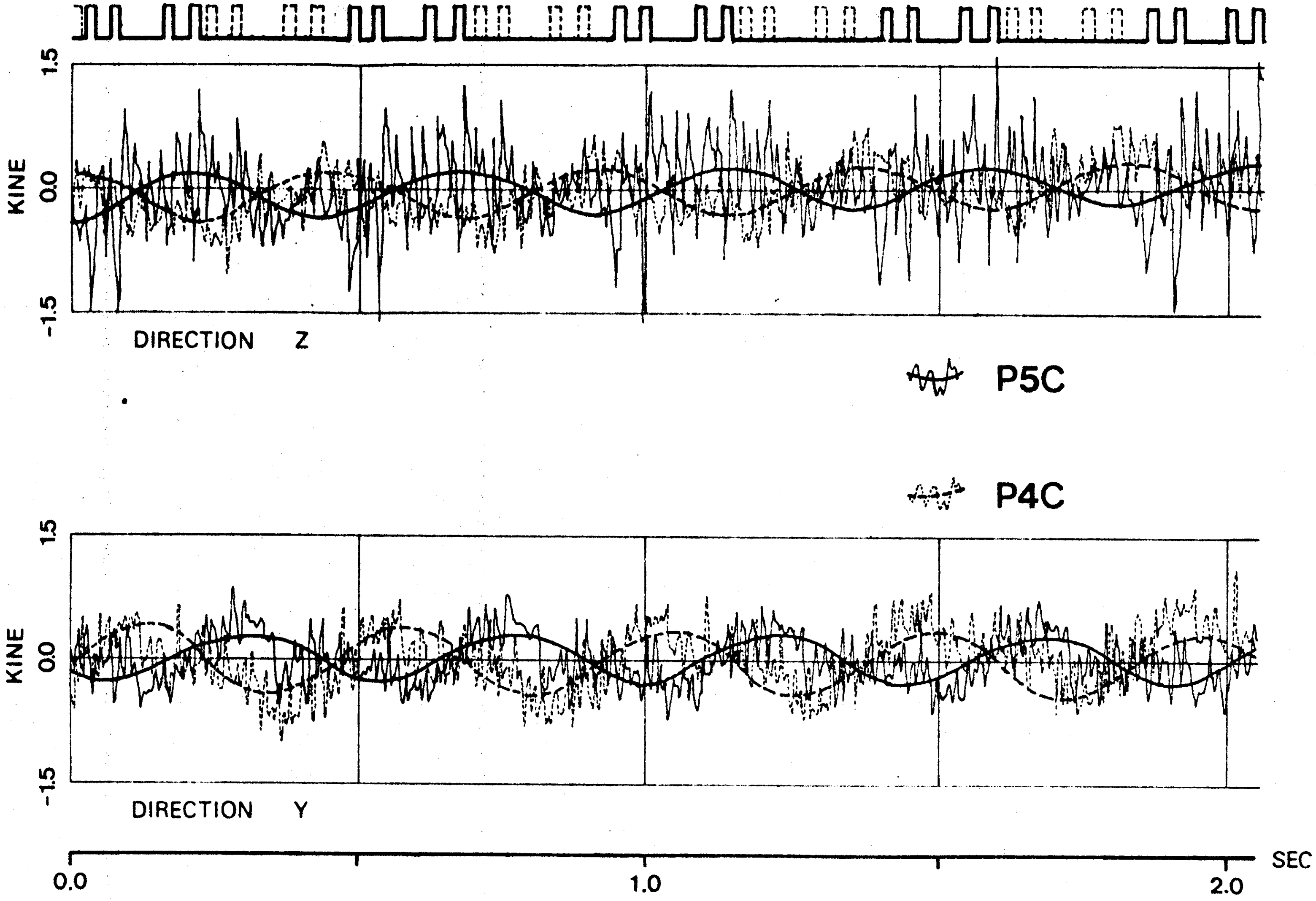


Fig. 4-4-8　隣接する橋脚の頂部の速度記録の 2.2 Hz 成分

また隣接する橋脚頂部の鉛直方向速度応答の 6.6 Hz 成分を 2.2 Hz 成分に加えて Fig 4-4-9 に示す。2.2Hz 成分と同様隣接する橋脚はそれぞれ 180°の位相差をもって振動している様子がわかる。

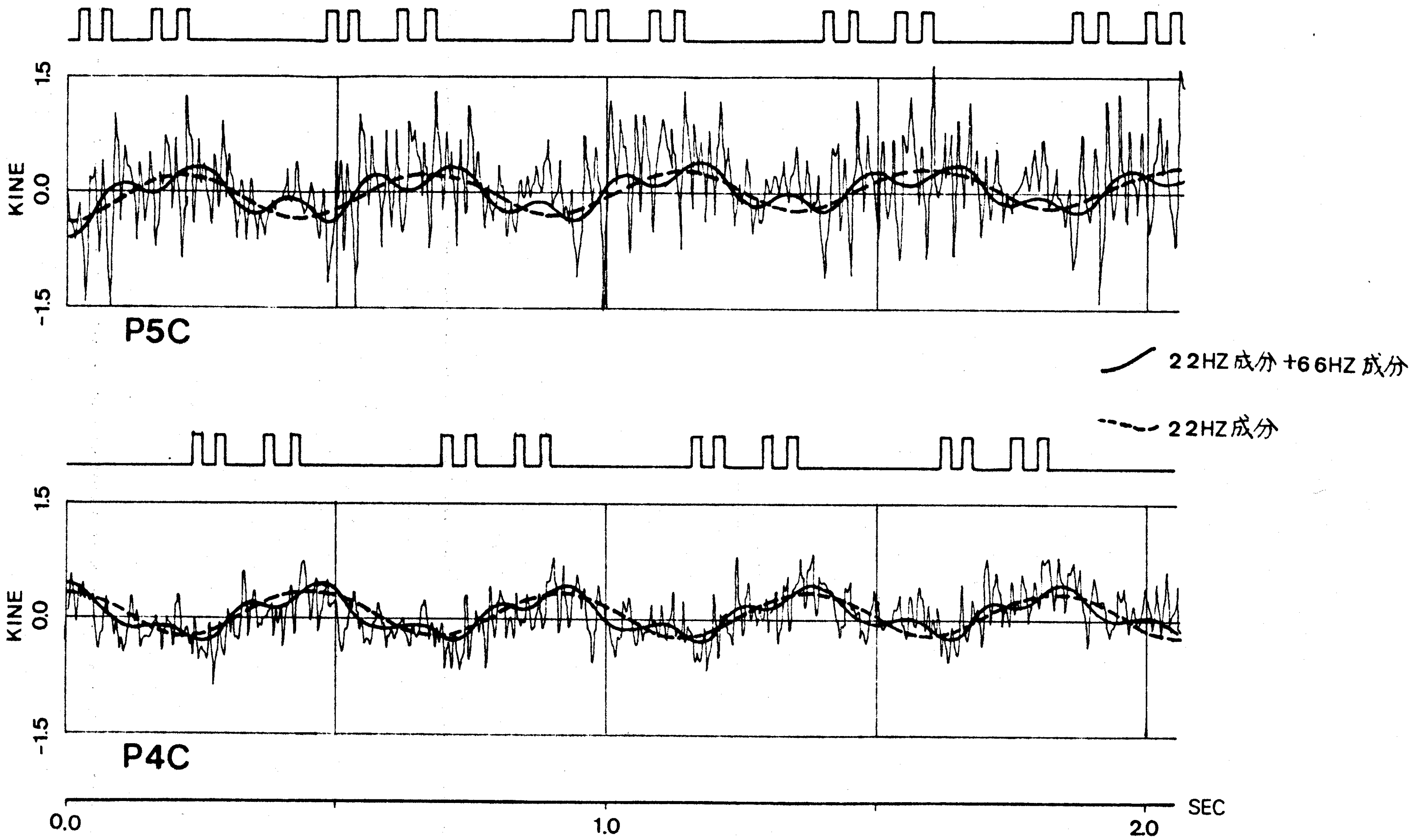


Fig. 4-4-9 隣接する橋脚頂部の速度記録の2.2 Hz成分 及び 6.6 Hz成分

4-4-2 地表の速度応答

地表の測定点のうち主要な4点を選び，各点の速度応答とその複素フーリエー係数の絶対値を Fig.4-4-10～ Fig.4-4-17に示す。既に Fig.4-3-3 (pp.121)に示したように E10は橋脚のフーチング直上の地表上の点であり，E13は E10より橋軸直角方向に 8.2m の地点，また E30はスパン中央直下，E33は E30より橋軸直角方向に 8.2m の地点である。前項 4-4-1 において橋脚頂部の橋軸方向動に 4.4Hz成分が顕著に現われていたのに対し，E10の橋軸(Y)方向に 4.4Hz成分がほとんど認められず，この橋脚は橋軸方向に 4.4Hz で加振された場合フーチング近辺にノード(節)が存在すると考えられる。この為か，E10 の Z，Y方向はもとより E30，E33，E13 といった近傍の地盤の Z，Y方向においても 4.4Hz 成分は比較的小さい。(Table 4-4-1)

Table 4-4-1

	E30 Y	E30 Z	E33 Y	E33 Z	E13 Y	E13 Z
2.2 HZ	0.026	0.029	0.013	0.025	0.029	0.030
4.4 HZ	0.009	0.005	0.002	0.005	0.011	0.002
6.6 HZ	0.022	0.015	0.004	0.008	0.023	0.014

(単位 cm/sec)

次に並べる地表の各測点の速度記録の順序は以下のとおりである。

(1)Fig.4-4-10	E10Y	pp.116
(2)Fig.4-4-11	E10Z	pp.117
(3)Fig.4-4-12	E13Y	pp.118
(4)Fig.4-4-13	E13Z	pp.119
(5)Fig.4-4-14	E30Y	pp.120
(6)Fig.4-4-15	E30Z	pp.121
(7)Fig.4-4-16	E33Y	pp.122
(9)Fig.4-4-17	E33Z	pp.123

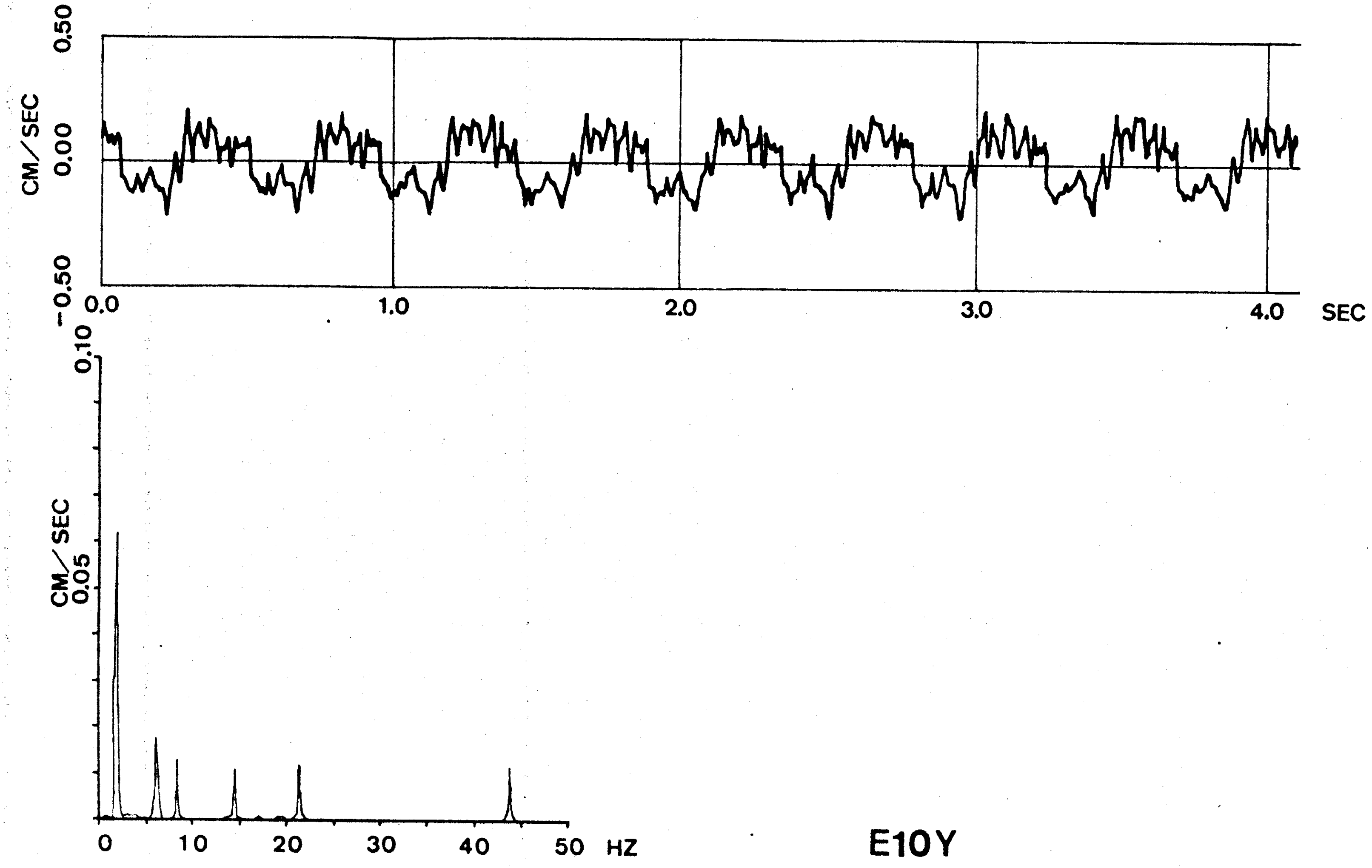


Fig.4-4-10　各測点の速度記録（8枚の内 1）

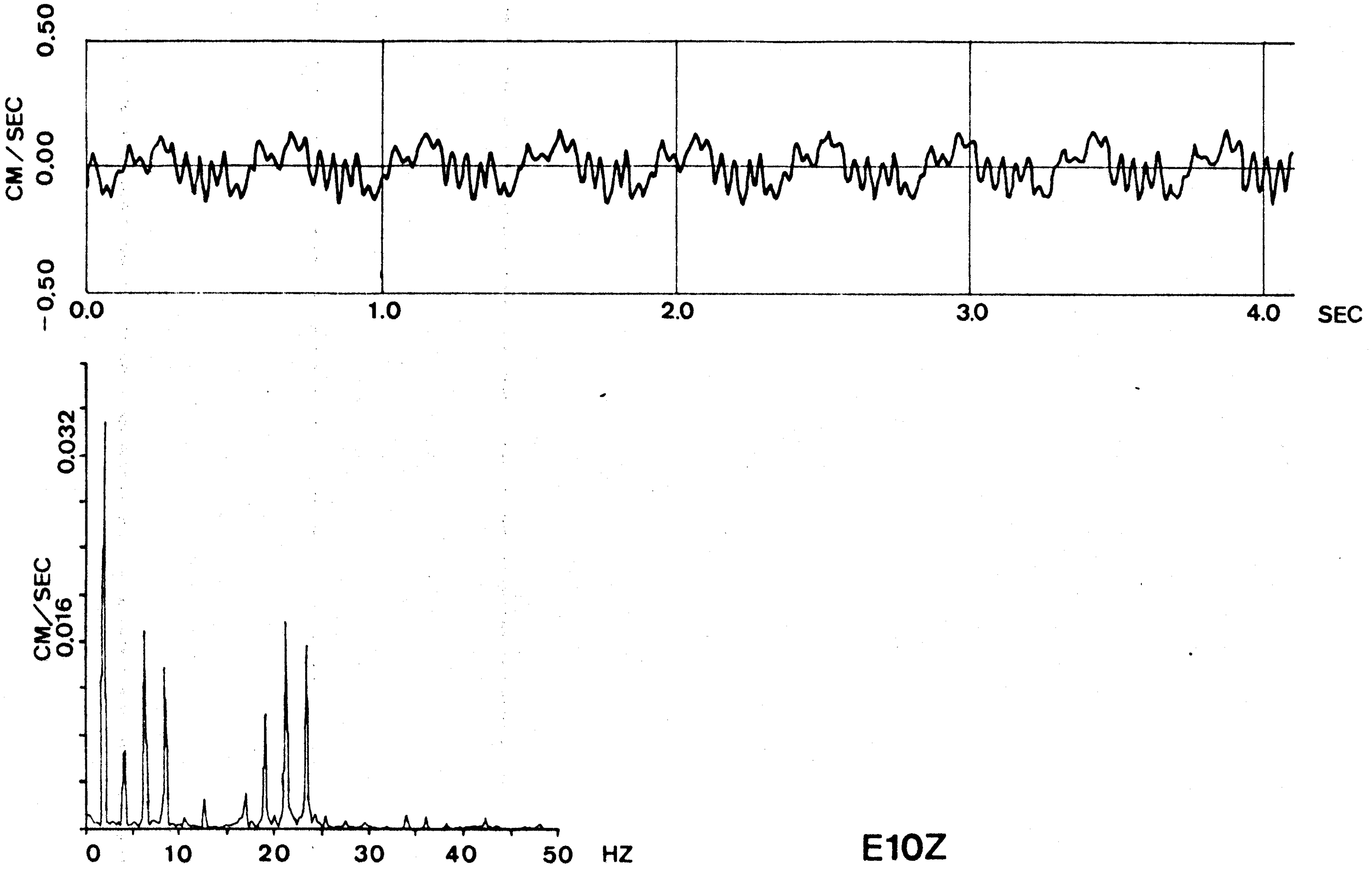


Fig.4-4-11 各測点の速度記録 （8枚の内 2）

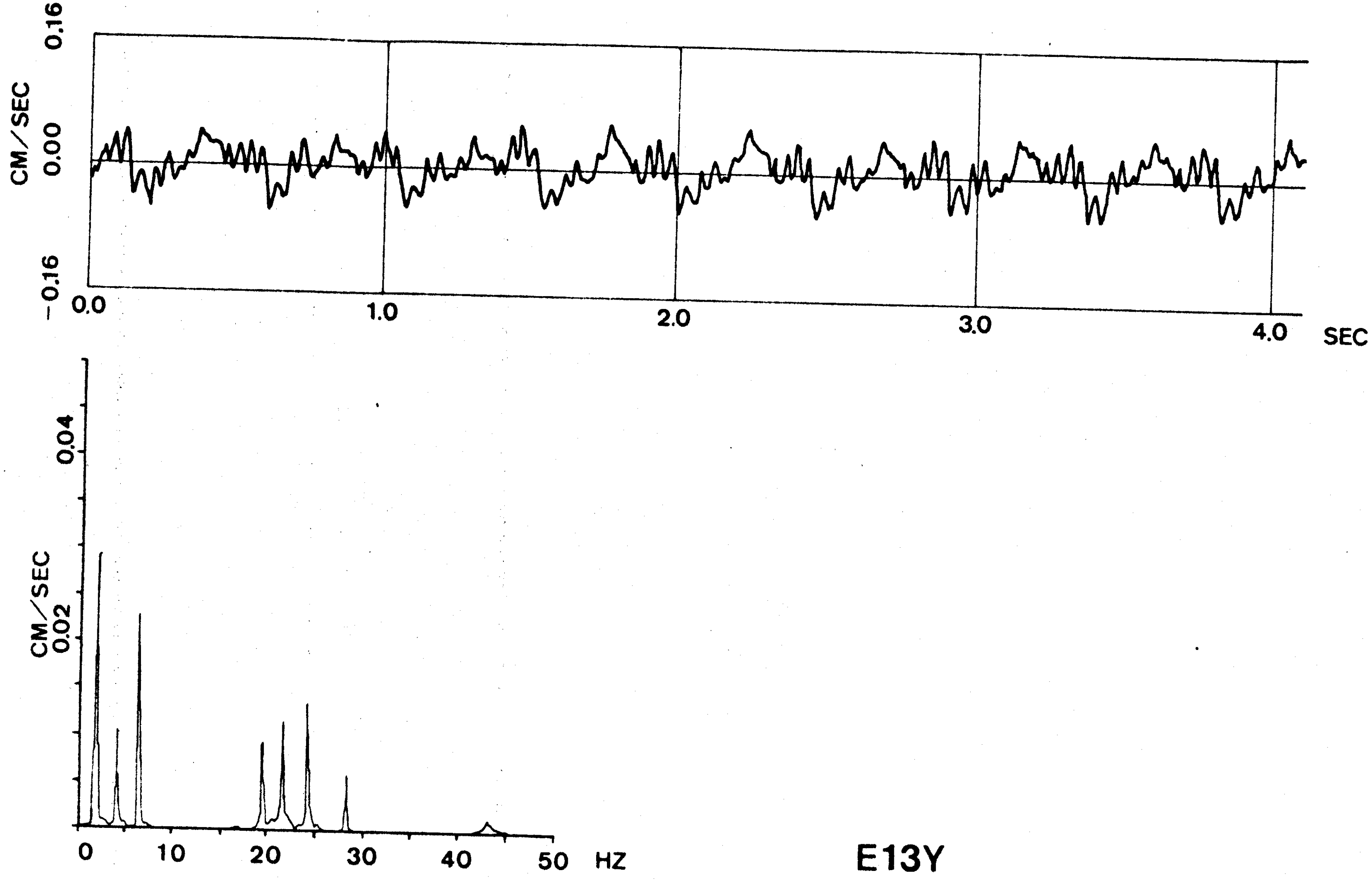
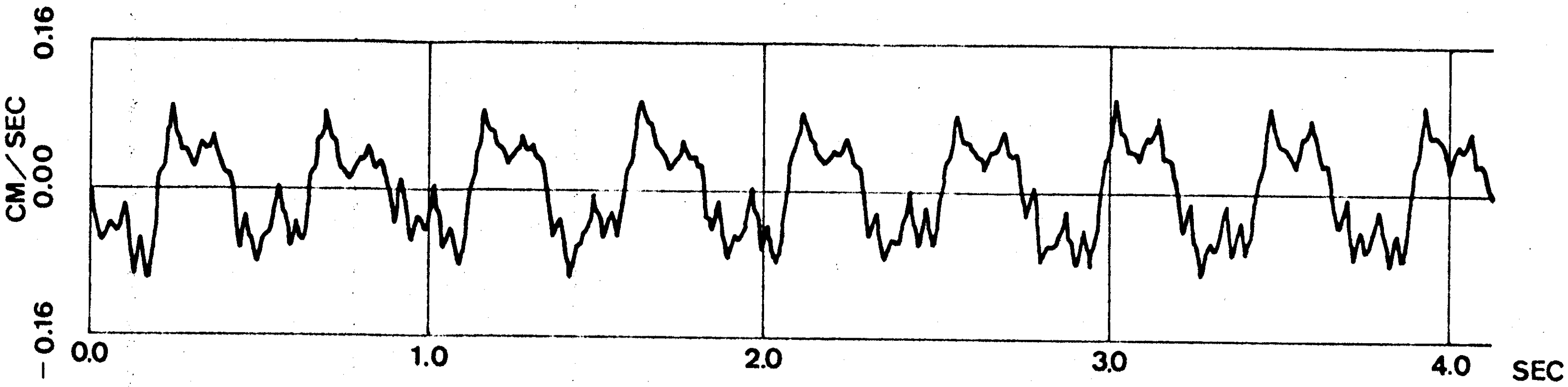
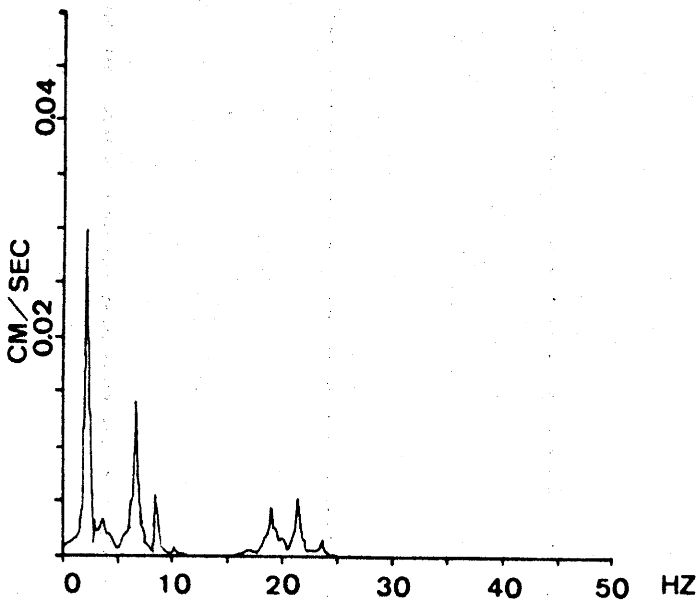


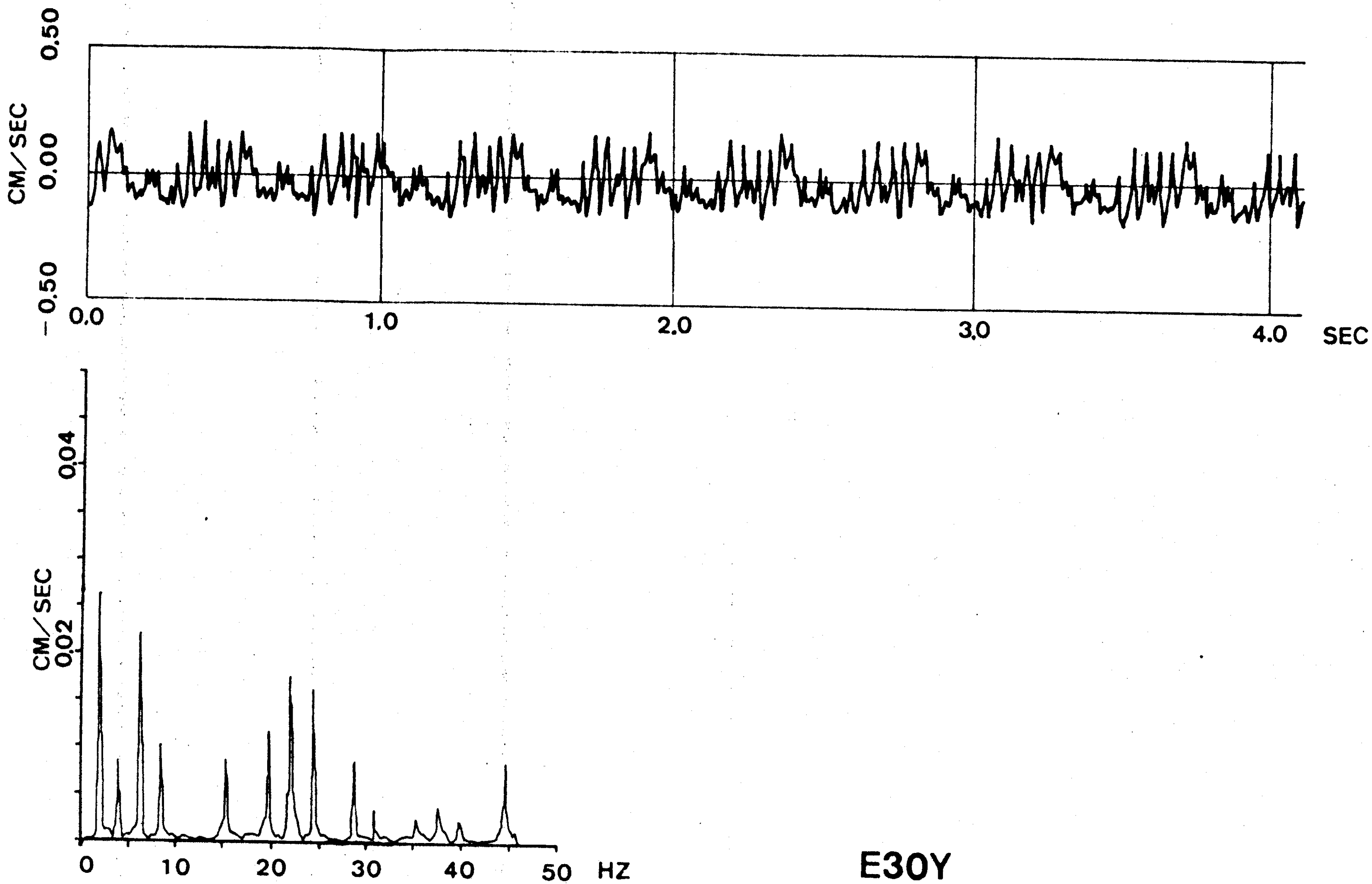
Fig.4-4-12 各測点の速度記録（8枚の内 3）





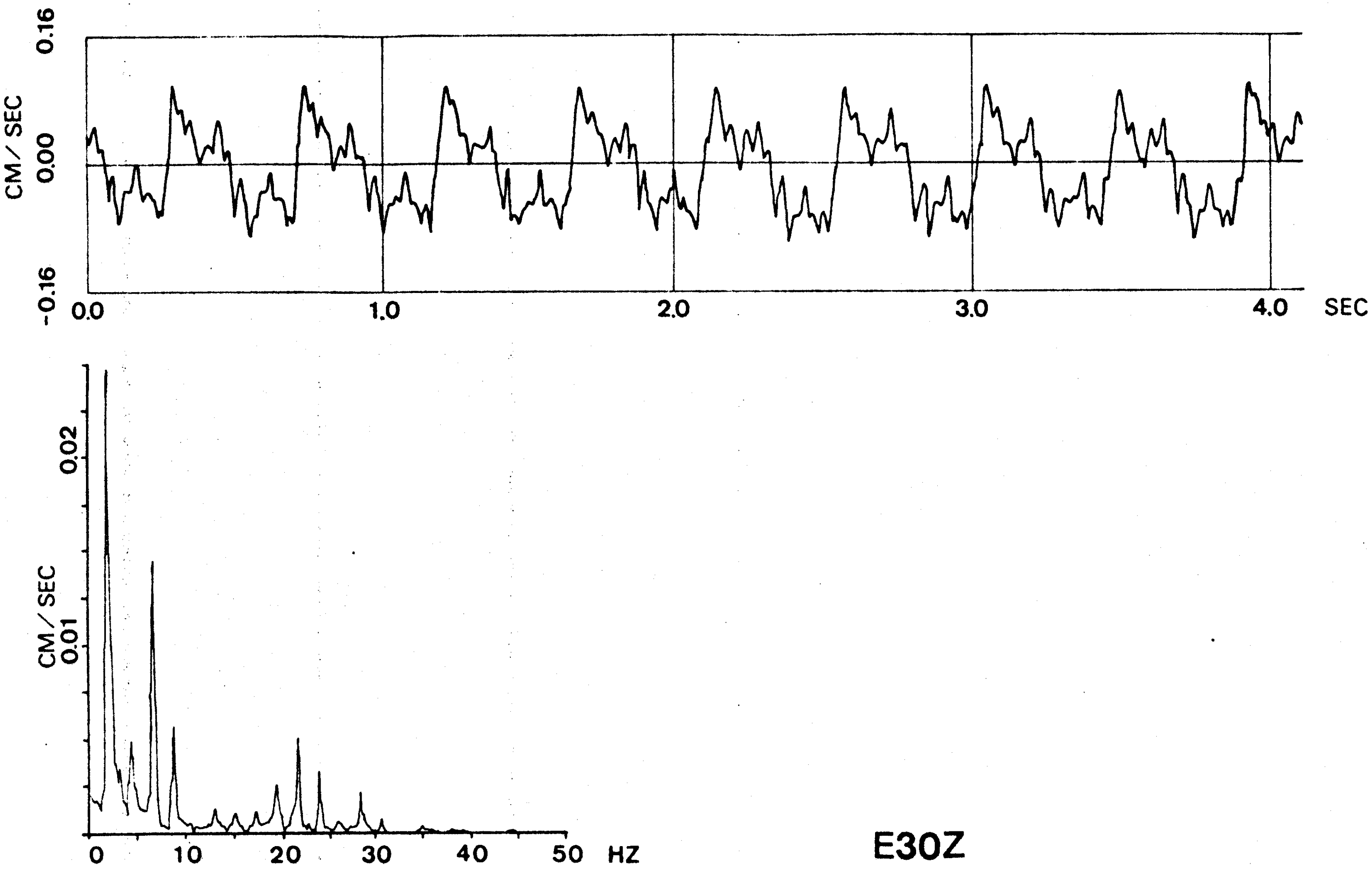
E13Z

Fig.4-4-13 各測点の速度記録（8枚の内4）



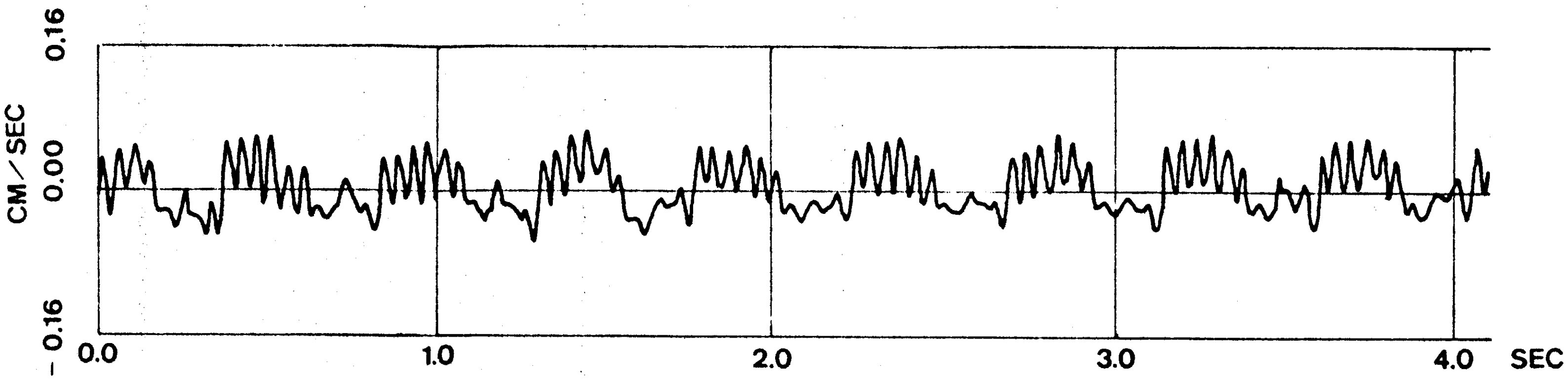
E30Y

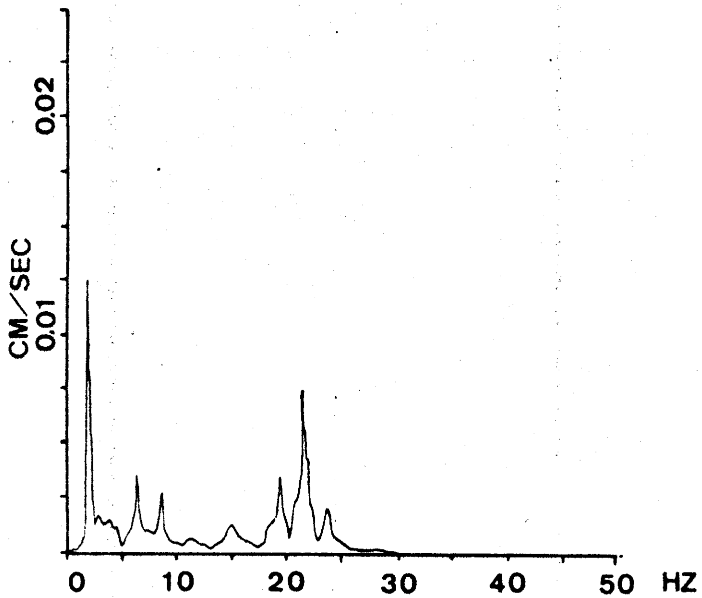
Fig.4-4-14 各測点の速度記録（8枚の内5）



E30Z

Fig.4-4-15 各測点の速度記録（8枚の内６）





E33Y

Fig.4-4-16 各測点の速度記録（8枚の内 7）

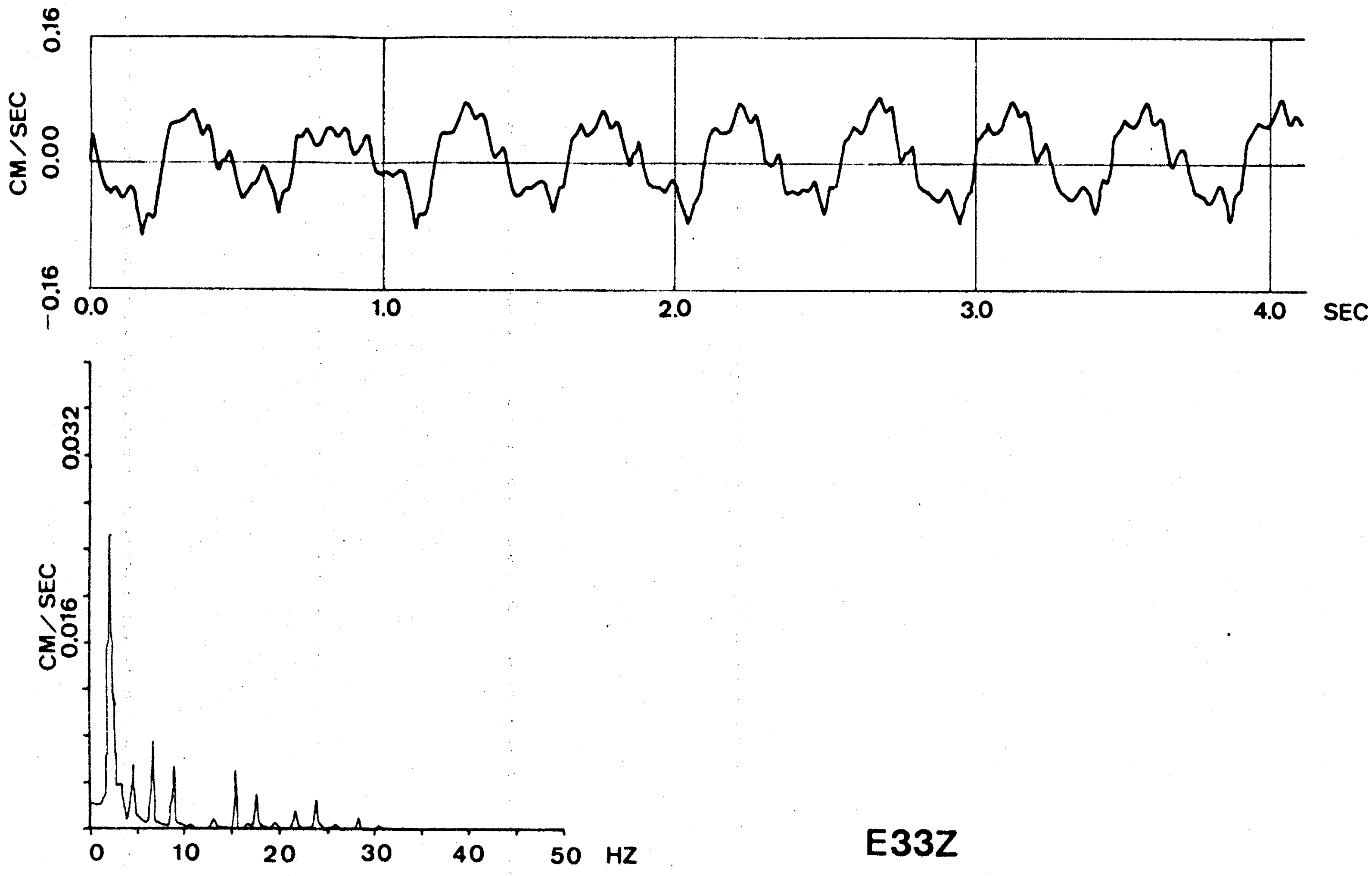


Fig.4-4-17 各測点の速度記録（8枚の内 8）

前項 4-4-1 で確認したように隣接する橋脚の振動の 2.2 Hz 及び 6.6 Hz 成分は 互いに 180°の位相差をもっている。このように隣接する橋脚が互いに 180°の位相差をもって 加振される場合, E30, E33 といった スパン中央直下を通り 橋軸と直交する直線上の点では 橋脚の鉛直(Z)方向の振動により 橋軸方向の振動が励起され, また橋脚の橋軸(Y)方向の振動により 鉛直方向の振動が励起されるものと考えられる。(§4-2 参照)

そこで E10 の鉛直(Z)方向の速度応答に −1を乗じたものと, E30, E33 の橋軸(Y)方向の速度応答を Fig. 4-4-19 で比較する。ここで E10 の Z方向速度応答に −1を乗じた理由は 測定点の位置関係と X, Yの正負の方向に関連するので これに触れておく。

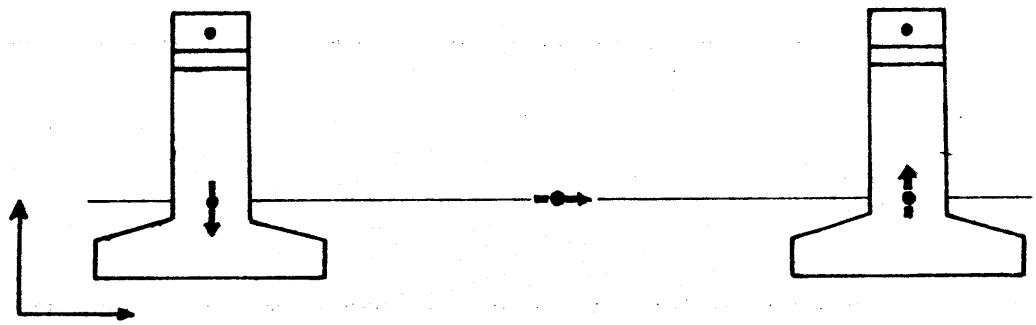


Fig. 4-4-18

換振器として用いた地震計の設置方法で 鉛直(Z), 及び 橋軸方向の正負は Fig 4-4-18 に示すように決定される。ここで E10, E30 間の距離が 地盤内を伝播するS波(あるいはレーリー波)の波長に比べて 充分短ければ E10が下方(Zのマイナス側)に動いた時, E30点は橋軸(Y)プラス方向に動き これは ほぼ同時に起こるものと考えられる。Fig. 4-4-19 において E10 のZ方向速度応答と E30, E33のY方向速度応答が きわめてよく似ており, 2.2 Hz, 6.6 Hz 成分に着目した場合 ほとんどその位相が一致しており, このことは ピアの鉛直動により, E30 (E33) の橋軸方向動が励

起されるという考えを傍証するものと思われる。

また Fig 4-4-20には E10の Y方向速度応答に対し E30, E33の Z方向速度応答を併記する。ここにおいても 2.2 Hz, 6.6 Hz成分はその形状, 位相とも極めてよく似ており, ピアの橋軸方向の振動により, E30, E33の鉛直方向の振動が励起されるという考えを傍証するものと思われる。

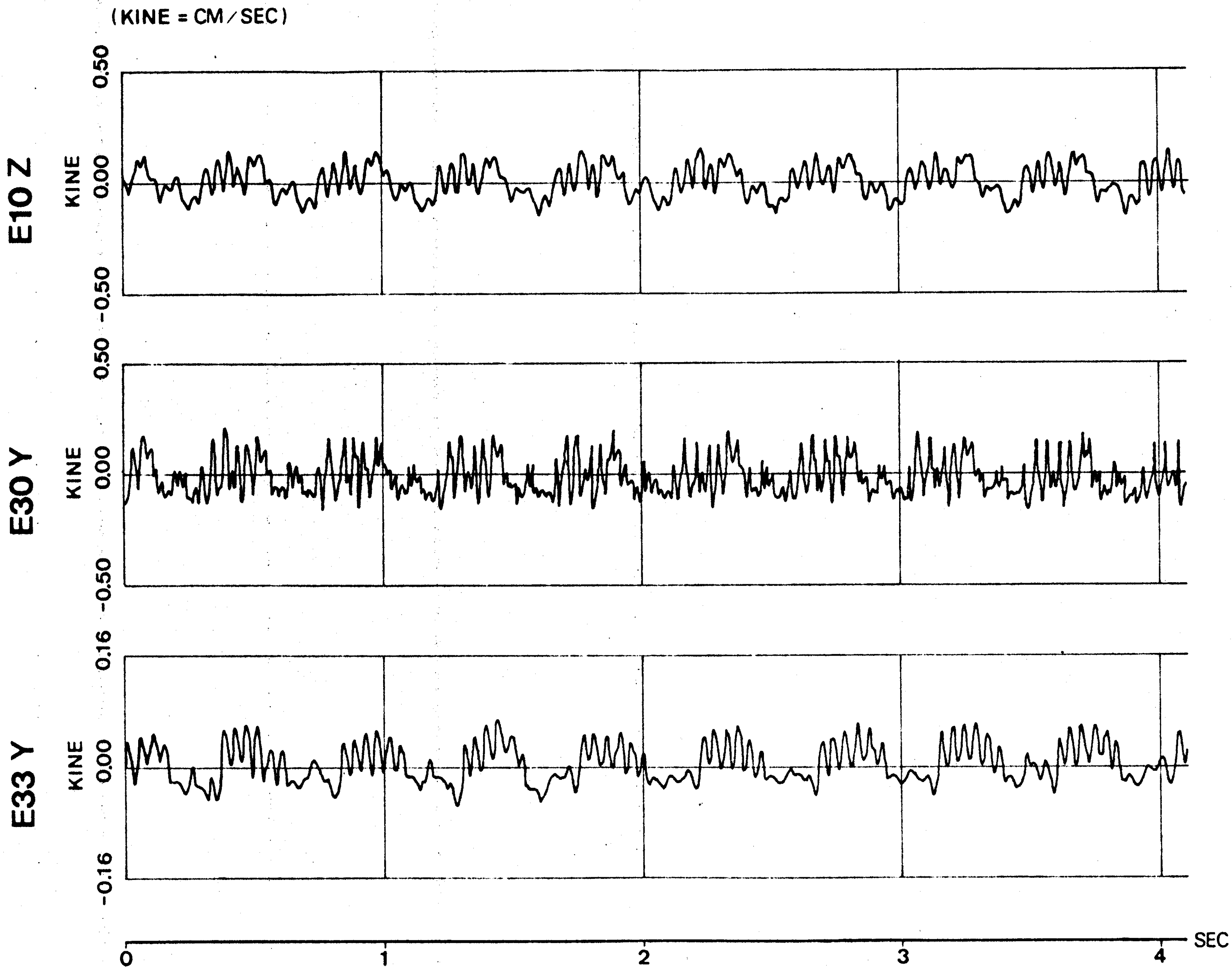


Fig.4-4-19 E10Zの速度応答とE30Y E33Yの速度応答との比較

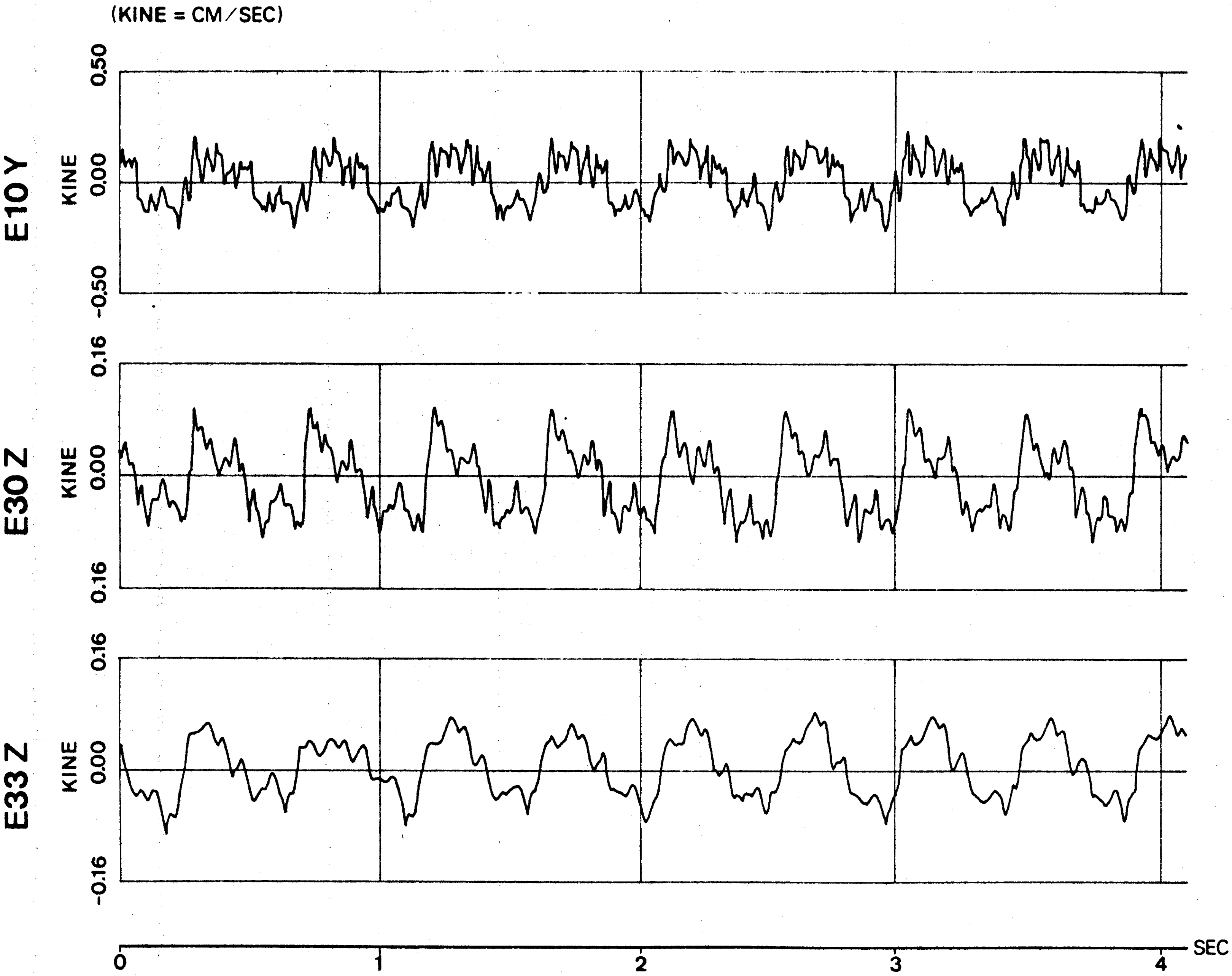


Fig.4-4-20 E10Yの速度応答と E30Z, E33Zの速度応答との比較

4-4-3 橋脚及び地表の振動のシミュレーション

既に §3-4 で述べた杭基礎のアドミッタンス・シミュレーション モデルにより第一中里架道橋の橋脚の鉛直方向アドミッタンスを算出する。この為に橋脚と等価なアドミッタンスを持つ単杭の諸定数を求める必要がある。よって §3-7で 庄架道橋橋脚に対して行なったと同様の操作に基づき単杭の諸定数を以下のように決定した。

〔橋脚と等価なアドミッタンスを持つ単杭の諸定数〕

（各記号の詳細は次の頁）

(1) 断面積 A_p

$$A_p = A_E + A_C + A_S \qquad = 29.8 \quad \mathrm{m^2}$$

(2) 杭の半径 R

$$R = \sqrt{A_p / \pi} \qquad = 3.08 \quad \mathrm{m}$$

(3) 杭長 L_p

$$L_p = L_G \qquad = 28.0 \quad \mathrm{m}$$

(4) 杭頭付加重量 W

$$W\ (\text{フーチング上部の橋脚の総重量}) \qquad = 148.4 \quad \mathrm{ton}$$

(5) 杭材のヤング率 E_p

$$E_p = (A_E \cdot E_E + A_C \cdot E_C + A_S \cdot E_S)/A_p = 0.128 \times 10^7 \quad \mathrm{ton/m^2}$$

(6) 杭材の比重 w_p

$$w_p = (A_E \cdot w_E + A_C \cdot w_C + A_S \cdot w_S)/A_p = 1.89 \quad \mathrm{ton/m^3}$$

但し

A_E；群杭に囲まれた土の断面積

A_C；群杭のコンクリート部分の断面積

A_S；群杭中の鉄板の断面積

L_G；群杭の長さ

E_E；土のヤング率

E_C；コンクリートのヤング率

E_S；杭中の鉄板のヤング率

w_E；土の比重

w_C；コンクリートの比重

w_S；鉄の比重

この値をもとに第一中里架道橋橋脚の鉛直方向アドミッタンスを計算した結果をFig. 4-4-21に示す。

同様にしてこの橋脚の水平(橋軸)方向アドミッタンスを§3-4の3-4-1項で紹介した伯野(1977)による単杭の水平方向アドミッタンスシミュレーションモデルによって算出することが考えられるが，このような橋脚に伯野(1977)のモデルを適用するのには若干無理がある。それはこの橋脚の群杭部分の断面が大きく，等価なアドミッタンスを持つ単杭を考える時これをベルヌイオイラー梁とみなすわけにはいかなくなってくるからである。従って剪断変形を考慮し杭をチモシェンコ梁に置き換えるといった方法も考えられるが，とりあえずこの項では鉛直方向のアドミッタンスのみを扱う。

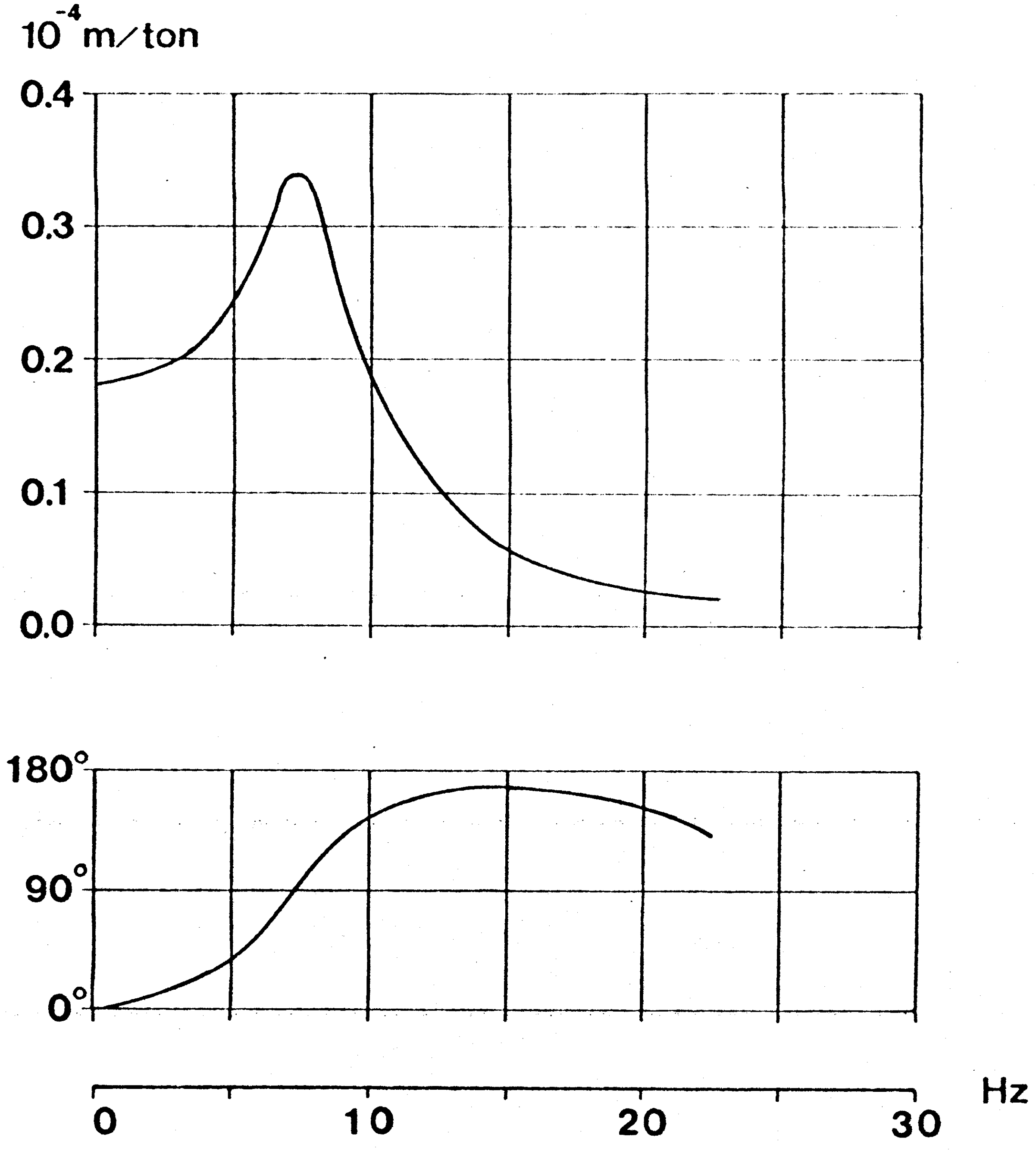


Fig.4-4-21 第一中里架道橋橋脚のアドミッタンス（計算値）

この算出された鉛直方向のアドミッタンスの妥当性を検証する為、このアドミッタンスに橋脚に入力される力のフーリエ・スペクトル、及び $i\omega$（ωは円振動数）を乗じ、フーチング部の速度応答のフーリエ・スペクトルに換算し、E10点（フーチング上部）の実測された速度応答のスペクトルと比較する。ここで橋脚に入力される力のフーリエ・スペクトル $\mathfrak{F}(P(t))$ としては §2-4で述べたように、桁を剛体梁と想定し（2-3-2）式（pp. 15），（2-4-2）式（pp. 30）より

$$\mathfrak{F}(P(t)) = \sum_{j=1}^{n} e^{-i\omega \Delta t_j} \cdot \mathfrak{F}(p(t))$$

$$= \sum_{j=1}^{n} e^{-i\omega \Delta t_j} \cdot \frac{p_0 \cdot \ell_s}{V} \left[\frac{\sin\left(\frac{\omega \ell_s}{2V}\right)}{\left(\frac{\omega \ell_s}{2V}\right)} \right]^2 \qquad \text{----(4-4-1)}$$

但し

$\mathfrak{F}$；フーリエー変換

$P(t)$；列車走行時橋脚に入力される力

p_0；一車軸に分担される荷重

$p(t)$；p_0のみが高架橋上を走行した時橋脚に入力される力

Δt_j；最初の車軸が通過した後 j番目の車軸が通過するまでの時間

ω；円振動数

ℓ_s；橋脚間隔

V；列車速度

を用いることにする。また既に Fig. 4-4-10に示した実測された E10点の速度応答のスペクトルは複素フーリエ係数の絶対値であるので サンプリングに要した時間 $T (= 4\text{msec} \times 2^{10})$ を乗じてフーリエースペクトルに換算する。（Fig. 4-4-22）

Table 4-4-2

	RECORDED	COMPUTED
2.2 HZ	0.143×10^{-2}	0.121×10^{-2}
6.6 HZ	0.070×10^{-2}	0.062×10^{-2}

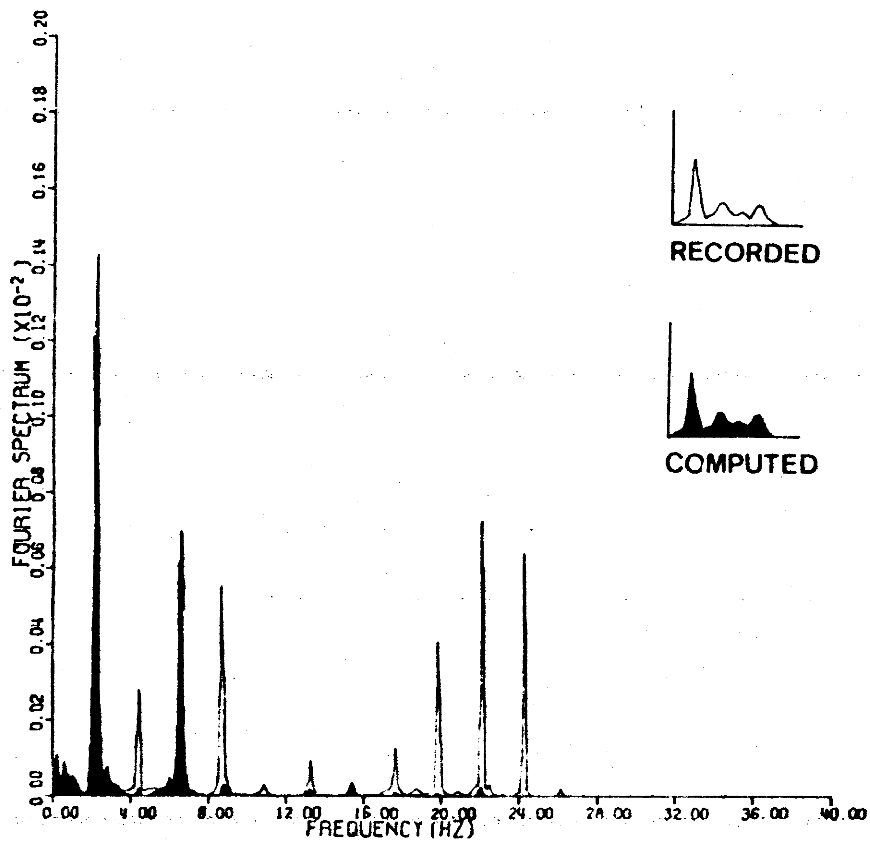
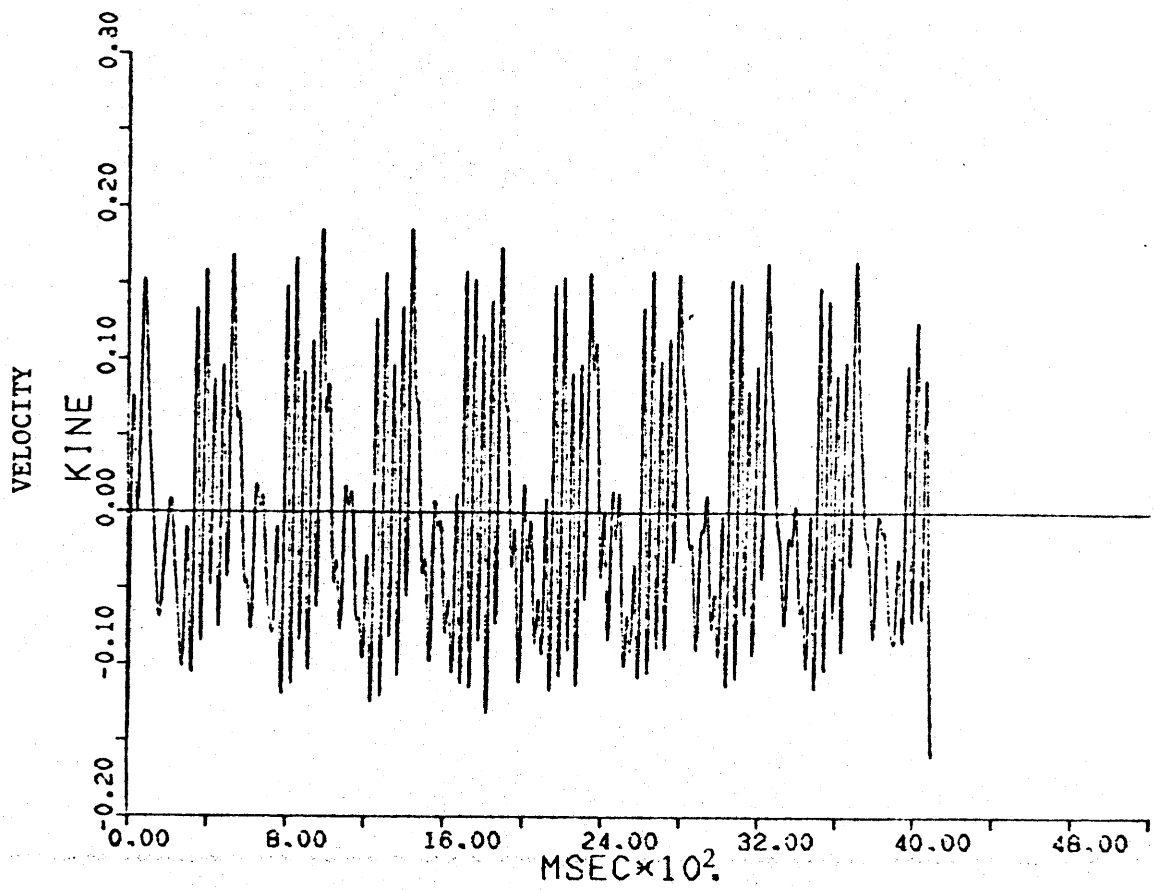


Fig.4-4-22 E10点の速度応答のフーリエースペクトルの絶対値

なお Fig. 4-4-22 では 25.6 Hz までのフーリエースペクトルの絶対値を示した。

この図において，シミュレーション・モデルによるE10の鉛直方向速度応答のフーリエースペクトルの絶対値は，高周波領域できわめて小さく，実測された速度応答のスペクトルの性状と符合しないが，2.2 Hz，6.6 Hz 成分はかなりよく似ているようである。(Table 4-4-2)

次にこのアドミッタンスの計算値をもとに，地表の点 E30，E33 の振動を算出することを試みる。既に ch 3 で述べたように橋脚の分割された各要素の変位のベクトルを地盤の反力マトリックスに乗ずることで基礎周辺の摩擦力分布を算出することができる。地表の振動は，この摩擦力を外力として地中を加振したと考え，動的な相反定理(§3-3 pp 38)及び Lamb (1904)の式を用いることで算出する。Lamb (1904)の式内の積分(Appendix 1，(A-1-1)式〜(A-1-6)式，pp 172〜173)の数値計算上の技巧は Appendix 1 に譲る。今回の第一中里架道橋での測定では橋脚に入力される力の測定は行なわれていないのでシミュレーションモデルにより E30，及び E33 の速度応答と E10 の速度応答との周波数領域での比率を算出し，これに実測された E10 の鉛直方向速度応答の複素フーリエー係数を乗じ，E30，E33 の速度応答の複素フーリエー係数とする。Fig. 4-4-24，及び Fig. 4-4-26 には，このようにして求めた E30，及び E33 の橋軸(Y)方向速度応答の複素フーリエー係数の絶対値と，このフーリエー級数の逆変換値(速度応答の時間領域における計算値)を併記する。当然この計算値は隣接する二つの橋脚，それぞれを上下加振した時の E30，E33 の速度応答を重ね合わせたものである。またフーチング上部の点 E10 の速度応答は，厳密には隣接する橋脚からの波動の影響を受けているが，ここではその影響の除外は考慮していない。この計算結果と比較



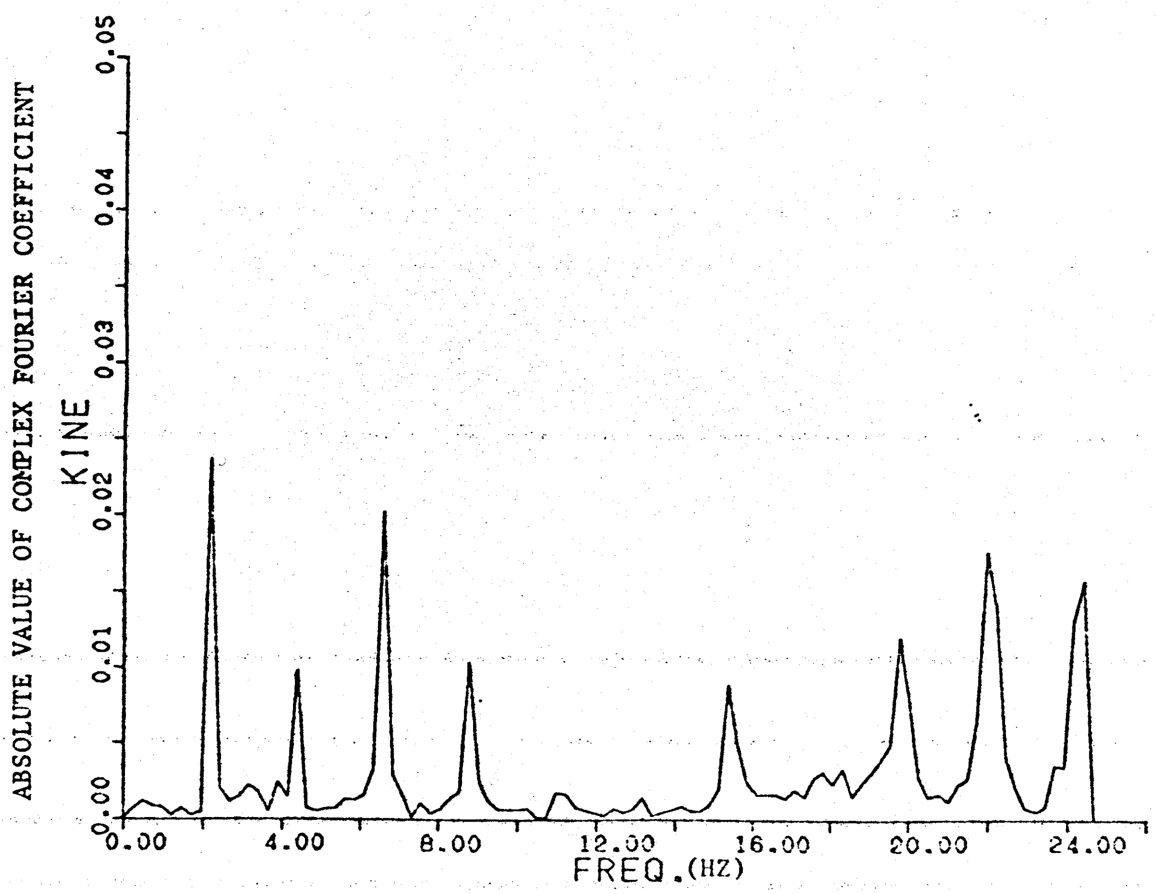
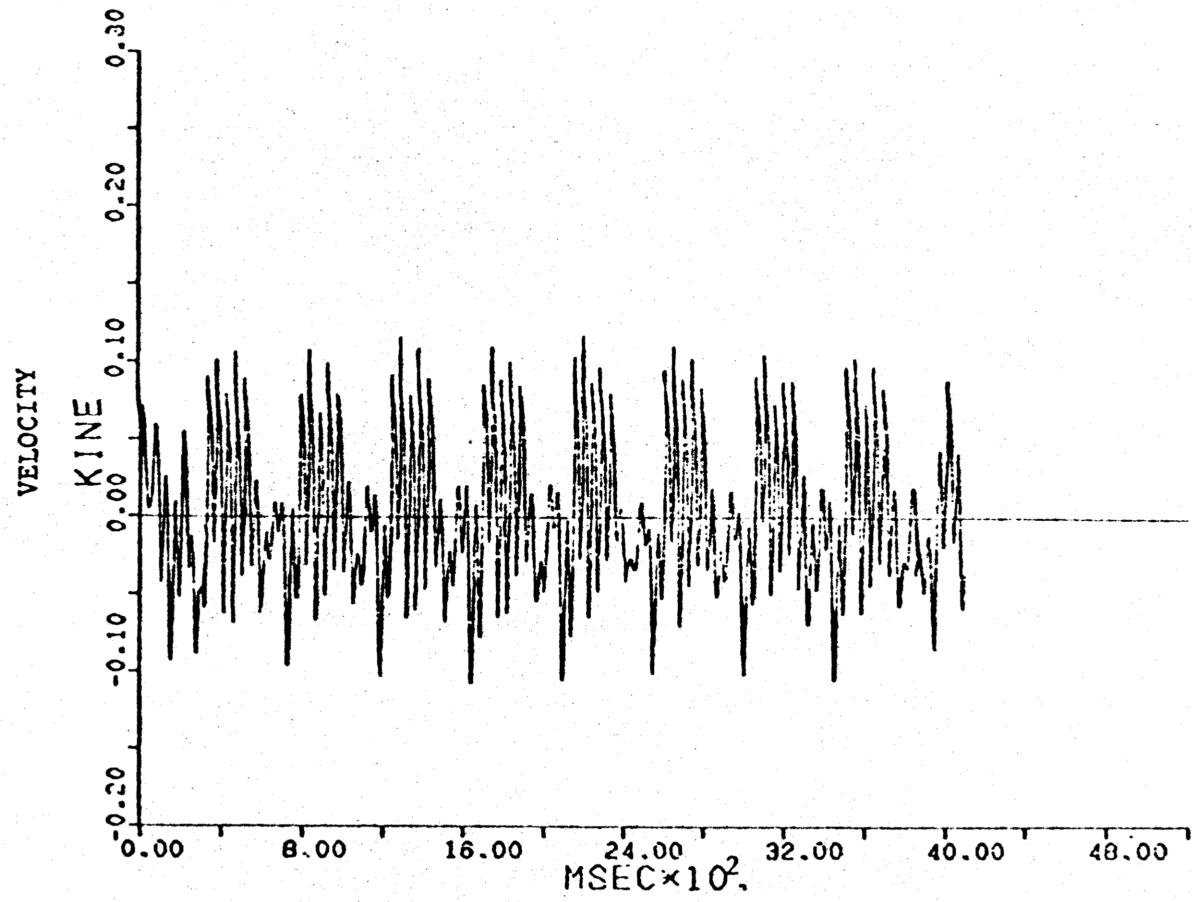


Fig.4-4-23 **E30** のY方向速度応答 (RECORDED)



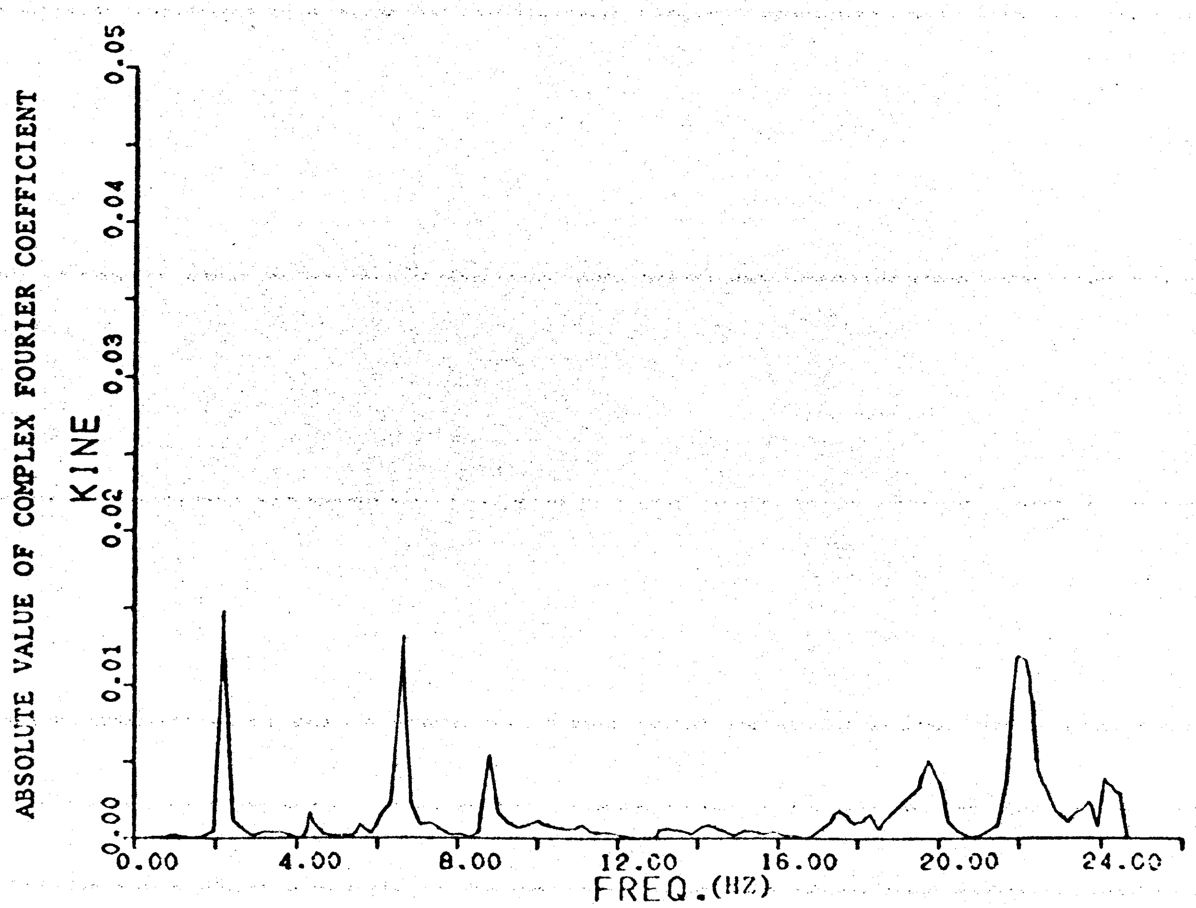
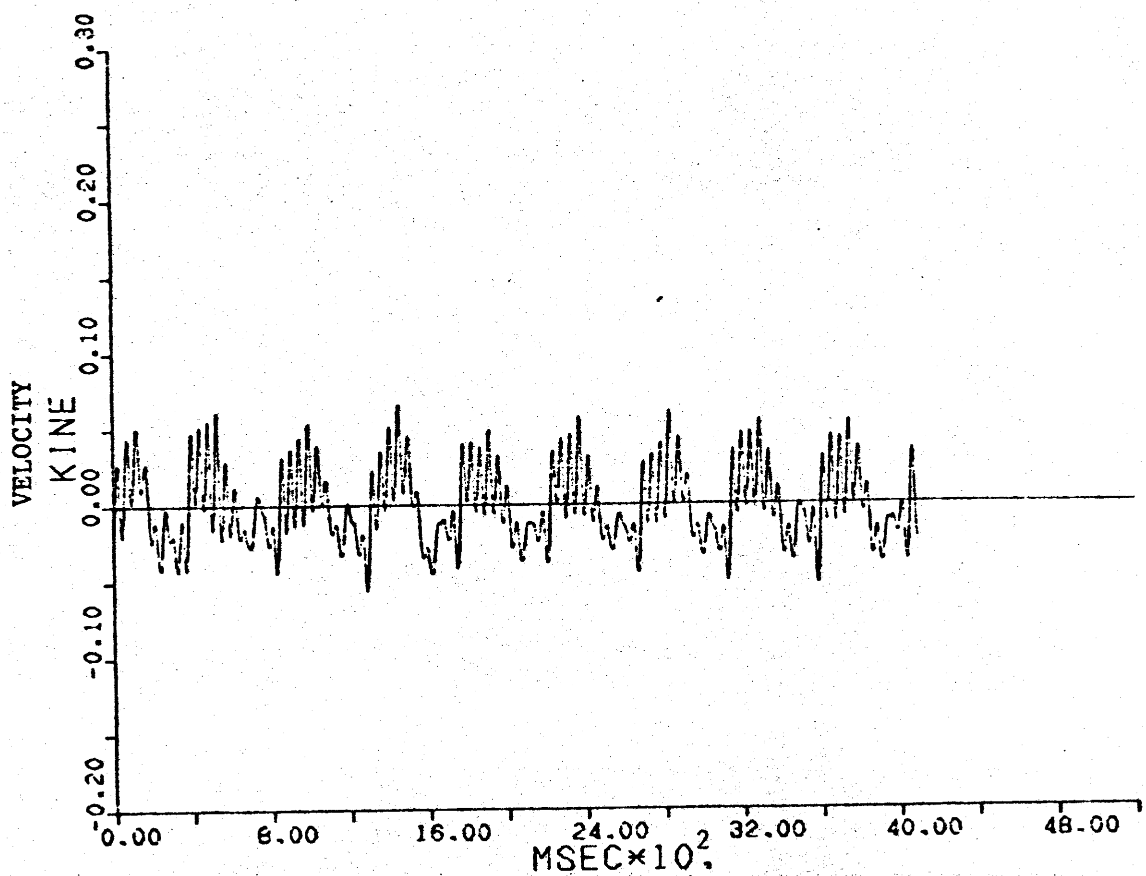


Fig.4-4-24 E30のY方向速度応答 (COMPUTED)



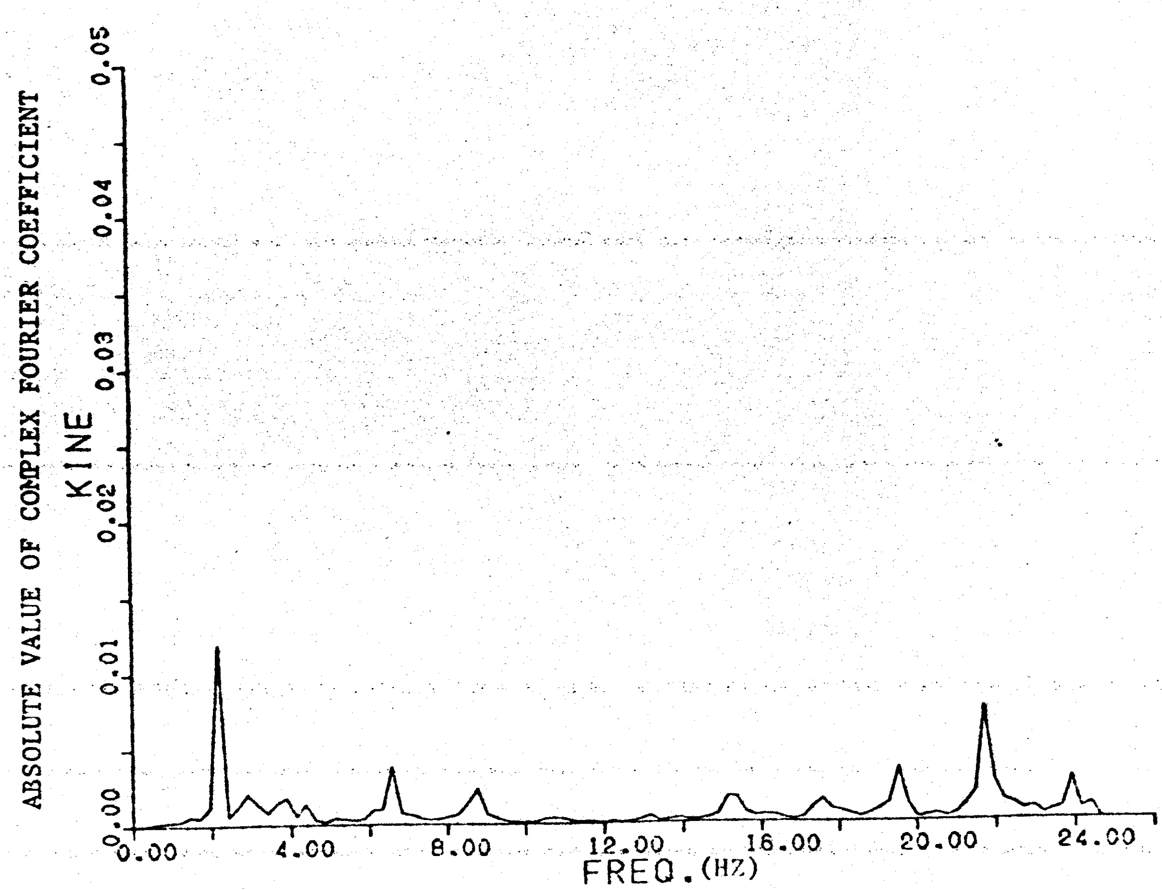
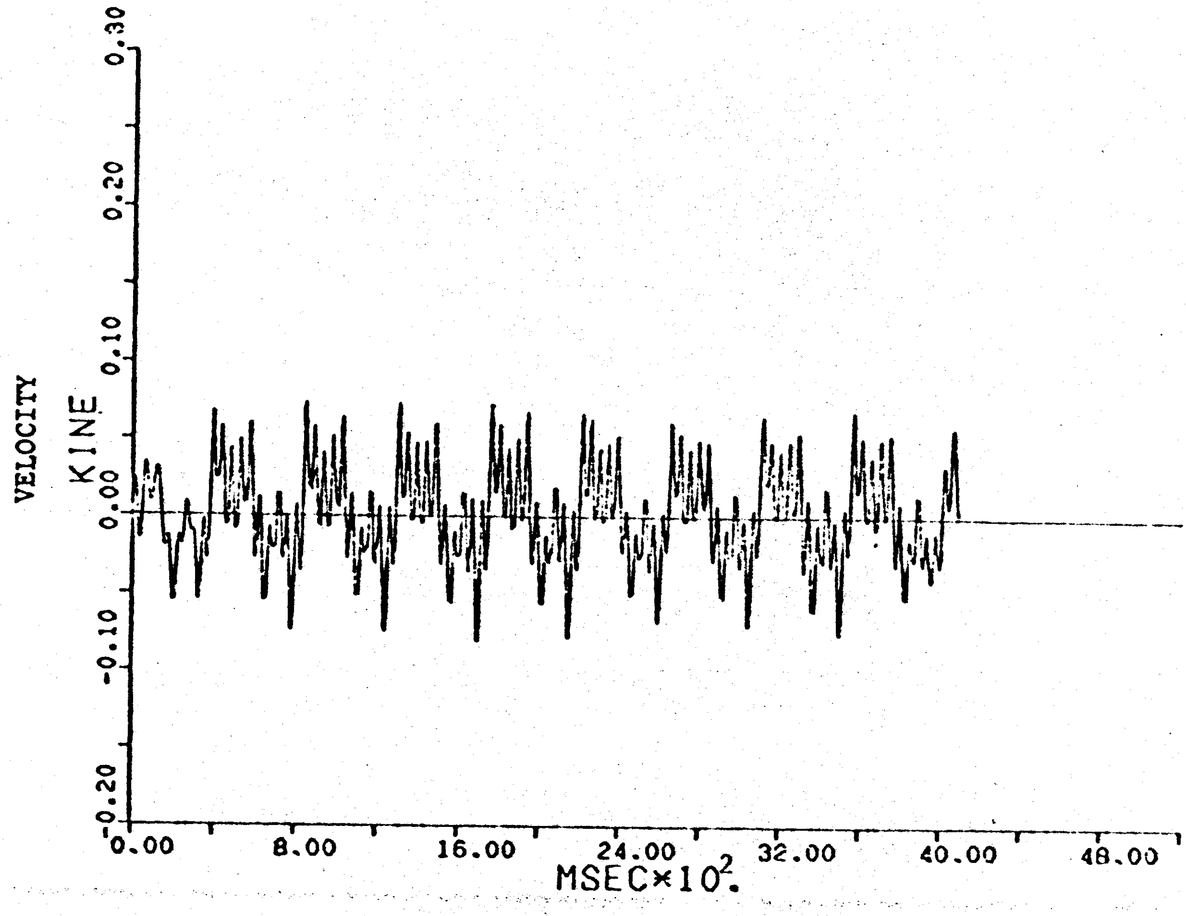


Fig.4-4-25 **E33**のY方向速度応答 (RECORDED)



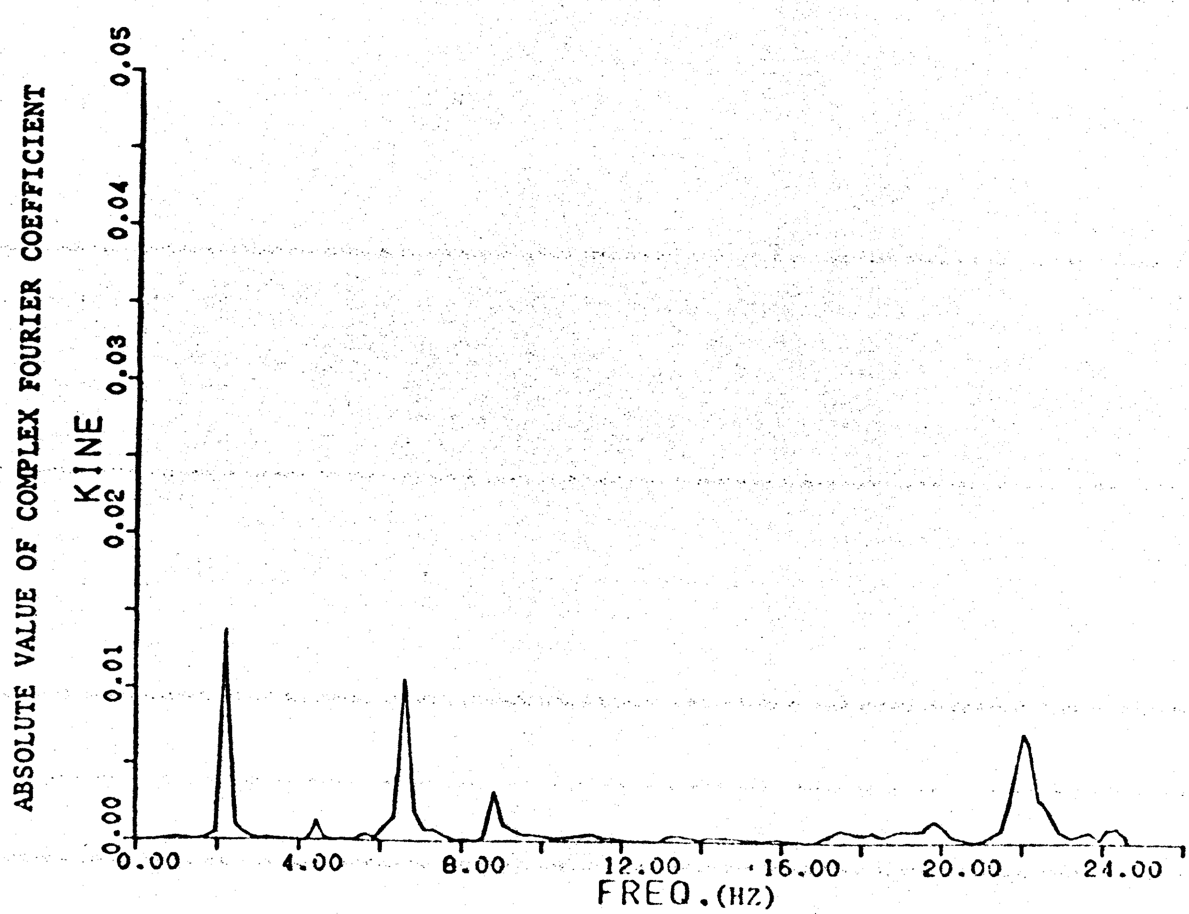
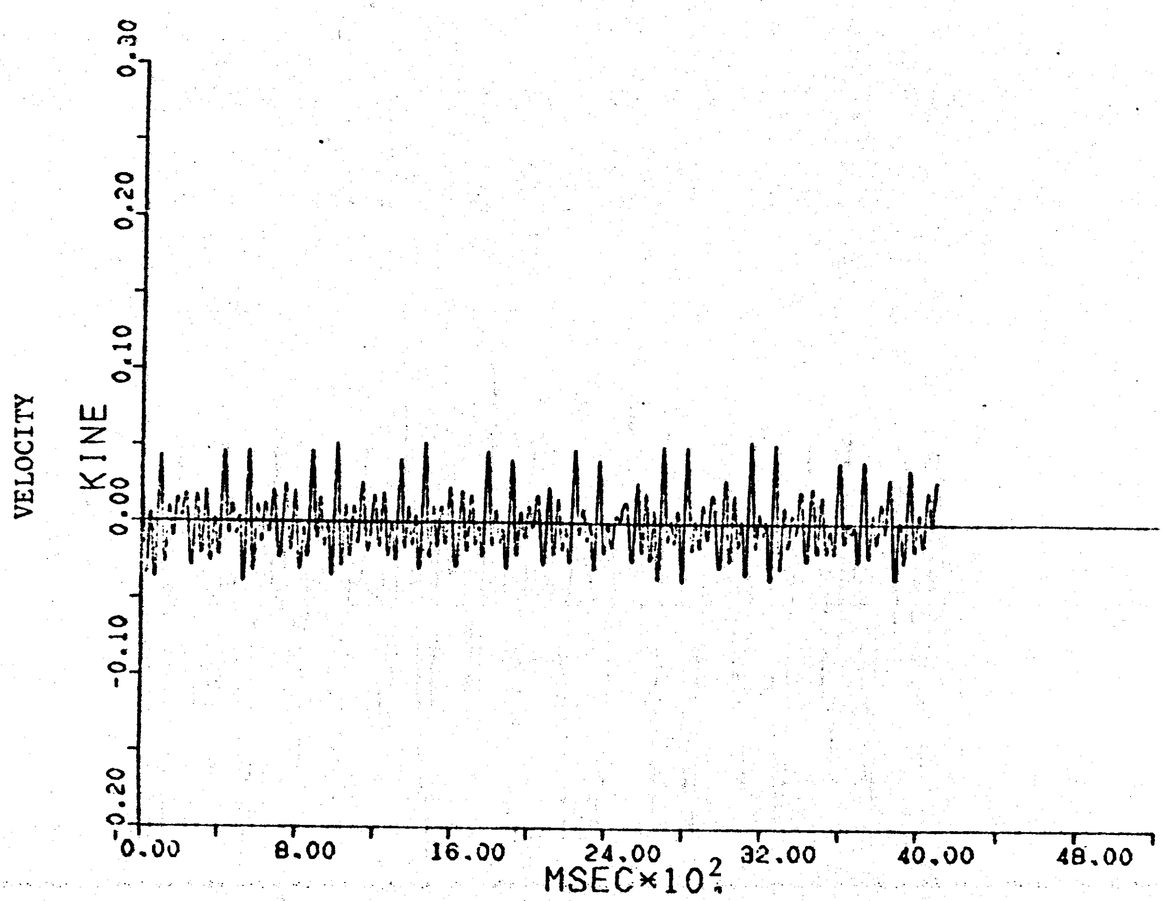


Fig.4-4-26 E33のY方向速度応答 (COMPUTED)

する為 Fig.4-4-23, Fig.4-4-25 には E30、E33の実測された速度応答ならびにそのフーリエー級数を併記する。計算された速度応答(Fig.4-4-24, 及び Fig.4-4-26)は実測された速度応答(Fig.4-4-23 及び Fig.4-4-25)とよく似ている。E30, E33の橋軸(Y)方向の振動は, 当然橋脚の橋軸方向の振動の影響を受けるはずだが, 既に§4-2で述べたように, 2.2 Hz, 6.6 Hz 成分のように隣接する橋脚の振動の位相が180°反転している場合には, 橋脚の鉛直動で E30, E33の橋軸方向振動が励起され, 橋脚の橋軸方向振動は E30, E33の鉛直方向振動を励起すると考えられ, 橋脚の橋軸方向振動の E30, E10の橋軸方向振動に与える影響は小さいものと思われる。これを確認する為, 隣接する二つの橋脚のフーチング上部の橋軸方向速度応答の同時記録を重ね合わせたものを Fig.4-4-27に示す。この図において二つの速度応答の和の振幅は, E30, E33の橋軸方向速度応答に比べ充分小さい。

また橋脚の上下動が励起する E30, E33の鉛直方向速度応答を算出しこれを Fig.4-4-28, Fig.4-4-29 に示す。これは測定された同点の速度応答に比べかなり小さく, 橋脚の鉛直動が, E30, E33の鉛直動に及ぼす影響が, 橋脚の水平動に依るものより小さいことを示している。



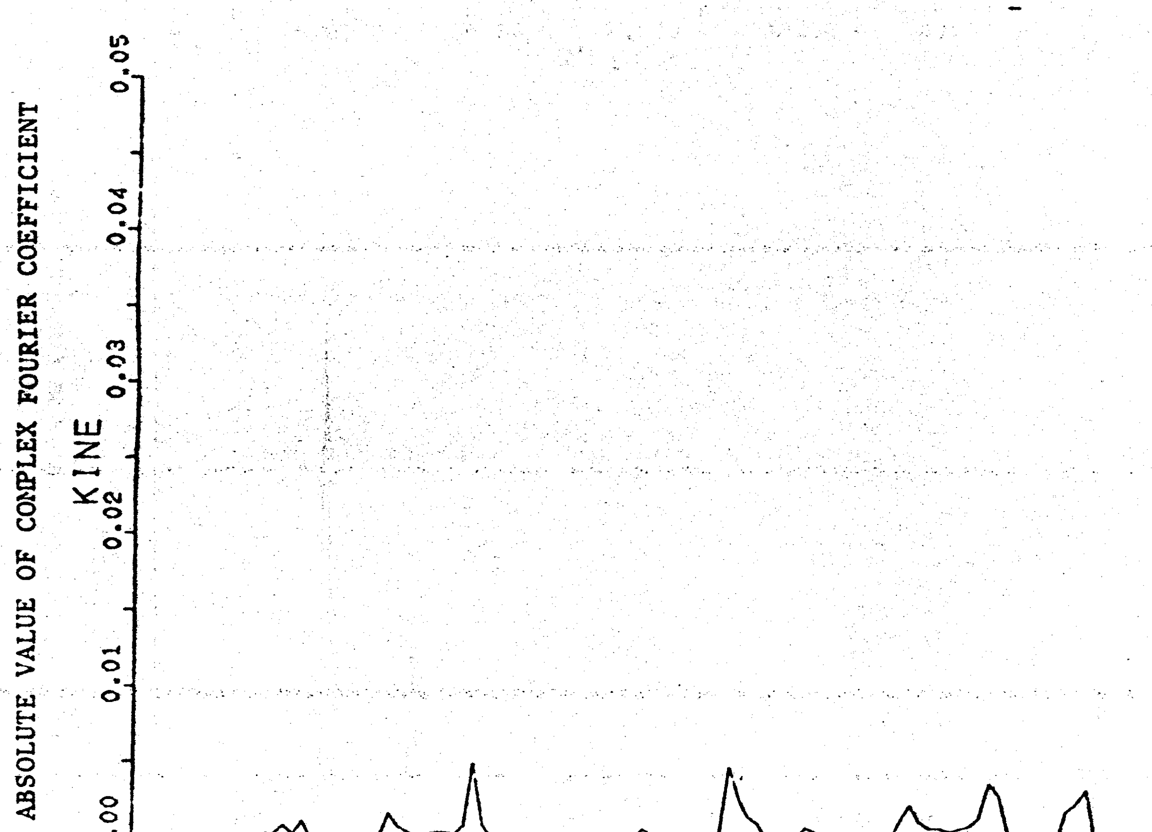
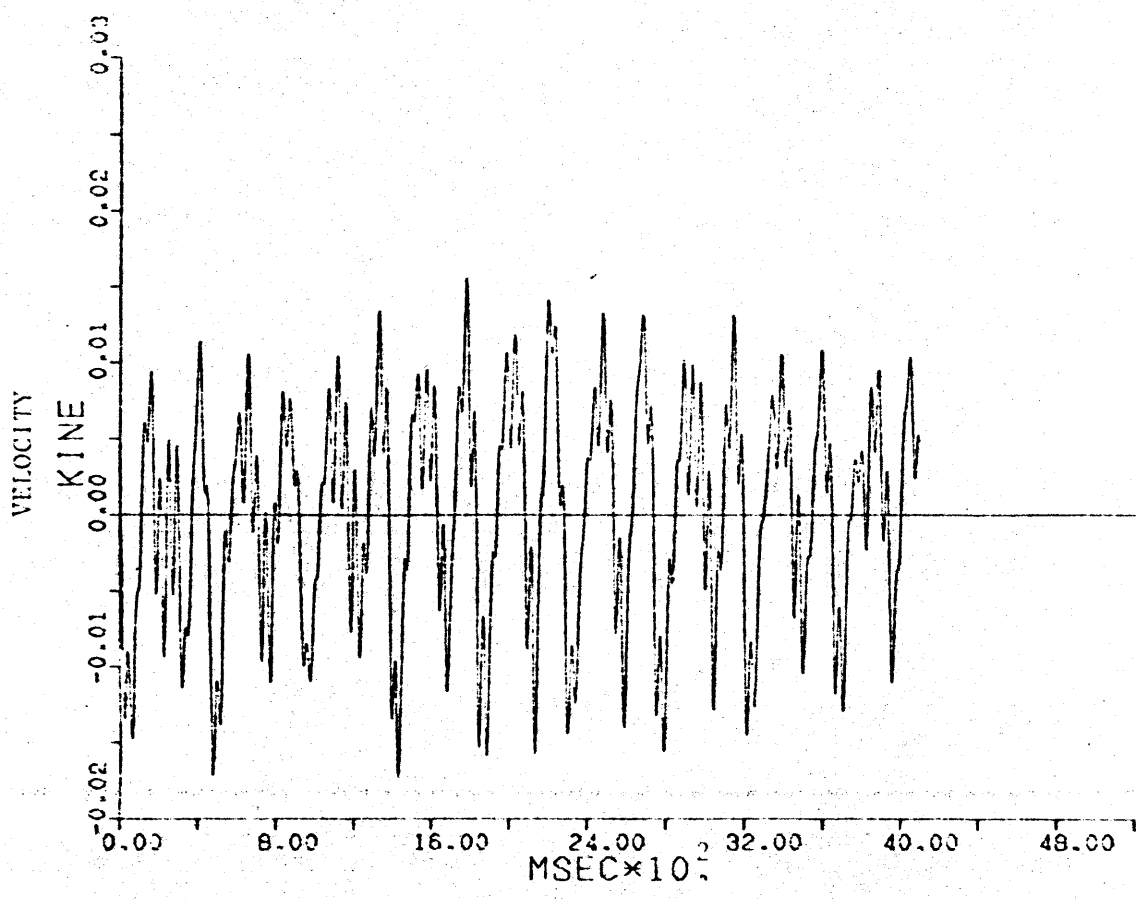


Fig.4-4-27 E10のY方向速度応答とE50のY方向速度応答の和



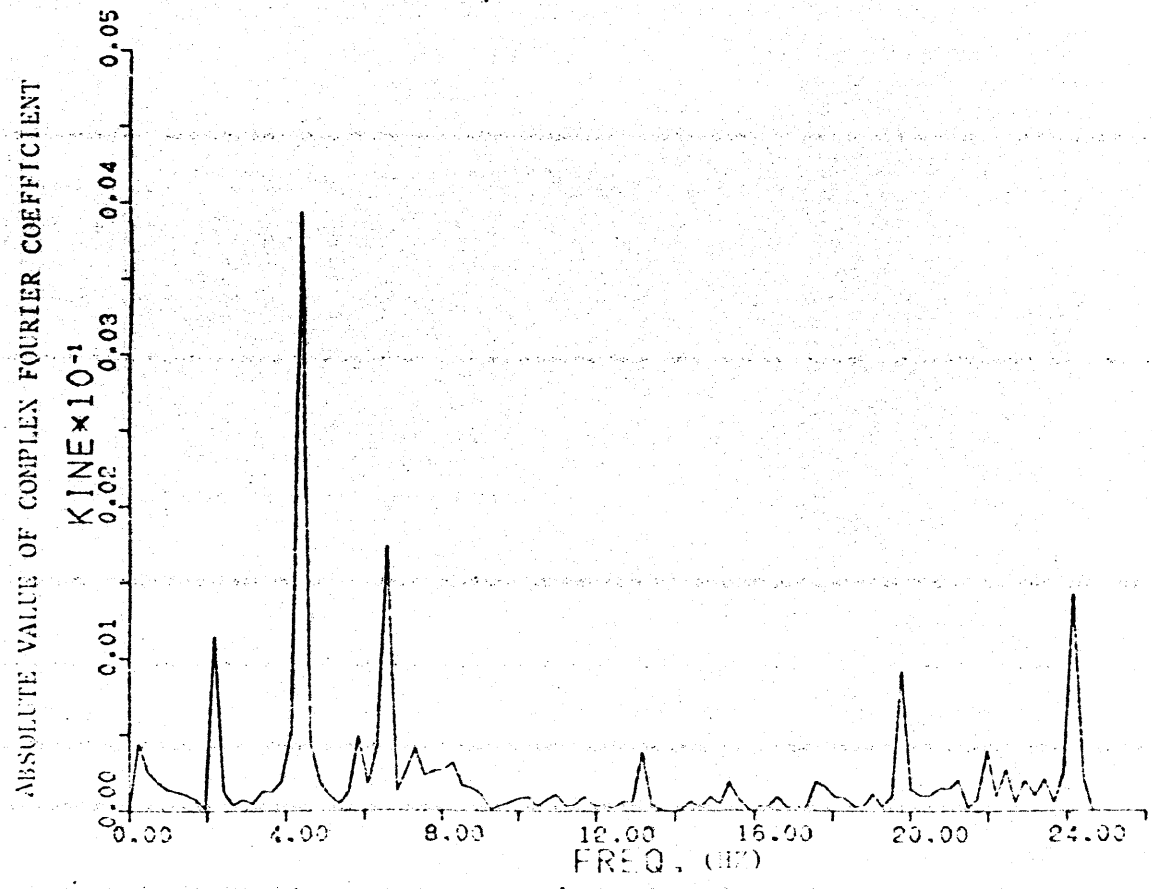


Fig.4-4-28 橋脚の鉛直動のみ考慮した時のE30のZ方向速度応答の計算値

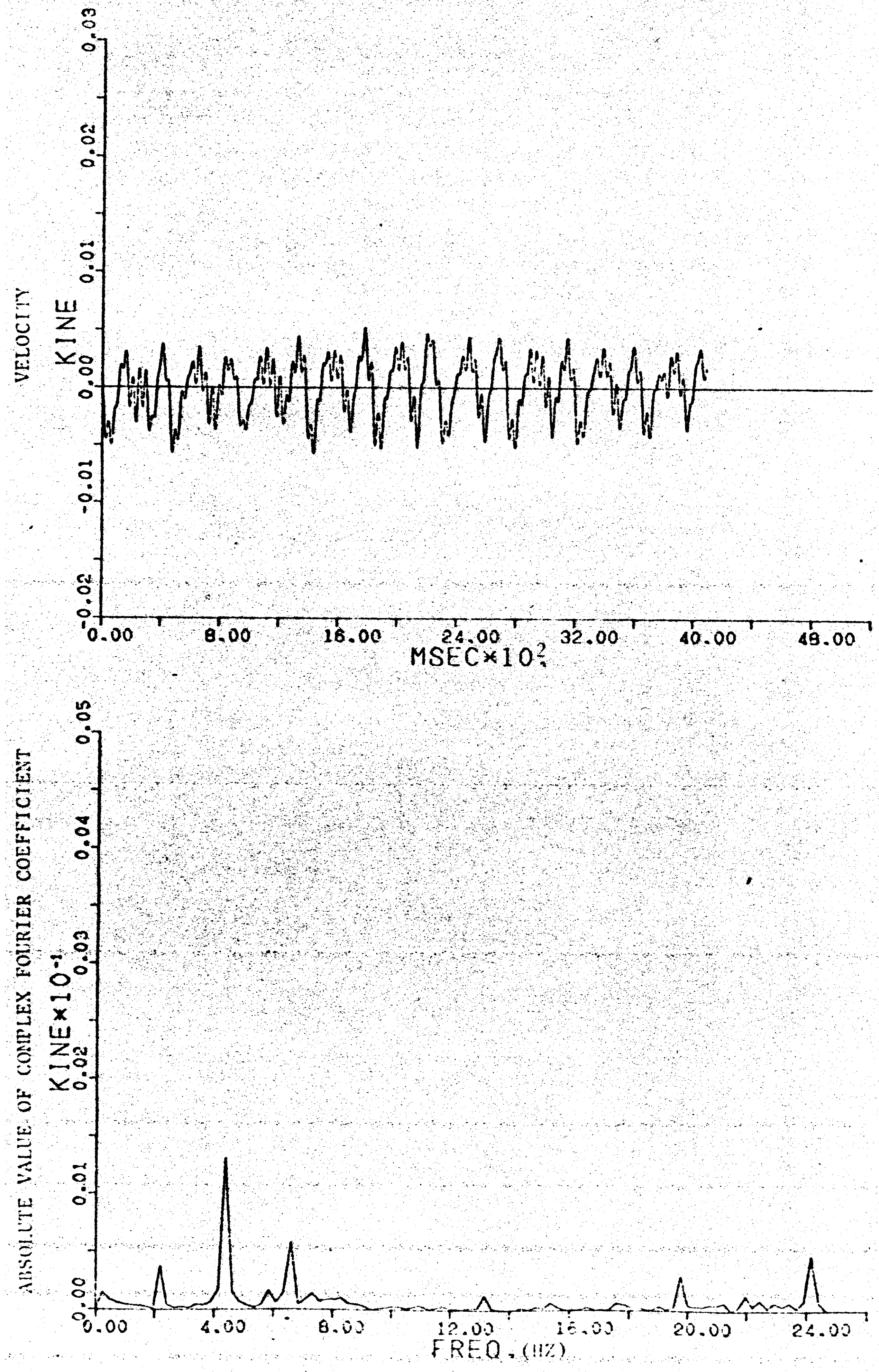


Fig.4-4-29 橋脚の鉛直動のみ考慮した時のF5-5のZ方向速度応答の計算値

Ch 5 結論

以上 2～4章にわたり高架橋上を新幹線車輌が走行した時に励起される地盤振動について検討してきたが，この過程で得た，いくつかの結果を整理してみる。

(橋脚への入力に関して)

(1) 一つの車軸が高架橋上を走行した時，鉛直方向に橋脚を加振する力のフーリエ変換値は §2-4の(2-4-2)式のように近似できると思われる。この近似式によるとフーリエ変換値が0となる周波数が等間隔に離散して存在する。高架橋のスパンを12.5mとすると，4.4Hz 8.8Hz といった4.4Hzの整数倍の振動数成分が0となり，スパンが25mの場合は2.2Hzの整数倍の振動数成分が0となる。第一中里架道橋はスパン12.5mの桁が連続する高架橋であり この周辺の地盤の振動測定で4.4Hz成分が比較的小さいことからもこの推測の是非が傍証できると考えられる。

(2) 新幹線車輌全体が高架橋上を走行する時は上記のフーリエ変換値に

$$W(f \cdot \ell / V) = \sum_{j=1}^{n} e^{-i\omega \Delta t_j}$$

という重み((2-3-2)式参照 pp.15)がかかることになる。この概形は Fig 2-3-2 (pp.17)のようになりそのピークに当たる振動数は実測された地盤振動の卓越振動数と一致する。

（橋脚・地盤系の振動特性に関して）

(1) 地盤内の面加振に伴う波動伝播の近似解をコンプライアンスマトリックスに用い，この逆マトリックスを橋脚の各要素を支えるバネとして考えると，波動の逸散に伴う減衰が定性的に評価され橋脚の振動特性をかなりよく模擬できる。これより橋脚の各要素が地盤に加える力も算出される。地中の点加振に伴う地表の変位は，動的相反定理により地表の点加振に伴う地中の変位，いわゆるLamb (1904) の解と等値になる。従って，このLamb (1904) の解に各要素が地盤に加える力の重みをかけ，地表で総和をとることで橋脚加振に伴う地表の変位を算出することが可能である。これにより，橋脚・地盤系の持つ地盤振動伝播上のバンド・パス・フィルターとしての特性が解明できる。

（橋脚間隔が地盤振動に及ぼす影響）

(1) これらのシステムのアウトプットとしての地盤振動は，これまでに触れた入力及び伝達系の特性の他に，振源としての橋脚が複数個存在することによる影響も受けている。特に橋脚間隔 12.5m の高架橋の場合 2.2 Hz，6.6 Hz といった振動数成分に着目すると，スパン中央直下の地表では橋脚の鉛直加振により，橋軸方向の振動が励起され，また橋脚の橋軸方向加振により鉛直動が励起されると見なせる測定結果が得られる。

謝辞

本研究は東大工学部 土木工学科 松本嘉司教授の御指導のもとで行なわれたものであり，また論文をまとめるにあたっては 東大 土木工学科 伊藤学教授，東大生産技術研究所の久保慶三郎教授，田村重四郎教授，東大地震研究所の伯野元彦教授，そして筑波大学の西岡隆助教授に貴重な助言をいただきました。深く感謝の意を表します。また測定を行なうにあたっては 国鉄の方々，埼玉大学の秋山成興教授，町田篤彦助教授に様々な便宜をはかっていただいたことを付記し厚く御礼申し上げます。

記号

本論文中で記号は，それがはじめて現われたところで定義しており，多数回出てくる記号については以下のリストに定義を示す。記号が単位を持つ場合には一般的な単位を記した。単位が示されていないものは無次元数である。

なお論文中に出てくるインピーダンスは力－変位インピーダンスであり，アドミッタンス等の諸量もこれに準ずるものとする。

$A(m^2)$	;	断面積
$a(m)$	;	杭の半径
a	;	S波の波長で無次元化した距離に2πを乗じたもの
b	;	同上
$E(ton/m^2)$	;	ヤング率
e	;	指数
F	;	レーリー関数
$f(Hz)$	;	周波数
f_1	;	変位関数の実部
f_2	;	変位関数の虚部
f'	;	無次元化振動数
$G(m/sec^2)$	;	重力加速度
$g(m/sec^2)$	;	同上
$I(m^4)$	;	断面2次モーメント
i	;	虚数単位（$=\sqrt{-1}$）
J_N	;	N次のベッセル関数
$j(rad/m)$	;	円振動数／S波速度
$l(m)$	;	杭長
$l(m)$	;	固定軸距
$l(rad/m)$	;	円振動数／P波速度
$l_s(m)$	;	高架橋のスパン
$\overline{N}$	;	N値

P(ton) ; 列車走行時の支承反力

p(ton) ; 一車軸走行時の支承反力

p_0 (ton) ; 一車軸にかかる重量

R(m) ; 円筒座標における $\sqrt{r^2+z^2}$

R(m) ; 杭の半径

r ; 複素反射率

r ; S波速度／P波速度

t(sec) ; 時間

u_j (m) ; j方向変位

V(m/sec) ; 列車速度

V_s (m/sec) ; S波速度

V_p (m/sec) ; P波速度

V_R (m/sec) ; レーリー波速度

W(ton) ; 杭頭付加重量

W ; 重み関数 (2-3-2)式

Z(ton/m) ; 力-変位インピーダンス

Z(Ω) ; インピーダンス

γ(ton/m³) ; 比重

λ(ton/m²) ; ラメの定数 $= \frac{2\nu \cdot \mu}{1-2\nu}$

μ(ton/m²) ; ラメの定数（剪断弾性係数）

ν ; ポアソン比

π ; 円周率 3.14159

ψ(rad or deg); 位相差

ω(rad/sec) ; 円振動数

$\mathcal{F}$; フーリエ変換

$\mathcal{F}^{-1}$; 逆フーリエ変換

参考文献

(1)Tamura,C.,and Y.,Nakamura,"A Numerical Method for Analysis of Vibration of the Ground of Finite Area taking Account of Energy Dissipation,"Report of Institute of Industrial Science, the Univ. of Tokyo,Vol.28,No.8,Aug.,1976,pp.377-381

(2)Lamb,H., "On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid,"Philosophical Trans.,Royal Society,London,Ser.A,Vol. 203,1904,pp.1-42

(3)Miller,G.F.,and H.,Pursey, "On the Partition of Energy Between Elastic Waves in a Semi-Infinite Solid,"Proc. Royal Society,London, A,Vol.233,1955,pp55-69

(4)Miller,G.F.,and H.,Pursey, "The Field and Radiation Impedance of Mechanical Radiators on the Free Surface of a Semi-Infinite Isotropic Solid,"Proc. Royal Society,London,A,Vol.223,1954,pp.521-541

(5)Sezawa,K.,"Further Studies on Rayleigh Waves having Some Azimuthal Distribution,"Bull. of the Earthquake Reserch Institute, Tokyo Univ.,Japan,Vol.6,Jan.,1929

(6)Penzien,J.,"Seismic Effect on Structures Supported on Piles extending Through Deep Sensitive Clays,"Report of Univ. of California, Berkley,Aug.,1946

(7)Hakuno,M. , " Evaluation of Dynamical Properties of Pile Foundation based on Wave Dissipation Theory",5th World Conference on Earthquake Engineering,Rome,Session 7,C:Foundation & Soil Structure Interaction

(8)Crockett,J.N.A.,and R.E.R.,Hammond"The Dynamic Principles of Machine Foundations and Ground,"Proc. Institution of Mechanical Engineers,London,Vol.160,No.4,1949,pp.512-523

(9)Rao,H.A.Balakrishna,"The Design of Machine Foundations Related to the Bulb of Pressure,"Proc. 5th ICSMFE,Vol.1,1961,pp.563-568

(10)Nojima,O.",Basic Study for the Evaluation of Foundation-Structure Interaction,"Proc. of the Japan Earthquake Engineering Symposium,Session B,1973,pp.221-228

(11)Ewing,W.M.,and W.S.Jardetzky,F. Press, "Elastic Waves in Layered Media,"Macgraw-Hill Book Co.,1957

Appendix 1　Lamb の式の数値積分

A-1-1 概説

本論文の§3-3で述べたように、動的な相反定理を用いることによって、地表の一点加振時の地中の変位を算出する Lamb[2] の式を、地中加振時の地表の変位を導出する式として用いることができる。ここで考える地盤は、半無限等方弾性体でなければならない。この Lamb[2] の式は周知のように不可避的に複雑な無限積分によって表わされ、数値計算上かなり面倒な技巧を要求される。これまでに田治見、野嶋[10] 等により能率のよい計算手法が示されているが、筆者の工夫も交えてこれに触れることにする。

A-1-2 半無限弾性体 3次元波動方程式の解

一般に半無限弾性体表面を表面に対し法線方向に正弦加振した時の弾性体内変位は Lamb[2] の式として知られているが、加振方向を面内にとったいわゆる水平加振の場合の解は妹沢[5] によって示されている。具体的な式の誘導は Lamb, H.[2] ('904)　妹沢[5] (1929) に譲るとしてここでは理論式のみを記述する。

座標系は鉛直軸 Z を下方に向けて、円筒座標 (r, θ, Z) を設け、各々の方向の変位を (u_r , u_θ , u_z) とする。

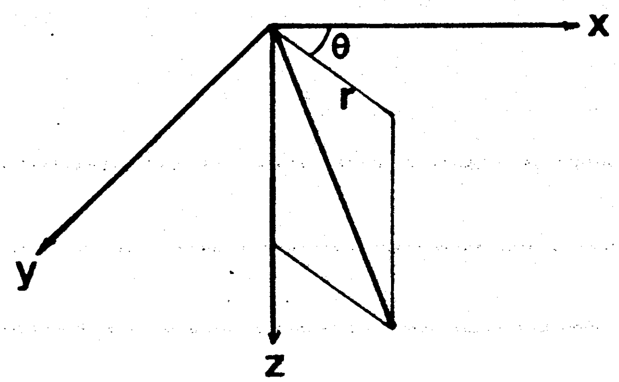


Fig.A-1-1 円筒座標系

また式中で用いる記号は以下のように定義される。

μ; 地盤の剪断弾性定数　　$P \cdot e^{i\omega t}$;加振力

ν; ポアソン比　　$J_N(x)$;N階のベッセル関数

V_s; S波速度

V_p; P波速度

ζ; 積分変数

$l = \omega / V_p$, $j = \omega / V_s$, $a = r \cdot j$, $b = z \cdot j$, $\gamma = \dfrac{V_s}{V_p}$

$$F(\zeta) = (2\zeta^2 - 1)^2 - 4\zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - \gamma^2} \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

(レーリー関数)

(i) 上下加振時における変位

$$u_r = \frac{P \cdot e^{i\omega t}}{2\pi\mu} \cdot j \cdot \int_0^\infty \frac{\zeta^2 \left\{ (2\zeta^2 - 1) \cdot e^{-b\sqrt{\zeta^2 - \gamma^2}} - 2\sqrt{\zeta^2 - 1}\sqrt{\zeta^2 - \gamma^2} \cdot e^{-b\sqrt{\zeta^2 - 1}} \right\}}{F(\zeta)} \cdot J_1(\zeta a)\, d\zeta$$

----(A-1-1)

$u_\theta = 0.0$ ----(A-1-2)

$$u_z = -\frac{P \cdot e^{i\omega t}}{2\pi\mu} \cdot j \cdot \int_0^\infty \frac{\zeta\sqrt{\zeta^2 - \gamma^2} \cdot e^{-b\sqrt{\zeta^2 - \gamma^2}} + 2\zeta^3 \sqrt{\zeta^2 - \gamma^2} \left(e^{-b\sqrt{\zeta^2 - 1}} - e^{-b\sqrt{\zeta^2 - \gamma^2}} \right)}{F(\zeta)} \cdot J_0(\zeta a)\, d\zeta$$

----(A-1-3)

(ii) 水平x方向加振時における変位

$$u_r = \frac{P\cdot e^{i\omega t}}{4\pi\mu}\cdot j\cdot\cos\theta\cdot\int_0^\infty\left[\{-F_1(\zeta)+F_2(\zeta)\}\cdot J_0(\zeta a)+\{F_1(\zeta)+F_2(\zeta)\}J_2(\zeta a)\right]d\zeta$$

----(A-1-4)

$$u_\theta = \frac{P\cdot e^{i\omega t}}{4\pi\mu}\cdot j\cdot\sin\theta\cdot\int_0^\infty\left[\{F_1(\zeta)-F_2(\zeta)\}\cdot J_0(\zeta a)+\{F_1(\zeta)+F_2(\zeta)\}\cdot J_2(\zeta a)\right]d\zeta$$

----(A-1-5)

$$u_z = \frac{P\cdot e^{i\omega t}}{2\pi\mu}\cdot j\cdot\cos\theta\cdot\int_0^\infty\frac{2\sqrt{\zeta^2-1}\sqrt{\zeta^2-\gamma^2}\cdot e^{-b\sqrt{\zeta^2-\gamma^2}}-(2\zeta^2-1)\cdot e^{-b\sqrt{\zeta^2-1}}}{F(\zeta)}\cdot\zeta^2\cdot J_1(\zeta a)\,d\zeta$$

----(A-1-6)

但し

$$F_1(\zeta)=\frac{\zeta\sqrt{\zeta^2-1}\,e^{-b\sqrt{\zeta^2-1}}+2\zeta^3\sqrt{\zeta^2-1}\left(e^{-b\sqrt{\zeta^2-\gamma^2}}-e^{-b\sqrt{\zeta^2-1}}\right)}{F(\zeta)}$$

----(A-1-7)

$$F_2(\zeta)=\frac{\zeta\cdot e^{-b\sqrt{\zeta^2-1}}}{\sqrt{\zeta^2-1}}$$ ----(A-1-8)

A-1-3 波動方程式の解の特徴

A-1-2 で示した変位は次の二種類の積分に区分できる。これを仮に Type 1, 及び Type 2 と名付ける。

Type 1 $$\int_0^\infty\frac{\psi(\zeta)}{F(\zeta)}\cdot J_N(\zeta\cdot a)\cdot d\zeta$$

Type 2 $$\int_0^\infty\frac{\zeta\cdot e^{-b\sqrt{\zeta^2-1}}}{\sqrt{\zeta^2-1}}\cdot J_N(\zeta\cdot a)\,d\zeta$$

いずれも積分路上で $\zeta=1$ に枝点を持ち、特に Type 1 は $\zeta=\gamma$ にも枝点を持つ他 $F(\zeta_R)=0$ なる ζ_R が積分路上に存在する。V_s/ζ_R は物理的にはレーリー波速度と呼ばれている。このように積分路上に極 ζ_R が存在する場合、積分路はこの極を避けねばならず、このためには Fig A-1-2 に示すような三種類の積分路が考えられる。

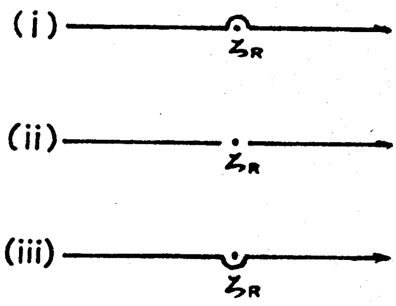


Fig.A-1-2 三種の積分路

式で表現すると 各々の積分路は ζ-δ面内で

(i) $$\lim_{\delta \to 0} \int_{0+i\delta}^{\infty+i\delta} \frac{\psi(\zeta)}{F(\zeta)} \cdot J_N(\zeta a) \cdot d\zeta$$ ----(A-1-9)

(ii) $$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{0}^{\zeta_R-\varepsilon} \frac{\psi(\zeta)}{F(\zeta)} \cdot J_N(\zeta a)\, d\zeta + \int_{\zeta_R+\varepsilon}^{\infty} \frac{\psi(\zeta)}{F(\zeta)} \cdot J_N(\zeta a)\, d\zeta \right]$$ ----(A-1-10)

(iii) $$\lim_{\delta \to 0} \int_{0-i\delta}^{\infty-i\delta} \frac{\psi(\zeta)}{F(\zeta)} \cdot J_N(\zeta \cdot a) \cdot d\zeta$$ ----(A-1-11)

となる。(i)はζ軸の上側をきわめて接近して，また(iii)はζ軸の下側を，(ii)はζ軸上を通り，いわゆるCauchyの主値である。これらの積分路のうちどれが適合するかは Ewing, W. M.& W. S. Jardetzky[11](1957)により(i)を選択すべく明示されている。Ewing, W. M.[11]等は 加振円振動数ωを複素円振動数と考え，ζ-δ面上での波動の解の積分を $\zeta \cdot \omega / V_s = k$ と変え k-τ面内の積分として，この積分路に関する証明を行っている。* 以下にその概略を示す。Type 1の一例として上下加振時のu_rを用いる。$k = \frac{\omega \cdot \zeta}{V_s}$ $(= j \cdot \zeta)$ とおくと

$$u_r = \frac{P \cdot e^{i\omega t}}{2\pi\mu} \int_0^\infty \frac{k^2\left\{(2k^2 - j^2)\, e^{-z\sqrt{k^2-l^2}} - 2\sqrt{k^2-j^2}\sqrt{k^2-l^2}\, e^{-z\sqrt{k^2-j^2}}\right\}}{F(k)} \cdot J_1(k r)\, dk$$ ----(A-1-12)

(但し k以外の各符号は A-1-2 での定義に従う)

ここで ベッセル関数 $J_1(k \cdot r)$は ハンケル関数を用いて次のように表現される。

$$J_1(k \cdot r) = \frac{1}{2}\left\{ H_1^{(1)}(k \cdot r) + H_1^{(2)}(k \cdot r) \right\}$$ ----(A-1-13)

$$\ell = (s - i\sigma)/V_p \qquad j = (s - i\sigma)/V_s \qquad \text{----(A-1-19)}$$

となる。$z \to \infty$ とした時 被積分関数が発散しないためには，$\mathrm{Re}(\sqrt{\xi^2 - \ell^2}) \geqq 0$ かつ $\mathrm{Re}(\sqrt{\xi^2 - j^2}) \geqq 0$ でなければならない。従って 切断を $\mathrm{Re}(\sqrt{\xi^2 - \ell^2}) = 0$ ，$\mathrm{Re}(\sqrt{\xi^2 - j^2}) = 0$ を満たすようにとる。$\xi = k + i\tau$ であるので

$$\xi^2 - \ell^2 = (k + i\tau)^2 - (s - i\sigma)^2 / V_p^2$$
$$= \{(k^2 - \tau^2) - (s^2 - \sigma^2)/V_p^2\} + 2i(k\tau + s\sigma/V_p^2) \qquad \text{----(A-1-20)}$$

よって $\mathrm{Re}(\sqrt{\xi^2 - \ell^2}) = 0$ である為には

$$\begin{cases} (k^2 - \tau^2) < (s^2 - \sigma^2)/V_p^2 & \text{----(A-1-21)} \\ k\tau = -s\sigma/V_p^2 & \text{----(A-1-22)} \end{cases}$$

同様に $\mathrm{Re}(\sqrt{\xi^2 - j^2}) = 0$ である為には

$$\begin{cases} (k^2 - \tau^2) < (s^2 - \sigma^2)/V_s^2 & \text{----(A-1-23)} \\ k\tau = -s\sigma/V_s^2 & \text{----(A-1-24)} \end{cases}$$

(A-1-21)～(A-1-24)式により 枝点，極並びに 切断は Fig A-1-3-a あるいは Fig A-1-3-b のようになる。

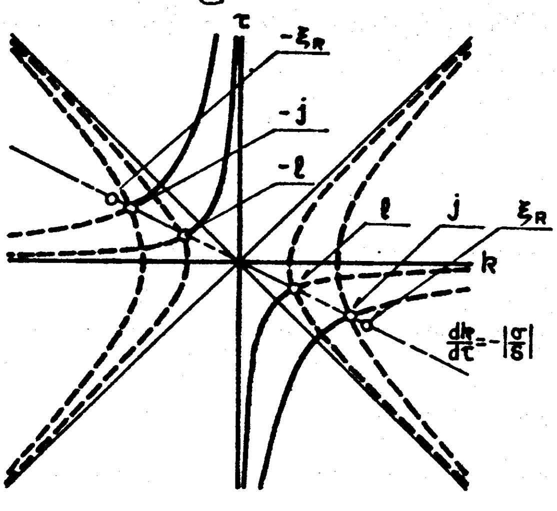


Fig.A-1-3-a

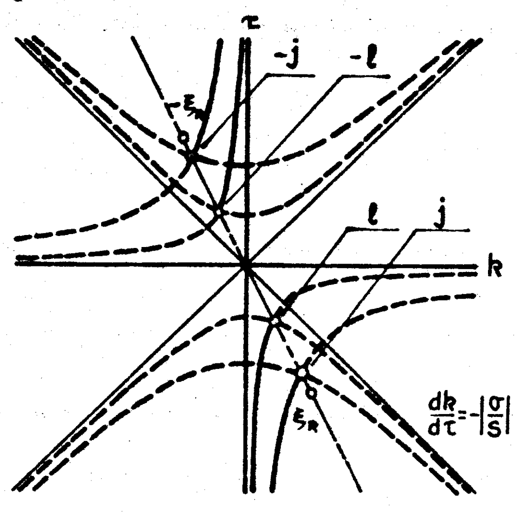


Fig.A-1-3-b

さらに一階のハンケル関数は

$$H_1^{(1)}(kr) = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} e^{i(kr-\frac{3\pi}{4})} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \int_0^\infty e^{-u} \cdot u^{\frac{1}{2}} \left(1+\frac{iu}{2kr}\right)^{\frac{1}{2}} du$$

----(A-1-14)

$$H_1^{(2)}(kr) = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} e^{-i(kr-\frac{3\pi}{4})} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \int_0^\infty e^{-u} \cdot u^{\frac{1}{2}} \left(1-\frac{iu}{2kr}\right)^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} \cdot e^{i\{(-kr)-\frac{3\pi}{4}\}-\frac{\pi i}{2}} \cdot i \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi(-kr)}} \cdot \int_0^\infty e^{-u} \cdot u^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1+\frac{iu}{2(-kr)}\right)^{\frac{1}{2}} du$$

$$= H_1^{(1)}(-kr) \qquad \text{----(A-1-15)}$$

よって (A-1-12) 式はさらに

$$u_r = \frac{P_0 \cdot e^{i\omega t}}{4\pi\mu} \cdot \int_{\infty}^{\infty} \frac{k^2\{(2k^2-j^2) \cdot e^{-z\sqrt{k^2-l^2}} - 2\sqrt{k^2-j^2}\sqrt{k^2-l^2} \cdot e^{-z\sqrt{k^2-j^2}}\}}{F(k)} \cdot H_1^{(1)}(kr) \cdot dk$$

$$= \frac{P_0 \cdot e^{i\omega t}}{4\pi\mu} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k)\, dk \qquad \text{----(A-1-16)}$$

ここで (A-1-16)式の積分を評価する為、複素平面上の変数 $\xi (= k + i\tau)$ を取り次の積分を考える。

$$I_u = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^2\{(2\xi^2-j^2) \cdot e^{-z\sqrt{\xi^2-l^2}} - 2\sqrt{\xi^2-j^2}\sqrt{\xi^2-l^2} \cdot e^{-z\sqrt{\xi^2-j^2}}\}}{F(\xi)} \cdot H_1^{(1)}(\xi \cdot r)\, d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi)\, d\xi \qquad \text{----(A-1-17)}$$

この積分は $\pm l$, $\pm j$ に枝点を持ち、これらは共に実軸上に存在するが ω を複素円振動数とすると枝点の位置は変化する。

$$\omega = s - i\sigma \qquad \text{----(A-1-18)}$$

とおくと

Fig. A-1-3-a 及び Fig. A-1-3-b に示された切断を横切ると，別のRieman面に入いり　$Re(\sqrt{\xi^2-l^2})<0$，$Re(\sqrt{\xi^2-j^2})<0$ となる。ここで円振動数 $\omega(=s-i\sigma)$ を実数に近づけると枝点は実軸に近づき，切断も虚軸，実軸に近づいてくる。(A-1-16)の積分を評価する時の積分路は，Radiation condition を満たす為には，この切断を横切らないようにしなければならない。従って積分路は Fig. A-5-4 に示すようにとらなければならない。

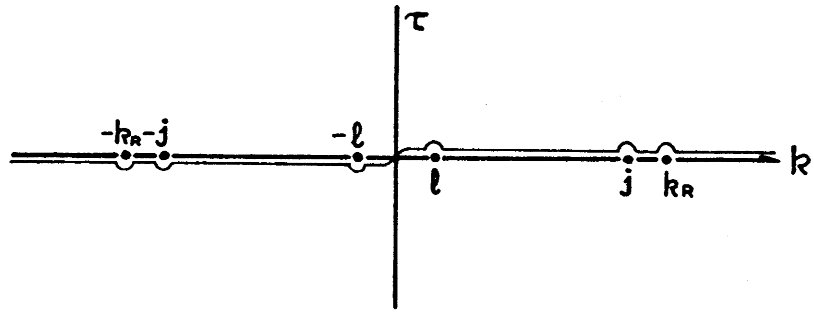


Fig.A-1-4　k-τ面内の積分路

再び積分定数を k から ξ (= k·Vs/ω) に戻し無次元化しても ξ-δ 複素平面内の枝点，切断，極の位置関係は変わらないので，Fig. A-1-2に示した積分路の内で(i)が適合することがわかる。

ここで補足的に特異点とレーリー波の関連について触れておく。再び複素円振動数 ω を考え Fig A-5-5に示す積分路に対し次の積分を実行する。

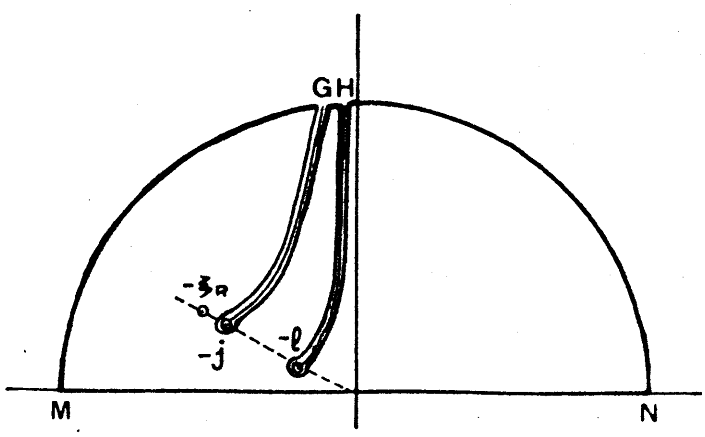


Fig.A-5-5

$$\oint \Phi(\xi)d\xi=\int_M^N+\int_N^H+\int_{L_l}+\int_{L_j}+\int_G^M$$

$$=2\pi i\cdot\sum \mathrm{Res}$$

----(A-1-25)

この積分路の半径を ∞ にすると $\Phi(\xi)$ は 0 になる。よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k)\, dk = 2\pi i \sum \mathrm{Res} - \int_{L_l} - \int_{L_j} \qquad \text{----(A-1-26)}$$

この積分路中には極が一つ存在するだけであるので

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k)\, dk = 2\pi i \frac{k_R^2 \left\{ (2k_R^2 - j^2) \cdot e^{-z\sqrt{k_R^2 - l^2}} - 2\sqrt{k_R^2 - l^2}\sqrt{k_R^2 - j^2} \cdot e^{-z\sqrt{k_R^2 - j^2}} \right\}}{F'(k_R)} \cdot H_1^{(1)}(-k_R \cdot r)$$

$$- \int_{L_l} \Phi(\xi)\, d\xi - \int_{L_j} \Phi(\xi)\, d\xi$$

$$\text{----(A-1-27)}$$

（但し　$F(k_R) = 0$　）

さて　$H_1^{(1)}(-k_R \cdot r)$ は $k_R \cdot r$ の大きい所で次のように近似できる。

$$H_1^{(1)}(-k_R \cdot r) = H_1^{(2)}(k_R \cdot r) \fallingdotseq \sqrt{\frac{2}{\pi k_R r}} \cdot e^{-i(k_R \cdot r - \frac{3\pi}{4})} \qquad \text{----(A-1-28)}$$

よって留数項は距離減衰が $1/\sqrt{r}$ に比例し円筒面状の波面を持つ波であることが示される。これがレーリー波である。(A-1-28)式の近似は $k_R \cdot r \geq 1$ で充分精度があると考えられる。

A-1-4 数値計算上の問題点とその対策

Lambの積分を数値的に実行する際の主要な問題点として次の二点が掲げられる。

(i) 極近傍の積分路はCaucyの主値を充分な精度で得る為にかなり極近くに接近させねばならないが，逆に接近させすぎても被積分関数の値が極めて大きくなり累積誤差が増大する。

(ii) この積分は z に関する半無限積分であるが数値計算を行なう為には適当な上限で計算を打ち切らなければならない。

これらは A-1-3 で述べた Type 1 の積分型のみの問題である。Type 2の積分は解析的に解の誘導が可能であるので数値積分の必要はない。このことに関しては後に触れることとし，まず(i)に関する数値計算手法について述べてみる。

Type 1の積分は P に示すように

$$\int_0^{\infty} \frac{\psi(z)}{F(z)} \cdot J_N(za)\, dz \qquad \text{---}(A\text{-}1\text{-}29)$$

と書くことができる。また積分路はFig A-1-2 の (i) をとらなければならない。ここで極近傍の区間 $(z_R-\varepsilon,\ z_R+\varepsilon)$ に関する積分を考えてみる。被積分関数の分子 $\psi(z)\cdot J_N(za)$ を $G(z)$ とおくと z_R の近傍で

$$\frac{G(z)}{F(z)} = \frac{G(z_R)+(z-z_R)G'(z_R)+\frac{1}{2}(z-z_R)^2G''(z_R)+\frac{1}{6}(z-z_R)^3G'''(z_R)+\cdots}{F(z_R)+(z-z_R)F'(z_R)+\frac{1}{2}(z-z_R)^2F''(z_R)+\cdots}$$

$$\text{----}(A\text{-}1\text{-}30)$$

ここで (A-1-34)式の第一項の積分を実行する。

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\zeta_R-\varepsilon}^{\zeta_R+\varepsilon}\frac{d\zeta}{\zeta-\zeta_R+i\delta} = \lim_{\delta\to 0}\int_{\zeta_R-\varepsilon}^{\zeta_R+\varepsilon}\frac{\zeta-\zeta_R-i\delta}{(\zeta-\zeta_R)^2+\delta^2}d\zeta$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2}\left[\ln\{(\zeta-\zeta_R)^2+\delta^2\}\right]_{\zeta_R-\varepsilon}^{\zeta_R+\varepsilon}-\lim_{\delta\to 0}i\left[\tan^{-1}\frac{\zeta-\zeta_R}{\delta}\right]_{\zeta_R-\varepsilon}^{\zeta_R+\varepsilon}$$

$$=0-\lim_{\delta\to 0}\left[\tan^{-1}\frac{\varepsilon}{\delta}-\tan^{-1}\frac{-\varepsilon}{\delta}\right]=-i\pi \qquad \text{----(A-1-35)}$$

これより (A-5-34)式はさらに次のような形にまとめることができる。

$$-i\pi\cdot\frac{G(\zeta_R)}{F'(\zeta_R)}+2\varepsilon\cdot\frac{G'(\zeta_R)}{F'(\zeta_R)}+\frac{\varepsilon^3}{9}\cdot\frac{G'''(\zeta_R)}{F'(\zeta_R)}+\frac{\varepsilon^5}{240}\cdot\frac{G''''(\zeta_R)}{F'(\zeta_R)}+\cdots$$

$$\text{----(A-1-36)}$$

ここで (A-1-36) の初項の $\frac{G(\zeta_R)}{F'(\zeta_R)}$ は複素関数論でいう留数であり二項以上は区間 $(\zeta_R-\varepsilon,\ \zeta_R+\varepsilon)$ における,いわゆる Cauchy の主値である。

この区間 $(\zeta_R-\varepsilon,\ \zeta_R+\varepsilon)$ における数値積分は次の手順に従って行なう。

① ε の初期値を設定

$\zeta_i<\zeta_R$ で $J_N(\zeta_i\cdot a)=0$ となる最大の ζ_i を用い $\varepsilon=(\zeta_R-\zeta_i)/2$ として設定するが $\zeta_i<1$ の場合 $\varepsilon=(\zeta_R-1)/2$ とする

② ①で設定した ε に対し (A-1-30)式の分母において第三項/第二項 $\left(\leqq\frac{\varepsilon}{2}\frac{F''(\zeta_R)}{F'(\zeta_R)}\right)$ が許容誤差以内でかつ (A-5-36)で第三項/第二項 $\left(\leqq\frac{\varepsilon^2}{18}\cdot\frac{G'''(\zeta_R)}{G'(\zeta_R)}\right)$ も許容誤差以内であるか否か判定する。

③ この結果が NO. であれば 設定された ε を $\varepsilon=\varepsilon/2$

と再定義し ②の動作を反復する。

Yes. であれば ②→③ のループを脱出し ④へ飛ぶ

④ 最終的に設定された区間 $(z_R-\varepsilon,\ z_R+\varepsilon)$ の積分値を

$$-i\pi\cdot\frac{G(z_R)}{F'(z_R)}+2\varepsilon\,\frac{G'(z_R)}{F'(z_R)} \qquad \text{----(A-1-37)}$$

とする。

この手順をふむことで極近傍のLambの積分は実行できる。 次に第二の問題点，積分の上限をいかにして決定するかに関し二つの計算手法を併用しているのでそれぞれを紹介する。

第一の手法は被積分関数の，$z\gg0$ における近似式を利用する方法である。再び (A-1-29) 式でLambの積分の一般型を表記すると

$$\int_0^\infty \frac{\Psi(z)}{F(z)}\cdot J_N(za)\,dz \qquad \text{----(A-1-38)}$$

となる。ここで被積分関数のうちベッセル関数には手をつけず $\frac{\Psi(z)}{F(z)}$ の $z\gg0$ における近似式を $C(z)$ とする，つまり

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\Psi(z)}{F(z)}=C(z)$$

この $C(z)$ を用い (A-1-38) を次のように書きかえる。

$$\int_0^\infty \frac{\Psi(z)}{F(z)}\cdot J_N(za)\,dz=\int_0^\infty\left\{\frac{\Psi(z)}{F(z)}-C(z)\right\}J_N(za)\,dz+\int_0^\infty C(z)\cdot J_N(za)\,dz$$

$$\text{----(A-1-39)}$$

(A-1-39)式を見ると右辺の第一項の収束はかなり速くなることがわかる。また都合のよいことに右辺の第二項は解析的に解の誘導が可能である為，数値積分の必要がない。以後に各変位に対する $C(z)$，及び $\int_0^\infty C(z)\cdot J_N(za)\,dz$ を明記する。

Table.A-1-1

加振方向	変位	$\psi(\zeta)/F(\zeta)$	$C(\zeta)$
鉛直 (Z)	U_r	$\dfrac{\zeta^2\{(2\zeta^2-1)\cdot e^{-b\sqrt{\zeta^2-\gamma^2}}-2\sqrt{\zeta^2-1}\sqrt{\zeta^2-\gamma^2}\,e^{-b\sqrt{\zeta^2-1}}\}}{F(\zeta)}$	$\frac{b}{2}\zeta\cdot e^{-b\zeta}+\dfrac{b^2(\gamma^4-1)-4\gamma^2}{8(\gamma^2-1)}\cdot e^{-b\zeta}$
	U_θ		
	U_z	$\dfrac{\zeta\sqrt{\zeta^2-\gamma^2}\,e^{-b\sqrt{\zeta^2-\gamma^2}}+2\zeta^3\sqrt{\zeta^2-\gamma^2}\,(e^{-b\sqrt{\zeta^2-1}}-e^{-b\sqrt{\zeta^2-\gamma^2}})}{F(\zeta)}$	$-\dfrac{e^{-b\zeta}}{2(1-\gamma^2)}-\dfrac{b\zeta e^{-b\zeta}}{2}$
水平 (Y)	※ U_r & U_θ	$\dfrac{\zeta\sqrt{\zeta^2-1}\,e^{-b\sqrt{\zeta^2-1}}+2\zeta^3\sqrt{\zeta^2-1}\,(e^{-b\sqrt{\zeta^2-\gamma^2}}-e^{-b\sqrt{\zeta^2-1}})}{F(\zeta)}$	$\dfrac{b\zeta e^{-b\zeta}}{2}-\dfrac{e^{-b\zeta}}{2(1-\gamma^2)}$
	U_z	$\dfrac{\zeta^2\{(2\zeta^2-1)\cdot e^{-b\sqrt{\zeta^2-1}}-2\sqrt{\zeta^2-1}\sqrt{\zeta^2-\gamma^2}\,e^{-b\sqrt{\zeta^2-\gamma^2}}\}}{F(\zeta)}$	$\frac{b}{2}\zeta e^{-b\zeta}+\dfrac{b^2(\gamma^4-1)+4\gamma^2}{8(\gamma^2-1)}e^{-b\zeta}$

※ U_r, U_θ（水平加振時）は (A-1-4)～(A-1-6)式にも明らかなように
Type 1，Type 2 両種の積分の和あるいは差によって表現される。
このうち Type 1に相当する $F_1(\zeta)$ (See (A-1-7)) は両者に共通するので
この表にあるように U_r U_θ を併記した。

表 A-1-1 より明らかなように $C(\zeta)$ は次の二種の関数に限られる

(i) $\alpha\cdot e^{-b\zeta}$ ----(A-1-40)

(ii) $\beta\cdot\zeta e^{-b\zeta}$ ----(A-1-41)

但し α, β は定数

従って (A-1-39)式の右辺の第二項は，ベッセル関数の階数が 0～2 と三通りあるので 全部で六種類の型が出現する。これらに対し $\int_0^\infty C(\zeta)\cdot J_N(\zeta)\,d\zeta$ の結果を表に示す (Table A-1-2)

Table.A-1-2

$C(\zeta)$	$J_N(\zeta a)$	$\int_0^\infty C(\zeta)\cdot J_N(\zeta a)\,d\zeta$
$\alpha\cdot e^{-b\zeta}$	$J_0(\zeta a)$	$\alpha\cdot\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$
	$J_1(\zeta a)$	$\alpha\cdot\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-b}{a\cdot\sqrt{a^2+b^2}}$
	$J_2(\zeta a)$	$\alpha\cdot\dfrac{(\sqrt{a^2+b^2}-b)^2}{a^2\cdot\sqrt{a^2+b^2}}$
$\beta\cdot\zeta\cdot e^{-b\zeta}$	$J_0(\zeta a)$	$\beta\cdot\dfrac{b}{(a^2+b^2)^{3/2}}$
	$J_1(\zeta a)$	$\beta\cdot\dfrac{a}{(a^2+b^2)^{3/2}}$
	$J_2(\zeta a)$	$\beta\cdot\left\{\dfrac{2(\sqrt{a^2+b^2}-b)}{a^2\sqrt{a^2+b^2}}-\dfrac{b}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right\}$

以上の手続きにより ζをあまり大きくしない段階で数値積分を打ち切ることができるが被積分関数に含まれるベッセル関数の性質を利用してさらにζの小さい段階で精度よく積分を打ち切ることができる。

(A-1-39)式の右辺の第一項の被積分関数内でベッセル関数のかかっている

$$\frac{\psi(\zeta)}{F(\zeta)}-C(\zeta) \qquad ----(A-1-42)$$

は ζの大きい所で単調減少関数となる。これにベッセル関数のかかった被積分関数の概形を Fig A-1-6 に示す。

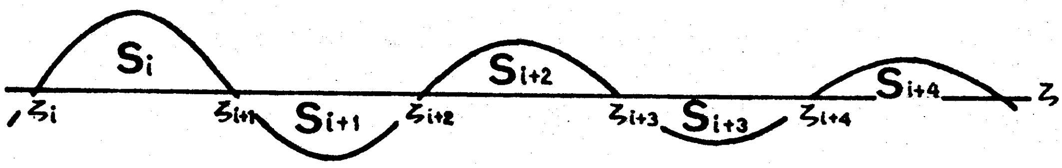


Fig.A-1-6 ζの大きい所での被積分関数の概形

ここで $\zeta_i \times a$ はベッセル関数の i 番目の0点であり

$$S_i = \int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} \left\{ \frac{\psi(\zeta)}{F(\zeta)} - C(\zeta) \right\} \cdot J_N(\zeta \cdot a)\, d\zeta \qquad \text{----(A-1-43)}$$

と定義する。すると任意の整数 i に対し

$$|S_i| > |S_{i+1}| \qquad \text{----(A-1-44)}$$

従って $S_i > 0$ とすると

$$\int_{\zeta_i}^{\infty} \left\{ \frac{\psi(\zeta)}{F(\zeta)} - C(\zeta) \right\} \cdot J_N(\zeta \cdot a)\, d\zeta = \sum_{j=i}^{\infty} S_j \quad > 0 \qquad \text{----(A-1-45)}$$

また

$$\int_{\zeta_{i+1}}^{\infty} \left\{ \frac{\psi(\zeta)}{F(\zeta)} - C(\zeta) \right\} \cdot J_N(\zeta \cdot a)\, d\zeta = \sum_{j=i+1}^{\infty} S_j \quad < 0 \qquad \text{----(A-1-46)}$$

(A-1-45)の右辺 $\sum_{j=i}^{\infty} S_j$ は (A-1-46)の右辺に S_i を加えたもので $\sum_{j=i+1}^{\infty} S_j$ に S_i を加えたことで符号がマイナスからプラスに変わったということは

$$|S_i| > \left| \sum_{j=i+1}^{\infty} S_j \right| \qquad \text{----(A-1-47)}$$

であることを意味する 従って ζが極 ζ_R を越してからの積分を $\zeta \times a$ がベッセル関数の0点に至るごとに区切り 次々に S_i を加えつつ

$$|S_i| / \left| \int_0^{\zeta_i} \left\{ \frac{\psi(\zeta)}{F(\zeta)} - C(\zeta) \right\} \cdot J_N(\zeta a)\, d\zeta \right| \qquad \text{----(A-1-48)}$$

が許容誤差以内に収まれば それ以後 ∞に至るまでの

積分結果の絶対値は (A-1-47) より $|S_i|$ を越えることはないのでここで計算を打ち切ればよい。但し a が極めて小さいか 0 となる時は ベッセル関数は $J_N(0)$ に近いか等しくなり この手法は適用できない。従って $\frac{\psi(\zeta)}{F(\zeta)} - C(\zeta)$ が充分小さくなるまで積分をつづける必要がある。

最後に Type 2 の積分の解を示しておく

$$\int_0^\infty \frac{\zeta e^{-b\sqrt{\zeta^2-1}}}{\sqrt{\zeta^2-1}} J_0(\zeta a)\, d\zeta = \frac{e^{-i\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \text{----(A-1-49)}$$

$$\int_0^\infty \frac{\zeta e^{-b\sqrt{\zeta^2-1}}}{\sqrt{\zeta^2-1}} J_2(\zeta a)\, d\zeta = \int_0^\infty \frac{\zeta e^{-b\sqrt{\zeta^2-1}}}{\sqrt{\zeta^2-1}} \left\{ \frac{2}{\zeta a} J_1(\zeta a) - J_0(\zeta a) \right\}$$

$$= \frac{2}{a} \frac{\sin\sqrt{a^2+b^2} - \sin b + i(\cos\sqrt{a^2+b^2} - \cos b)}{a} - \frac{e^{-i\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\text{----(A-1-50)}$$

A-1-5 数値計算例

前節 A-1-4 の手順に従い計算した Lamb の積分結果の一例を示す。但し A-1-2 節の (A-1-1)～(A-1-6) 式の u_r, u_θ, u_z を直接示すのではなく, これを $\omega=0$ とした静的変位でノーマライズした無次元変位で示す。

具体的には, u_r, u_θ, u_z は 加振円振動数 ω, 加振点 $(0,0,0)$ に対する位置 (r, θ, z), 地盤のポアソン比 ν 及び 地盤の剪断弾性定数 μ の関数であるが, 静的変位でノーマライズした無次元変位を $(f_1 - if_2)$ とおくと

$$f_1 - if_2 = u(\omega, r, \theta, z, \nu, \mu) / u(0, r, \theta, z, \nu, \mu)$$

$$\text{----(A-1-51)}$$

となる。ここで地盤の剪断弾性定数μは(A-5-51)式の右辺の分母，分子に $1/\mu$ のかかった形で存在するため f_1，f_2 は μに無関係になる。また，ω, r, z, ν のかわりに A-5-2節でふれた $a\ (=\frac{\omega\cdot r}{V_S})$，$b\ (=\frac{\omega\cdot z}{V_S})$，$\gamma\ (= V_S / V_P)$，$\gamma$なる無次元量の関数とした方が，多くの点で便利であるのでこの形を採用する。以下に γをパラメーターとして横軸を $\omega\cdot R/V_S$ $(R=\sqrt{r^2+z^2})$ として示した f_1，f_2 を示す。f_1-if_2 を変位関数と称することにする。図面の順序は次のとおりである。

① 上下加振に対する水平変位関数の実部と虚部

$U_r(\mathrm{dynamic})/U_r(\mathrm{static})$

② 上下加振に対する上下変位関数の実部と虚部

$U_z(\mathrm{dynamic})/U_z(\mathrm{static})$

③ 水平加振に対する水平変位関数 ($U_r(\mathrm{dynamic})/U_r(\mathrm{static})$) の実部と虚部　　但し $\theta=0$

④ 水平加振に対する水平変位関数 ($U_\theta(\mathrm{dynamic})/U_\theta(\mathrm{static})$) の実部と虚部　　但し $\theta=\pi/2$

⑤ 水平加振に対する上下変位関数の実部と虚部

$U_z(\mathrm{dynamic})/U_z(\mathrm{static})$　但し $\theta=0$

②，③，④，は $\gamma=0$ ($\nu=0.5$)，①，⑤ は $\gamma=0.3$ ($\nu\fallingdotseq 0.45$) となっている ①⑤ は $\gamma=0$ とすると $U(\mathrm{static})=0$ となり，変位関数が ∞ となってしまう。また dip angle は $\tan^{-1} r/z$ である。

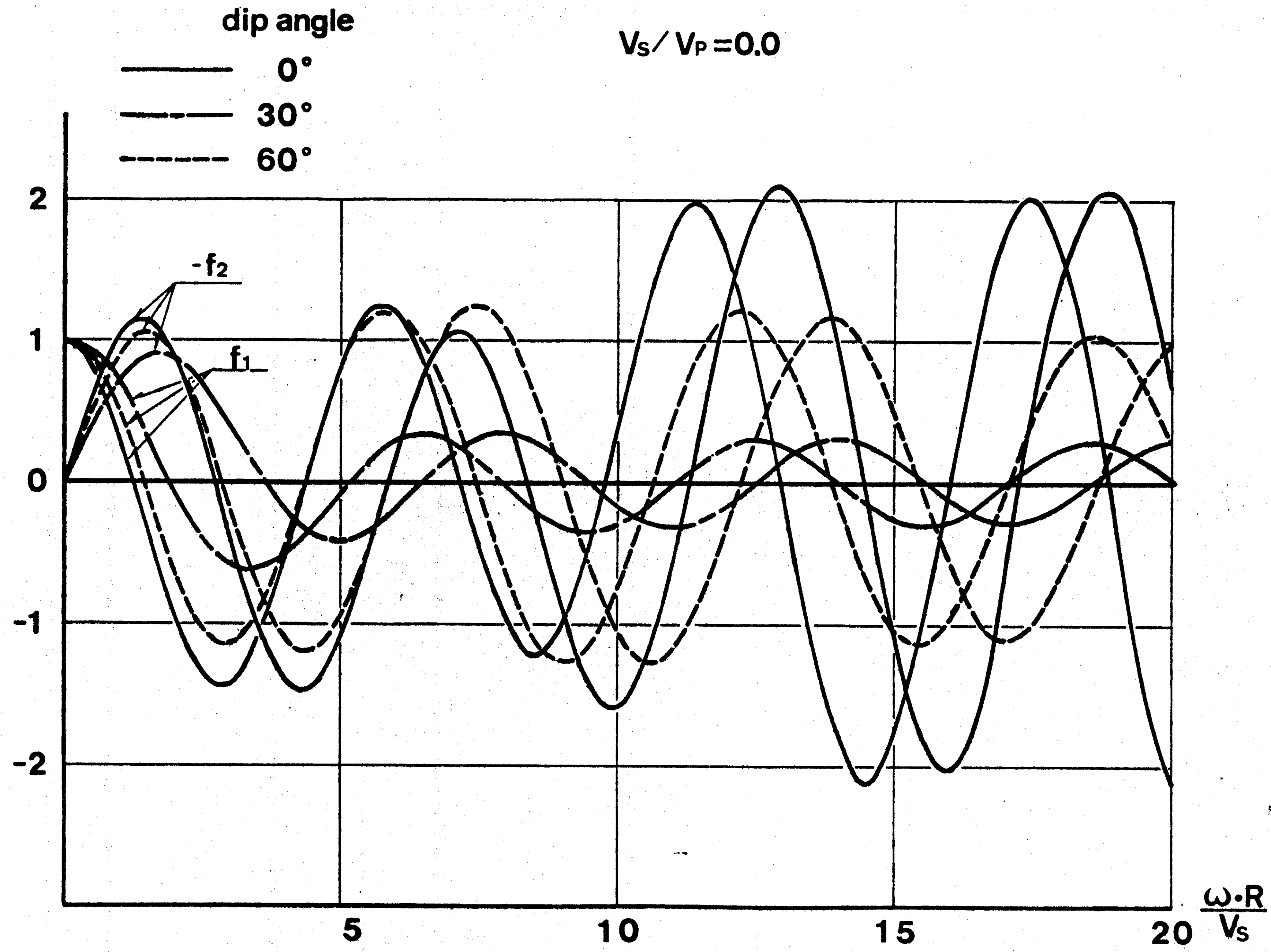


Fig.A-1-8 上下加振に対する上下変位関数の実部と虚部

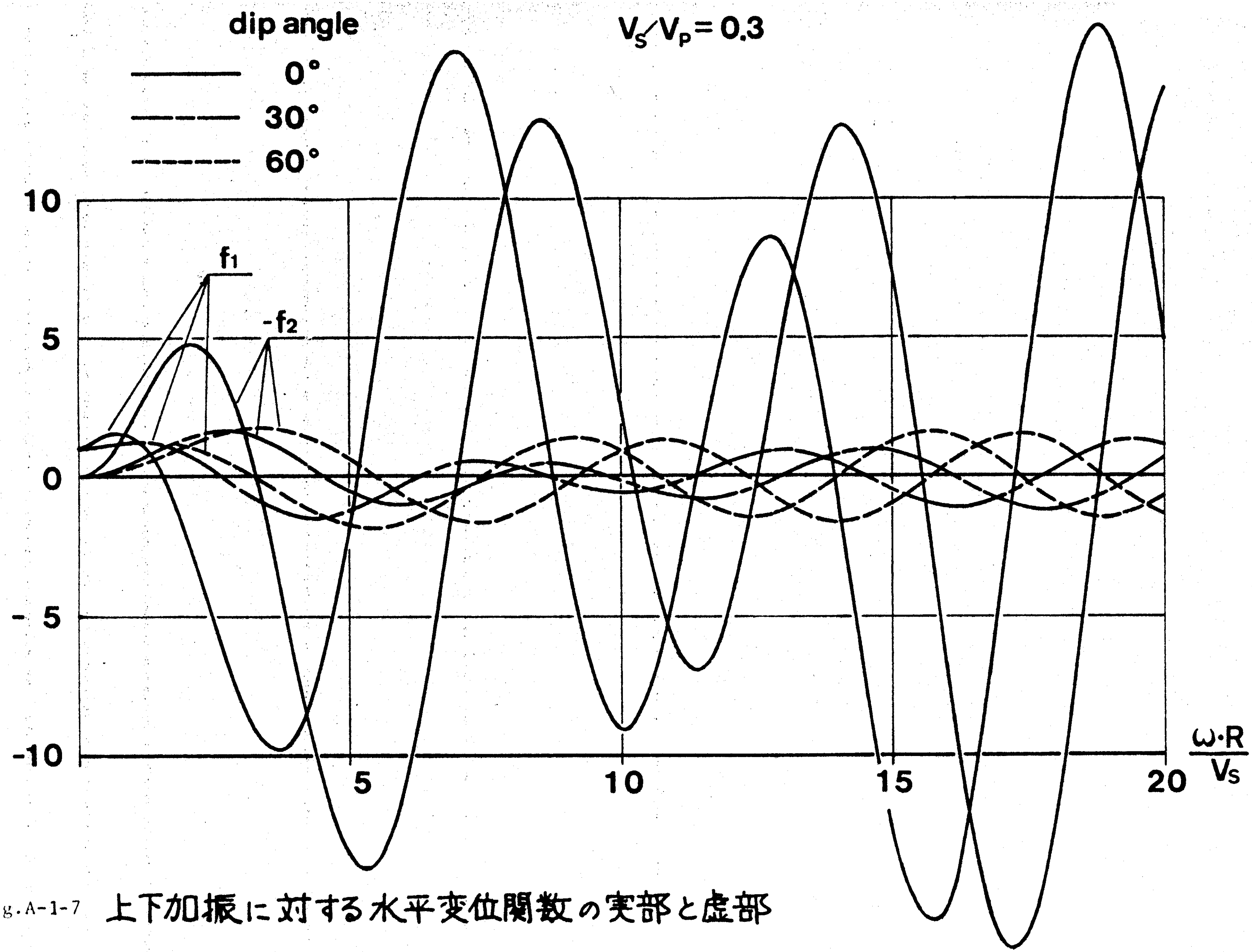


Fig.A-1-7 上下加振に対する水平変位関数の実部と虚部

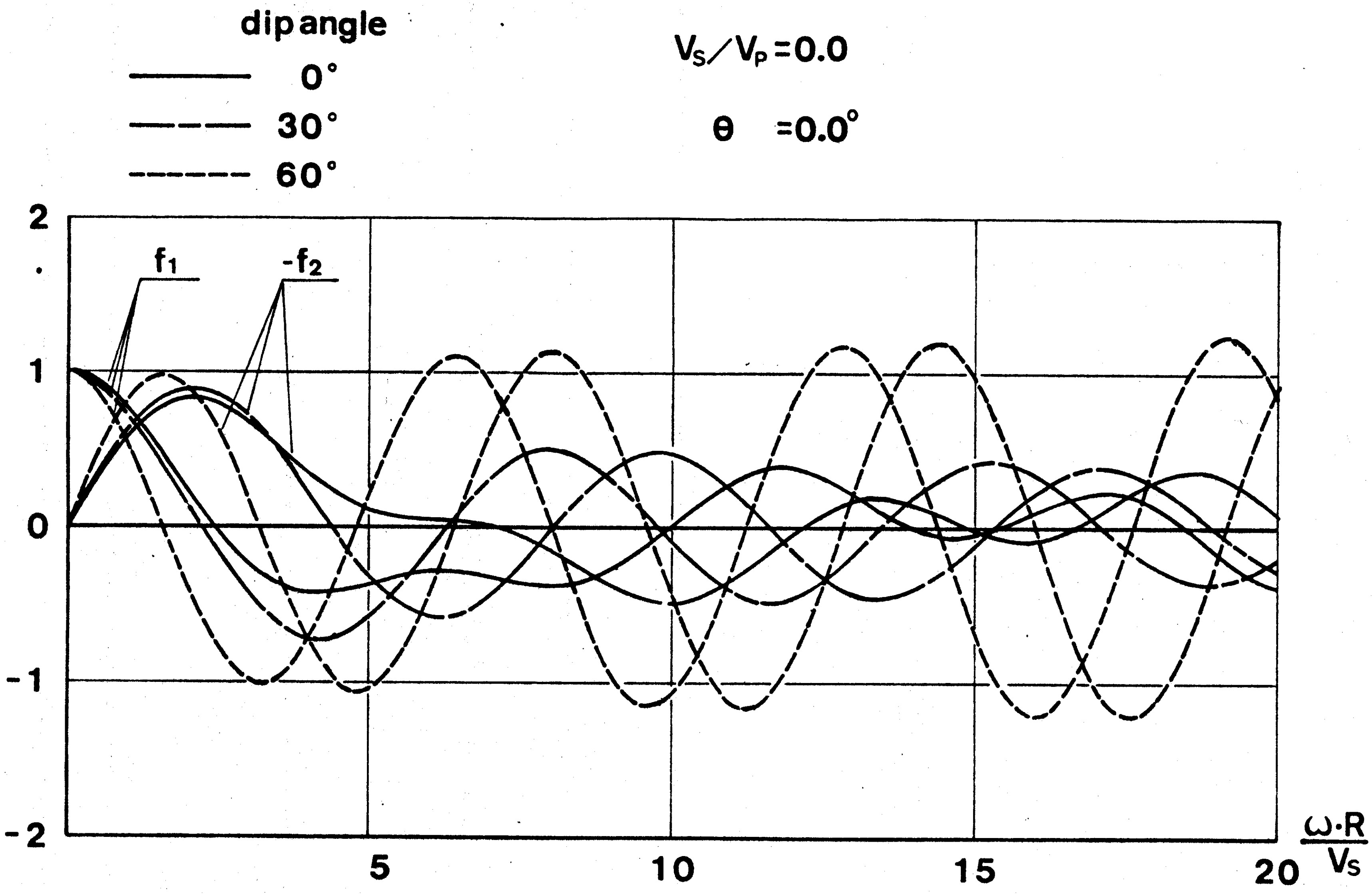


Fig.A-1-9 水平加振に対する水平変位関数（Ur DYNAMIC ／Ur STATIC ）の実部と虚部

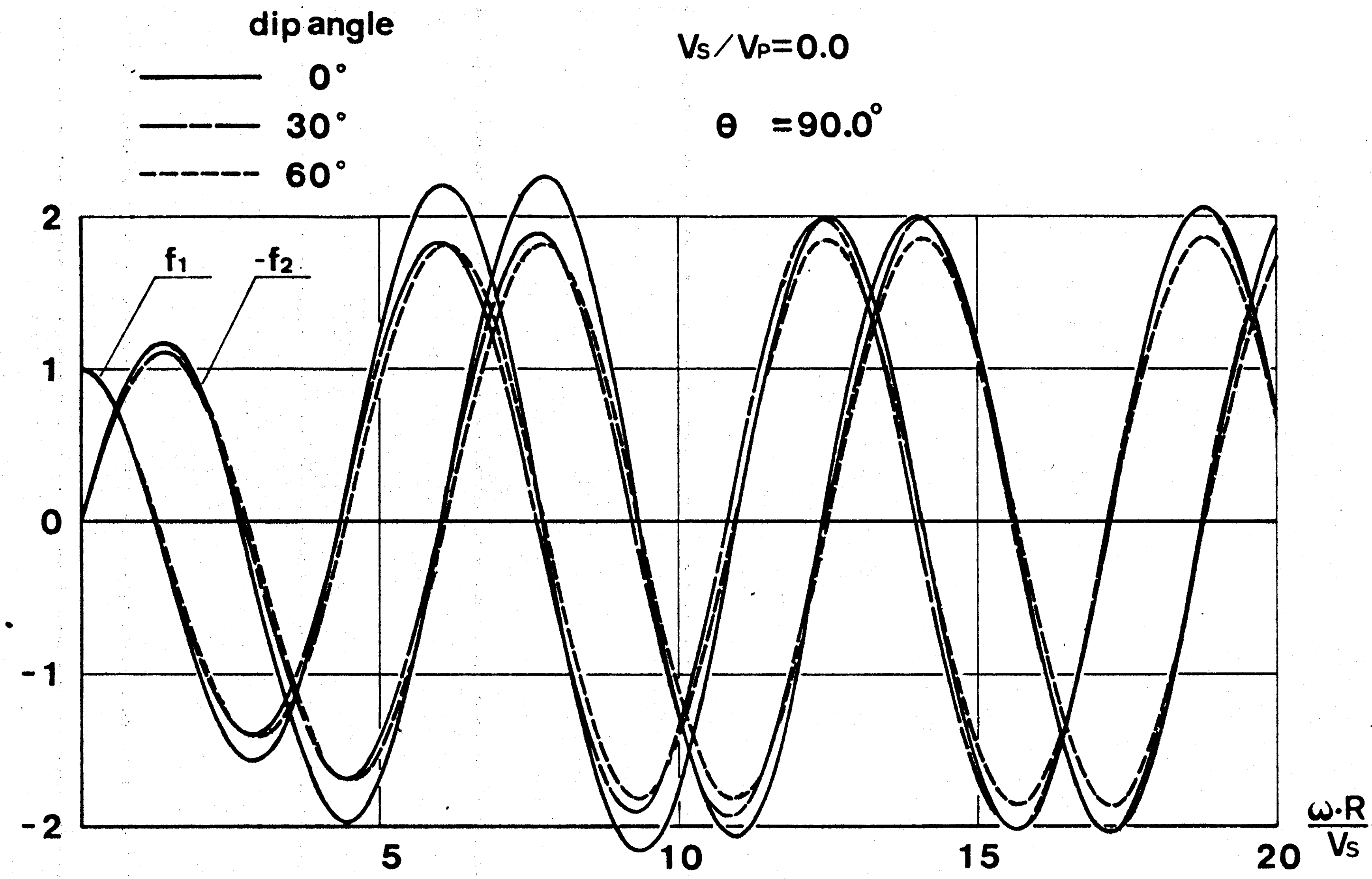


Fig.A-1-10 水平加振に対する水平変位関数（Uθ DYNAMIC ／ Uθ STATIC）の実部と虚部

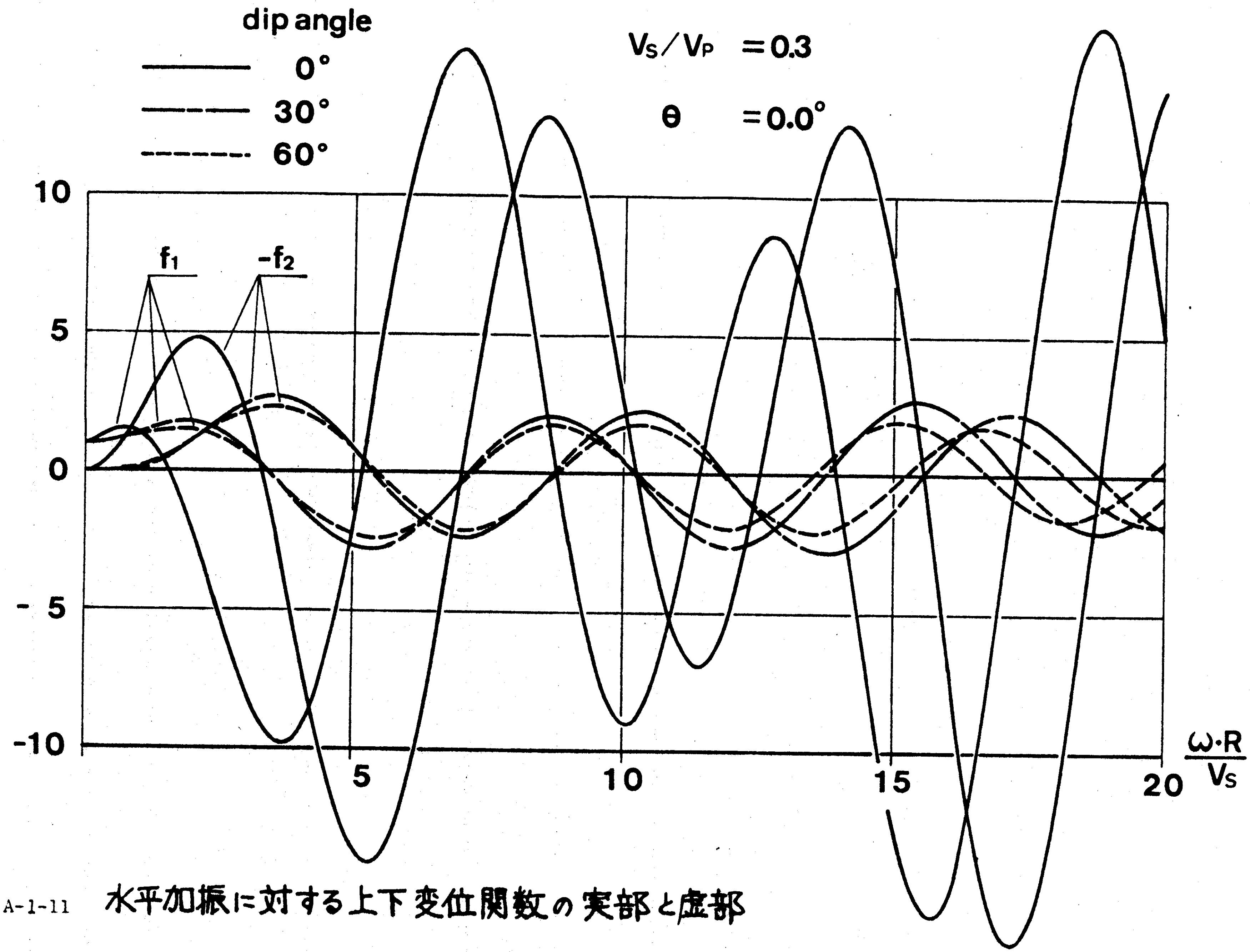


Fig.A-1-11 水平加振に対する上下変位関数の実部と虚部

A-1-6　Lambの積分の近似

前節のFig A-1-7～Fig A-1-11において Fig.A 1-8 及び Fig. A-1-10 を見ると変位関数が ω・R/Vsに対しほぼ 2π を一周期として変動している様子がわかる。上下加振時の上下変位関数を例にとり仮に

$$f_1 \fallingdotseq A(\omega \cdot R/V_s) \cdot \cos(\omega \cdot R/V_s) \qquad \text{----(A-1-52)}$$

$$-f_2 \fallingdotseq A(\omega \cdot R/V_s) \cdot \sin(\omega \cdot R/V_s) \qquad \text{----(A-1-53)}$$

とおくと

$$U_{z(dynamic)} = U_{z(static)} \cdot Pe^{i\omega t} \cdot (f_1 + i f_2)$$

$$= U_{z(static)} \cdot P \cdot A(\omega R/V_s) \cdot e^{i\omega(t-R/V_s)} \qquad \text{----(A-1-54)}$$

となりR方向にS波の速度で伝播していく波動を表現する。よって加振点を含み，加振方向を法線とするような面，及びその近傍ではS波（あるいはRayleigh波）が支配的であり（A-1-52），（A-1-53）のような近似は妥当であると考えられる。この近似の成立する領域を明確にする為Fig.A-1-12のような概略図を付しておく。

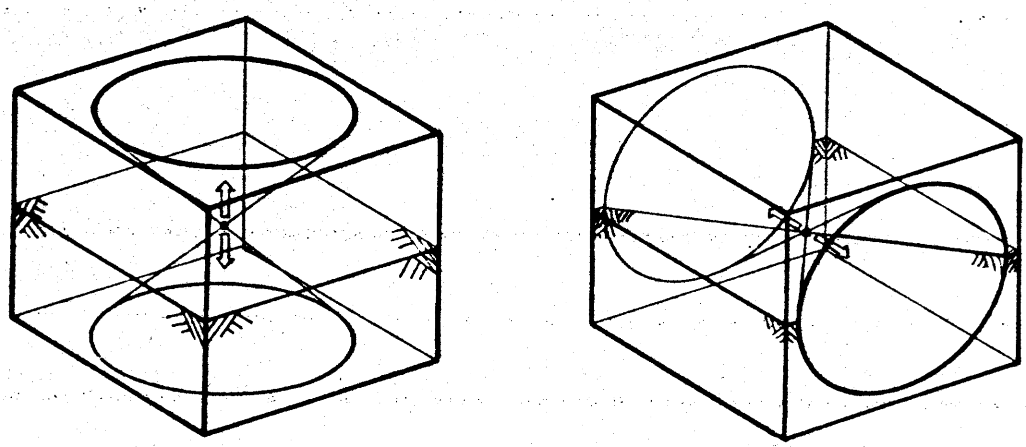


Fig.A-1-12

ここで $A(\omega \cdot R/V_s)$の形を適当に決定すれば、変位関数の近似解を作ることができるが、Lambの積分は注目すべき特徴があり これを利用して近似解を求める方法が考えられる。それは、Lambの積分で虚数の生じる範囲が $0 \leqq \zeta < 1$ と特異点 ζ_Rの周囲のみであるという性質である。(Fig A-1-2，三種の積分路参照）従って Lambの積分を

$$u = \int_0^{\infty} \frac{G(\zeta)}{F(\zeta)} \cdot d\zeta \qquad \text{----(A-1-55)}$$

$F(\zeta)$; レーリー関数 $(F(\zeta_R)=0)$

と書くと

$$\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Im}\left\{ \int_0^1 \frac{G(\zeta)}{F(\zeta)} d\zeta \right\} + \pi \cdot \frac{G(\zeta_R)}{F'(\zeta_R)} \qquad \text{----(A-1-56)}$$

となり，これより容易に f_2 を求めることができる。f_2を $\omega R/V_s$ を変数にして微分すると，(A-1-53)式の仮定が成立すれば

$$\frac{df_2}{d\left(\frac{\omega R}{V_s}\right)} = A'(\omega R/V_s) \cdot \sin(\omega R/V_s) + A(\omega R/V_s) \cdot \cos(\omega R/V_s)$$

$$= A'(\omega R/V_s) \cdot \sin(\omega R/V_s) + f_1 \qquad \text{----(A-1-57)}$$

となり，Fig A-5-8，Fig A-5-10より $A'(\omega R/V_s)$は極めて小さいと考えられるので

$$\frac{df_2}{d\left(\frac{\omega \cdot R}{V_s}\right)} \fallingdotseq f_1 \qquad \text{----(A-1-58)}$$

となり容易に f_1が求まる。この方法による f_1の近似解と厳密解の比較を Fig A-1-13 ～ Fig.A-1-15 に，鉛直方向加振時の鉛直方向変位関数の場合を例にとり示す。

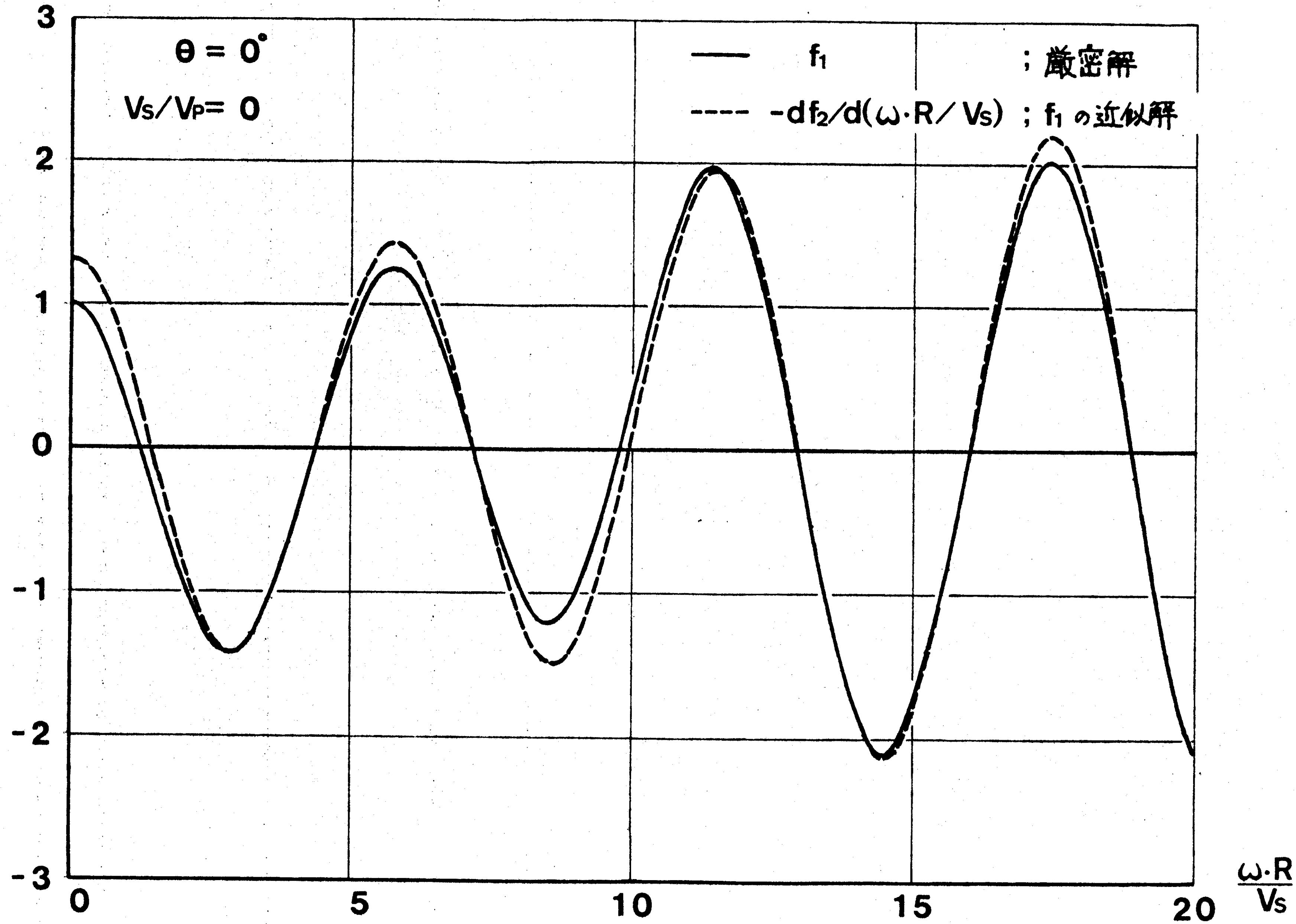


Fig.A-1-13 上下加振に対する上下変位関数の実部の近似解

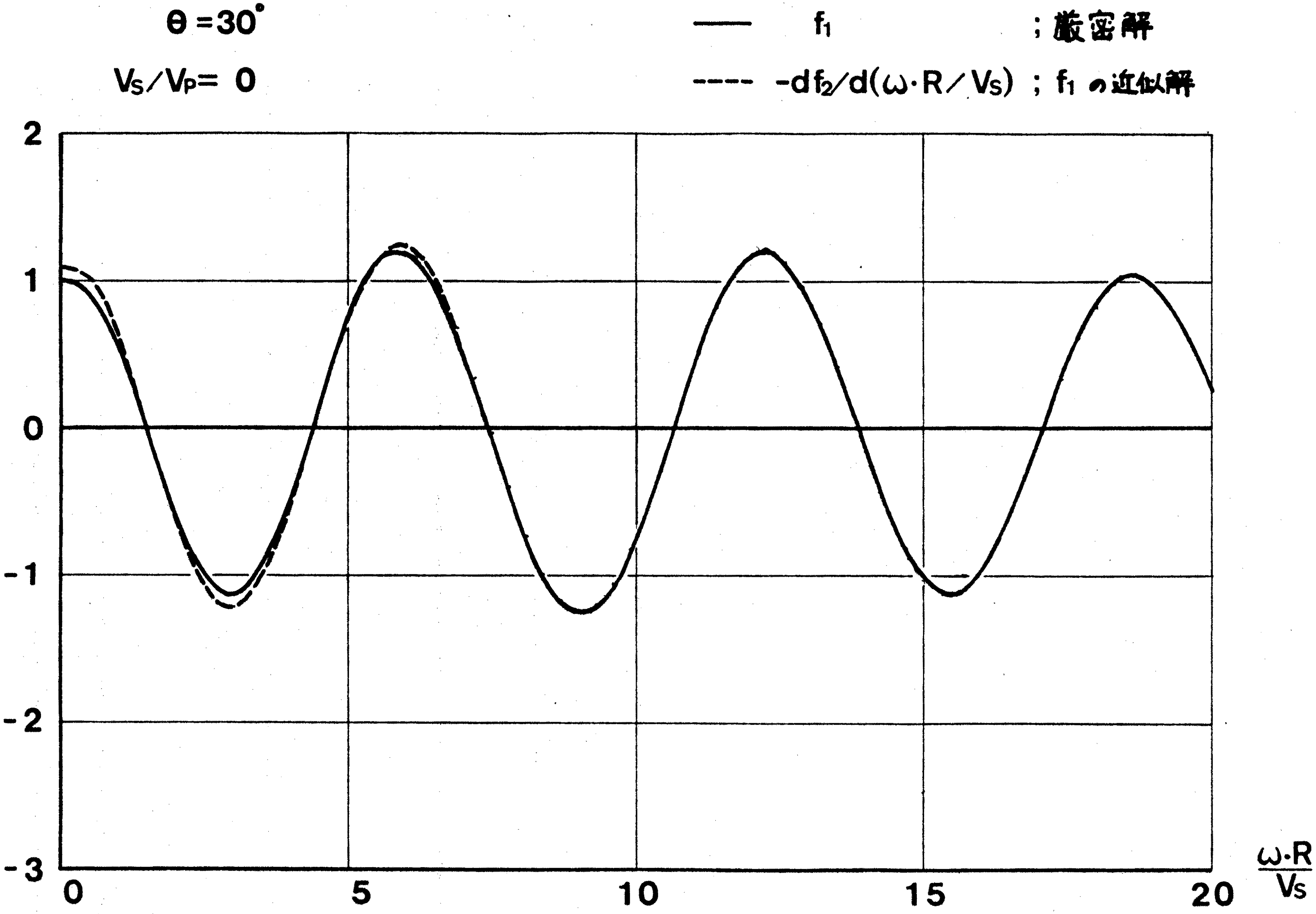


Fig.A-1-14 上下加振に対する上下変位関数の実部の近似解

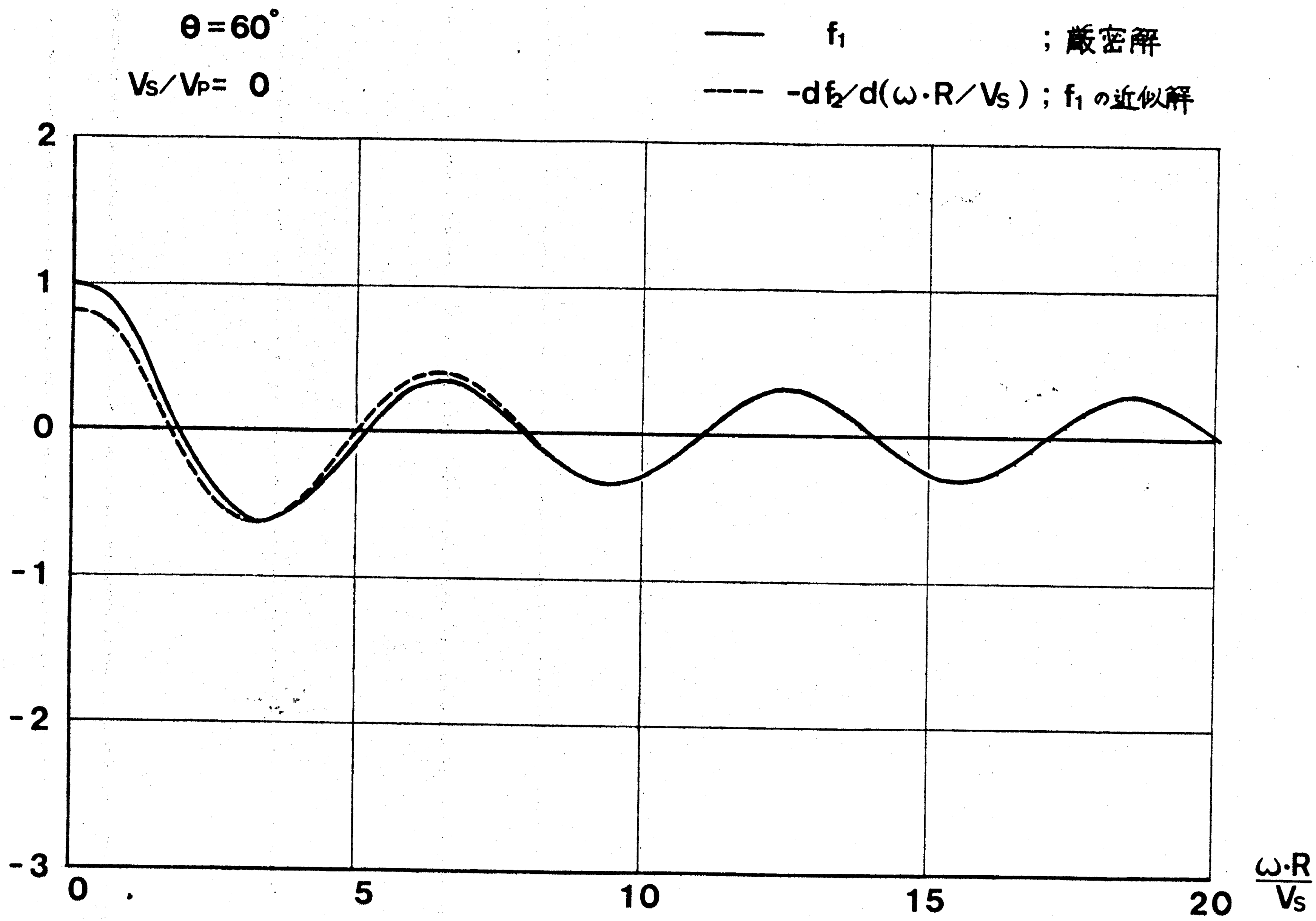


Fig.A-1-15 上下加振に対する上下変位関数の実部の近似解

Appendix 2　無限弾性体内の面加振に伴う波動伝播

A-2-1　概説

既に本論文の §3-4 で述べたように，分割された杭の要素を支える地盤のコンプライアンスを考える上で (3-4-2)式 (pp.45)，(3-4-4)式 (pp.47)，及び (3-4-6)式 (pp.50) を用いたがこれらの式の誘導について以下に触れておく。

A-2-2　基礎方程式及びその解

この種の問題を扱う場合円柱座標 (r, φ, z) (Fig.A-2-1) を用いるのが適当であるが，軸に対称な波動を考える為 φ 方向への変位は起きない。いま z 軸方向への変位を u_z，半径方向への変位を u_r とする。

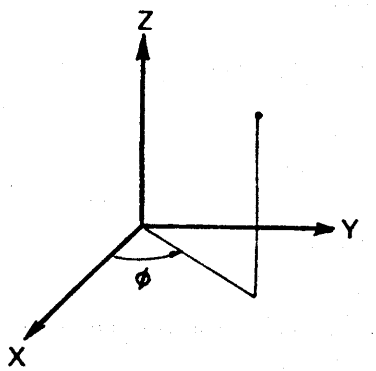


Fig.A-2-1

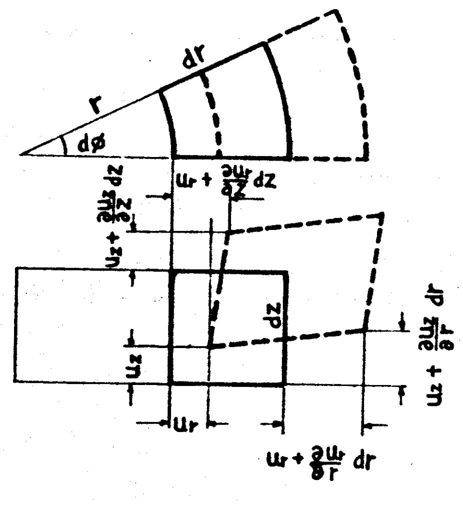


Fig.A-2-2

この変位によって Fig. A-2-2 に実線で示した要素片は，破線で示した要素片に変形する。従ってひずみ成分は

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zr} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \qquad \text{----(A-2-1)}$$

ゆえに，体積膨張率 Δ と φ 方向の回転成分 Ω は

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} \qquad \Omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \qquad \text{----(A-2-2)}$$

となる．これらの歪によって Fig. A-2-3 のような応力が生ずる。その大きさは Hooke の法則によって

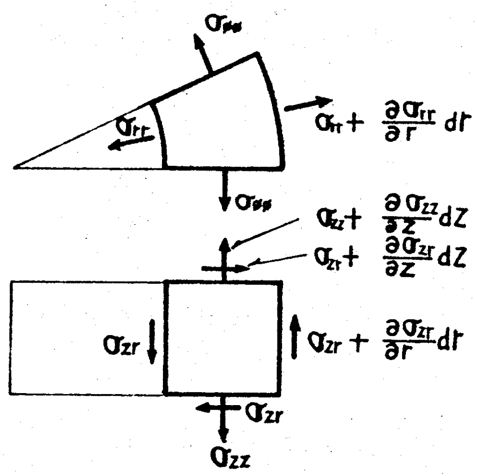


Fig.A-2-3

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{rr}\\ \sigma_{\phi\phi} &= \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{\phi\phi}\\ \sigma_{zz} &= \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{zz}\\ \sigma_{zr} &= \mu\varepsilon_{zr}\end{aligned}\right\} \quad \text{----(A-2-3)}$$

となる。要素片に働く力と慣性力の動的平衡を考えると図から直ちに次の関係が導かれる．

$$\left.\begin{aligned}\rho\cdot\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot\sigma_{rr}) - \frac{1}{r}\sigma_{\phi\phi} + \frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial z}\\ \rho\cdot\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\sigma_{zr})\end{aligned}\right\} \quad \text{----(A-2-4)}$$

(A-2-4)式に (A-2-3)式を代入して整理すると

$$\rho\cdot\frac{\partial^2\Delta}{\partial t^2} = (\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial^2\Delta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Delta}{\partial r} + \frac{\partial^2\Delta}{\partial z^2}\right) \quad \text{----(A-2-5)}$$

$$\rho\cdot\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} = \mu\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r} - \frac{\Omega}{r^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}\right) \quad \text{----(A-2-6)}$$

を導きうる。(A-2-5)，(A-2-6) 両式を解く為にさらに

$$\Delta = T_d(z)\cdot\Delta'(r,\phi)\cdot e^{i\omega t} \quad \text{----(A-2-7)}$$

$$\Omega = T_o(z)\cdot\Omega'(r,\phi)\cdot e^{i\omega t} \quad \text{----(A-2-8)}$$

とおく。ここで T_d，T_o は z のみの関数，$\Delta'\Omega'$ は r と ϕ の関数である。

(A-2-7)式を (A-2-5)式に代入して

$$\frac{1}{\Delta'}\left(\frac{\partial^2\Delta'}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Delta'}{\partial r}\right)+\frac{\rho\omega^2}{(\lambda+2\mu)}+\frac{1}{T_d}\frac{d^2T_d}{dz^2}=0 \qquad \text{----(A-2-9)}$$

よって n_1 を定数として

$$\frac{1}{T_d}\frac{d^2T_d}{dz^2}=-n_1^2 \qquad \text{----(A-2-10)}$$

$$\frac{\partial^2\Delta'}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Delta'}{\partial r}+k_1^2\Delta'=0 \qquad \text{----(A-2-11)}$$

但し $k_1^2=\dfrac{\rho\omega^2}{(\lambda+2\mu)}-n_1^2$ ----(A-2-12)

(A-2-11)式は ベッセルの微分方程式であり Δ' は0階の円柱関数となる。また (A-2-10)式より $T_d(z)$ は e^{inz} の形となる。よって (A-2-7)式にこれを代入すれば

$$\Delta=A_1\cdot Z_0(k_1r)\cdot e^{i\omega t+in_1z} \qquad \text{----(A-2-13)}$$

但し A_1 ; 任意定数

Z_0 ; 0階の円柱関数

つぎに (A-2-8)式を (A-2-6)式に代入し 同様の演算を行なうことによって次式が得られる。n_2 を定数として

$$\frac{1}{T_\Omega}\frac{d^2T_\Omega}{dz^2}=-n_2^2 \qquad \text{----(A-2-14)}$$

$$\frac{\partial^2\Omega'}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega'}{\partial r}-\left(\frac{1}{r^2}-k_2^2\right)\Omega'=0 \qquad \text{----(A-2-15)}$$

但し $k_2^2=\dfrac{\rho\omega^2}{\mu}-n_2^2$ ----(A-2-16)

従って (A-2-13)式と同様 A_2 を任意定数として

$$\Omega=A_2\cdot Z_1(k_2r)\cdot e^{i\omega t+in_2z} \qquad \text{----(A-2-17)}$$

と求めることができる。

A-2-3　(3-4-2)式の誘導

(3-4-2)式（本文 pp.45）は，無限等方弾性体中内の無限長の円筒状の孔内の一部にブージネスク的な剪断応力が加わった時の弾性体内の変位を与えるものである。即ち孔壁に

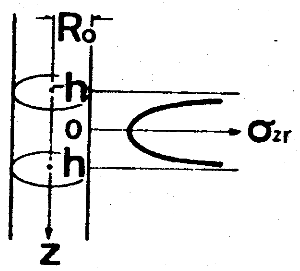


Fig.A-2-4

$$\sigma_{zr} = \begin{cases} \dfrac{Q \cdot e^{i\omega t}}{2\pi^2 R_0 \sqrt{h^2 - z^2}} & |z| < h \\ 0 & |z| > h \end{cases} \qquad \text{----(A-2-18)}$$

なる剪断応力分布を考える。また円孔壁面の半径方向の変位は 0である。この問題を解くにあたって z軸に平行な壁面で境界条件を考える為に既に前ページで述べた (A-2-13)，(A-2-17)式中の n_1，n_2 は互いに等しくなければならない。そこで $n_1 = n_2 = n$ として，(A-2-13)，(A-2-17)式を (A-2-2)式に代入すると

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= A_1 Z_0(k_1 r) \cdot e^{i\omega t + inz} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) &= A_2 Z_1(k_2 r) \cdot e^{i\omega t + inz} \end{aligned}\right\} \qquad \text{----(A-2-19)}$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} u_r &= U_r \cdot e^{i\omega t + inz} \\ u_z &= U_z \cdot e^{i\omega t + inz} \end{aligned}\right\} \qquad \text{----(A-2-20)}$$

とおき，これを (A-2-19)式に代入すると

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{d(r\cdot U_r)}{dr} + inU_z = A_1 Z_0(k_1 r) \\ inU_r - \dfrac{dU_z}{dr} = 2A_2\cdot Z_1(k_2 r) \end{cases}$$

さらに

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dU_z}{dr}\right) - n^2 U_z = iA_1 n Z_0(k_1 r) - \dfrac{2A_2}{r}\dfrac{d}{dr}\{r\cdot Z_1(k_2 r)\} \\ \dfrac{d^2 U_r}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dU_r}{dr} - \left(\dfrac{1}{r^2}+n^2\right)U_r = A_1\dfrac{\partial}{\partial r}\{Z_0(k_1 r)\} + 2iA_2 n Z_1(k_2 r) \end{cases}$$

この式の特解は

$$\left.\begin{aligned} U_z &= -\frac{iA_1 n}{n^2+k_1^2}\cdot Z_0(k_1 r) + \frac{2A_2}{n^2+k_2^2}\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\{r\cdot Z_1(k_2 r)\} \\ U_r &= -\frac{A_1}{n^2+k_1^2}\frac{\partial}{\partial r}\{Z_0(k_1 r)\} - \frac{2iA_2 n}{n^2+k_2^2}\cdot Z_1(k_2 r) \end{aligned}\right\} \quad \text{---- (A-2-21)}$$

この他に同次方程式の一般解として

$U_z = Z_0(nr)\times$定数　　　　$U_r = Z_1(nr)\times$定数

が存在するが これを (A-2-2)式に代入して求めた Δ, Ω が (A-2-13)式, (A-2-17)式で与えられる Δ, Ω に等しくならなければならないことより, この解は不都合であることが直ちに知られる。よって U_z, U_r は (A-2-21)式で与えられることになる。ゆえに

$$u_z = i\{B\cdot n\cdot Z_0(k_1 r) + C\cdot k_2 Z_0(k_2 r)\}\, e^{i\omega t+inz} \quad \text{---- (A-2-22)}$$

$$u_r = \{-Bk_1 Z_1(k_1 r) + C\cdot n\, Z_1(k_2 r)\}\, e^{i\omega t+inz} \quad \text{---- (A-2-23)}$$

ここで B, C は新たに導入された任意定数である。変位が与えられれば (A-2-1)～(A-2-3)式を用いて

$$\sigma_{zr} = \mu \cdot i \left\{ -2Bnk_1 \cdot Z_1(k_1 r) + C(2n^2 - j^2) Z_1(k_2 r) \right\} e^{i\omega t + inz} \quad \text{----(A-2-24)}$$

$$\sigma_{rr} = \left[\left\{ -\lambda l^2 Z_0(k_1 r) - 2\mu k_1^2 \left(Z_0(k_1 r) - \frac{1}{k_1 r} Z_1(k_1 r) \right) \right\} B + \left\{ n k_2 \left(Z_0(k_2 r) - \frac{1}{k_2 r} Z_1(k_2 r) \right) \right\} C \right] e^{i\omega t + inz} \quad \text{----(A-2-25)}$$

（但し $j = \omega / V_s$　$l = \omega / V_p$）

と応力を求めることができる。本項で取扱う境界条件は既に冒頭（pp.201）で述べたように

① $r = R_0$ にて

$u_r = 0$

② $r = R_0$ にて

$$\sigma_{zr} = \begin{cases} \dfrac{Q \cdot e^{i\omega t}}{2\pi^2 R_0 \sqrt{R^2 - Z^2}} & |Z| < R \\ 0 & |Z| > R \end{cases}$$

の2つであり、これより（A-2-22）～（A-2-25）式内の未定係数 B 及び C を求めることができる。また radiation condition を満たす為に Z_ν（ν は階数）は第2種のハンケル関数でなければならない。境界条件 ①より

$$B = \frac{n H_1^{(2)}(k_2 R_0)}{k_1 H_1^{(2)}(k_1 R_0)} \cdot C \quad \text{----(A-2-26)}$$

また $r = R_0$ における σ_{zr} を $f(z) \cdot e^{i\omega t}$ とおくと（A-2-26）式を（A-2-24）式に代入して

$$\sigma_{zr} = -i \cdot \mu j^2 \cdot H_1^{(2)}(k_2 R_0) \cdot C \cdot e^{i\omega t + inz} = f(z) \cdot e^{i\omega t}$$

よって

$$C = \frac{f(z)}{e^{inz}} \cdot \frac{i}{\mu j^2 H_1^{(2)}(k_2 R_0)} \quad \text{----(A-2-27)}$$

ここで $f(z)$ の z によるフーリエ変換値を $F(n)$ とおく。つまり

$$F(n)=\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\cdot e^{-inz}\,dz \qquad \text{----(A-2-28)}$$

すると $f(z)$ はこの $F(n)$ を用いて

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(n)\cdot e^{inz}\,dn \;=\int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{f} \qquad \text{----(A-2-29)}$$

と表現することができる。(A-2-27)式の $f(z)$ のかわりに(A-2-29)式の $d\tilde{f}$ を用いると

$$dC=\frac{F(n)\cdot dn}{2\pi}\;\frac{i}{\mu\cdot j^2\,H_1^{(2)}(k_2R_0)}$$

(A-2-26)式より

$$dB=\frac{F(n)\,dn}{2\pi}\;\frac{i}{\mu j^2\,H_1^{(2)}(k_1R_0)}\;\frac{n}{k_1}$$

よって

$$dU_z=-\frac{e^{i\omega t}}{2\pi\mu\cdot j^2}\left\{\frac{n^2}{k_1}\frac{H_0^{(2)}(k_1r)}{H_1^{(2)}(k_1R_0)}+k_2\frac{H_0^{(2)}(k_2r)}{H_1^{(2)}(k_2R_0)}\right\}F(n)\cdot e^{inz}\,dn$$

これより

$$U_z=-\frac{e^{i\omega t}}{\pi\mu j^2}\int_0^{\infty}\left\{\frac{n^2}{k_1}\frac{H_0^{(2)}(k_1r)}{H_1^{(2)}(k_1R_0)}+k_2\frac{H_0^{(2)}(k_2r)}{H_1^{(2)}(k_2R_0)}\right\}F(n)\cdot\cos nz\,dn \qquad \text{----(A-2-30)}$$

となり孔壁での剪断応力分布を決めれば $F(n)$ が決定し U_z が求まることになる。(A-2-18)式より

$$f(z)=\frac{Q}{2\pi^2R_0\sqrt{h^2-z^2}} \qquad (|z|<h)$$

であるから

$$F(n)=\mathcal{F}(f(z))=\frac{Q}{2\pi^2R_0}\int_{-h}^{h}\frac{1}{\sqrt{h^2-z^2}}\,e^{-inz}\,dz$$

$f(z)$は偶関数であり $z/R = t$とおくことにより

$$F(n) = \frac{Q}{\pi^2 R_0}\int_0^1 \frac{\cos nRt}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$$= \frac{Q}{2\pi R_0}\cdot J_0(nR) \qquad \text{----(A-2-31)}$$

(A-2-30)式に(A-2-31)式を代入することにより

$$u_z = -\frac{Q e^{i\omega t}}{2\pi^2 R_0 \mu j^2}\int_0^\infty \left\{\frac{n^2}{k_1}\frac{H_0^{(2)}(k_1 r)}{H_1^{(2)}(k_1 R_0)} + k_2\frac{H_0^{(2)}(k_2 r)}{H_1^{(2)}(k_2 R_0)}\right\}\cdot J_0(nR)\cdot\cos nz\,dn$$

----(A-2-32)

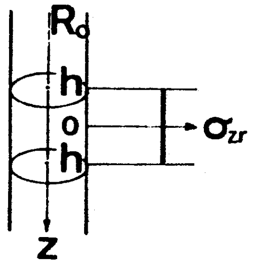
と求めることができる。(3-4-2)式は

$$\left.\begin{aligned}
j &= \omega/V_s \left(= \omega\cdot\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}\right)\\
l &= \omega/V_p \left(= \omega\cdot\sqrt{\frac{\rho}{\lambda+2\mu}}\right)\\
\gamma &= V_s/V_p = l/j\\
A &= R_0\cdot j\\
a &= r\cdot j\\
b &= z\,j
\end{aligned}\right\} \qquad \text{----(A-2-33)}$$

とおき積分変数kをjで割って無次元化したうにより(A-2-32)式を書き換えたものである。

A-2-4　(3-4-4)式の誘導

基本的には 前頂"(3-4-2)式の誘導" と何ら変わるところはない。ただ孔壁における剪断応力分布が(3-4-3)式(pp.47)に示すように



$$\sigma_{zr} = \begin{cases} \dfrac{Q e^{i\omega t}}{4\pi R_0 h} & |z| < h \\ 0 & |z| > h \end{cases}$$

Fig.A-2-5

と変わるだけである。従って (A-2-28)式の F(n) は

$$F(n) = \mathfrak{F}(f(z)) = \int_{-h}^{h} \frac{Q}{4\pi R_0 h} e^{-inz} dz$$

$$= \frac{Q}{2\pi R_0} \frac{\sin nh}{(nh)} \qquad \text{---(A-2-34)}$$

となる。これを (A-2-30)式に代入すると

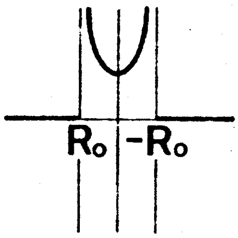
$$u_z = -\frac{Q e^{i\omega t}}{2\pi^2 R_0 \mu j^2} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{n^2}{k_1} \frac{H_0^{(2)}(k_1 r)}{H_1^{(2)}(k_1 R_0)} + k_2 \frac{H_0^{(2)}(k_2 r)}{H_1^{(2)}(k_2 R_0)} \right\} \frac{\sin nh}{nh} \cos nz \, dn$$

----(A-2-35)

が得られる。これを (A-2-33) 及び無次元化積分変数 $\zeta(= k/j)$ により書き直したものが (3-4-4)式である。

A-2-5　(3-4-6)式の誘導

(3-4-6)式（本文 pp50）は，無限等方弾性体内の円盤状の面にフニジネスク的な直応力分布が発現する時の変位を与えるものである。即ちこの円盤を含む平面内で



$$\sigma_{zz} = \begin{cases} \dfrac{Qe^{i\omega t}}{2\pi R_0} \dfrac{1}{\sqrt{R_0^2 - r^2}} & |r| < R_0 \\ 0 & |r| > R_0 \end{cases} \quad \text{----(A-2-36)}$$

Fig.A-2-6

なる直応力分布が与えられている。この問題に関しては z軸に直交する面内で境界条件を考える為 (3-4-2), (3-4-4)式の誘導の時と異なり (A-2-12)式及び(A-2-16)式の k_1 と k_2 が等しくなければならない。これを k とおく。従って当然 $n_1 \neq n_2$ であり，さらに $|z|$が無限大のときの波動の減衰を考えると (A-2-10), (A-2-14)式の $-n_1^2$, $-n_2^2$ の負の符号は妥当でない。従ってこれを正とおき

$$k^2 = \frac{\rho \cdot \omega^2}{(\lambda + 2\mu)} + n_1^2 = \frac{\rho\ \omega^2}{\mu} + n_2^2 \quad \text{----(A-2-37)}$$

とすると (A-2-13)式，及び(A-2-17)式は

$$\Delta = A_1 \cdot Z_0(kr)\, e^{-n_1 z + i\omega t} \quad \text{----(A-2-38)}$$

$$\Omega = A_2 \cdot Z_1(kr)\, e^{-n_2 z + i\omega t} \quad \text{----(A-2-39)}$$

ここで n_1 及び n_2 に負の符号をつけてあるのは $z > 0$ の領域で波動の減衰と radiation condition を考慮した為である。これより (A-2-19)～(A-2-21)と同様の演算を行なうことで，新しい定数 B, C を用いて

$$u_r = (k B \cdot e^{-n_1 z} + n_2 C e^{-n_2 z}) \cdot Z_1(kr) \cdot e^{i\omega t} \quad \text{----(A-2-40)}$$

$$u_z = (n_1 B \cdot e^{-n_1 z} + k C e^{-n_2 z}) \cdot Z_0(kr) \cdot e^{i\omega t} \quad \text{----(A-2-41)}$$

となる。また応力はHookeの法則より

$$\sigma_{zr} = -\mu \{ 2kn_1 B \cdot e^{-n_1 z} + (2k^2 - j^2) \cdot C \cdot e^{-n_2 z} \} \cdot Z_1(kr) \cdot e^{i\omega t} \quad \text{----(A-2-42)}$$

$$\sigma_{zz} = -\mu \{ (2k^2 - j^2) \cdot B \cdot e^{-n_1 z} + 2kn_2 \cdot C \cdot e^{-n_2 z} \} \cdot Z_0(kr) \cdot e^{i\omega t} \quad \text{----(A-2-43)}$$

以上は z が正の場合の変位と応力であるが z が負の場合には n_1 及び n_2 の符号をすべて逆にすればよい。よってこの変位,応力の解に $'$(ダッシュ)をつけて以下に示す。

$$u_r' = (k B' e^{n_1 z} - n_2 C' e^{n_2 z}) \cdot Z_1(kr) \cdot e^{i\omega t} \quad \text{----(A-2-44)}$$

$$u_z' = (-n_1 B' e^{n_1 z} + k C' e^{n_2 z}) \cdot Z_0(kr) \cdot e^{i\omega t} \quad \text{----(A-2-45)}$$

$$\sigma_{zr}' = -\mu \{ -2kn_1 B' \cdot e^{n_1 z} + (2k^2 - j^2) \cdot C' \cdot e^{n_2 z} \} \cdot Z_1(kr) \cdot e^{i\omega t} \quad \text{----(A-2-46)}$$

$$\sigma_{zz}' = -\mu \{ (2k^2 - j^2) \cdot B' \cdot e^{n_1 z} - 2kn_2 C' \cdot e^{n_2 z} \} \cdot Z_0(kr) \cdot e^{i\omega t} \quad \text{----(A-2-47)}$$

(A-2-40)~(A-2-47)式内の $Z_\nu(kr)$ は $r=0$ で無限大とならない為ベッセル関数でなければならない。ここで(A-2-36)(pp.207)の直応力分布をもつ円盤を含む平面を $z=0$ とするとこの面における4つの境界条件から(A-2-40)~(A-2-47)式内の4つの未定係数を決定できる。(A-2-36)式の σ_{zz} を前項の手法にならい $f(r)\,e^{i\omega t}$ と表現すると4つの境界条件は次のように表現される。

$z=0$ において

① $u_r - u_r' = 0$

② $u_z - u_z' = 0$

③ $\sigma_{zr} - \sigma_{zr}' = 0$

④ $\sigma_{zz} - \sigma_{zz}' = f(r) \cdot e^{i\omega t}$

境界条件 ①, ②, ③ より

$$B' = -B \qquad C' = C \qquad C = -\frac{k}{n_2} B \qquad \text{----(A-2-48)}$$

この結果を境界条件 ④ に用いることで

$$B = \frac{f(r)}{J_0(kr)} \cdot \frac{1}{2\rho\omega^2} \qquad \text{----(A-2-49)}$$

ここで (A-2-28)にならい $f(r)$ のフーリエ・ベッセル変換値を $F(k)$ とおく。

$$F(k) = \int_0^\infty r \cdot f(r) \cdot J_0(kr) \cdot dr \qquad \text{----(A-2-50)}$$

すると $f(r)$ は この $F(k)$ を用いて

$$f(r) = \int_0^\infty k \cdot F(k) \cdot J_0(kr) dk = \int_0^\infty d\tilde{f} \qquad \text{----(A-2-51)}$$

と表現することができる。(A-2-49)式の $f(r)$ のかわりに (A-2-51)式の $d\tilde{f}$ を用いると

$$dB = \frac{1}{2\rho\omega^2} k \cdot F(k) \cdot dk$$

(A-2-48)式より

$$dC = \frac{-1}{2\rho\omega^2} \frac{k^2}{n_2} F(k) \cdot dk$$

これを(A-2-41)式に代入することで

$$du_z = \frac{e^{i\omega t}}{2\rho\omega^2}\left(k \cdot n_1 e^{-n_1 z} - \frac{k^3}{n_2} \cdot e^{-n_2 z}\right) \cdot F(k) \cdot J_0(kr) \cdot dk$$

$$\therefore \quad u_z = \frac{e^{i\omega t}}{2\rho\omega^2}\int_0^\infty \left(k \cdot n_1 e^{-n_1 z} - \frac{k^3}{n_2} \cdot e^{-n_2 z}\right) F(k) \cdot J_0(kr) \cdot dk$$

----(A-2-52)

となり f(r)を決めれば F(k)が決定し u_z が求まることになる。f(r)は(A-2-36)式より

$$f(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\pi R_0}\dfrac{1}{\sqrt{R_0^2 - r^2}} & |r| < R_0 \\ 0 & |r| > R_0 \end{cases}$$

であるから

$$F(k) = \int_0^{R_0} r \cdot f(r) \cdot J_0(kr) \cdot dr$$

$$= \frac{Q}{2\pi R_0}\int_0^{R_0} \frac{r \cdot J_0(kr)}{\sqrt{R_0^2 - r^2}}\, dr$$

$$= \frac{Q}{2\pi}\,\frac{\sin kR_0}{kR_0}$$

----(A-2-53)

(A-2-52)式に(A-2-53)式を代入することによって

$$u_z = \frac{Q e^{i\omega t}}{4\pi R_0 \rho\omega^2}\int_0^\infty \left\{n_1 \cdot e^{-n_1 z} - \frac{k^2}{n_2} e^{-n_2 z}\right\} \sin kR_0 \cdot J_0(kr)\, dk$$

----(A-2-54)

を得る。これを(A-2-33)及び無次元化した積分変数 ζ(= k/j)により書き直したものが(3-4-6)式である。

Appendix 3　測定及び解析に使用した計器

A-3-1 概説

本論文で用いたデータはすべて現場測定で得られたものである。現場の測定点の変位，速度，加速度等の着目する量はピックアップ及びアンプにより電圧の変動に変換されデータレコーダ（主に R210，R280，(TEAC)）に記録される。この記録はハイブリッド計算システム HIDAS 2000（ディジタル計算機 HD-200・400・800，アナログ計算機 ALS 505 を中心とするハイブリッド計算システム）により処理された。このディジタル部の記憶容量は4096語であり，その容量を越えるような大規模かつ複雑な処理が必要な場合には，本ハイブリッドシステムは単なる A-D コンバーターとして使用し，ディジタル化された情報を紙テープに穿孔し，東大大型計算機センターの HITAC 8700-8800 によりデータ処理を行なった。このアペンディックスでは検振器，増幅器及びハイブリッド処理装置の仕様に触れておく

A-3-2 測定に使用した計器の仕様

(1) 圧電型加速度ピックアップ

(1-1) 541 A (EMIC)

◦電荷感度	40	PC/G
◦電圧感度	50	mV/G
◦共振周波数	22	kHz
◦周波数特性	1 Hz ～ 10	kHz
◦静電容量	900	PF
◦最大加速度	1000	G
◦重量	32	gr

◎ 本器の使用された測定

中里架道橋振動測定にて桁中央の点 B1に取り付ける。

◎設置方法

測定点にアルミ板をリゴラックセメントを用L固着L，これを台座

として M6 P1のネジを用いピックアップを固定した。

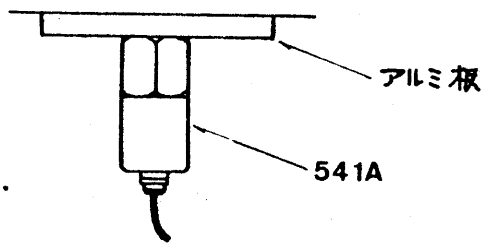


Fig.A-3-1

(1-2) 542A (EMIC)

◦電荷感度	100 PC／G
◦電圧感度	100 mV／G
◦共振周波数	12 kHz
◦周波数特性	1Hz ～ 6 kHz
◦静電容量	1000 PF
◦最大加速度	100 G
◦重量	240 gr

◎ 本器の使用された測定

庄架道橋振動測定(BE) 埼大構内PC杭加振試験(P1)

中里架道橋振動測定(B2)

◎設置方法

541A (Fig A-3-1) と同じ

(2) サーボ型地震計

(2-1) SA-151※(水平) SA-152※(鉛直) (東京測振)

∘感度	15	μA/gal
∘振子固有振動数	10	Hz
∘周波数特性	1 ～ 200	Hz
∘最大加速度	300	gal
∘重量	1.8	kg

◎本器の使用された測定

庄架道橋振動測定（E3～E5） 埼大構内PC杭加振試験(E1～E3)

中里架道橋振動測定（P4C, P5C）

◎設置方法

このピックアップは、振子の固有振動数を市販の1Hzのものから10Hzのものにとりかえ周波数特性を200Hzまでのばしてある為、その固定方法としてはピックアップの支持板と被測定体(多くは地盤)とを石膏を用い固着する方法を採った。

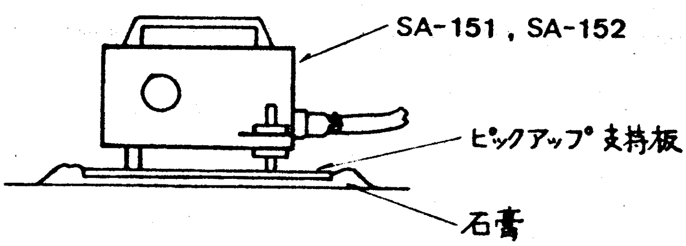


Fig.A-3-2

(3) 抵抗線型加速度ピックアップ

(3-1) BG901 (ENDEVCO)

◦分解能 ±1 gal

◦周波数特性 1 ~ 200 Hz

◎本器の使用された測定

高架道橋振動測定 (P1, P2, E1, E2)

◎設置方法

サーボ型地震計同様 ピックアップを被測定体に直接石膏で固着する。

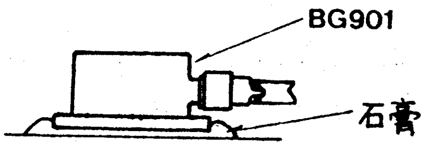


Fig.A-3-3

(4) 動電型地震計

(4-1) SM-111S (水平)
SM-112S (鉛直)　(東京測振)

◦最小分解能	1	μ Kine
◦振子周期	1	sec
※◦感度一様な周波数範囲	1.4 ~ 50	Hz
◦最大測定範囲	30	Kine
◦重量	4.5	kg

◎本器の使用された測定

中里架道橋振動測定 (E10 ~ E53)

◎設置方法

直接 地上に置く。

※本器の周波数特性は表示のとおりだがこの1.4~50Hzの間で位相特性は平坦ではない。従って4章内の中で示したデータを検討する場合この点に留意する必要がある。

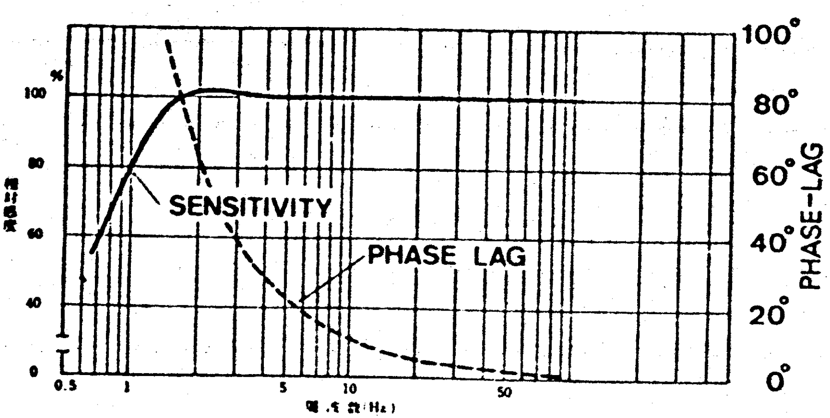


Fig.A-3-4　SM-111S　SM-112S型振動計総合周波数特性

(5) 差動トランス

(5-1) D10B(ワシダ測器)

○感度	0.25 V/mm
○測定範囲	±10 mm
※ ○周波数特性	0 ～ 30(-3dB) Hz
○出力インピーダンス	7 Ω

◎本器が使用された測定

庄架道橋振動測定(D1)

◎設置方法

本器は庄架道橋の弾性支承(フレシパッド沓)の変位を測定する為に用いられた。コイル側のケーシングは桁端にコアを支える棒は橋脚に固定された。

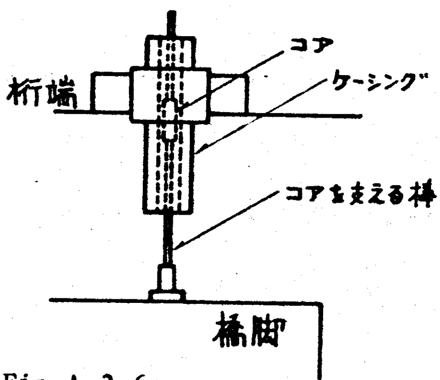


Fig.A-3-6

※ 本器のカタログデータはこのとおりであるが コアを支える棒体のカンチレバーとしての共振振動数はかなり低いと思われ この振動数でのインダクタンスの変化が懸念される。

(6) 光電スイッチ

(6-1) E3N-30（オムロン）

○検出物体	不透明体 32 mm 以上
○検出距離	30 m
○指向角	投光器 3°以上 受光器 3°以上 10°以下
○応答時間	動作時間 5ms 以下 復帰時間 5ms 以下
○制御出力	無接点出力 DC 12V 出力抵抗 4.7 kΩ
○使用周囲照度	受光面照度 30,000 lux（太陽光）
○動作方式	しゃ光時 "HIGH" 入光時 "LOW"（残留電圧 0.8 V 以下）

◎本器が使用された測定

中里架道橋振動測定にて新幹線車輌の車輪を検出し列車の位置速度を知るマーカーとした。

◎設置方法

軌道内に立ち入ることができないため保線上軌道に立ち入る為の扉にあけられた覗き窓に三脚に固定した投光器を設置し，軌道をはさんで反対側の金網にアルミパイプに固定した受光器を置く。（Fig 4-3-4 pp.102 参照）

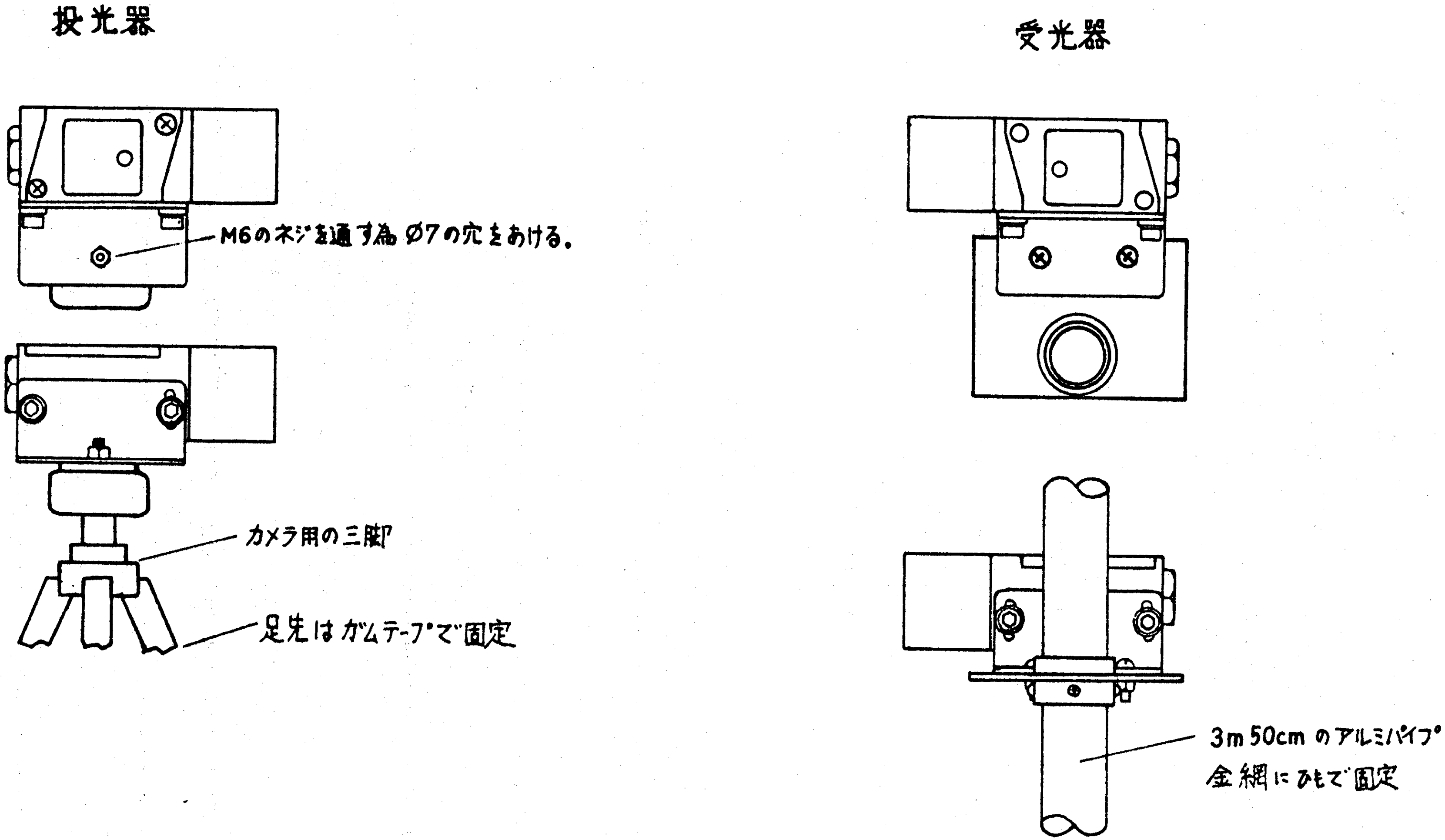


Fig.A-3-7　光電スイッチ固定状況

A-3-3 解析に使用した装置の仕様

(1) ハイブリッド処理システム HIDAS 2000

(1-1) ディジタル部 (HD-200・400・800) (HITACHI)

○演算方式及び演算時間

プログラム記憶方式

2進法 固定小数点, 並列スタティック回転式

加減算	6 μS
乗算	42 μS 以下
除算	53.5 μS 以下

○数値語

符号 1ビット + 数値 17ビット

負数は 2の補数表示

○命令語

1½ アドレス方式

指標レジスターによるアドレス変更可能

間接アドレス可能

短語命令	18 ビット
長語命令	36 ビット
命令の種類	基本 27種

○演算レジスター

累算器	Accumulator (ACC)	18 ビット	1 ヶ
プログラム カウンター	Program Counter (PC)	14 ビット	1 ヶ
アドレス レジスター	Address Register (AR)	14 ビット	1 ヶ
オーダー レジスター	Order Register (OR)	9 ビット	1 ヶ
メモリー レジスター	Memory Register (MR)	18 ビット	1 ヶ

Qレジスター	Quotient Register(QR)	18ビット	1ケ
指標レジスター	Index Register (XR)	18ビット	1ケ
表示子	Indicator		4ケ

アフレ表示子(OVF) ケタ上げ表示子(CAR)
スイッチ表示子(SW) 割込禁子表示子(PI INH)

°記憶装置

種類 磁気コア,サイクルタイム 2μS

容量 8192語

°プログラムに対する割り込み 1レベル 18要因

°リンケージ部との信号受授

①アドレッサブル入力

指定可能アドレス 0～16.383

入力情報信号 並列 18ビット

②アドレッサブル出力

指定可能アドレス 0～16.383

出力情報信号 並列 18ビット

③A-D変換

リンケージ部との結合動作によりアドレッサブルにA-D変換を行なう。

指定可能アドレス 0～255

変換結果 2の補数表示

(1-2) リンケージ部

○ リンケージチャンネル構成

A-D 入力チャンネル	8
D-A 出力チャンネル	8
制御用入力(Ci)チャンネル	8
汎用制御用出力(Co)チャンネル	8
クロックチャンネル	1
演算モード制御チャンネル	4

○ A-D 入力チャンネル

① 走査器

入力電圧	最大 ±100V
入力抵抗	10kΩ 以上
チャンネル選定	アドレス指定
精度	±0.1% 以内(フルスケール100Vに対して)
走査速度	1チャンネルにつき約60μsec (命令読み出し及びA-D変換時間を含む)
スイッチ素子	半導体スイッチ

② A-D 変換器

入力電圧	最大 ±100 V
入力抵抗	1.25 kΩ 以上
精度	±0.1% + 1/2 LSD 以内 (フルスケール 100 V に対して)
変換結果	符号 + 2進10ケタ, 2の補数表示、固定小数点

○D-A出力チャンネル

出力電圧	最大 ±100 V
精度	±0.1%+½LSD以内 (フルスケール 100 Vに対して)
入力コード	符号+2進 10ケタ 2の補数表示 固定小数点
チャンネル選択	アドレス指定(ランダム アクセス)
分配速度	1チャンネルにつき約40μs (命令読み出し及びD-A変換時間を含む)

(1-3) アナログ計算機 ALS-505 (HITACHI)

○回路素子		固体素子
○演算電圧		±100V, 25mA.typ.
○増幅器数		20
○静的精度	線形	±0.01%
	非線形	±0.05% ~ 1% (特殊素子を除く)
○周波数特性		300 kC (正負変換器)
○演算時間		1ms 以上
○繰返演算時間		1ms. ~ 10s. 連続可変
○演算方式		

(2) オペアンプを用いた解析装置

本研究においては データレコーダーに収録された記録をアナログ量(電圧)の段階で オペアンプ(演算増幅器)を用い処理したケースが多い。既に前頁で触れたアナログ計算器に設置されているオペアンプはもちろんのこと 高いSN比が必要な場合 市販のオペアンプICを用い いくつかの伝達関数を模擬している。使用したICは μA741, RC4558DN等であり 具体的な仕様は オペアンプ規格表等を参照されたい。

(2-1) 二重積分器

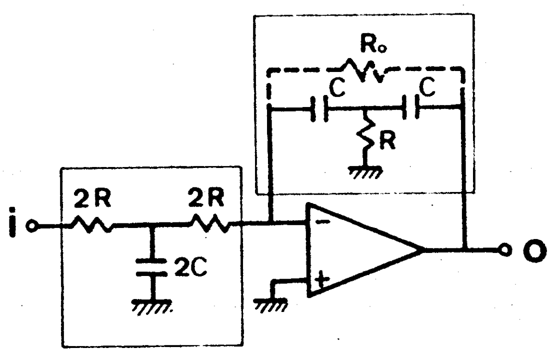


Fig.A-3-8

既に2章の2-2-2項(pp.11)に示したように加速度を変位に変換する時に用いた。Z_1, Z_2は各々の枠内のインピーダンスであり Z_2に相応する枠内の回路で負帰還をかけることにより 端子iに加えられた電圧 V_iは $-Z_2/Z_1$倍され 端子oに出力される。

$$Z_1 = 4R(1 + 2CR \cdot i\omega)$$

$$Z_2 = -(1 + 2CR \cdot i\omega)/RC^2 \cdot \omega^2$$

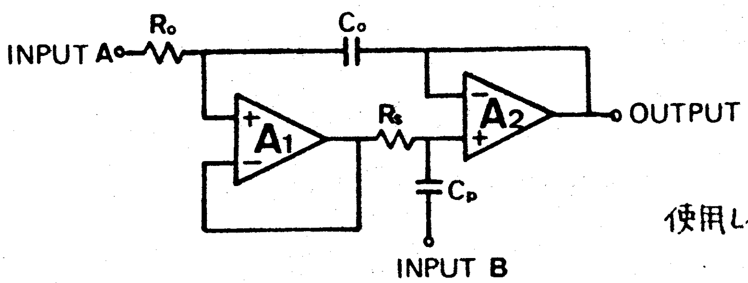
であるから

$$-Z_2/Z_1 = \left(\frac{1}{2RC}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{i\omega}\right)^2$$

となり二重積分が実行できる。尚破線で示した抵抗 R_0を

付加すると $\omega=0$ のときの Z_2 は $-\infty$ にはならずドリフトが防止できる。二重積分は Z_2 にコンデンサー Z_1 に抵抗を用いた一回積分の回路を二段重ねても実行できるが初段の積分の結果生ずるドリフト，オフセット電圧を二段目の積分回路で再び大きくしてしまう為 実用的でない。

(2-2) シミュレーテッド・インダクタ・バンド・パス・フィルター



使用しない入力端子は接地する

Fig.A-3-9

既に4章の 4-4-1 項内 (pp.125) で述べたように 橋脚の速度応答の 2.2Hz, 6.6Hz 成分を抽出する為 このバンド パス フィルターを用いた。これはオペアンプ A_1 及び抵抗 コンデンサーにより構成したシミュレーテッド インダクタに コンデンサー C_p を付けて並列共振をとった単峰 B.P.F である。等価回路を以下に示す。

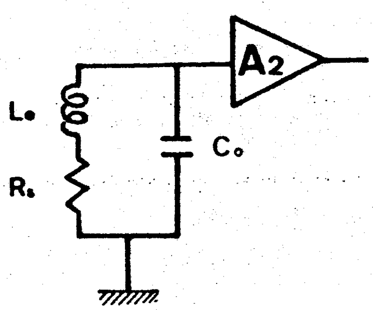


Fig.A-3-10

このシミュレーテッドインダクタの Le は $L_e = C_o R_o R_s$ となりこれより共振周波数 f_o は

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_e C_p}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{C_o C_p R_o R_s}}$$

となる。また Q* は

$$Q = \omega \cdot L_e / R_s = \sqrt{\frac{C_o \cdot R_o}{C_p \cdot R_s}}$$

となる。この回路はオペアンプをゲイン1で使用しているので相当Qを高くしても発振する危険が少ない。本研究で設定したQは30dBである。共振周波数の設定は R_o, R_s に二連の可変抵抗を用い双方の抵抗値を変えることで行なう。この為常に $R_o \fallingdotseq R_s$ となりQは f_o によって変わらない。この回路は Fig A-2-9 に示すように入力端子を二つ持ち各々を用いた時の出力の特性は Fig. 4-4-3(pp. 105)に示す。使用しない入力端子は接地する。

※ Q(同調の良好度)

Qは以下のように定義される

$$Q = 2\pi\frac{(\text{インダクタンスに蓄えられるエネルギー})}{(\text{一周期に消費されるエネルギー})}$$

$$= 2\pi\frac{L_e \cdot i^2}{R_s \cdot i^2 / f_o} = \frac{\omega L_e}{R_s}$$