

5783

保存波および浅水波変形に関する研究

1981年1月

磯部 雅彦

目 次

第1章 緒 論	1
第2章 保存波に関する理論的検討	6
2.1 序 論	7
2.2 保存波の擾動解に関する基礎的考察	18
2.2.1 基礎方程式	18
2.2.2 2重級数による解の表示	28
2.2.3 種々の擾動解	32
(1) 擾動解と2重級数との関係	32
(2) ストークス波理論	39
(3) フノイド波理論	43
(4) その他の擾動解	48
2.3 有限振幅波理論の適用範囲	54
2.3.1 ストークス波理論の高次解 および収束範囲	54
(1) 高次解の計算法	54
(2) 深海波の限界波高	56
(3) 任意の水深における限界波高	64

2.3.2	クノイド波理論の高次解	
	および収束範囲	68
(1)	高次解の計算法	68
(2)	孤立波の限界波高	69
(3)	任意の水深における限界波高	73
2.3.3	有限振幅波理論の解の精度	75
(1)	精度の評価方法	75
(2)	残差による精度の評価	77
(3)	誤差による精度の評価	81
第3章	砕波帯付近における流速場の特性	87
3.1	序論	88
3.2	砕波帯付近における流速場に関する 室内実験	96
3.2.1	実験の概要	96
3.2.2	比較に用いた波動理論	104
3.2.3	波動理論との比較・検討	107
3.3	砕波帯付近における流速場に関する 現地観測	118

3.3.1	観測方法の概要	118
3.3.2	スペクトル解析結果	123
3.3.3	波動理論との比較・検討	130
3.4	水深変化に伴う流速場の変化	144
3.4.1	砕波帯外における流速場の変化	144
(1)	エネルギーフラックス法	144
(2)	波高変化	146
(3)	岸沖方向流速の変化	149
3.4.2	砕波帯内における流速場の変化	175
(1)	連続的砕波と再成	175
(2)	一様勾配斜面上における流速変化	177
(3)	ステップ型地形における流速変化	182
第4章	結論	186
	謝辞	190
	参考文献	191
付録 A	保存波の2重級数解	A1
付録 B	線形重ね合わせ法を用いた流速の 計算法	B1

記号表

(添字の j は整数)

A_1 : 水面波形のフーリエ第1成分の係数

a_1 : 水面波形のフーリエ第1成分の無次元化された係数

a_{ij} : ストーフス波理論またはクノイド波理論の高次解に含まれる係数

b'_i, b''_i : ストーフス波理論の解の表示に用いる定数

b_{ij} : ストーフス波理論またはクノイド波理論の高次解に含まれる係数

$C = L/T$: 波速

$C_{os} = gT/2\pi$: 微小振幅波理論を用いた場合の沖波波速

C_s : 微小振幅波理論を用いた場合の波速

$c'_0 \sim c'_2$: クノイド波理論の解の表示に用いる定数

$\text{co}h^2$: コヒーレンス

C_s : 微小振幅波理論を用いた場合の無次元波速

cn : ヤコビの楕円関数

D : 平均水深

D_0 : 一様水深部水深

D_b : 碎波水深

D_s : 静水深

D_u : ステップ部における一様水深

$d = D/L$: 相対水深

E : 第2種完全楕円積分

E_D : 水面における力学的境界条件に対する相対残差

E_K : 水面における運動学的境界条件に対する相対残差

F : 単位幅当たりのエネルギーフラックス

f : 周波数

g : 重力加速度

H : 波高

H_0 : 換算沖波波高

$H_{1/3}$: 有義波高

$h = H/D$: 相対波高

h_i : H/L を級数展開した場合の係数

i : 海底勾配

K : 第1種完全楕円積分

K' : スプリット型センサの一方の出力に対する他方の出力の補正係数

L : 波長

$L_{05} = gT^2/2\pi$: 微小振幅波理論を用いた場合の沖波波長

N : 底面を基準とした水位

$n = N/D$: 底面を基準とした無次元水位

m_{ij} : m を2重級数に展開した場合の係数

m_c : 無次元波峯水位

m_{ci} : クロイド波理論における m の展開係数

m_{ei} : 擬ストークス波理論における m の展開係数

m_{si} : ストークス波理論における m の展開係数

P : 圧力

P_0 : ベルヌーイの定数

ΔP_0 : 近似解を用いた場合の水面における圧力変動量

$\phi_0 = P_0 / \rho g D$: 無次元化されたベルヌーイの定数

ϕ_{ij} : ϕ_0 を 2 重級数に展開した場合の係数

ϕ_{ci} : クロイド波理論における ϕ_0 の展開係数

ϕ_{ei} : 擬ストークス波理論における ϕ_0 の展開係数

ϕ_{si} : ストークス波理論における ϕ_0 の展開係数

Q : 積分定数 ($Q' = 0$ とした場合、移動座標系における断面流量を表す。)

Q' : 積分定数

$\Delta Q_a, \Delta Q_b$: 静水時を基準とした場合のスパリット型センワから放出される熱量

$\delta = Q / (D\sqrt{gD})$: 無次元化された断面流量

δ_i : δ を級数展開した場合の係数

δ_{ij} : δ を 2 重級数に展開した場合の係数

δ_{ci} : クロイド波理論における δ の展開係数

β_{ei} : 擬ストロフス波理論における β の展開係数

β_{si} : ストロフス波理論における β の展開係数

R : 相関係数

γ : 有限振幅性の影響に対する岸沖方向流速全振幅の補正係数

$\gamma_1 \sim \gamma_3$: γ の表現に含まれる定数

$$\gamma_u = (1 - u_c/\hat{u}) / (u_c/\hat{u})$$

$$\gamma_T = (1 - T_c/T) / (T_c/T)$$

S_i : ベキ級数における第 i 次までの和

T : 周期

$T_{1/3}$: 有義波周期

T_c : 流速が正となる時間を代表する量 (定義四-3.4.4)

TF : 伝達関数

t : 時間

U : 水平流速 (移動座標系)

U_c' : 波峰通過時における波峰の高さでの水平流速 (固定座標系)

U_m : スプリット型センサに垂直な面内の流速成分

U_x : スプリット型センサの表裏方向の流速成分

U_y : U_m のうち U_x に垂直な成分

u : 岸沖方向流速

$\langle u \rangle$: u の同位相平均値

- \bar{u} : u の時間平均値
 \hat{u} : 岸沖方向流速全振幅
 u' : u の乱れ成分
 u'' : u から長周期成分を除いた成分
 $\hat{u}_{1/3}$: 有義流速全振幅
 u_c : 波峰通過時における岸沖方向流速
 u'_c : 波峰通過時における波峰の高さでの無次元水平流速
 (固定座標系)
 \hat{u}_s : 微小振幅波理論を用いて計算した岸沖方向流速全振幅
 u_{SFH} : 流山関数法を用いて計算した岸沖方向流速
 u_{aw} : u の波動成分
 u_i : 上から i 番目の流速計設置位置における岸沖方向流速
 u'_i : u'_c を級数展開した場合の係数
 $\Delta V_a^2, (\Delta V_b^2)'$: 静水時を基準とした場合のスプリット型センサ
 の出力
 ΔV_b^2 : ΔV_a^2 に対して $(\Delta V_a^2)'$ を補正したもの
 W : 鉛直流速
 X : 水平座標 (移動座標系)
 X' : 水平座標 (固定座標系)
 X_b : 碎波帯幅
 X_r : 碎波の再成距離

$\alpha = X/L$: 無次元水平座標 (移動座標系)

Y_c : 平均水面を基準とした波峰水位

y_i : 級数の係数

Z : 底面を基準とした鉛直座標

Z' : 静水面を基準とした鉛直座標

$z = Z/D$: 底面を基準とした無次元鉛直座標

$\alpha = 2KD/L$

α_1, α_2 : スプリット型センサの検定式における定数

β : 定数 ($\ll 1$)

$\gamma = D^5/HL^4$: 補助パラメータ

$\delta, \delta_1, \delta_2$: 擾動核または補助パラメータ

$\Delta = \overline{cn^2} = E/x^2K - (1-x^2)/x^2$

$\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_1, \varepsilon_2$: 擾動核または補助パラメータ

ε_0 : 擾動核の変換におけるパラメータ

$\varepsilon_{01}, \varepsilon_{02}$: 定数 ($\varepsilon_1 < \varepsilon_2$)

ε_{max} : 収束半径

ζ : 静水面を基準とした水位

$\langle \zeta \rangle$: ζ の同位相平均値

ζ' : ζ の乱水成分

η : 平均水面を基準とした水位

θ : スプリット型センサに対する流速の方向の傾き角

θ_1, θ_2 : 波形の再合成モデルにおける位相差 (定義図-3.4.9)

κ : 楕円関数の母数

$\lambda \sim \lambda_5$: u_c/\hat{u} および T_c/T の近似式中に用いられる定数

ξ : 任意の関数

ξ_i : 擾動核の変換における係数

π : 円周率

ρ : 流体の密度

τ : 時間差

Ψ : 速度ポテンシャル (移動座標系)

Ψ' : 速度ポテンシャル (固定座標系)

Ψ : 流山関数 (移動座標系)

$\psi = \Psi / (\Omega \sqrt{D})$: 無次元流山関数 (移動座標系)

ψ_i : ψ をそのべき級数に展開した場合の係数

ψ_{ij} : ψ を二重級数に展開した場合の係数

ψ_{ei} : クノイド波理論における ψ_i の展開係数

ψ_{ei} : 擬ストークス波理論における ψ_i の展開係数

ψ_{si} : ストークス波理論における ψ_i の展開係数

図表目録

図-2.2.1	定義図	19
図-2.2.2	保存波の級数解の模式図	33
図-2.3.1	収束限界の推定法	57
図-2.3.2	波形勾配とフーリエ第1成分との関係	62
図-2.3.3	ストークス波理論およびフノイド波理論の 収束限界	65
図-2.3.4	擾動核の相互対応図	70
図-2.3.5	正領域の特異点の推定法	70
図-2.3.6	等残差線 (ストークス波理論, $\epsilon=H/L$, $E_D=0.01$)	78
図-2.3.7	等残差線 (フノイド波理論, $\epsilon=H/D$, $E_D=0.01$)	78
図-2.3.8	等残差線 (擬ストークス波理論, $\epsilon=2A_1L^2/D^3$, $E_D=0.01$)	80
図-2.3.9	等誤差線 (ストークス波理論, $\epsilon=H/L$, Y_c/H の相対誤差0.01)	83
図-2.3.10	等誤差線 (フノイド波理論, $\epsilon=H/D$, Y_c/H の相対誤差0.01)	83
図-2.3.11	等誤差線 (ストークス波理論, $\epsilon=\alpha_1$, Y_c/H の相対誤差0.01)	84
図-2.3.12	等誤差線 (ストークス波理論, $\epsilon=H/L$, U_c' の相対誤差0.01)	84
図-3.2.1	スプリット型セニカ模式図	97
図-3.2.2	スプリット型セニカの検定結果	100
図-3.2.3	スプリット型セニカの方角特性	100
図-3.2.4(a)~(c)	測定点配置図	103
図-3.2.5(a)~(c)	水面変動・岸沖方向流速・乱流の測	

定結果および岸沖方向流速の計算値	108-110
図-3.2.6(a)~(c) 岸沖方向平均流速	114
図-3.2.7(a)~(c) 波動成分の実測値と流小関数法を用いた計算値との比較	116
図-3.3.1 流速計設置架台見取図	119
図-3.3.2(a)~(d) パワースペクトル	124-125
図-3.3.3(a)・(b) 伝達関数およびコヒーレンス	127
図-3.3.4 岸沖方向平均流速の鉛直分布	131
図-3.3.5 岸沖方向流速の実測値と計算値との比較 (ストークス波理論またはクノイド波理論)	133
図-3.3.6(a)~(d) 岸沖方向流速の実測値と計算値との比較 (線形長波理論, 線形重ね合わせ法, 流小関数法)	135-138
図-3.4.1 波高の浅水変化の計算結果と実測結果との比較	147
図-3.4.2 岸沖方向流速全振幅の浅水変化の計算結果	150
図-3.4.3(a)~(c) 岸沖方向流速全振幅の浅水変化の計算結果と実測結果との比較	153-154
図-3.4.4 波形の非対称性に関する定義図	158
図-3.4.5 非対称パラメータの計算結果	160
図-3.4.6 尖度パラメータの計算結果	160
図-3.4.7(a)~(d) 非対称パラメータの計算値と実測値との比較	163-164
図-3.4.8(a)~(d) 尖度パラメータの計算値と実測値との比較	167-168

図-3.4.9	波形の再合成モデル	171
図-3.4.10	岸沖方向流速の予測波形と実測波形との比較	174
図-3.4.11(a)・(b)	砕波帯内における底面流速全振幅の変化	178
図-3.4.12	砕波帯内における岸沖方向流速の r.m.s. 値	180
図-3.4.13	再成'波の底面流速全振幅および再成'距離	183
表-2.3.1	収束限界の外挿値	58
表-2.3.2	諸量に対する収束限界	58
表-2.3.3	種々の擾動核に対する収束限界	61
表-2.3.4	無次元流量 q に対する係数の値 ($D/L=0.01$)	66
表-2.3.5	波形勾配の推定厳密解 (深海波, $E=a_1$, $E_{max}=0.360$)	82
表-3.2.1	実験条件 (実験Ⅲ)	102
表-3.3.1	観測地点における波浪条件	121

第1章 緒論

著者の専攻する海岸工学は、比較的新しい工学の一分野であり、日本に紹介されて4半世紀余りが経過したにすぎない。しかし、四面を海に囲まれる日本にとって、海岸保全、津波・高潮対策、港湾の建設等が人間生活と深いのかかわりを持つことは言うまでもないことであり、海岸工学はこれら海岸における諸問題に対して大きく貢献してきた。しかし、現象の複雑さと学問の歴史の浅さから未解決な問題も少なくない。たとえば、海岸工学のすべての基礎となる海の波に対する理解にも不十分な点がある。

波の場を記述するためには、保存波と呼ばれる一様な深中を伝播する定形進行波を対象とした、ストークス波理論またはフノイド波理論が用いられることが多い。前者は Airy (1845) によってその第1次近似解である微小振幅波理論が導かれ、Stokes (1847) によって展開されたものである。後者は波長が無限大となった極限として Boussinesq (1871) および Rayleigh (1876) によって導かれた孤立波理論を、Korteweg・

de Vries (1895)が一般化したことから始まる。ところでこれらの理論解を現実に適用するに際して、波浪条件とは無関係に、それらの高次近似解を用いればよいというわけではない。近年電子計算機が普及したこともあって、波力の計算にストークス波理論第5次近似解が用いられることがある。しかし、水深波長比が非常に小さな範囲において、ストークス波理論の解は2次波筈の発生等により、現実的な値を与えないことが知られている。今日に至るまで、両理論とも多くの研究者によって、理論的および実験的な検討がなされてきた。それでもなお両理論解の適用範囲に関しては、必ずしも明らかになつたとは言えない。このような現状において、本論文第2章では、保存波に対する各種理論解の適用範囲を理論的に明らかにし、それらの誤った適用が避けられるようにする。

次に、沿岸域における波浪に着目すると、水深の変化に伴って波が變形し、砕波に至るといった複雑な

様相を呈している。しかし碎波帯付近では、漂砂・振散等の現象が特に活発に起こっており、海岸工学においてこの領域を無視することは決してできない。特に、従来碎波帯の波に関しては、知識の不足から、波形が正弦的になる微小振幅波理論が準用されてきた。しかし、たとえば漂砂移動の問題を考えた場合、正味の移動量は流速波形の非対称性から生ずることになる〔砂村ら(1978), 柴山・堀川(1980)〕。さらに波に対する構造物の応答を考える際にも、正弦的な波形を用いた場合と、現実に近いものを用いた場合とで相当の差が現われるであろう。従って、今後碎波帯付近における諸現象の理解と定量的評価のためには、より詳細に流速場の特徴を明らかにしていく必要がある。

ところでこの方面の研究は、流速を測定するための有効な手段が欠けていたために立ち遅れていたという面がある。しかし近年になって種々の原理を用いた流速計が開発されたことにより、研究の進歩が

期待こい得る状況にある。本論文第3章においては、実験水槽および現地海岸において、それでは熱膜流速計および電磁流速計を用いて波動運動下における内部流速場を測定し、解析を行なった結果を述べる。現在のところ、碎波帯付近における諸現象を理解可能な場合に、波動に伴う流速場の評価の段階で推定誤差を含んでいるわけである。しかし、このような研究を進め、複雑に絡み合う現象に含まれる不確定要素を一つでも減らすことにより、諸現象の把握が容易になるものと考えている。

第 2 章 保存取に関する理論的検討

2.1 序論

海面上を吹く風の影響により発生した水面波は、伝播に伴って、風により海面に作用する応力、海底面に作用する摩擦力、あるいは水深変化のために変形する。しかし、水面波を理解する上で基本となるのは、波形を変化させずに一様水深中を伝播する波、すなわち保存波の理論である。実際、砕波点の極く近傍や構造物の周辺等を除けば、波の変形の影響は小さいと考えられ、局所的に保存波であると見なし得る。また、波の変形を理論的に考察する際にも、海底摩擦によるエネルギー-逸散あるいは水深変化に伴う波高変化を考慮しなから局所的には保存波であると仮定したり [Le Mehaute・Webb (1964)]、保存波に対する基礎方程式・境界条件に、変形をもたらす要素、すなわち海底勾配や底面摩擦等の影響を表現する項を付加することによって扱われる場合が多い [Kakutani (1971), Skuto (1973)]。このような事情から、まず保存波に関して正確な理解をすること

とは不可欠である。

保存波に関する研究は古くから数多くなされてい
るが、渦なし運動を仮定したものと、そうでないも
のとは大別される。トロイド波理論は流体が渦あ
り運動をする場合の波動理論である。しかし、静止
状態から保存力の作用によって生ずる完全流体の運動は渦なしで
あることより、渦なし運動を仮定した理論が重要で
ある。さらに理論において考慮すべき外力としては、
重力および表面張力がある。表面張力波の理論はこ
れら双方の作用を取り入れたものであるが、結果と
して波長が 2cm より十分長いものに関しては、表面
張力の影響は無視できることである [たとえば、
堀川(1973), p.16-17.]。従って、本研究においては非粘性・非
圧縮性流体が重力の作用によって渦なし運動をする
場合の保存波の理論を取り扱う。この条件の下での
波動理論として古くからあるものとしてストークス波理
論およびトロイド波理論であるが、土屋・安田(1978)
はこれらに対する中間的なものとして擬ストークス

波理論を提案している。これらはいずれも摂動展開を用いた解であり、それらの差異は関与する独立な2つの無次元パラメータのオーダーの仮定の違いにある。ストークス波理論においては相対水深のオーダーが1であると仮定し、クノイド波理論においては相対水深の自乗が相対波高のオーダーに等しい、すなわちアーセル数のオーダーが1であると仮定している。これに対し、擬ストークス波理論は相対水深の4乗が相対波高のオーダーに等しいと仮定して場合の波動理論である。

ストークス波理論は、Stokes (1847) によって導かれた理論であり、その第1次近似解にあたるものがAiry (1845) による微小振幅波理論である。その後、Wilton (1914) は深海波に対する解を求め、De (1955) は第5次近似解を求めた。Skjelbreia (1958), Skjelbreia-Hendrickson (1960) も第3次近似解および第5次近似解を計算しているが、展開形がそれまでと異なる。De 等は独立変数として速度ポテンシャルと流線関数をとっているのに対し

し、Skjelbreia は平面座標をとっているため、計算過程はやや長くなるが、実際に流速等を求める場合に便利である。従って、本論文においても独立変数は平面座標にとるものとする。Chappellear (1961) および Bretschneider (1961) によって導かれた解はさらに展開形が異なった解である。後に述べるように保存波の理論においては流速の定義に関して任意性が有り、定義の違いによって流速等も異なることになる。よく用いられるものとしては、任意の点における水平流速の 1 周期平均値を 0 とする流速の第 1 定義、および断面全体の正味の質量輸送量を 0 とする流速の第 2 定義と呼ばれるものがある。Skjelbreia が導いた解は流速の第 1 定義を用いたものであるが、流速の第 2 定義を用いたストークス波理論第 4 次近似解が、Tsuchiya・Yamaguchi (1972) によって与えられている。また最近については、Schwartz (1974)、Coklet (1977) および Nishimura et al. (1977) は、電子計算機を用いて非常に高次の解を求めている。

孤立波理論は、クノイド波理論において波長が無
限に長くなった極限として得られるが、歴史的に見
ればクノイド波理論よりも古くから、独立に研究さ
れてきた。Keller (1948) によれば、孤立波理論は
Boussinesq (1871, 1872) および Rayleigh (1876, 1883) に
始まり、Goryther (1900) が多少異なる方法で解を求め、
Mc Cowan (1891, 1894) がより正確な形で解を求め、
さらに Weimstein (1926) が波速を求める方法を確立
した。また Long (1956) は第5次近似解を求め、
Grimshaw (1971) が第3次近似解を求めた。Friedrichs・
Hyers (1954) は解の存在を証明している。また、
Fenton (1972) および Longuet-Higgins・Fenton (1974) は電
子計算機を用いてそれぞれ第9次および第14次近似
解を求め、第10次近似解以降の係数の挙動がそれ以
前と異なることを示している。

クノイド波理論は、Urseell (1953) によって示さ
れたように、アーセル数のオーダーが1であると仮定
した場合に得られる現動解である。Korteweg・de Vries

(1895)がKdV方程式を導き、その解が楕円関数を用いて表わされることを示したのに始まり、Keulegan・Patterson (1940)およびIwasa (1955)も同様な式を誘導している。クノイド波理論に見られるような浅海波近似における組織的な式の展開法を確立したのはFriedrichs (1948)であり、Keller (1948)がその第1次近似解を求めた。クノイド波理論の高次近似解の誘導は、Laitone (1960)が波速の第2定義を用いた場合の第2次近似解を計算したこと始于。Chappellear (1962)は波速の第1定義を用いて第3次近似解を求めた。さらに土屋・安田 (1974)は定義なしで波速が定まる解を提案している。しかし、式の展開中、移動座標系におけるベルヌーイの定数を0としていたために波速が決まるのであり、波速の第3定義と云うべきものを用いたことになる。電子計算機を用いてさらに高次の近似解を求めたのは、Nishimura et al. (1977)およびFeinton (1979)である。

ところで、保存波の摂動解を用いる場合、 どの

ような解も保存波の存在限界を越えて適用することとはできない。また、個々の擾動解に着目すれば、いかに高次近似解であっても、級数としての収束範囲を越えて用いることはできない。さらに、実際には有限次数で打ち切った形での擾動解が用いられることが多いが、その場合には厳密解に対する近似解の精度が問題となる。

Yamada・Shiotani (1968) は限界波高状態における波の波峰で、頂角が 120° をなして尖ることを利用し、この条件における解の数値計算を行って、任意の水深に対する保存波の存在限界を示している。孤立波理論における最大波高に関する研究は多く、McCowan (1894)、Packham (1952)、Lemeau (1966)、Byatt-Smith (1970)、Strelkoff (1971)、Fenton (1972)、Longuet-Higgins・Fenton (1974) がそれぞれ最大相対波高の値として、0.78, 1.03, 0.83, 0.86, 0.85, 0.85 および 0.827 を求めている。深海波については Davis (1951) が最大波形勾配の値として 0.1443 を求めている。こ

此に對し、ストークス波理論の高次解を用いて、Schwartz (1974) が得た最大波形勾配の値は 0.1412 である。なお、Laitone (1962) はストークス波理論およびクノイド波理論の低次の解から限界波高を議論している。

ストークス波理論およびクノイド波理論の有限次近似解の精度に関する研究としては、Dean (1968)、工屋・山口 (1969) および堀川・西村 (1976) によるものがある。これらはいずれも近似解を用いた場合の、水面における非線形境界条件に対する残差によって議論を行なっている。

以上のような保存波に関する既成の研究をさらに集約し、残された問題を指摘すれば次のようになる。まず、保存波の存在限界に関しては、Yamada・Shiotani (1968) の研究により明らかである。限界内において実際の計算を行なう際には、擾動解が用いられることになり、ストークス波理論およびクノイド波理論の他に、擬ストークス波理論が考えられている。しかし、これらの他にも擾動解が存在するかどうかと

この問題は未解決のままである。またそれら個々の現動解の限界内における収束範囲に関して、ストークス波理論については Schwartz (1974) が扱っているものの、フノイド波理論については一般的なものが無い。各理論における有限次数の近似解の精度に関しては、残差を問題とした研究があるのみである。しかし、より直接的には近似解を用いて流速等の物理量を計算した場合に含まれる誤差を問題とすべきである。

本章においては、保存波の理論を系統的に展開する中で、上述の残された問題に解答を与える。このため、まず次節においては、保存波に関する独立な2つの無次元パラメータとして相対水深の自乗およびアーセル数をとり、これらを用いた2重級数解を求めると、正則な解が得られることを示す。得られた2重級数を1重級数に還元したものが一般に保存波の現動解と呼ばれるものであるが、その際に和をとる順序のちがいにより、無数の種類の解を考え得る。

それらのうち、相対水深の自乗またはアーセル数に関する級数の和を先にとったものだが、それぞれストークス波理論またはクノイド波理論であることを示す。このことから、ストークス波理論およびクノイド波理論は、同じ次数ならば他のどの解よりも多くの項を含んでいることがわかり、精度の点から考えて、ただ2つの有用な解であることが明らかになる。

2.3 においては、ストークス波理論およびクノイド波理論の適用限界について理論的に考察する。議論に際しては、級数の収束範囲、および有限次近似解の精度の問題の2点に焦点をあてる。前者については、ストークス波理論およびクノイド波理論の解の収束限界が、それぞれ深海域および浅海域において、Yamada・Shiotani(1968)による保存波の存在限界と一致することを示す。後者については、残差と誤差との2通りによって議論し、ストークス波理論およびクノイド波理論の各次数の近似解の適用範囲を明らかにするとともに、両理論を適切に使い分けるための判定

条件を提案する。

なお、本論文においては取り扱わないが、重複波理論においても、同様な議論により、ストークス波的なものとのノイド波的のものとの考えられる。前者については、Tadjbaksh・Keller (1960) および Goda (1967) によってそれぞれ第3次近似解および第4次近似解が得られている。後者については、首藤 (1968) によって第2次近似解が求められている。西村ら (1978) は首藤が省略していた項を含め、厳密に第2次近似解を求めるとともに、重複波理論の解の精度に関する議論を行っている。

2.2 保存波の現動解に関する基礎的考察

2.2.1 基礎方程式

前述のごとく、ここで対象とする波は、一様水深中を變形することなしに伝播する水面波であり、非圧縮性・非粘性流体の非回転運動であると仮定する。

まず、定形進行波であることから、図-2.2.1に示すように波速 C と等しい速度で移動する座標系 (X, Z) を用いれば、運動は定常化される。求めるべき未知関数として、水平および鉛直方向の流速 $U(X, Z)$ および $W(X, Z)$ 、圧力 $P(X, Z)$ 、ならびに底面と基準とした水面変動 $N(X)$ の4つをとれば、基礎方程式および境界条件は次のようになる。

$$U U_x + W U_z = -P_x / \rho \quad (2.2.1)$$

$$U W_x + W W_z = -P_z / \rho - g \quad (2.2.2)$$

$$U_x + W_z = 0 \quad (2.2.3)$$

$$U_z - W_x = 0 \quad (2.2.4)$$

$$W = 0 \quad (Z = 0) \quad (2.2.5)$$

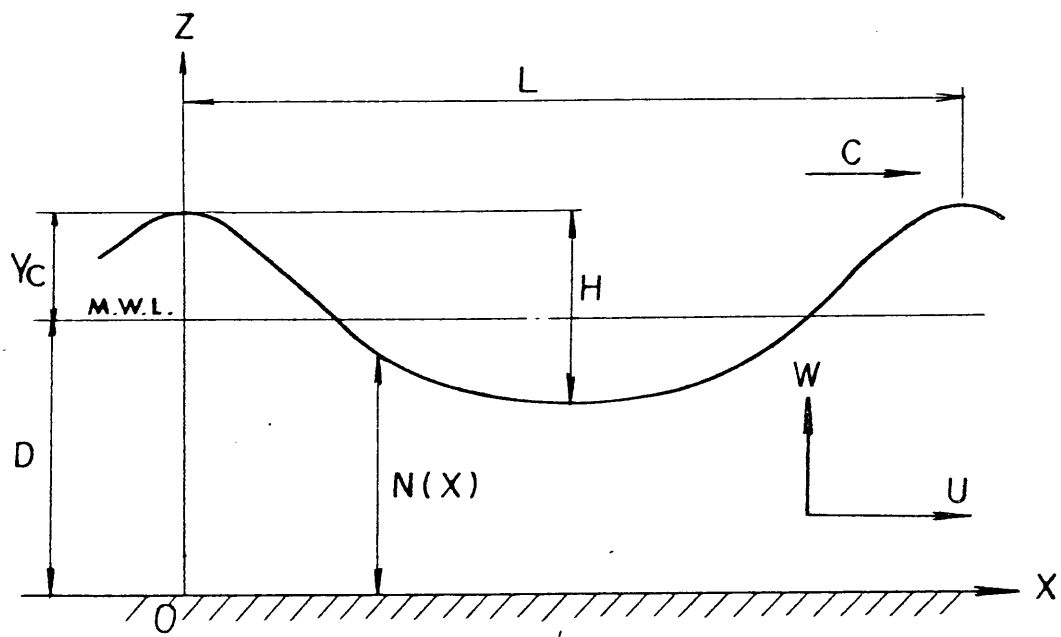


圖-2.2.1 定義圖

$$\rho N_x - W = 0 \quad (Z = N) \quad (2.2.6)$$

$$P = 0 \quad (Z = N) \quad (2.2.7)$$

ここに、 ρ は流体の密度、 g は重力加速度であり、添字はその変数に関する偏微分を表わすものとする。式(2.2.1) および(2.2.2)はオイラーの運動方程式、式(2.2.3)は非圧縮性流体に対する連続式、式(2.2.4)は非回転の条件式である。式(2.2.5)は底面における境界条件、式(2.2.6)および(2.2.7)はそれぞれ水面における運動学的および力学的境界条件を表わしている。なお、水面変動の一波長分の平均値 \bar{N} は平均水深 D に等しいから、

$$\bar{N} = D \quad (2.2.8)$$

なる関係式が成り立つ。また、 X 座標の原点を波峰の断面にとり、保存波が前後対称であることを考慮すれば、波高 H に関して

$$N(0) - N(L/2) = H \quad (2.2.9)$$

なる式が成立する。ここに、 L は波長である。

ここで、非圧縮および非回転の条件式(2.2.3)お

よび (2.2.4) を考慮すれば、それぞれ流函数 Ψ および速度ポテンシャル Φ が存在し、 U および W のかわりにそれらのうちどちらかを用いて基礎方程式および境界条件式を書きなおすことができる。ここでは水面における運動学的境界条件が単純になることから、式 (2.2.10) を満足する流函数 $\Psi(x, z)$ を用い、式 (2.2.1) ~ (2.2.7) と等価な式を導く。

$$U = \Psi_z, \quad W = -\Psi_x \quad (2.2.10)$$

まず、非回転の条件式 (2.2.4) を考慮すれば、式 (2.2.1) および (2.2.2) の積分形としてベルヌーイの方程式 (2.2.11) が得られる。

$$\{(\Psi_x)^2 + (\Psi_z)^2\} / 2 + gZ + P/\rho = P_0/\rho \quad (2.2.11)$$

ここに P_0 はベルヌーイの定数と呼ばれる積分定数である。次に流函数の定義式 (2.2.10) より連続式 (2.2.3) は自動的に満足され、非回転の条件式 (2.2.4) は次式のようになる。

$$\Psi_{xx} + \Psi_{zz} = 0 \quad (2.2.12)$$

運動学的な境界条件に関して、まず曲線 $Z = \zeta(x)$ に沿

った流束関数の値 $\Psi(x, \xi(x))$ の微分が

$$\frac{d}{dx} [\Psi(x, \xi(x))] = \Psi_x + \Psi_z \xi_x = -W + U \xi_x$$

となる。ここで $\xi(x) = 0$ および $N(x)$ とおくと、右側の辺の形状それぞれ式(2.2.5)および(2.2.6)の左辺と同一であるから、これらの積分が可能となり、式(2.2.13)および(2.2.14)を得る。

$$\Psi = Q' \quad (Z=0) \quad (2.2.13)$$

$$\Psi = Q \quad (Z=N) \quad (2.2.14)$$

ここに、 Q' および Q は積分定数であるが、ある点における流束関数の値は任意に設定しても流束の場を変化させることはないので、 $Q' = 0$ とおくことができる。さらに式(2.2.7)は式(2.2.11)を用いることにより、

$$\{(\Psi_z)^2 + (\Psi_x)^2\} / 2 + gN = P_0 / \rho \quad (Z=N) \quad (2.2.15)$$

となる。従って、基礎方程式(2.2.11)および(2.2.12)、ならびに境界条件式(2.2.13)~(2.2.15)を満足するように未知関数 Ψ 、 P および N を求めればよいことになる。ところで、式(2.2.12)~(2.2.15)は圧力 P を

陽に含まないので、まずこれらの式から \bar{u} および N が決定される。次に P を求めるためには、結果を式(2.2.11)に代入すればよい。よって、今後は式(2.2.12)~(2.2.15)を、解くべき1組の方程式群として扱う。

ここでここで相対水深の影響が明らかになるように、 X 方向および Z 方向の基準長さとして、それぞれ波長 L および平均水深 D 、ほらびに基準速さとして \sqrt{gD} を用いて、式(2.2.12)~(2.2.15)の無次元化を行おうと、式(2.2.16)~(2.2.19)のようになる。

$$d^2 \psi_{xx} + \psi_{zz} = 0 \quad (2.2.16)$$

$$\psi = 0 \quad (z=0) \quad (2.2.17)$$

$$\psi = \xi \quad (z=m) \quad (2.2.18)$$

$$\{(\psi_z)_z^2 + d^2 (\psi_x)_x^2\} / 2 + m = p_0 \quad (z=m) \quad (2.2.19)$$

ここに $x = X/L$ 、 $z = Z/D$ 、 $m = N/D$ 、 $\psi = \Psi / (D\sqrt{gD})$ 、 $\xi = Q / (D\sqrt{gD})$ 、 $p_0 = P_0 / \rho g D$ 、および $d = D/L$ である。また式(2.2.8)および(2.2.9)より次式が成立する。

$$\bar{m} = 1 \quad (2.2.20)$$

$$m(0) - m(1/2) = H/D \quad (2.2.21)$$

以上が今後取り扱うべき基礎方程式および境界条件式であるが、ここで解が求められたとして移動座標系から固定座標系へ戻す際の問題点について述べる。それは座標系間の相対速度の問題、言い換えれば波速の定義の問題であり、古くから議論がなされてくる [Stokes (1847)]。すなわち、方程式群 (2.2.16) ~ (2.2.19) より求められる定常流は、この座標系に対して任意の一定な速度で相対運動する座標系によって記述すれば、波動運動になる。このとき波速は相対速度に等しい。実際、ある任意の相対速度 C に対応する固定座標系での水平および鉛直方向流速ならびに水面変動は、固定座標系における水平および鉛直座標を X' , Z 、時間を t とし、それぞれ $U(X'-Ct, Z) + C$, $W(X'-Ct, Z)$ および $N(X'-Ct)$ とすればよく、これらは現象が波速 C で伝播することを表わしている。従って、移動座標系における解は一義的に定まり、とも、固定座標系における解は相対速度の値により無数に存在することになる。Stokes

によって考えられたのは、その中の2種類である。

このうち波速の第1定義と呼ばれるものは、ある固定された点における水平速度の一周期平均値が0となるように固定座標系を決定するものである。つまり、相対速度を移動座標系における定常流水平成分と等しくとることになる。この定義によると、一周期にわたり断面全体に積分した流量、すなわち正味の質量輸送量は0とはならなくなる。これは水面変動の影響で積分区間が変動することによるものである。これに対し、固定座標系における質量輸送量が0となるように相対速度、言い換えば波速を決定する

のが、波速の第2定義である。具体的には式(2.2.14)における右辺の値 Q が移動座標系における全流量であることを利用して、これを平均水深で割った値 Q/D の符号をつけかえたものを波速とすればよい。通常の造波水路においては、正味の質量輸送はないので、この定義が用いられるべきであろう。さらに、土屋・安田(1974)は、従来とは異なり、*simple wave* の

考え方に基づいて波速の決定法を示している。これは固定座標系におけるベルヌーイの定数が、一般には (X', Z, t) の3つを独立変数として表わされるのに対し、 $(X' - Ct, Z)$ の2つによつて表わすことのできるように波速 C を決定する方法である。

以上のように波速の定義に関する議論がなされているが、それらの適否は境界条件に応じて判断されるべきものである。しかし、例えば海波流の計算において、どのような波速の定義を用いようとも、流氷に対する方程式を厳密に解く限りにおいて、波と流氷を加えた全体としての運動は、境界条件に従つて一義的に決定されてしまう。従つて波速の定義の差異は、波動成分と見なす流速成分の定義の差異を生むにすぎない。波速の定義における任意性は、保存波を考える場合に X' 方向に関しては周期性を仮定するのみで、他の境界条件を付加しないことから生ずる。しかし有限領域の問題を考える際には必ず境界条件が与えられるために、流速場が一義的に決定

これらのである。従って本論文の保存波に関する議論においては、波速の定義の影響を受けないように、できる限り移動座標系において議論を進めることとした。そして、固定座標系にも必ず必要がある場合には、物理的な意味の明確な波速の第2定義を用いることとした。

2.2.2 2重級数による解の表示

保存波を表現する際、独立なパラメータは水深 D 、波長 L および波高 H の3つである。従って独立な無次元パラメータは2つであり、たとえば相対水深 $d=D/L$ および相対波高 $\epsilon=H/D$ となる。これから2つのパラメータに対し、式(2.2.16)~(2.2.19)を解たす一般解を求めることはできないため、現動解が求められている。種々の現動解の特徴を明らかにするため、まず次式により定義されるアーセル数 ϵ および相対水深の自乗 δ を用いれば、 $\psi(\alpha, z; \epsilon, \delta)$ および $n(\alpha; \epsilon, \delta)$ に対して2重級数による正則な解が得られることを示す。

$$\epsilon = H/d^2 = HL^2/D^3, \quad \delta = d^2 = (D/L)^2 \quad (2.2.22)$$

最初に流関数 ψ を z のべき級数に展開すれば、その係数は α はらびにパラメータ ϵ および δ の関数である。

$$\psi(\alpha, z; \epsilon, \delta) = \sum_{l=0}^{\infty} \psi_l(\alpha; \epsilon, \delta) z^l \quad (2.2.23)$$

これを式(2.2.16)に代入し、 z の各べきに対する係

数を 0 とおくことにより、

$$\delta \psi_l^{(2)} + (l+2)(l+1) \psi_{l+2} = 0 \quad (2.2.24)$$

を得る。なお変数の右肩についた () 内の数字は、 α に関する微分の階数を表わすものとする。次に式 (2.2.23) を式 (2.2.17) に代入すれば、

$$\psi_0 = 0 \quad (2.2.25)$$

となり、式 (2.2.24) と組合わせることにより、偶数項はすべて 0 となる。また、奇数項に関してほ式 (2.2.24) より、

$$\psi_{2m+1} = (-\delta)^m \psi_1^{(2m)}(\alpha; \varepsilon, \delta) / (2m+1)! \quad (2.2.26)$$

と表わされるから、結局 ψ は ψ_1 を用いて、

$$\psi(\alpha, z; \varepsilon, \delta) = \sum_{m=0}^{\infty} (-\delta)^m z^{2m+1} \psi_1^{(2m)}(\alpha; \varepsilon, \delta) / (2m+1)! \quad (2.2.27)$$

と表示される。

残る式は式 (2.2.18) ~ (2.2.21) であり、これらを満足するように、解 ψ および m を求めればよい。ここで未知関数 $\psi_1(\alpha; \varepsilon, \delta)$ および $m(\alpha; \varepsilon, \delta)$ 、ならびに未知定数 $\delta(\varepsilon, \delta)$ および $\psi_0(\varepsilon, \delta)$ を、 ε および δ に関する 2

重級数に展開する。

$$\psi_1(\alpha; \varepsilon, \delta) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{ij}(\alpha) \varepsilon^i \delta^j \quad (2.2.28)$$

$$m(\alpha; \varepsilon, \delta) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} m_{ij}(\alpha) \varepsilon^i \delta^j \quad (2.2.29)$$

$$g(\varepsilon, \delta) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} g_{ij} \varepsilon^i \delta^j \quad (2.2.30)$$

$$p_0(\varepsilon, \delta) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} \varepsilon^i \delta^j \quad (2.2.31)$$

まず、 ε または δ が他方を有限に保ちながら 0 に近づいた極限を考えると、(1) 可成も波高 α となることから、

$$m_{00} = 1, \quad m_{0j} = 0 \quad (j \geq 1), \quad m_{i0} = 0 \quad (i \geq 1) \quad (2.2.32)$$

である。これを考慮して式 (2.2.28) ~ (2.2.31) を式

(2.2.18) および (2.2.19) に代入し、 ε および δ のべきに整理して各々の係数を比較することにより、一連の微分方程式を得る。式 (2.2.20) および (2.2.21) を考慮して、それらを低次のオーダーより順次解くことにより解が求められる。実際の計算は単純であるが長くなるので、付録 A に示した。ここでは、 ε と δ に関して 5 次のオーダーまでの式を解くことにより完全に得られる、2 次のオーダーまでの解を示

せば、

$$\psi = \sum \left[-1 + \delta(2\pi^2/3) + \delta^2(-38\pi^4/45) + \varepsilon\delta\{(1/2)\cos 2\pi x\} \right] \quad (2.2.33)$$

$$-m = 1 + \varepsilon\delta\{(1/2)\cos 2\pi x\} \quad (2.2.34)$$

のごとくなる。

このような解を求める過程において、原理的には任意のオーダーまで計算を続けることが可能であり、その結果として ε と δ に関して正則な2重級数解が得られることが判明する。

2.2.3 種々の摂動解

(1) 摂動解と2重級数との関係

2重級数による正則な解を模式的に示せば、図-2.2.2のように座標軸を含む第1象限の格子点に対応する項についてすべて加え合せたものになる。これに対し、図中に点線を示すように、ある方向に級数の和をとってしまつたものを新たな未知関数とすれば、それと直交する方向に展開された1重級数とほる。縦、横および斜め45°の方向に加える場合を別にとして式で示せば、次のようになる。

$$m = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \left(\sum_{j=0}^{\infty} \delta^j m_{ij} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i m_{si}, \quad m_{si} = \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j m_{ij} \quad (2.2.35)$$

$$m = \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i m_{ij} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j m_{cj}, \quad m_{cj} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i m_{ij} \quad (2.2.36)$$

$$m = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\sum_{j=0}^k \varepsilon^{-j} \delta^j m_{k-j,j} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k m_{ek},$$

$$m_{ek} = \sum_{j=0}^k (\delta/\varepsilon)^j m_{k-j,j} \quad (2.2.37)$$

4, δ および ρ についても同様に表現すれば、形式的には m_{si} 等、 m_{cj} 等および m_{ek} 等を係数と可する1重級

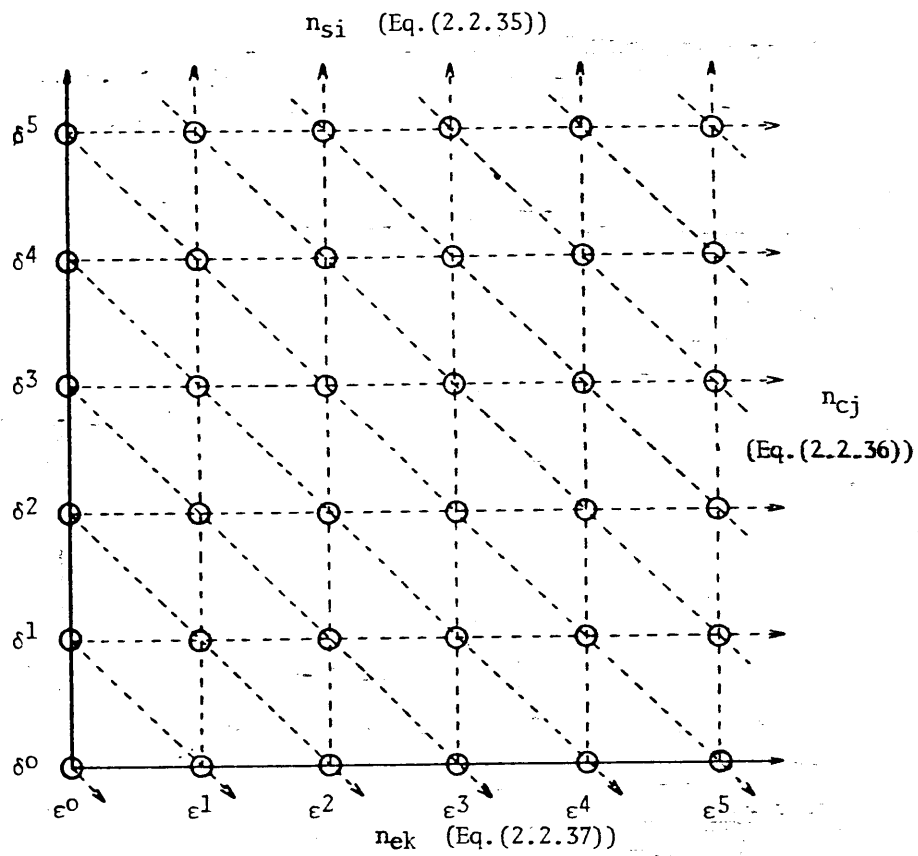


図-2.2.2 保存級の級数解の模式図

数の形に写っている。ここで新たな未知関数および未知定数を求めるために、式(2.2.35)、(2.2.36)あるいは(2.2.37)の右側に示すような定義式を用いるのでは、あらかじめ2重級数による解が得られているわけではなからぬ。実際には、解を(2.2.35)、(2.2.36)あるいは(2.2.37)の左側の式のように展開し、境界条件式(2.2.18)および(2.2.19)に代入することによって、直接 m_{si} 等、 m_{cj} 等あるいは m_{ek} 等を求めることができる。それらが一般に保存波の擾動解あるいは有限振幅波理論と呼ばれるものである。1重級数にするために、はじめにあるパラメータの方向の和をとってしまうという操作が、そのパラメータのオーダーを1とすると従来の説明に対応している。

さて、このように考えてきたことにより、種々の擾動解を有限項で打ち切った場合、それを2重級数に展開したときに含まれる項の数を容易に知ることが出来る。そして、それが厳密解と比較した場合の解の精度の良否に深くかかわると考えられる。具体

的に、まず式(2.2.35)のように展開するストークス波理論について調べてみる。一例として2次近似解を考えれば、図-2.2.2において ε 座標軸を含め縦3列分の帯状の領域の格子点を含むことになる。次に式(2.2.36)のように展開するクノイド波理論については、横3行に広がる帯状の領域の格子点を含む。ところが、式(2.2.37)のような展開をはじめとして、斜めに加えたものを新たに未知関数として1重級数に展開するものについては、有限項で打ち切った場合に三角形領域の格子点を含むにすぎない。そして、この領域は、同じ次数で考えた場合、ストークス波理論あるいはクノイド波理論が含む帯状の領域のどちらにも完全に含まれてしまう。従って、斜めに加えたような摂動解は、次数が同じなら一般に精度が悪いと考えられる。故に、保存波の摂動解のうち、精度から考えて有用なものは、式(2.2.35)および(2.2.36)のように展開するもののみである。模式図-2.2.2を見れば明らかのように、それぞれの解はアーセル数

および相対水深の値が小さい場合に、有限次近似解の精度がよいことが期待される。

ここで、ストークス波理論あるいはフノイド波理論と呼ばれる解の中でも、その表現が互いに若干異なっていることに関して説明を加える。式(2.2.35) ~ (2.2.37) を見れば明らかのように、独立な無次元パラメータを ε_1 および δ_1 とすれば、運動解はすべて次のような形をしている。

$$F = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_1^i F_{1i}(\delta_1) \quad (2.2.38)$$

ここで新たにパラメータ δ_2 および ε_2 を考え、 δ_1 および ε_1 のように、0次および1次から始まる ε_2 の級数で表わされるとする。

$$\delta_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{1i}(\delta_2) \varepsilon_2^i \quad (2.2.39)$$

$$\varepsilon_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{1i}(\delta_2) \varepsilon_2^i \quad (2.2.40)$$

ストークス波理論やフノイド波理論のように、式(2.2.38)の右辺に含まれる F_{1i} が正則関数であれば、式(2.2.39)および(2.2.40)に代入し、 ε_2 について級数展開した形に整理すれば、次のよう

な形に書き直すことができる。

$$F = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_2^i F_{2i}(\delta_2) \quad (2.2.41)$$

式(2.2.41) と式(2.2.38) とを比較すれば、パラメータの定義が若干異なる場合の同一の解に対する表現式であることがわかる。これをストークス波理論においてほめて考える。展開核として水面波形をフーリエ展開した場合の第1項に対応する係数を無次元化したものを用いたのが Skjelbreia・Hendricksom(1960) および Tsuchiya・Yamaguchi(1972) であり、波高を無次元化したものを用いたのが磯部ら(1978) である。なお、アーセル数と波形勾配との関係は、相対水深を δ_1 あるいは δ_2 とするストークス波理論において、式(2.2.40) の関係を満足するから、いずれを展開核とすることもできる。2.2.3(2) においては議論の進行上、一般とは異なってアーセル数を展開核に用いている。またフノイド波理論において、Laitone(1960) は展開核に波高と波谷における水深との比を用い、磯部ら(1978) は波高と平均水深との比を用いている。なお、フノイド

波理論において特に注意すべきことは、補助パラメータ δ_2 あるいは δ_2 に相当するものの選び方である。理論的には α -セル数のオーダーのものであれば任意であるが、計算上の便宜のため、常に楕円関数の母数 α とらわれている。以上のように、展開核あるいは補助パラメータとしては、式(2.2.39) および(2.2.40) を満足する、言い換えればオーダーが等しいものならば任意に選ぶことができるため、同一の波動理論でも解の形が互いに若干異なることになる。いずれの展開形を用いるかは、計算の便宜を考えればよいが、後に述べるように収束範囲・精度はそれぞれ若干異なる。

引き続き、式(2.2.35) および(2.2.36) の形の解がそれぞれストークス波理論およびクノイド波理論に確かに対応していることを示すとともに、その他無数に考えられる現解の一例として、式(2.2.37) の形の解が得られることを示す。

(2) スト - フス 理論

ψ_1 , m , δ および α を式 (2.2.35) の形に展開し、
 2重級数の場合と同様に、式 (2.2.27) を考慮して式
 (2.2.18) および (2.2.19) に代入し、 ε のべきに整理する。
 なお、 $\varepsilon \rightarrow 0$ に近づいた極限においては流れが一様
 流となることから、 $\psi_{s0} = 1$, $\psi_{s0} = \text{const.}$ である。まず
 ε' に対する両辺の係数を比較すれば、

$$\psi_{s0} m_{s1} + \sum_{m=0}^{\infty} (-\delta)^m \psi_{s1}^{(2m)} / (2m+1)! = \delta_{s1} \quad (2.2.42)$$

$$\psi_{s0} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (-\delta)^m \psi_{s1}^{(2m)} / (2m)! + m_{s1} = \psi_{s1} \quad (2.2.43)$$

を得る。この2式より m_{s1} を消去すれば、

$$\begin{aligned} \psi_{s0}^2 \sum_{m=0}^{\infty} (-\delta)^m \psi_{s1}^{(2m)} / (2m)! - \sum_{m=0}^{\infty} (-\delta)^m \psi_{s1}^{(2m)} / (2m+1)! \\ = \psi_{s0} \psi_{s1} - \delta_{s1} \end{aligned} \quad (2.2.44)$$

となる。ここで、 m_{s1} 従って ψ_{s1} は周期を 1 とする周
 期関数であるから、これをフーリエ級数に展開する。

$$\psi_{s1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} [b_{\ell}' \cos 2\ell\pi\alpha + b_{\ell}'' \sin 2\ell\pi\alpha] \quad (2.2.45)$$

これを式 (2.2.44) に代入し、 $\delta = d^2$ を考慮すれば、

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{\infty} (b_{\ell}' \cos 2\ell\pi\alpha + b_{\ell}'' \sin 2\ell\pi\alpha) \\ \times (\psi_{s0}^2 \cosh 2\ell\pi d - \sinh 2\ell\pi d / 2\ell\pi d) = \psi_{s0} \psi_{s1} - \delta_{s1} \end{aligned} \quad (2.2.46)$$

となり、右辺は定数であるから、 $l \geq 1$ であるすべての l - リエ係数は 0 でなければならぬ。従って、

$$b_l' = 0 \quad \text{または} \quad \psi_{l0}^2 = \tanh 2l\pi d / 2l\pi d \quad (2.2.47)$$

$$b_l'' = 0 \quad \text{または} \quad \psi_{l0}^2 = \tanh 2l\pi d / 2l\pi d \quad (2.2.48)$$

となる。右側の式はある一つの l の値に対してのみ成立させることができ、それに対応する b_l' および b_l'' は 0 でなくともよいから、 ψ_{l0}^2 に対する自明でない解が得られる。ここで ψ_{l0}^2 の周期が 1 であることを考慮し、 $l=1$ に対して成り立たせるようにすれば、

$$\psi_{10}^2 = \tanh 2\pi d / 2\pi d \quad (2.2.49)$$

を得る。 ψ_{10} の符号は固定座標系における波の進行方向に関係するのみであるから、ここでは正の方向へ進む波を考え、負の値をとると、

$$\psi_{10} = -\sqrt{\tanh 2\pi d / 2\pi d} = -c_s \quad (2.2.50)$$

となる。ここで x 座標の原点の決め方は任意であるから波峰の断面にとることにすれば $b_1'' = 0$ であり、さらに式 (2.2.21) より $\varepsilon \cdot m_{s1}$ の振幅が $f/2 = \varepsilon \cdot d/2$ となることから、

$$b'_1 = d^2 / 2c_s \cosh 2\pi d \quad (2.2.51)$$

とするとよい。また式(2.2.43)を用いて m_{s1} を求めたとき、式(2.2.20)より $\bar{m}_{s1} = 0$ と仮定することから、

$$b'_0 = -p_{s1} / c_s$$

なる関係式が得られ、結局1次のオ-ダ-の解は、

$$\psi_{s1} = -p_{s1} / c_s + (d^2 / 2c_s \cosh 2\pi d) \cos 2\pi x \quad (2.2.52)$$

$$m_{s1} = (d^2 / 2) \cos 2\pi x \quad (2.2.53)$$

となる。 p_{s1} の値は2次のオ-ダ-の計算から0と仮定することがわかる。従って式(2.2.35)および(2.2.27)

により、第1次近似解は次のように表現される。

$$\psi = -c_s z + c_s \frac{\epsilon d^2}{2} \frac{\sinh 2\pi dz}{\sinh 2\pi d} \cos 2\pi x \quad (2.2.54)$$

$$m = 1 + \frac{\epsilon d^2}{2} \cos 2\pi x \quad (2.2.55)$$

これはよく知られた微小振幅波理論の解、すなわちスト-ークス波理論の第1次近似解である。よって式(2.2.35)の展開がスト-ークス波理論に対応することを示された。

ところで、同様な計算を続けることにより、高次

のオーダーの解を求めることが原理的には可能であるが、実際には計算が非常に煩雑になる。高次近似解を求めるとは、解の形を予想し、その係数を求めるという方法を用いる方が手数が少なくて済む。このようにしてストークス波理論の第5次近似解を求め、波速の第2定義を用いて固定座標系における波形および流速を表示したものが、磯部ら(1978)によって報告されている。ただし、記号の意味が本論文におけるものと若干異なること、および U/C_0 の表現中で、 B_0 の前に符号 $-$ が抜けていることに注意する必要がある。

(3) クノイド波理論

ψ 、 m 、 δ および ρ を式 (2.2.36) の形に展開し、ストークス波理論の場合と同様に、式 (2.2.27) および $m_{co} = 1$ 、 $\psi_{co} = \text{const.}$ を考慮して、式 (2.2.18) および (2.2.19) に代入し、 δ について整理する。この時、ストークス波理論の場合と異なるのは、式 (2.2.27) の級数の表現に $(-\delta)^m$ が含まれているために、 m が増すとオーダーが上がることである。このため有限次のオーダーの係数を比較した式は、有限項で表現される。

まず、式 (2.2.18) および (2.2.19) において、 δ の係数を比較すれば、

$$\psi_{co} m_{c1} + \psi_{c1} = \rho_{c1} \quad (2.2.56)$$

$$\psi_{co} \psi_{c1} + m_{c1} = \rho_{c1} \quad (2.2.57)$$

となり、自明でない解が存在するための条件として、 $\psi_{co}^2 = 1$ を得るが、ストークス波理論の場合と同様、固定座標系において正の方向に進行する波を考えると、

$$\psi_{co} = -1 \quad (2.2.58)$$

と可る。このとき、式(2.2.57)より、

$$\psi_{c1} = m_{c1} - p_{c1} \quad (2.2.59)$$

を得る。

ψ_{c1} および m_{c1} の関数形および p_{c1} の値を定めるためには、2次のオ-ダーの計算が必要である。式(2.2.18)および(2.2.19)において、 δ^2 の係数を比較した結果の式は次のようになる。

$$\psi_{c2} + \psi_{c0} m_{c2} + \psi_{c1} m_{c1} - \psi_{c1}^{(2)}/6 = g_{c2} \quad (2.2.60)$$

$$\psi_{c0} \psi_{c2} + m_{c2} + \psi_{c1}^2/2 - \psi_{c0} \psi_{c1}^{(2)}/2 = p_{c2} \quad (2.2.61)$$

式(2.2.58) および(2.2.59)を考慮し、上の2式を加えることにより、 m_{c1} に関する2階の常微分方程式を得る。

$$m_{c1}^{(2)} + (9/2) m_{c1}^2 - 6 p_{c1} m_{c1} = 3(p_{c2} + g_{c2} - p_{c1}^2/2) \quad (2.2.62)$$

上式の一般解はヤコビの楕円関数 cn を用いて表わされる。

$$m_{c1} = c_0' + c_1' cn^2 [2K(x - c_2'), \kappa] \quad (2.2.63)$$

ここに、 κ は母数、 K は第1種の完全楕円積分であ

リ、式(2.2.62)に代入すれば、

$$c_0' = -(4/9)(2K^2-1)(2K)^2 + (2/3)pc_1 \quad (2.2.64)$$

$$c_1' = (4/3)K^2(2K)^2 \quad (2.2.65)$$

を得る。なお、 x 座標の原点を波峰の断面にとることから、 $c_2' = 0$ としてよい。ところで、式(2.2.20)および(2.2.21)の両辺を ε のべき級数に展開すれば、

$$\sum_{j=0}^{\infty} \bar{m}_{cj} \delta^j = 1 \quad (2.2.66)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \{m_{cj}(0) - m_{cj}(1/2)\} \delta^j = \varepsilon \cdot \delta \quad (2.2.67)$$

であるから、両辺の係数を比較することにより、

$$\bar{m}_{c0} = 1, \quad \bar{m}_{cj} = 0 \quad (j \geq 1) \quad (2.2.68)$$

$$m_{c1}(0) - m_{c1}(1/2) = \varepsilon, \quad m_{cj}(0) - m_{cj}(1/2) = 0 \quad (j \geq 2) \quad (2.2.69)$$

となる。今、 m_{c1} は式(2.2.63)のように表わされているから、

$$c_0' + c_1' \bar{cm}^2 = 0 \quad (2.2.70)$$

$$c_1' = \varepsilon \quad (2.2.71)$$

となり、式(2.2.65)と式(2.2.71)とを等置することにより、母数 K を決定するための式(2.2.72)が得ら

れる。

$$\varepsilon = (4/3) \kappa^2 (2K)^2 \quad (2.2.72)$$

また、第2種の完全楕円積分を E として、

$$\overline{cm^2} = \int_0^1 cm^2(2Kx, \kappa) dx = E/\kappa^2 K - (1-\kappa^2)/\kappa^2 \equiv \Delta \quad (2.2.73)$$

とおけば、

$$c_0' = -\varepsilon \Delta \quad (2.2.74)$$

を得る。これを式(2.2.64)に代入して ψ_{c1} を求めれば、式(2.2.59)より ψ_{c1} の表示式を得る。

このようにして求められた ψ_{c0} , ψ_{c1} および m_{c1} を用いれば、第1次近似解は次のように表示される。

$$m = 1 + \delta \{ \varepsilon cm^2(2Kx, \kappa) - \varepsilon \Delta \} \quad (2.2.75)$$

$$\psi = \varepsilon [-1 + \delta \{ \varepsilon cm^2(2Kx, \kappa) + \varepsilon \Delta / 2 - \varepsilon(2\kappa^2 - 1)/(2\kappa^2) \}] \quad (2.2.76)$$

なお、母数 κ はア-セル数 ε の値より式(2.2.72)を用いて計算すればよい。

以上により求められた解はクノイド波理論の第1次近似解である。高次近似解を計算する場合には、

ストークス波理論の場合と同様、解の形を予想してその係数を求める方法が簡便である。この方法により、第3次近似解まで求めた結果を、波速の第2定義を用いて固定座標系における表示に換出したものが、磯部ら(1978)によって報告されている。なお、(1)で述べた摂動核および補助パラメータの選択におけるある程度の任意性に基づき、表示式の便宜を考えて、それらに相対波高および楕円関数の母数をとってある。

(4) その他の擾動解

既に (1) で述べたように、ストークス波理論およびクノイド波理論の他にも、無数の擾動解が考えられる。ここではその一例として、式 (2.2.37) のように展開した場合の擾動解を導く。なお、この展開では (2.2.37) の右側の式からわかるように、相対波高のオーダーが相対水深の 4 乗のオーダーに等しいと仮定したことにより、土屋・安田 (1978) による擬ストークス波理論と同等である。

2 重級数を用いた解において、 $m_{10} = m_{01} = 0$ であるという結果を式 (2.2.37) の右側に代入してもわかる通り、 m_{e1} は結局 0 となる。同様に ψ_{e0} および ψ_{e1} は定数である。式の煩雑さを避けるため、ここではあらかじめこれらのことを考慮して第 2 次近似解を誘導する。

仮定から 1 のオーダーとなる $\delta/\varepsilon = D^5/HL^4$ を γ とおく。また式 (2.2.18) の左辺は、

$$\begin{aligned}\psi|_{z=m} &= m\psi_1 - \varepsilon\gamma m^3\psi_1^{(2)}/6 + \dots \\ &= (1 + \varepsilon^2 m_{e2} + \varepsilon^3 m_{e3} + \dots)(\psi_{e0} + \varepsilon\psi_{e1} + \varepsilon^2\psi_{e2} + \varepsilon^3\psi_{e3} + \dots)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (\varepsilon\gamma/6) (1 + \dots) (\varepsilon^2 \psi_{e2}^{(2)} + \dots) \\
& = \psi_{e0} + \varepsilon \psi_{e1} + \varepsilon^2 (\psi_{e2} + m_{e2} \psi_{e0}) \\
& \quad + \varepsilon^3 (\psi_{e3} + m_{e2} \psi_{e1} + m_{e3} \psi_{e0} - \gamma \psi_{e2}^{(2)}/6) + \dots
\end{aligned} \tag{2.2.77}$$

である。両辺の係数を比較して得られる式のうち、0次および1次のオーダーに対するものは、 ψ_{e0} および ψ_{e1} を決定するための式に与えるのみなので、ここでは省略する。2次および3次のオーダーからは、

$$\psi_{e2} + \psi_{e0} m_{e2} = \psi_{e2} \tag{2.2.78}$$

$$\psi_{e3} + \psi_{e0} m_{e3} - \gamma \psi_{e2}^{(2)}/6 + \psi_{e1} m_{e2} = \psi_{e3} \tag{2.2.79}$$

が得られる。

式(2.2.19)に関して、 $\psi_{\alpha}|_{z=m}$ の最低のオーダーは2次であるから、 $d^2(\psi_{\alpha}|_{z=m})^2$ のオーダーは5次であり、ここでは省略し得る。その他の項を順次計算すれば、

$$\begin{aligned}
\psi_{\alpha}|_{z=m} & = \psi_{\alpha} - \varepsilon\gamma m^2 f^{(2)}/2 + \dots \\
& = (\psi_{e0} + \varepsilon \psi_{e1} + \varepsilon^2 \psi_{e2} + \varepsilon^3 \psi_{e3} + \dots) \\
& \quad - (\varepsilon\gamma/2) (1 + \dots) (\varepsilon^2 \psi_{e2}^{(2)} + \dots) + \dots
\end{aligned}$$

$$= \psi_{e0} + \varepsilon \psi_{e1} + \varepsilon^2 \psi_{e2} + \varepsilon^3 (\psi_{e3} - \gamma \psi_{e2}^{(2)}/2) + \dots \quad (2.2.80)$$

であるから、

$$\begin{aligned} & (\psi_e^2 |_{z=m})^2 / 2 + m \\ &= (\psi_{e0}^2 + 1) + \varepsilon (\psi_{e0} \psi_{e1}) + \varepsilon^2 (\psi_{e0} \psi_{e2} + \psi_{e1}^2 / 2 + m \varepsilon z) \\ &+ \varepsilon^3 (\psi_{e0} \psi_{e3} - \gamma \psi_{e0} \psi_{e2}^{(2)} / 2 + \psi_{e1} \psi_{e2} + m \varepsilon z) + \dots \end{aligned} \quad (2.2.81)$$

となり、2次および3次のオーダーの係数を比較した式は次のようになる。

$$m \varepsilon z + \psi_{e0} \psi_{e2} + \psi_{e1}^2 / 2 = \psi_{e2} \quad (2.2.82)$$

$$m \varepsilon z + \psi_{e0} \psi_{e3} - \gamma \psi_{e0} \psi_{e2}^{(2)} / 2 + \psi_{e1} \psi_{e2} = \psi_{e3} \quad (2.2.83)$$

式(2.2.78)および(2.2.82)より、 ψ_{e2} および $m \varepsilon z$ について自明でない解を得るための条件式、およびその時の ψ_{e2} と $m \varepsilon z$ との関係式として次式を得る。

$$\psi_{e0} = -1 \quad (2.2.84)$$

$$\psi_{e2} = m \varepsilon z + \delta \varepsilon z \quad (2.2.85)$$

なお、前と同様、正の方向に進行する波を考えると、 ψ_{e0} の符号は負とした。式(2.2.79)および(2.2.83)を加え、式(2.2.84)および(2.2.85)を考慮して整理す

れば、次式のようになる。

$$m_{e2}^{(2)} + 6 \psi_{e1} m_{e2} / \gamma = (\varepsilon / \gamma) (\rho_{e3} + \rho_{e3} - \psi_{e1} \rho_{e2}) \quad (2.2.86)$$

m_{e2} は周期関数でその周期は1、かつ式(2.2.20)および(2.2.21)より振幅が $\gamma/2$ で平均値は0であるから、 x 座標の原点を波峰の断面にとれば、式(2.2.86)を満たす解として、

$$m_{e2} = (\gamma/2) \cos 2\pi x \quad (2.2.87)$$

となり、逆にこれを式(2.2.86)に代入すれば、

$$\psi_{e1} = 2\pi^2 \gamma / 3 \quad (2.2.88)$$

なる関係式を得る。 ψ_{e2} は式(2.2.85)を用いて計算されるが、右辺に含まれる ρ_{e2} は4次のオ-ダ-の計算を通じて初めて $-38\pi^4 \gamma^2 / 45$ となることわかれる。

以上をまとめて第2次近似解を示せば次のようになる。

$$m = 1 + \varepsilon^2 (\gamma/2) \cos 2\pi x \quad (2.2.89)$$

$$\psi = \varepsilon \left[-1 + \varepsilon (2\pi^2 \gamma / 3) + \varepsilon^2 \left\{ -38\pi^4 \gamma^2 / 45 + (\gamma/2) \cos 2\pi x \right\} \right] \quad (2.2.90)$$

これで基礎方程式および境界条件より、解が直接導

かかれることが示された。しかし、模式図-2.2.2を見れば明らかのように、結果としては2重級数による解である式(2.2.33)および(2.2.34)と同等であり、単に項をまとめたにすぎない。さらにストークス波理論の解を相対水深について級数展開し、 $\gamma = D^5/HL^4$ のオーダーを1として整理すればおしても同じ結果を得る。

なお、計算過程は省略するが、第4次近似解まで求めた結果を次に示しておく。ただし、計算上の便宜から、擾動核とおよび補助パラメータ γ の定義を若干変え、波高Hのかわりに水面波形をフーリエ展開した場合の第1項の係数 A_1 の2倍を用いて、

$$\varepsilon = 2AL^2/D^3, \quad \gamma = D^5/2A_1L^4 \quad (2.2.91)$$

としてある。

$$\eta = 1 + \varepsilon^2 (\gamma/2) \cos 2\pi x + \left\{ \varepsilon^3 (3\gamma/4\pi^2) + \varepsilon^4 (\gamma^2/8) \right\} \cos 4\pi x \\ + (27\gamma/8192\pi^4) \cos 6\pi x \quad (2.2.92)$$

$$\psi = z \left\{ -1 + \varepsilon (2\pi^2\gamma/3) + \varepsilon^2 (-38\pi^4\gamma/45) \right. \\ \left. + \varepsilon^3 (220\pi^6\gamma^2/187 - 7\gamma/25\pi^2) + \varepsilon^4 (23626\pi^8\gamma^4/14175 - \gamma^2/128) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \varepsilon^2 (\gamma/2) + \varepsilon^3 (-2\pi^2 \gamma^2/3) + \varepsilon^4 (4\pi^4 \gamma^3/5) \right\} \cos 2\pi x \\
& + \left\{ \varepsilon^3 (\gamma/64\pi^2) + \varepsilon^4 (-5\gamma^2/32) \right\} \cos 4\pi x \\
& + \left\{ \varepsilon^4 (27\gamma/8192\pi^4) \right\} \cos 6\pi x \quad] \\
& + \varepsilon^3 \left[\left\{ \varepsilon^3 (\pi^2 \gamma^2/3) + \varepsilon^4 (-4\pi^4 \gamma^3/9) \right\} \cos 2\pi x \right. \\
& \quad \left. + \left\{ \varepsilon^4 (\gamma^2/24) \right\} \cos 4\pi x \quad] \right. \\
& + \varepsilon^5 \left[\left\{ \varepsilon^4 (\pi^4 \gamma^3/15) \right\} \cos 2\pi x \quad \right] \quad (2.2.93)
\end{aligned}$$

従来、摂動解を導く際には、2つの独立なパラメータのオーダー関係を仮定することから始められていた。しかし、本節においては2重級数を1重級数に還元するという立場から、各種の摂動解を系統的に説明した。これにより、精度の面から見て有用であると考えらるゝのは、ストックス波理論およびクノイド波理論の2つである。次節においては、これら2種の波動理論を中心に、有限振幅波理論の適用範囲に関して、堀川ら(1977)に沿って議論を行なう。

2.3 有限振幅波理論の適用範囲

2.3.1 ストーフス波理論の高次解および収束範囲

(1) 高次解の計算法

前節の議論により、相対的に精度が高いと考えられるストーフス波理論およびクノイド波理論の有限次近似解の適用範囲を明らかにするために、まず、厳密解と比べてさしつかえのないような高次解を計算する。途中の計算は非常に煩雑であり、その詳細は Nishimura et al. (1977) に記述してある。ここではその原理を述べるにとどめ、結果を用いて収束範囲および精度の議論を行なうことに重点を置く。

手計算によって求められたストーフス波理論の解より、その高次解が次のような形式に書けることは明らかである。

$$\psi = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{i+2j} b_{ij} \frac{\sinh 2i\pi d z}{\sinh 2i\pi d} \cos 2i\pi x - \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{2j} b_{0j} z \quad (2.3.1)$$

$$\eta = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{i+j} a_{ij} \cos 2i\pi x \quad (2.3.2)$$

上式は係数 a_{ij} および b_{ij} の値に無関係に式(2.2.16)および(2.2.17)を満足するから、残る水面における境界条件式(2.2.18)および(2.2.19)を満足するように係数を決定すればよい。そのために、まず式(2.3.1)および(2.3.2)を式(2.2.18)および(2.2.19)に代入し、 ε のべき指数と各調和成分について整理する。ここで両辺の係数を比較して得られる連立方程式を、次数の低いものに対応する式から順に解けば、任意の次数までの解を求めることができる。結果を具体的に計算する際には、計算の便宜のため波数と微小振幅波理論を用いた場合の波速とを用いて無次元化し、水面波形のフーリエ第1成分の係数 a_1 を規格核として、電卓計算機を用い第51次近似解を求めた。

(2) 深海波の限界波高

得られた結果から収束限界を求める方法について述べる。

従属変数、たとえば波形勾配は、摂動核とに関する級数として次のように表わされる。

$$H/L = \sum_{i=0}^{\infty} h_{2i+1} \varepsilon^{2i+1} \quad (2.3.3)$$

ここに h_{2i+1} は係数であり、偶数項が 0 であることを考慮した形に写っている。このとき、級数に関する定理より、収束半径 ε_{\max} は

$$1/\varepsilon_{\max}^2 = \lim_{i \rightarrow \infty} |h_{2i+1}/h_{2i-1}| \quad (2.3.4)$$

と表わされる。この値を求めるために、Domb-Sykes (1957) と同様、 $1/\varepsilon_i^2$ と $|h_{2i+1}/h_{2i-1}|$ との関係を図示し、 $1/\varepsilon_m = 0$ における値を外挿して求める。図-2.3.1 は深海条件における例である。外挿に際して、最後の 4、8、12 および 16 点を直線又は放物線で近似した場合の結果が、表-2.3.1 に示されているが、いずれも相関係数は高く、有意な差異を生じてはいない。そこで外挿の方法は 4 点を用いた直線近似に固定し、

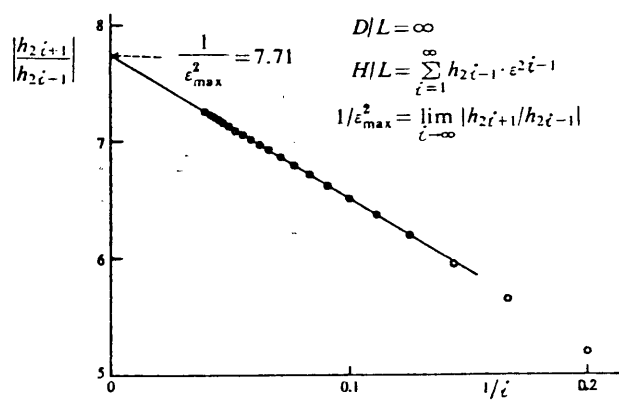


図-2.3.1 収束限界の推定法

表-2.3.1 収束限界の外挿値

用いた点数		4	8	12	16
直線	$1/\epsilon_{max}^2$	7.708	7.705	7.702	7.695
	R	1.000	1.000	1.000	1.000
放物線	$1/\epsilon_{max}^2$	7.717	7.717	7.717	7.717
	R	1.000	1.000	1.000	1.000

ϵ_{max} : 収束半径 R: 相関係数

表-2.3.2 諸量に対する収束限界

	m_c (奇数項)	m_c (偶数項)	u_c (奇数項)	u_c (偶数項)	δ
$1/\epsilon_{max}^2$	7.708	7.722	7.711	7.718	7.742
R	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

ϵ_{max} : 収束半径 R: 相関係数
 m_c : 波峯水位 u_c : 波速の第2定義を用いた場合の波峯流速
 δ : 断面流量

対象とする係数をかえた結果が表-2.3.2 である。表中、 m_c は波峰水位、 u_c は波速の第2定義を用いた場合の波峰流速、 δ は断面流速を表わし、前二者については、奇数項及び偶数項とも係数が0でないため、両方を用いて計算を行なった。結果は必ずしも有意な差が認められなかった。従って深海条件における収束限界は $1/E_{max}^2 = 7.71$ すなわち $E_{max} = 0.360$ であると考えた。このとき、第51次近似解を用いて計算した波形勾配の値は 0.131 である。

ところで Yamada・Shiotani (1968) が求めた限界波形勾配の値は、深海条件において 0.141 であり、上で求められた値よりも大きい。一般にある関数を級数に展開した場合、その収束半径は複素平面内において最も近い特異点によって決定されてしまう。従って限界波高に対応する点よりも原点に近い場所に特異点があれば、収束限界と限界波高とは一致しないことになる。ところで、摂動核 ϵ は波形勾配と同じオーダーであれば任意であり、適当なものを選ば

最も近い特異点が限界波高に対応する可能性がある。

ある擾動核 ε から他の擾動核 ε' への変換は、 ε を ε' の級数として表現した式

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varepsilon'^i \quad (2.3.5)$$

を、解に代入し、 ε' について整理することにより、容易に行なうことができる。表-2.3.3 は擾動核を波形勾配 H/L 、および断面流量の二次以降のオーダーの部分の平方根 $\sqrt{\delta - \delta_0}$ に変換した場合の収束半径とそれに対応する波形勾配とを、上記のフーリエ第1成分の係数 α_1 の場合とで比較したものである。収束限界における波形勾配の値を比較すれば、擾動核を波形勾配にとった場合が最も大きく、その値は Yamada-Shiotani の結果とよく一致している。従って、この場合には、級数の収束限界が保存波の存在限界と一致すると言える。

波形勾配を擾動核とした展開が、最も広い範囲で収束することを利用して、この展開により H/L から α_1 を計算した結果を図示したものが、図-2.3.2 であ

表-2.3.3 種々の擾動核に対応する収束限界

ε	a_1	H/L	$\sqrt{8-80}$
ε_{max}	0.360	0.142	0.305
$(H/L)_{max}$	0.134	0.142	0.138

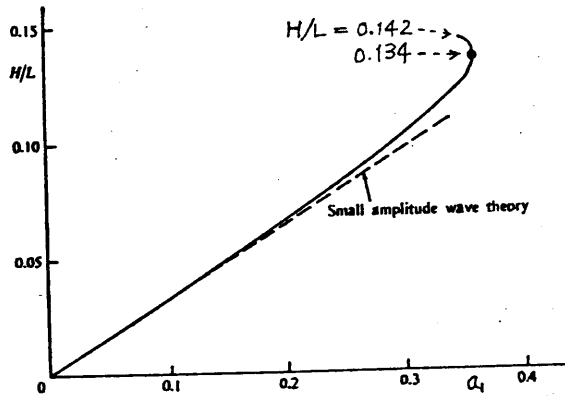


図-2.3.2 投形勾配とフーリエ第1成分との関係

る。図中。印の点で α_1 は最大となり、てける。従って α_1 を独立変数とした場合にはこの点を分岐点として、それより若干小さな α_1 の値に対しては H/L が 2 価関数となる。よって原点のまわりの級数解を考えると、この分岐点が収束半径を決定してしまふ。それ故、擾動核に α_1 を用いた展開では収束限界における波高が、保存波の限界波高よりも小さいのである。

(3) 任意の水深における限界波高

擾動核の定義によつて収束限界が異なるという現象は、深海の場合のみならず有限水深の場合にも見られる。図-2.3.3には擾動核として波形勾配 H/L 、および水面波形のフーリエ第1成分の係数 a_1 を用いた場合の収束限界が、相対水深-相対波高平面内に示されている。なお、図中において破線は Yamada・Shiotani (1968) によつて計算された保存波の存在限界を示す。相対水深の値が 0.15 以上の範囲では擾動核を波形勾配 H/L とした場合の収束範囲に一致する。いすいの展開によつても、相対水深が 0.1 以下になると収束範囲が急激に縮小する。表-2.3.4は浅海条件における係数の値の一例として、相対水深 D/L の値が 0.01 で擾動核を波形勾配にとつた場合について、無次元流量 q に対するものを示したものである。係数の絶対値は等比級数的に大きくなるが、その符号は1項ごとに変化している。今、 $\varepsilon^2 = -\varepsilon_0^2$ に確定特異点をもつその関数 $1/(\varepsilon_1^2 \varepsilon_0^2)$ をべき級数に展開すれば

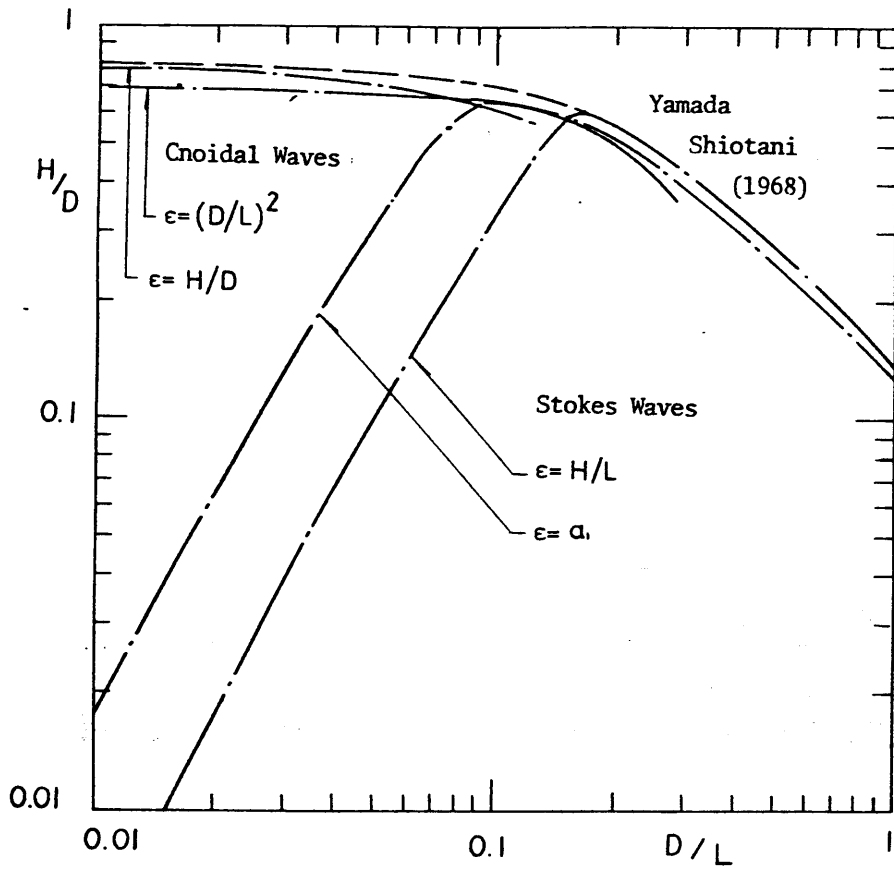


図-2.3.3 ストークス波理論およびフイド波理論の収束限界

表-2.3.4 無次元流量 q に対する係数の値 ($D/L=0.01$)

i	q_i	i	q_i	i	q_i
0	0.100×10^1	18	0.388×10^{47}	36	-0.451×10^{98}
2	0.955×10^3	20	-0.175×10^{53}	38	0.221×10^{104}
4	-0.407×10^8	22	0.802×10^{58}	40	-0.109×10^{110}
6	0.104×10^{14}	24	-0.373×10^{64}	42	0.536×10^{115}
8	-0.338×10^{19}	26	0.175×10^{70}	44	-0.266×10^{121}
10	0.124×10^{25}	28	-0.831×10^{75}	46	0.132×10^{127}
12	-0.492×10^{30}	30	0.397×10^{81}	48	-0.658×10^{132}
14	0.204×10^{36}	32	-0.191×10^{87}	50	0.329×10^{138}
16	-0.879×10^{41}	34	0.927×10^{92}		

ば、

$$1/(\varepsilon^2 \varepsilon_0^2) = (1/\varepsilon_0^2) [1 - (\varepsilon/\varepsilon_0)^2 + (\varepsilon/\varepsilon_0)^4 - (\varepsilon/\varepsilon_0)^6 + \dots] \quad (2.3.6)$$

となる。浅海における係数の挙動はこれと同じく、
符号が交代することから、 ε^2 の値が負、すなわち
の値が純虚数であるような場所に特異点があると考
えられる。従って、このような場合には波高が大と
なる点、すなわち ε^2 の値が正となるような点で収束
範囲が決定されているわけではない。

2.3.2 クノイド波理論の高次解および収束範囲

(1) 高次解の計算法

クノイド波理論の解は次のような形で表わされる。

$$\psi = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(-d^2)^m}{(2m+1)!} z^{2m+1} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} \varepsilon^j b_{ij} \{cn^{2i}(2Kx, \kappa)\}^{(2m)} \right]$$

(2.3.7)

$$\eta = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} \varepsilon^j a_{ij} cn^{2i}(2Kx, \kappa) \quad (2.3.8)$$

ストークス波理論の場合と同様、上式は式(2.2.16)

および(2.2.17)を自動的に満足するから、残る式

(2.2.18) および(2.2.19)を満足するように係数 a_{ij}

および b_{ij} を決定すればよい。計算の詳細は Nishimura

et al. (1977) に譲るが、擾動核 ε として $\alpha^2 = (2KD/L)^2$

を用い、第24次近似解までの計算を行なった。なお、

ここでも相対波高等他の擾動核への変換は、もとの

擾動核に対し式(2.3.5)のような形の式を代入する

ことにより、容易に行なうことができるとする。

(2) 孤立波の限界波高

孤立波理論の高次近似解については、既に Longuet-Higgins (1974) によって計算され、第9次を越えると係数の変化が不規則になることが指摘されている。しかし、第15次を越えて高次まで計算を進めると、再び係数の変化は規則的になるが、連続する2つの係数の比の絶対値 $|y_{i-1}/y_i|$ は非常に小さい。従って収束半径 ε_{\max} は非常に小さくなる。しかし、ここでも係数の符号が交互に変化していることから、収束半径を決めているのは負の領域にある特異点であることがわかる。そこで、物理的に意味のある正の領域の特異点を見つけるため、次のように ε から ε' への座標核の変換を行った。

$$\varepsilon' = \varepsilon / (1 + \varepsilon/\varepsilon_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon (-\varepsilon/\varepsilon_0)^{i-1} \quad (2.3.9)$$

図-2.3.4 に示すように、この変換は座標軸の負の部分を引き延ばし、正の部分を縮めるものであり、正の特異点が原点に近づくことになる。図-2.3.5 は、座標核 ε を相対波高とし、波峰流速 u_c' に対する級数

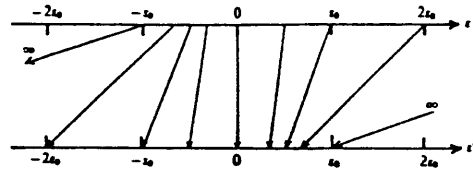


図-2.3.4 擾動核の相互対消図

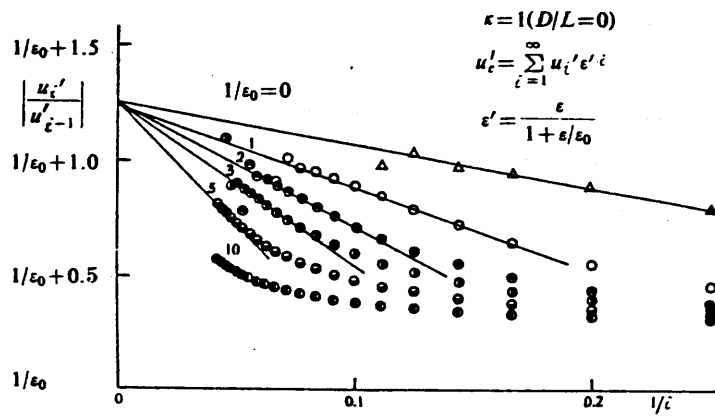


図-2.3.5 正領域の特異点の推定法

について、 ε_0 の値を1, $1/2$, $1/3$, $1/5$ および $1/10$ とした
 場合の、 ε' に対する係数の比 $|u_i'/u_{i-1}'|$ を図示したも
 のである。図中において、 Δ 印は変換前の係数比を
 表わすが、第9次を越えたと図中におさまらないう
 ど大きな値となる。この図より、適当な ε_0 の値につ
 いて ε' に関する収束半径を求めれば、式(2.3.9)より

$$1/\varepsilon = 1/\varepsilon' - 1/\varepsilon_0 \quad (2.3.10)$$

であるから、正の側の特異点の位置を決定すること
 ができるとことになる。この結果、限界相対波高の値
 として0.8を得たが、これはYamada・Shiotani(1968)
 の計算結果とほぼ一致する。なお、図-2.3.5の Δ 印
 を見ればわかる通り、第9次以下の係数を用いて収束
 限界を推定すると同様な結果が得られる。これは、
 たとえば $\beta \ll 1$, $\varepsilon_{01} < \varepsilon_{02}$ としたときに、 ε の関数
 $\beta/(\varepsilon_{01} + \varepsilon) + 1/(\varepsilon_{02} - \varepsilon)$ をべき級数に展開した場合の
 係数が、はじめのうちだけ $\varepsilon = \varepsilon_{02}$ に特異点があるよ
 うな挙動を示すのに対応していると考えられる。従
 って、 ε の値が正であれば負の特異点からの寄与は

無視することができるから、正の特異点による影響のみが有効に現れ出ている第9次以下の近似解を用いれば、精度のよい計算を行なうことが可能である。

(3) 任意の水深における限界波高

前出の図-2.3.3には、楕円関数の母数 k の値を変化させた場合に、同様な方法によって定められる限界相対波高に対する曲線が、相対水深の自乗および相対波高を現軸核とした場合について示されている。なお、ストークス波理論の場合と異なり、曲線は正の特異点に対応する限界を表わしているのであって、級数としての収束限界はこれよりずっと下方になる。従って、限界曲線を描くために必要となる相対水深または相対波高を精度よく計算するために、次に示す Padé 近似 [Baker(1965)] において、 $i=6, j=15$ としたものをを用いた。

$$[i, j] = \frac{\begin{vmatrix} y_{j-i+1}, & \dots & y_{j+1} \\ y_{j-i+2}, & \dots & y_{j+2} \\ \vdots & & \vdots \\ y_j, & \dots & y_{j+i} \\ \varepsilon^i S_{j-i}, & \dots & S_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{j-i+1}, & \dots & y_{j+1} \\ y_{j-i+2}, & \dots & y_{j+2} \\ \vdots & & \vdots \\ y_j, & \dots & y_{j+i} \\ \varepsilon^i, & \dots & 1 \end{vmatrix}} \quad (2.3.11)$$

ここに、 y_i は ε に関するべき級数の係数であり、 S_i はその第 i 次までの和を表わす。図中で、相対水深の大きな領域に曲線を描いておいたのは、第 24 次近似の範囲では正の特異点が求められなかったためである。しかし、この領域においてはストークス波理論による解の収束性が良好であるので、特に実用上の問題はない。

2.3.3 有限振幅波理論の解の精度

(1) 精度の評価方法

前節までで取り扱ったように、非常に次数の高い近似解ならば、適用限界は収束限界と一致する。しかし、一般に用いられているような低次の近似解については、それ以外の解の精度を評価して適用限界を決定する必要がある。解の精度を評価する方法としては、水面における非線形境界条件式(2.2.6)および(2.2.7)に対する残差を評価するものと、近似解によって表わされた諸物理量の誤差を論ずるものとの2通りが考えられる。前者は厳密解が与えられるような場合にも、評価を行なうことが出来るため、すでにDean(1968)、土屋・山口(1969)および堀川・西村(1976)によって用いられてきた。しかし、実際に問題となる流速や水面波形に対しては、間接的に誤差を評価しているにすぎない。既に述べたストークス波理論およびクノイド波理論の高次解を用いれば、厳密解を推定することが可能であり、より直接

的は誤差の評価を行なうことができる。以下においては、残差と誤差との2通りの方法により解の精度を評価した結果について述べる。

(2) 残差による精度の評価

式(2.2.6)および(2.2.7)に対する残差を表示するために、坂川・西村(1976)と全く同様に、それぞれ、

$$E_k = \left| \frac{W(X,N) - U(X,N) \cdot Nx}{\sqrt{1 + Nx^2}} \right|_{\max} / \left(\frac{C_s \pi H/L}{\sqrt{1 + (\pi H/L)^2}} \right) \quad (2.3.12)$$

$$E_D = \Delta P_0 / \rho g H \quad (2.3.13)$$

はパラメータを定義する。ここに、 C_s は微小振幅波理論における波速で $\sqrt{g \tanh(\alpha D/L) / (\alpha/L)}$ であり、

ΔP_0 は近似解を使った場合の、水面における圧力変動量である。

計算結果の一例として、 $E_D = 0.01$ に対応するストークス波理論およびクノイド波理論の等残差線を図2.3.6および2.3.7に示した。図中の数字は解の次数を表わしている。また、解の収束限界および Yamada-Shiotani による保存波の存在限界を、それぞれ一点鎖線および破線で示した。両者を比較すれば、ストークス波理論が深海で、クノイド波理論が浅海で高

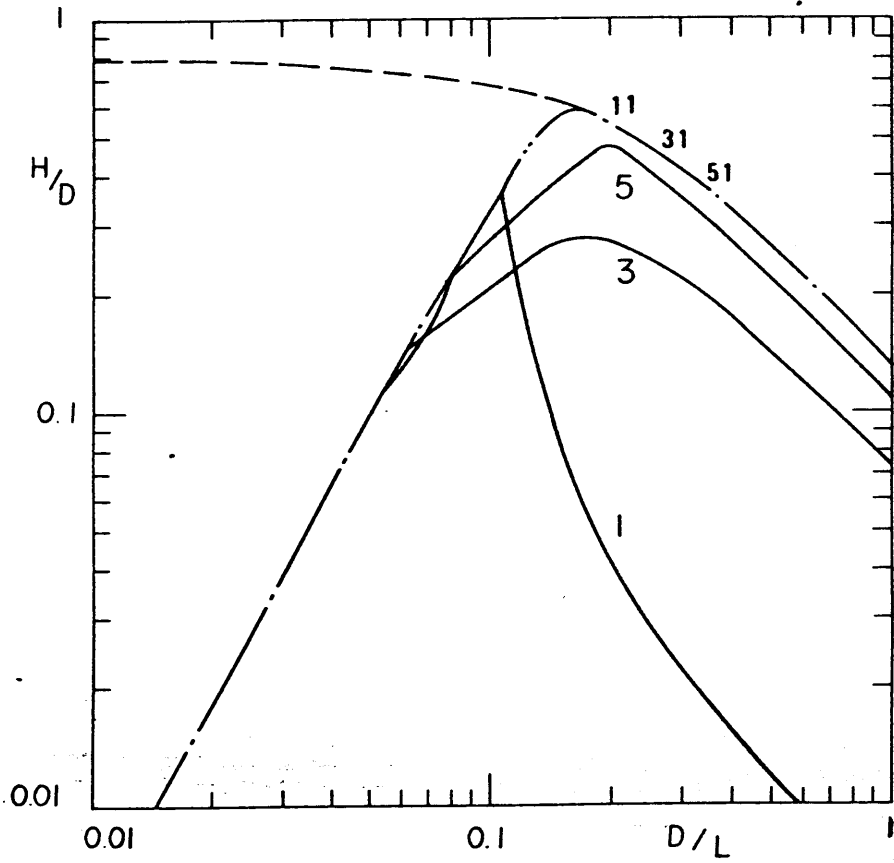


圖-2.3.6 等殘差線 (ストークス理論, $\varepsilon = H/L$, $E_D = 0.01$)

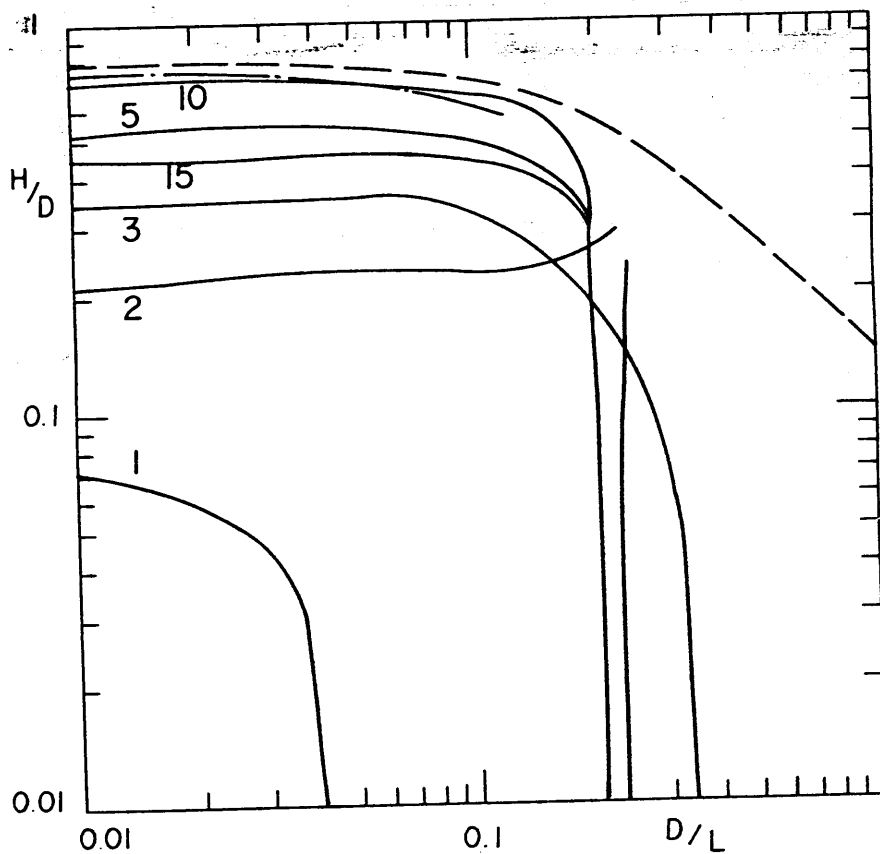


圖-2.3.7 等殘差線 (71作液理論, $\varepsilon = H/D$, $E_D = 0.01$)

い精度を示すことがわかる。クノイド波理論の場合、既に述べた負の特異点による影響で、第10次以上の近似解ではかえって精度が低下している。逐次近似解に関する残差が堀川・西村の算定結果と多少異なるのは、擾動核および補助パラメータの定義の差異によるものである。

図-2.3.8は、2.2.3(4)において、相対水深の4乗で相対波高のオーダーに等しいと仮定した場合に得られた擾動解に対する等残差線である。この解は、オーダーに関する仮定において、ストークス波理論とクノイド波理論との中間に位置づけられ、土屋・安田(1978)が擬ストークス波理論と呼んでいるものと同等である。図中の記号の意味は図-2.3.6および2.3.7の場合と同様である。これらの図を比較すれば、この擾動解の精度は、ストークス波理論あるいはクノイド波理論のいずれよりも劣っている。これは、2.2.3(1)における2重級数解と各種の擾動解との関係に関する議論から予想されたことである。

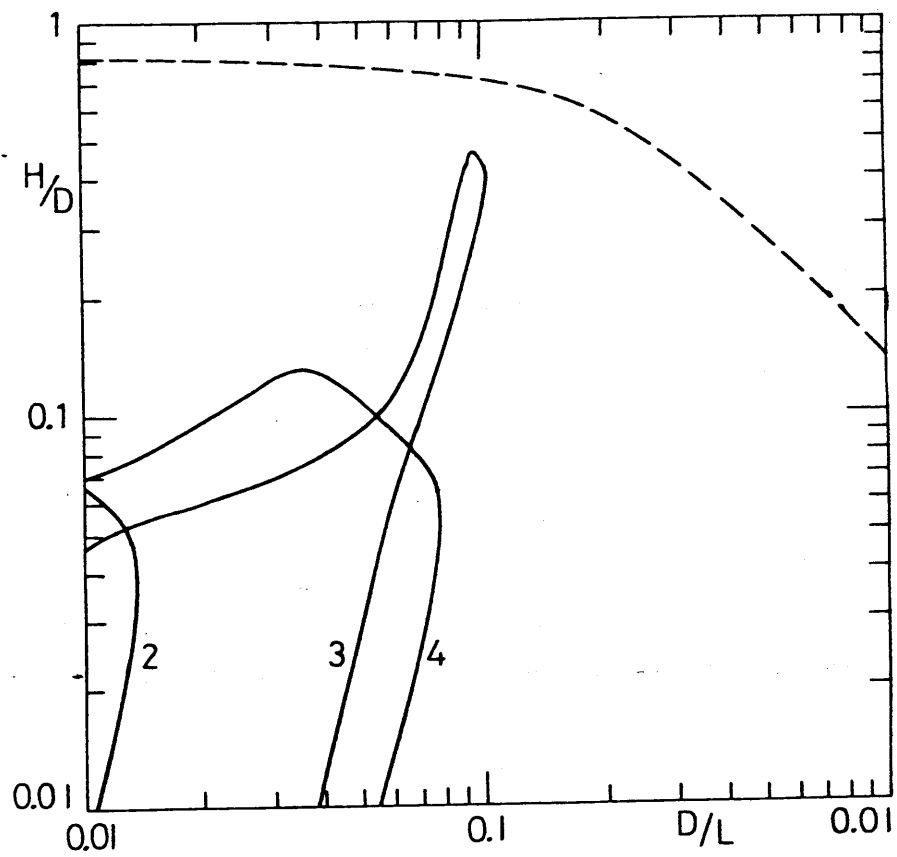


圖-2.3.8 等殘差線 (擬外-72及理論, $\varepsilon = 2A_1 L^2 / D^3$, $E = 0.01$)

(3) 誤差による精度の評価

次にある相対水深および相対波高について、近似解によって表わされる諸物理量が、その厳密解に対して有する相対誤差によって解の精度を考える。残差の場合には評価の対象が2つの境界条件に限られるが、誤差の場合には比較すべき物理量が、流速、波速、波形のひずみ等、無数に考えられる。ここでは工学的に重要な意味をもつ典型的な物理量として、波形および流速を代表する2つの量を考える。すなわち平均水面を基準とした波峯の水位と波高との比 η_c/H 、および波速の第2定義を用いた場合の波峯における流速 U_c である。ただし、誤差のオーダーを議論する場合、波速の定義によって結果が大きく異なることはよいと思われる。

擾動核 ε の値がきわめて小さい領域では高次解をそのまま厳密解として用いても十分な精度が得られる。しかし、 ε の値が大きくなると打ち切り誤差も増大するので、厳密解を高精度で外挿する手法が必

要となる。このためにいくつかの方法が考えられるが、その第1は計算範囲内におけるべき級数の隣り合う係数の比の挙動を、計算範囲外にまで拡張して高次の係数を推定することによるものである。また式(2.3.11)で表わされる Padé 近似を用いることも可能である。これら2つの方法により、ストークス波理論において H/L の厳密解を推定すると、表-2.3.5 に示す結果を得る。いずれの方法によってもほぼ同一の推定値に到達することになるが、ここではストークス波理論およびクノイド波理論に対して、それぞれ3次および6次の Padé 近似 [3,45] および [6,9] を用いることとした。次数が異なるのは、両者の高次解の計算に要した語長がそれぞれ8バイトおよび16バイトであったためである。

表-2.3.5 波形勾配の推定厳密解 (深海波, $\varepsilon = a_1$, $\varepsilon_{max} = 0.360$)

ε	H/L		
	第51次近似解	Domb-Sykes plot による方法	Padé approximant による方法
ε_{max}	0.1311	0.1360	0.1332
$0.99 \cdot \varepsilon_{max}$	0.1284	0.1293	0.1292
$0.9 \cdot \varepsilon_{max}$	0.1109	0.1109	0.1109

図-2.3.9および2.3.10は誤差計算の結果の例として、それぞれストークス波理論およびクノイド波理論について、 Y_c/H の相対誤差0.01に対応する等誤差線を示したものである。図-2.3.11は擾動核として水面波形のフーリエ第1成分の係数 a_1 を用いた場合の結果であり、擾動核の定義によって誤差が大きく変化することはない。さらに波峰流速 U_c' に対する相対誤差0.01の等誤差線を図-2.3.12に例示する。これから、誤差は対象とする物理量によらず同様の傾向を示すことがわかる。いずれの場合にもその結論は残差による精度の議論とほぼ一致している。

全体を通じ、ストークス波理論の適用範囲は深海域において波形勾配の値、浅海域においてアーセル数によって規定されている。またクノイド波理論については、浅海域において相対波高の値によって規定され、相対水深の値が0.2を越えた領域には適用できないことが読み取られる。両理論の適用範囲を合わせれば、保存波の存在範囲と一致し、他の擾動

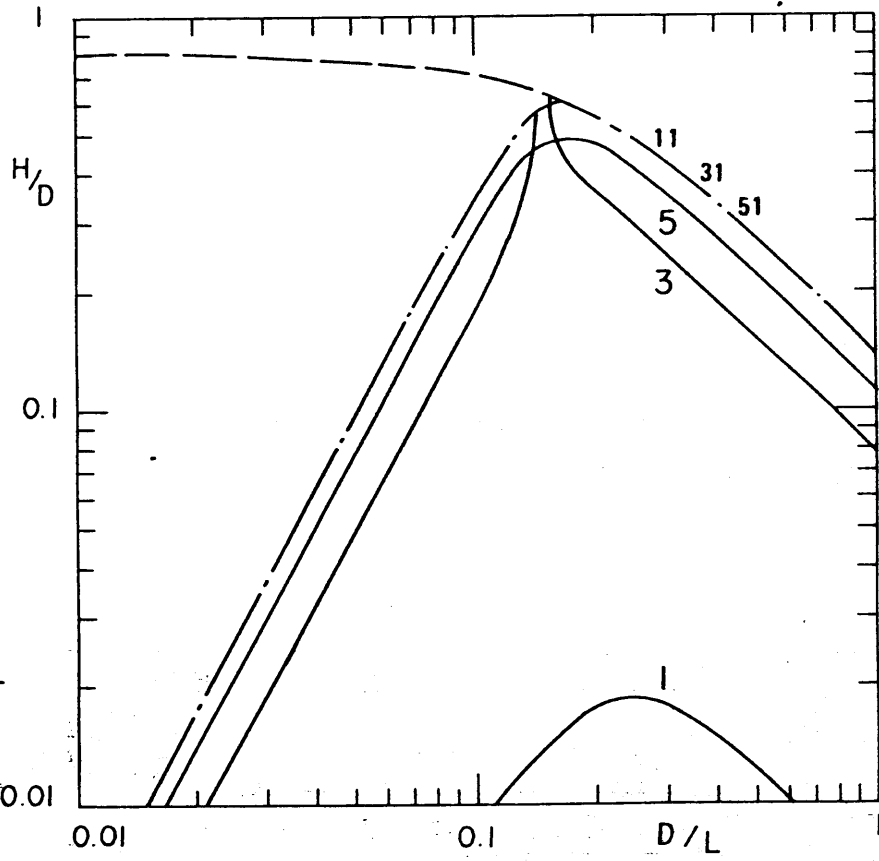


図-2.3.9 等誤差線 (ストークス及理論, $\varepsilon=H/L$, Y_c/H の相対誤差0.01)

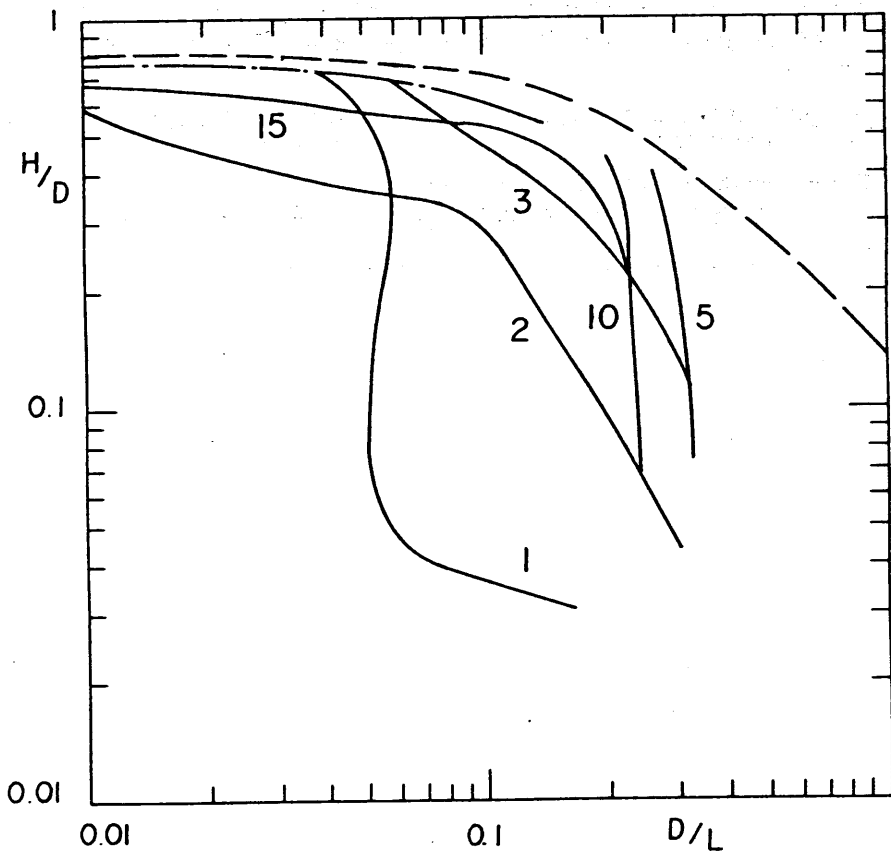


図-2.3.10 等誤差線 (カールマン理論, $\varepsilon=H/D$, Y_c/H の相対誤差0.01)

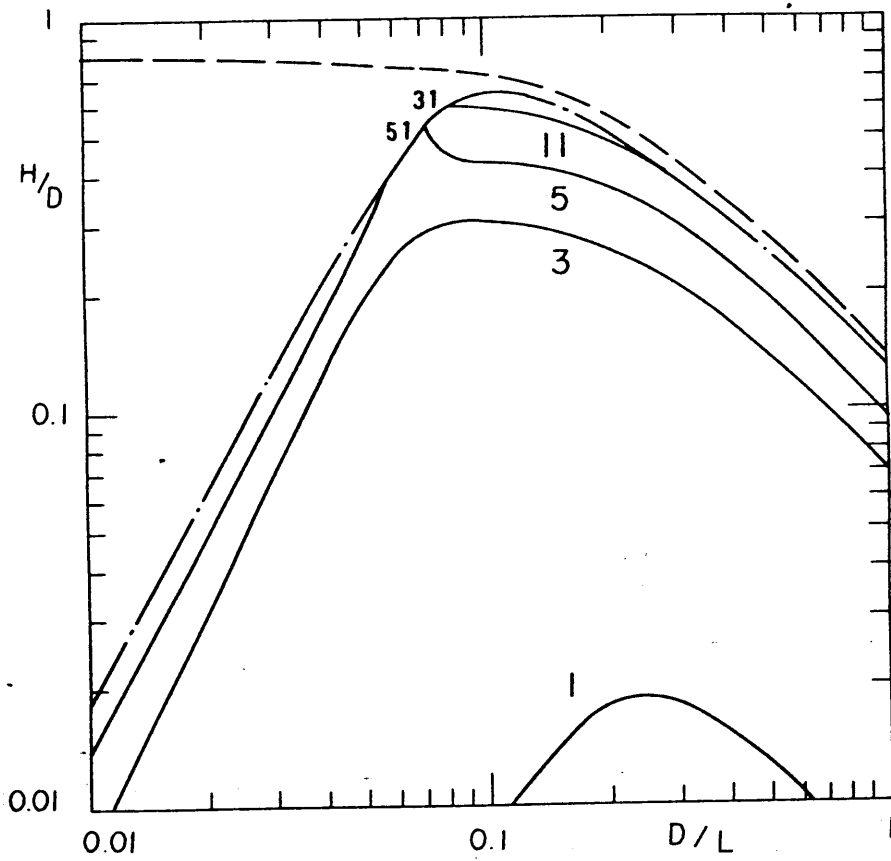


図-2.3.11 等誤差線 (ストークス波理論, $\varepsilon = a_1$, γ_c/H の相対誤差 0.01)

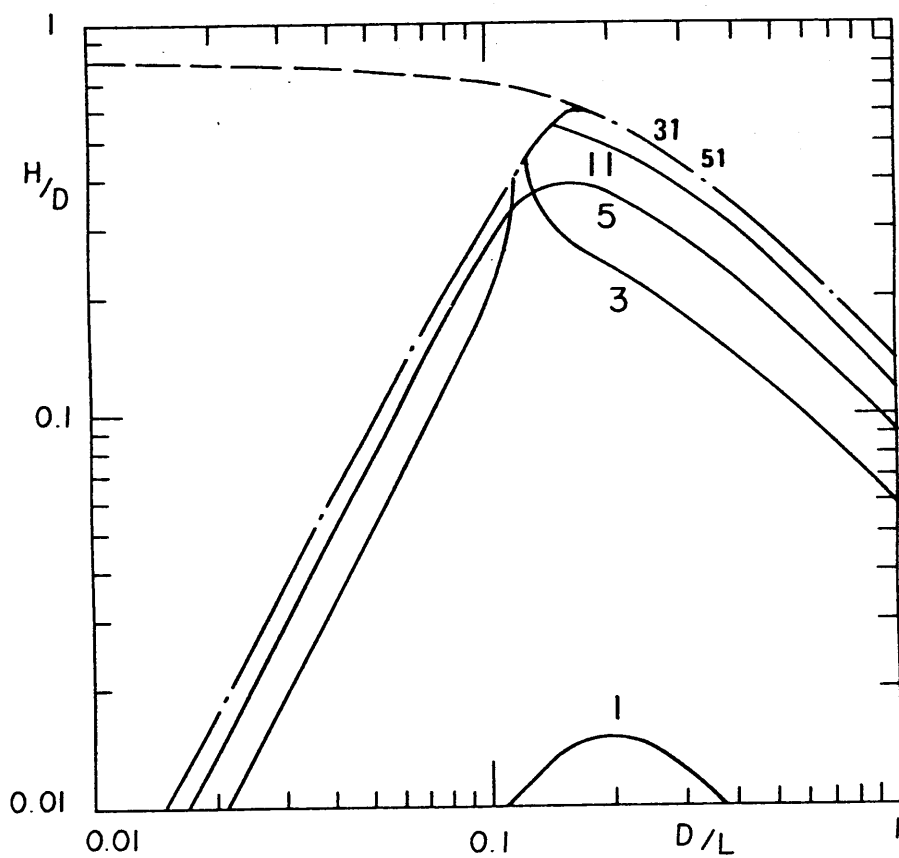


図-2.3.12 等誤差線 (ストークス波理論, $\varepsilon = H/L$, L_c' の相対誤差 0.01)

解が不必要であることを示唆している。両理論の適用範囲で重複する部分については、解の表示が簡単であることから、ストークス波理論を用いればよい。よって、浅海から深海に至る領域について精度よく保存波の計算を行なうためには、ストークス波理論の第3次以上の近似解およびクノイド波理論の第2次以上の近似解を、アーセル数 HL^2/g^3 の値がそれぞれ25以下およびそれ以上となる領域に使い分ければよいことになる。なお、両理論の境界線上において、波速は線形長波理論による値 \sqrt{gD} にほぼ等しいから、アーセル数の算定に際しては、同期 T 、水深 D および波高 H を用いて、 gHT^2/D^2 による表現式を用いておしつかえなさい。

第3章 碎波帯付近における流速場の特徴

3. 1 序 論

本章においては、実験水槽および現地海岸において碎波帯付近の流速場を測定し、その結果を各種波動理論と比較し検討を行なうことにより、流速場の特性を明らかにする。

碎波帯付近における波については、非線形性・乱れ等の影響により、理論的な取り扱いが難かしい。また実験により流速場の特性を明らかにすることも、適当な流速計がなかったために困難なものとなっていた。このため碎波帯内においてさえも、微小振幅波理論が準用されてきたが、実験的裏付けに乏しい。最近になり、漂砂の問題等において波の非対称性が考慮されるにおよんで、実際の流速場の特性を正確に把握する必要が出てきている。

ところで、近年の測定技術の発達は著しく、流速計についても種々のものが実用化されるに至った。波動場での測定に用いられたものとしては、1)水素気泡や粒子等のトレーサーを追跡する方法〔Iversen(1952),

岩垣ら(1973)]や、2)超音波流速計[岩垣ら(1973)],
3)熱膜流速計[岩垣・酒井(1969)、日野・柏柳(1978)、
磯部ら(1979)、渡辺ら(1980)]、4)電解式流速計[
堀川・渡辺(1970)]、5)レーガードッポラ流速計
[林・竹内(1978)]、6)電磁流速計[永田(1959)、
Huntley(1976)、Thornton et al.(1976)、堀川ら(1979)、
Guza・Thornton(1980)、磯部ら(1980)]、7)テンション
スレッド流速計[中川(1980)]が挙げられる。
砕波帯付近における測定に用いる流速計は、検出器
が小型で流線を乱すことが少ないこと、応答性が良
いこと、検出器の移動が容易であること、方向も含
めた測定が可能であること等が要求される。本研究
においては、室内実験用として熱膜流速計、現地観
測用として電磁流速計を用いて測定を行なった。熱
膜流速計はレーガードッポラ流速計に比較した場
合、小型なものとは言え検出器を測定部に入込ら
なければならぬこと、および流速の方向を知ること
ができないことの2点で劣る。しかし、測定個所の移動

は容易であり、空間的に流況を把握するのに適している。さらに、後に述べるスプリット型センサを用いれば、流速の方向についても情報が得られることを考え合わせると、有効な測定装置の一つであると言える。電磁流速計は通常の実験水槽で用いるほど検出器が小型でないが、1台の検出器で2成分の流速を測定することができる、機械的に強いという点で現地観測に適している。

砕波帯付近における波動場に関して理論的な解析を行なう場合、砕波の前後で異なる取り扱いが必要である。砕波前の波の変形については、砕波後に比較すれば理論的な取り扱いが容易であり、既に多くの研究がなされている。大別すれば解析的なものと数値計算によるものがある。

解析的取り扱いでは、まず局所的には保存波であると見なし、任意の断面におけるエネルギーフラックスの値が等しいとして波高変化を定めるものがある。その中で最も簡単なものが微小振幅波理論を

用いるものであり [たとえば 堀川(1973), p.32]、Le Hekauté・Webb (1964) および 山口・土屋(1975) はストークス波理論、岩垣・酒井(1968) はハイパボリック波理論、Svensen・Brink-Kajær (1972) はクノイド波理論を用いて波高変化を求めている。さらに酒井・Battjes (1980) は Cokelet (1977) の Padé 近似を使って収束性を改善したストークス波理論の高次解を用いているが、エネルギーフラックス法による波高変化に関しては最も厳密なものであると言える。しかし、これらはいずれも海底勾配の影響が考慮されていないために、特に碎波直前の波に見られる前後非対称な波形を説明することはできない。Biesel (1952) は海底勾配の影響を1次のオーダーで考慮し、微小振幅波理論を用いて波の浅水変形を解析した。Gaugham・Komar (1975) はこの結果を実験室における波の変形と比較し、碎波形式のちがいが説明できることを報告しているが、堀川ら(1972)によれば理論結果と実験結果との差は大きい。実際碎波直前においては波形勾配

が大きいために微小振幅波理論における仮定が成た
さし、Biesel の理論を適用するのは不適當である。
Shuto (1973) は Kakutani (1971) によつて導かれた非線
形長波の浅水変形に対する式を解いた。数値計算に
よるが、Peregrine (1967) および安田ら (1979, 1980)
も同様な式を解いている。しかし、第1次近似にお
いては水面変動と水平流速とは比例することになり、
後に述べる実験結果と異なる。また安田らによる高
次近似解についても、水面変動と流速との間の次数
の整合性に関する問題が残されている。

数値計算によつて厳密解を求めようとする試みの
一つが Marker and Cell 法を用いたものであり、和田
(1973) は孤立波の浅水変形を解いているが、波の前
面が鉛直に近くなり始めたところで数値的不安定を
起こしている。また、Longuet-Higgins・Cokelet (1976)
は深海波の碎波を対象として、波の前面が巻き始め
るところまで計算を進めた。この方法は、境界にお
ける変数の値のみが未知であるとしているために、

基本的には1次元解析で消滅点が優れている。原理的にはこの手法を浅海域に拡張することが可能である。Fenton・Mills (1976) は孤立波の浅水変形に適用することを試みたが、数ステップの計算の後、数値的不安定により解が発散してしまった。いづれにしても周期的な波を扱う場合には岸側の境界条件が不明となることも問題となる。

砕波後の波に関しては、まず砕波を段波として取り扱うものがある。これは特性曲線法による長波の解析と、砕波はその前面と後面とにおいて段波の条件を満足するという仮定を組み合わせ、砕波前後の波を連続的に追跡するというものである [Keller et al. (1960), Ho・Meyer (1962), Shen・Meyer (1963), Freeman・LeMéhauté (1964), Ameim (1966)]。しかし、実験結果を説明するには至っていない。さらに榎本ら (1973) は乱れの影響を考慮して数値計算を行なっている。一方、砕波後の波のエネルギーは乱れと底面摩擦とによって逸散すると考え、その結果として

生ずる波高減衰を定めるという方法がある。逸散項の仮定の差異により、Le Mehaut (1962)、Horikawa・Kuo (1966) 水口ら (1978) の研究があげられる。しかし、破砕後の波高変化に着目したものであるが、波高とエネルギーおよびエネルギーフラックスとを結びつけるための波動理論や、エネルギー逸散項に関して残された問題がある。また、本研究において対象とする内部流速の評価とは一応別のものと考えられる。

このような状況において、本論文 3.4 においては有限振幅波理論を用いたエネルギーフラックス法により、破砕前の波の変形を取り扱う。これは実測された流速場との比較を行なう際に、少なくとも有限振幅性は問題にならないようにするためである。そして海底勾配の影響については実験結果を用いて計算結果の補正を行なうという方法で議論を進める。さらに破砕後に関しては、連続破砕と再成という典型的なケースについて、実測結果に基づいて流速変

化の特性を議論する。これに先立ち、3.2 および
3.3 において、それぞれ砕波帯付近における流速
場に関する室内実験および現地観測について述べる。
いずれも流速場の特徴を把握するために、ある場所
における水面変動と内部流速との関係を各種波動理
論と比較し検討を行なったものである。

3. 2 砕波帯付近における流速場に関する室内実験

3. 2. 1 実験の概要

この実験の目的は砕波帯付近における水面変動と内部流速との関係を明らかにすることにある。このため、一端に斜面を設けた二次元造波水槽において、測定用台車に容量式波高計および熱膜流速計を取り付け、台車を移動させることにより、各位置における水面変動と流速とを測定した。流速計検出器にI型のものを用い、実験I〔磯部ら(1979)〕および実験II〔渡辺ら(1980)〕に加え、スプリット型のものを用いて新たな実験IIIを行なった。まず、以下でその検定結果について述べる。

スプリット型センサとは、図-3.2.1に示すように、受感部が円筒表面の表側と裏側とに分かれていたもので、それぞれに独立に電流を流すことが出来る〔Apelt(1979)〕。今、両側の温度を一定に保ち、図中に示すような速さ U_m の流れの中に置いた場合と静止流体中に置いた場合とで、表面から

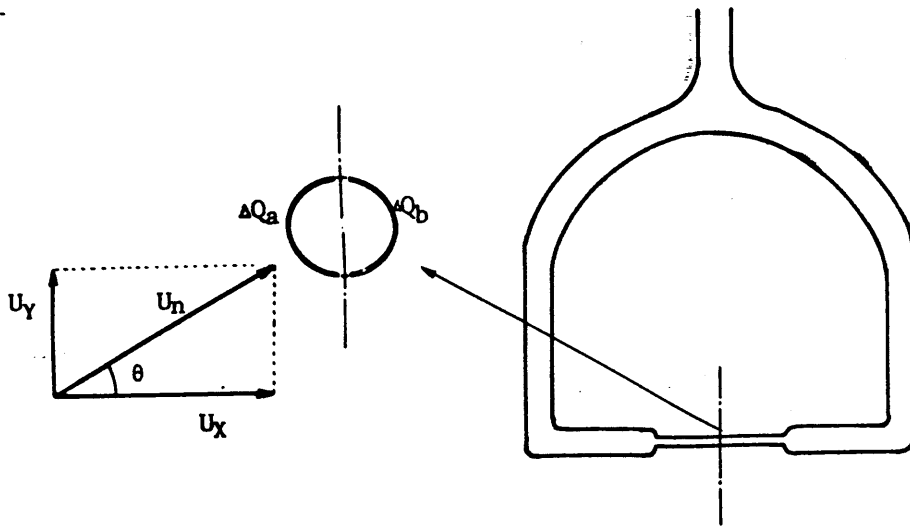


図-3.2.1 スプリット型センサ模式図

失われざる熱量の差の表裏における値を ΔQ_a および ΔQ_b とする。ジュールの法則により、これらは受感部の電位差の自乗の差 ΔV_a^2 および $(\Delta V_b^2)'$ に比例するが、比例定数の値の違いを調整したものとして改めて $\Delta V_b^2 = K'(\Delta V_b^2)'$ を定義する。このとき図中における各流速成分 U_x および U_y は、

$$U_m = \alpha_1 (\Delta V^2)^{\alpha_2} \quad (3.2.1)$$

$$U_x = U_m (\Delta V_a^2 - \Delta V_b^2) / |\Delta V_a^2 - \Delta V_b^2|_{\max} \quad (3.2.2)$$

$$|U_y| = \sqrt{U_m^2 - U_x^2} \quad (3.2.3)$$

となる。ここに、 α_1 および α_2 は定数であり、

$$\Delta V^2 = \Delta V_a^2 + \Delta V_b^2 \quad (3.2.4)$$

である。 $|\Delta V_a^2 - \Delta V_b^2|_{\max}$ は検定結果から式(3.2.2)が最もよく成立するように定めらるる値であり、 U_m はなほ ΔV^2 の関数である。通常は図-3.2.1 における傾き角 θ の値が 45° である場合の $(\Delta V_a^2 - \Delta V_b^2)$ の値の $\sqrt{2}$ 倍がとらわれている。しかし、ここでは U_x が岸沖方向に一致するように設置することを前提に、岸沖方向流速が最大となる場合の誤差を小さくする

ように考え、この値として $\theta=0^\circ$ と 180° における $|\Delta V_a^2 - \Delta V_b^2|$ の平均値を用いることとした。

図-3.2.2 は $\theta=0^\circ$ と 180° における ΔV_a^2 および $(\Delta V_b^2)'$ の値の比から定めた K' の値1.06を用いて検定結果を整理したものである。図より、 α_1 の値は1.96で α_2 の値は実験を行なった3ケースについて、0.312, 0.274および0.289であり、 $|\Delta V_a^2 - \Delta V_b^2|_{\max}$ に対する近似式として $\exp\{-0.877(\log(\Delta V^2))^2 + 2.23(\log(\Delta V^2)) + 0.365\}$ を得る。これらの値が得られたことにより、測定された ΔV_a^2 および ΔV_b^2 の値より、式(3.2.1)~(3.2.4)を用いて U_x および $|U_y|$ を計算することができ、図-3.2.3は式(3.2.2)の精度を検査するために、検定用台車の進行方向に対し X 方向を θ だけ傾けた場合の出力比 $(\Delta V_a^2 - \Delta V_b^2) / |\Delta V_a^2 - \Delta V_b^2|_{\max}$ の値を図示したものである。この値は式(3.2.2)を用いれば $\cos \theta$ となり、図中に実線で示されているが、検定結果との一致は良好である。しかし、 $|\Delta V_a^2 - \Delta V_b^2|_{\max}$ に対する近似式に含まれる誤差により、この値よりもある

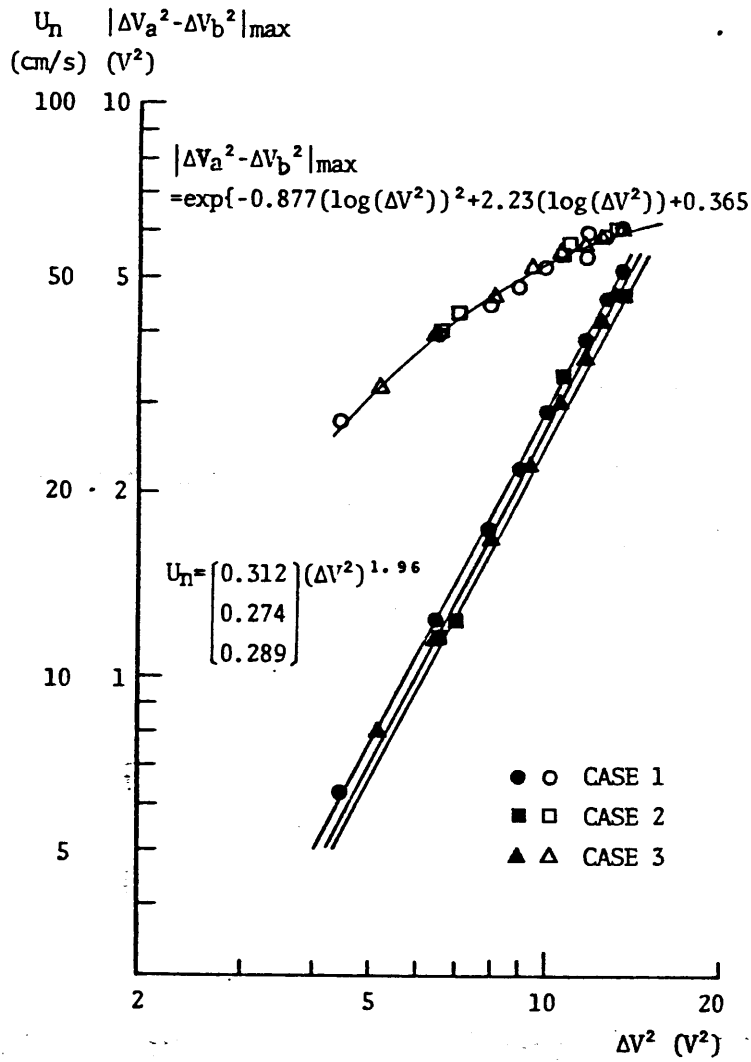


図-3.2.2 スプリット型センサの検定結果

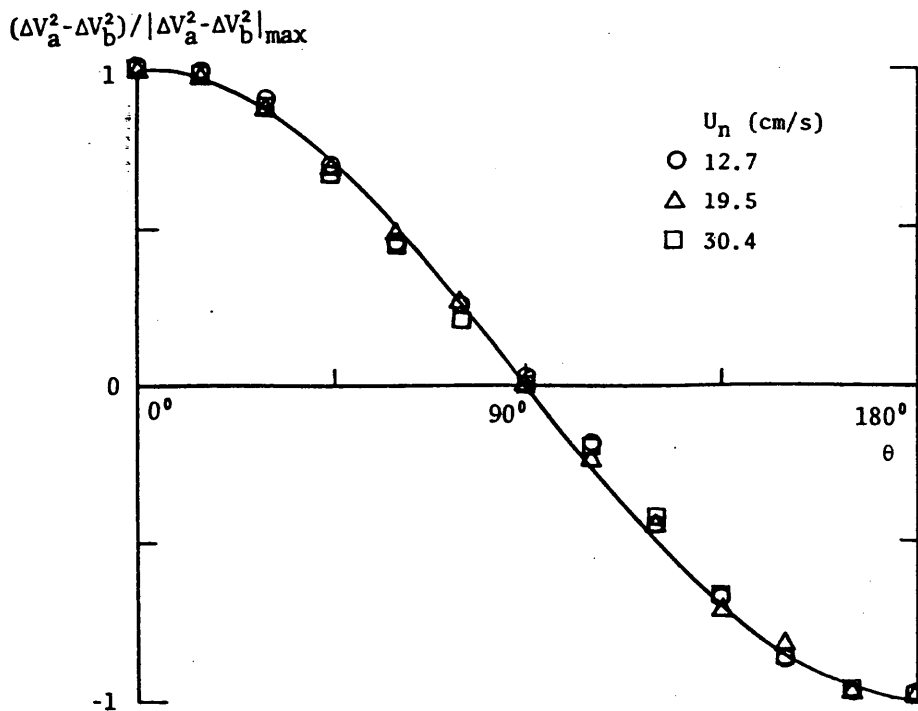


図-3.2.3 スプリット型センサの方向特性

瞬間における $|\Delta V_a^2 - \Delta V_b^2|$ の値の方が大きくなると
いう不合理な場合も生じてしまう。このような場合
には、 U_x の絶対値が U_m に等しいものとして処理
を行なった。

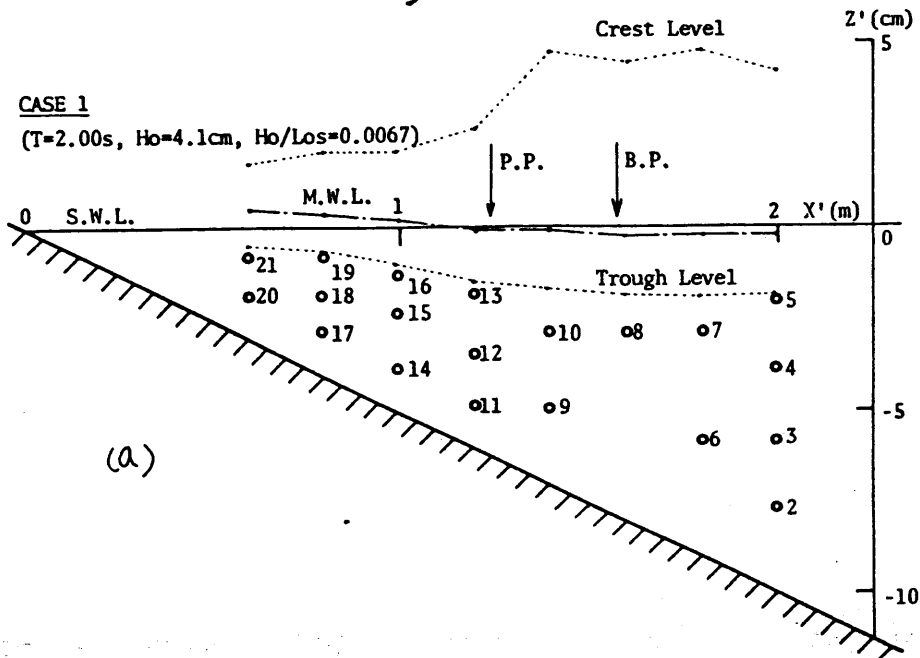
スプリット型セシサを用いた実験は、勾配 $1/20$ の
一様勾配斜面において波形勾配の値をかえ、碎波形
式が巻き波型から崩れ波型となるケースについて
行なった。表-3.2.1 に実験条件を示し、図-3.2.4
(a)~(c)には測定点の配置とともに、波峰水位・平均
水位・波谷水位および碎波点 B.P. および突っ込み点
P.P. を示す。

表-3.2.1 実験条件 (実験Ⅲ)

ケース 番号	一樣水深部 水深 D_0 (cm)	周期 $T(S)$	換算 沖波高さ H_0 (cm)	換算沖波 波形勾配 H_0/L_0s	碎波形式
1	47.0	2.00	4.1	0.0067	巻波型
2	46.8	1.26	6.4	0.026	巻波型
3	46.7	0.97	8.6	0.059	崩波型

CASE 1

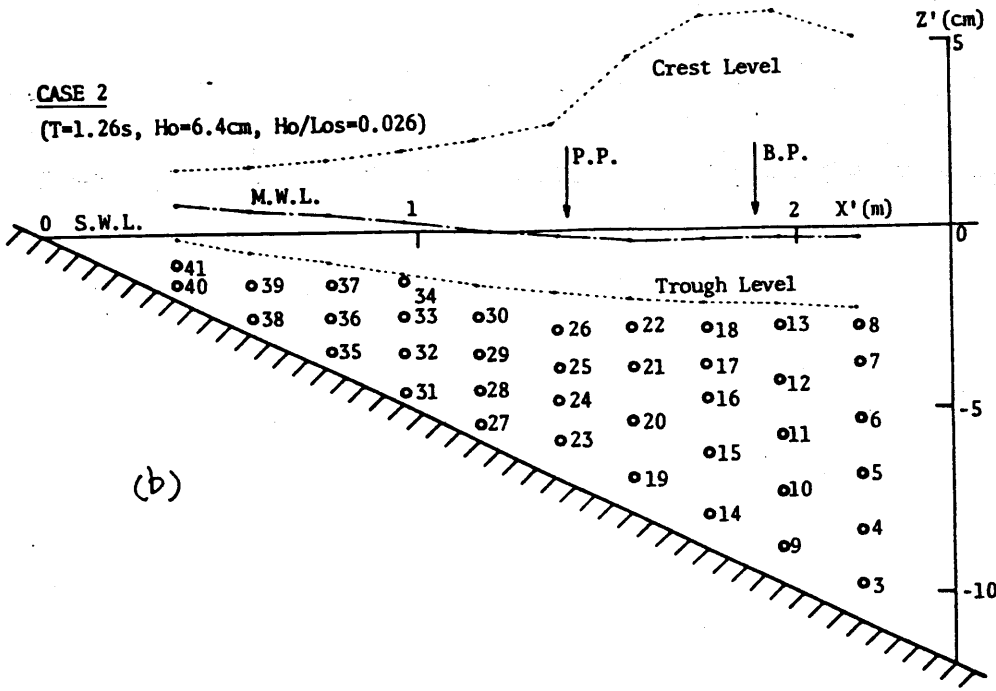
($T=2.00s$, $H_o=4.1cm$, $H_o/Los=0.0067$)



(a)

CASE 2

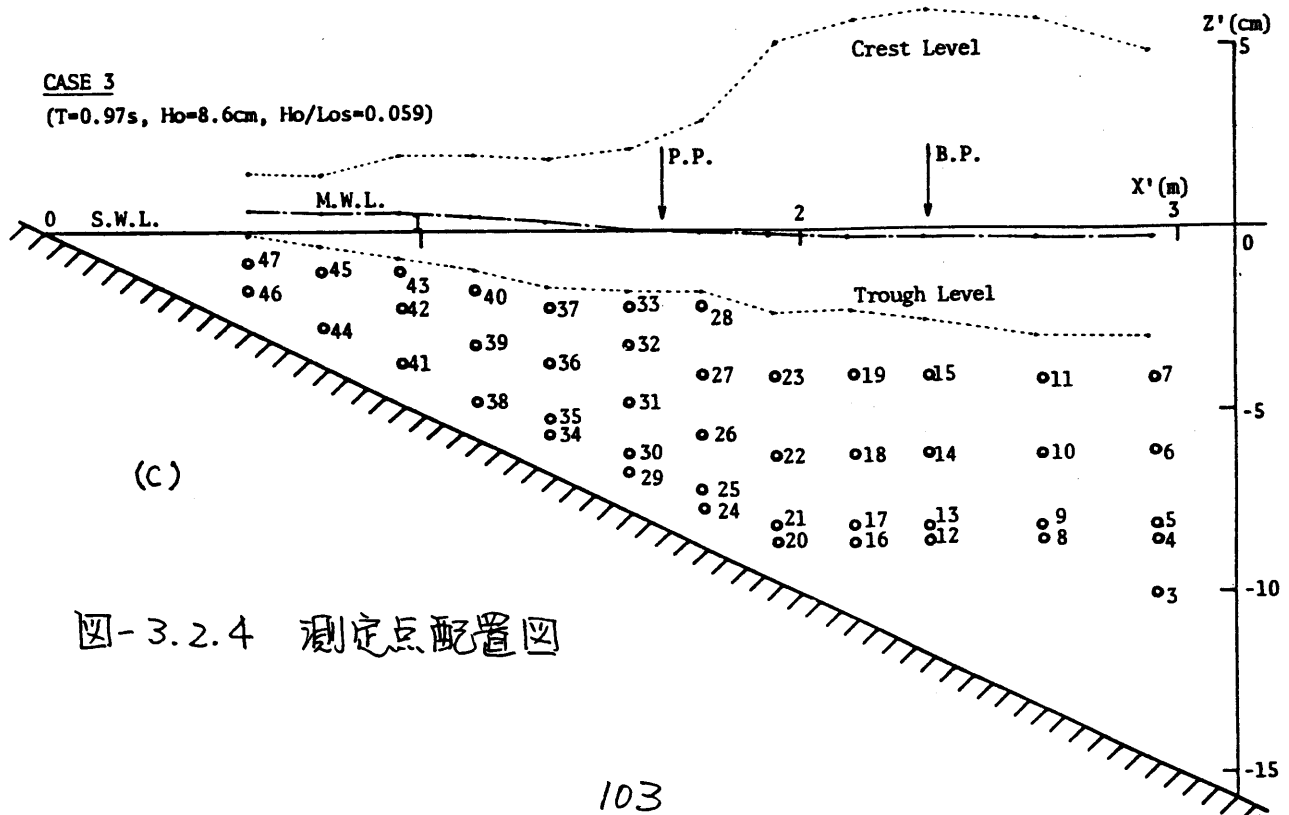
($T=1.26s$, $H_o=6.4cm$, $H_o/Los=0.026$)



(b)

CASE 3

($T=0.97s$, $H_o=8.6cm$, $H_o/Los=0.059$)



(c)

图-3.2.4 测定点配置图

3.2.2 比較に用いた波動理論

水面変動と流速とを結びつけるための波動理論として微小振幅波理論、有限振幅波理論(ストークス波理論およびクノイド波理論)、線形長波理論、線形重ね合わせ法 [Reid (1958)]、流山関数法 [Dean (1965)] が考えられる。いずれも一様水深中を進行する波に関する理論であり、線形重ね合わせ法を除けば、定形進行波を仮定している。もとより、砕波帯付近においては波の変形速度および乱山の影響を考慮すべきであるが、有限振幅性とともにこれらを考慮することは現在のところできない。ここでは上記各理論による扱いのどの程度有効であるかを明らかにするという立場で、各理論を用いた計算結果と実測結果とを比較する。

上記5種の波動理論のうち、微小振幅波理論および有限振幅波理論によれば波高を与えることにより波形が定まってしまうことになり、任意の波形に適用することはできないので、ここでは一応除外して

おく。また線形長波理論を用いた場合の水平流速は水面変動に比例するため、特に計算を行なう必要はない。

線形重ね合わせ法とは、周期の異なる微小振幅波の重ね合わせによって波形が構成されているという考え方であり、任意の波形に適用することはできるが、有限振幅性の効果は含まない。これを用いて流速を計算するためには、Reidと同様、線形フィルターを用いればよい。実際の計算に際しては、線形フィルターを計算する場合の積分区間、フィルターの頂数、および水面付近における流速を計算する場合に生ずるフィルターの振動に関する問題がある。付録Bにはこれらに対する処理法が述べられており、それに従って実際の計算を行なった。

流山関数法とは、任意の波形に対してその波形が変化せずに伝播すると仮定した場合の境界条件、すなわち保存波に対する境界条件を近似的に満足するように流山関数を決定するものである。従って波の

変形速度の影響は含まれないが、有限振幅性の影響は含まれることになる。

砕波帯付近の波を解析しようとする場合には、1) 有限振幅性、2) 斜面勾配の影響による波の変形、3) 砕波によって生ずる乱れ、4) 現地波浪に見られる波の不規則性、が問題となる。このうち、4)については次節で触れるように、浅海域においてはほとんど問題としない。以下においては特に流関数法を用いた流速の計算値と実測値との比較により、2)および3)の効果を議論する。

3. 2. 3 波動理論との比較・検討

図-3.2.5 (a)~(c)はスプリット型セキを用いて測定された岸沖方向流速の実測値と計算値とを比較したものの一部である。上から1段目および2段目はある一波の静水面からの水面変動と岸沖方向流速 u を表わしていて、鉛直上向きおよび岸向きが正方向である。3段目および4段目はCASE 1~3についてそれぞれ30、50、および65波の波に対する、同位相における平均値を用いた場合の水面変動 ζ および岸沖方向流速 u を表わしている。いずれも実線は実測値を示し、点線および破線は水面変動からそれぞれ流し関数法および線形重ね合わせ法を用いて計算した岸沖方向流速を示している。また、5段目および6段目は水面変動および岸沖方向流速の各位相における乱流強度を示すものであり、実線および点線はそれぞれ同位相平均値および0.2秒間の移動平均値を差し引いて乱流成分 u' としたものである。また、

1) CASE 1 No.1, CASE 2 No.1および2, それぞれにCASE 3

CASE 1 ($T=2.90s$, $H_o=4.1cm$, $H_o/Los=0.0067$)

	No.1	No.2	No.5	No.9	No.10	No.11	No.13	No.14	No.16	No.20	No.21
D (cm)	47.0	9.8	9.8	6.9	6.9	5.9	5.9	5.2	5.2	3.5	3.5
Z (cm)	40.1	2.3	8.1	2.1	4.1	1.1	4.1	1.1	3.6	1.1	2.1



図-3.2.5(a) 水面変動・岸沖方向流速・乱流の測定結果および岸沖方向流速の計算値

101

CASE 2 ($T=1.26s$, $H_0=6.4cm$, $H_0/L_0=0.026$)

	No.1	No.2	No.3	No.8	No.14	No.18	No.23	No.26	No.27	No.30	No.40	No.41
D (cm)	46.7	30.9	10.4	10.4	8.5	8.5	6.6	6.6	5.7	5.7	2.6	2.6
Z (cm)	41.8	26.1	1.1	8.1	1.1	6.1	1.1	4.1	0.5	3.5	0.5	1.1



図-3.2.5 (b) 水面変動・岸沖方向流速・乱流の測定結果および岸沖方向流速の計算値

CASE 3 ($T=0.97s$, $H_o=8.6cm$, $H_o/Los=0.059$)

	No.1	No.2	No.3	No.6	No.13	No.15	No.19	No.22	No.23	No.26	No.33	No.35
D (cm)	46.4	30.7	14.4	14.4	10.4	10.4	8.6	8.6	7.7	7.7	5.3	5.3
Z (cm)	41.7	26.1	4.6	10.6	2.6	6.6	1.6	6.6	1.6	5.6	1.1	3.6

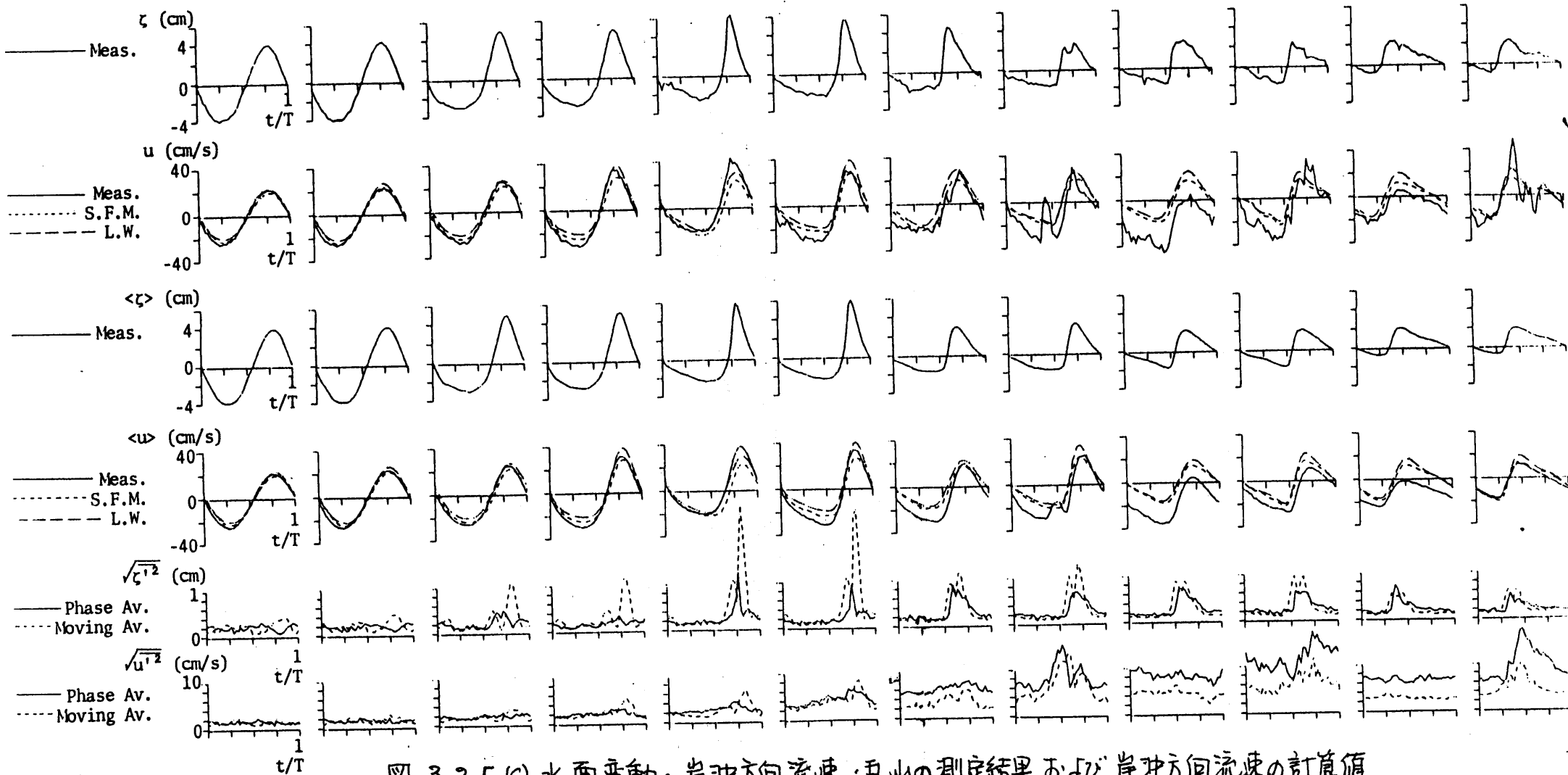


図-3.2.5 (c) 水面変動・岸沖方向流速・乱流の測定結果および岸沖方向流速の計算値

No. 1~6 のように碎波点よりある程度沖側においては、実測値と流山関数法を用いた計算値とはより一致を示す。線形重ね合わせ法を用いた計算値は、変動成分について実測値とより一致を示すものの、全体に若干正の方向にずれている。これは、実験水槽においては正味の質量輸送が生じ得ないのに対し、線形重ね合わせ法を用いた場合には岸向きに質量輸送を生じてしまうことに対応していると考えられる。この点、流山関数法では波速の第2定義を用いて正味の質量輸送量を0としているのであまり問題はない。なお、このように水面波形が前後対称であるような領域においては、ストークス波理論およびフノイド波理論を第2章の結果に従って適切に使い分ければ、計算値と実測値とはよく一致する。

2) CASE 1 No. 2~10, CASE 2 No. 3~18, 及び CASE 3 No. 13 および 15 のように碎波点付近においては、流山関数法による計算値が大局的には実測値と一致するものの、流速の変動量を若干過小評価する。

実測値に近いのはむしろ線形重ね合わせ法による計算値である。これは、線形理論を用いたことによる流速の過大評価分が、実際の波の変形に伴う流速の増加分にとまたま近かったためであると考えられる。なお、鉛直方向の差違としては、表面付近においては波峰通過時、底面付近においては波谷通過時における流速の実測値が流山関数法による計算値に比較して大きいことが挙げられる。これは碎波において波が前面に突っ込むという現象に対応している。

3) CASE 1 No. 11 および 13, CASE 2 No. 23 および 26, ならびに CASE 3 No. 19 および 22 のように突っ込み点付近においては、2 段目に示す 1 波についての流速記録あるいは、6 段目に示す乱れ強度を見てわかる通り、乱れが強い。しかし、4 段目に示す同位相平均値で見れば、全体としては波動に伴った変化を示していることは明らかである。なお、この付近においてはむしろ計算値に比較しても波谷通過時における沖向き流速が大きく、これと均衡を保つ形

で水面付近において強い岸向き の質量輸送が生じていることを示唆している。

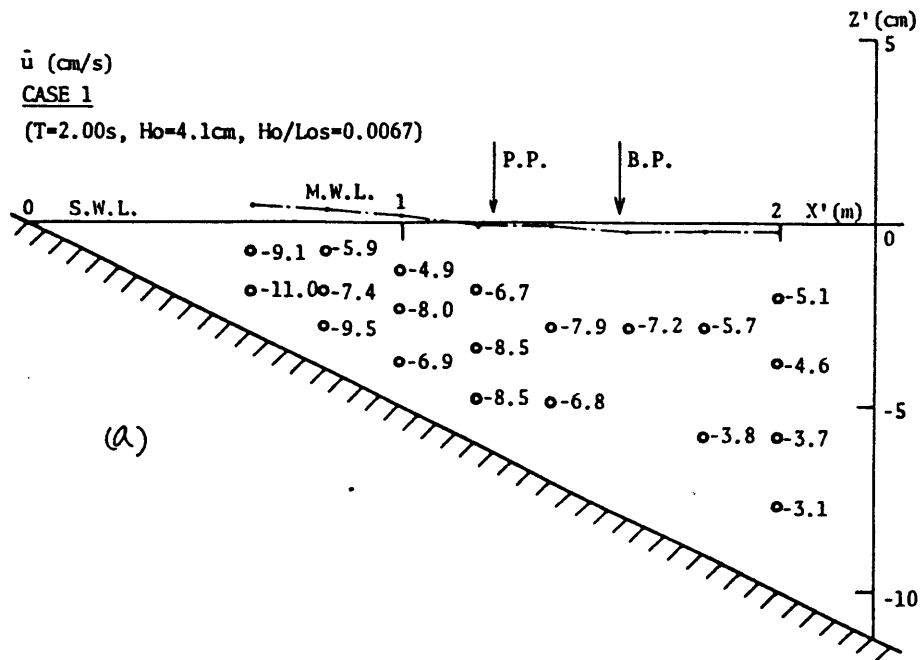
4) その後、碎波が進行するに従って流速の同位相平均値の変動成分は、流氷関数法による計算値に近くなり、CASE 3 の底面付近においては計算値よりも小さくなることもある。またこの領域において特徴的なのは底面付近に強い戻り流氷が存在することである。図-3.2.6 (a)~(c) は各測定点における岸沖方向流速の時間平均値、すなわち定常流成分 \bar{u} の値を示すものである。3 ケースを通じてその値は、換算沖波波高を H_0 とし $\sqrt{gH_0}$ の 0.1 ~ 0.2 倍程度である。戻り流氷の影響により、底面付近においては正の流速が生じる時間帯が極くわずかに限られることになり、漂砂移動等に果たす役割は大であると考えられる。

さて、図-3.2.5 に戻って、2通りの定義による流速の乱れ強度を比較すると、碎波帯内においては相当の差がある。これは水面変動と異なって流速の

\bar{u} (cm/s)

CASE 1

($T=2.00s, H_o=4.1cm, H_o/Los=0.0067$)

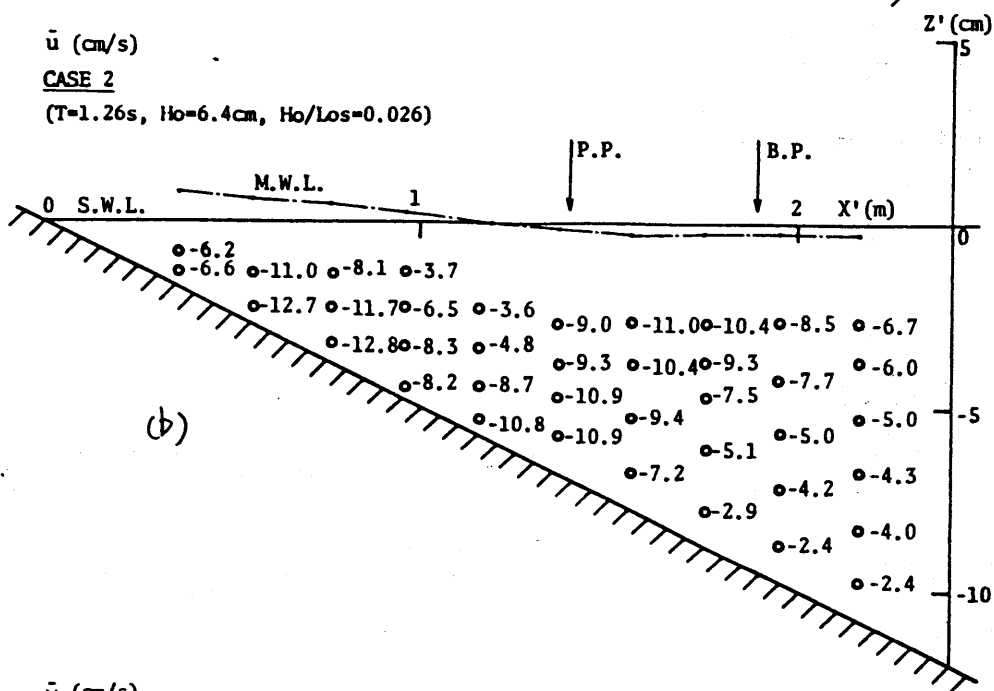


(a)

\bar{u} (cm/s)

CASE 2

($T=1.26s, H_o=6.4cm, H_o/Los=0.026$)

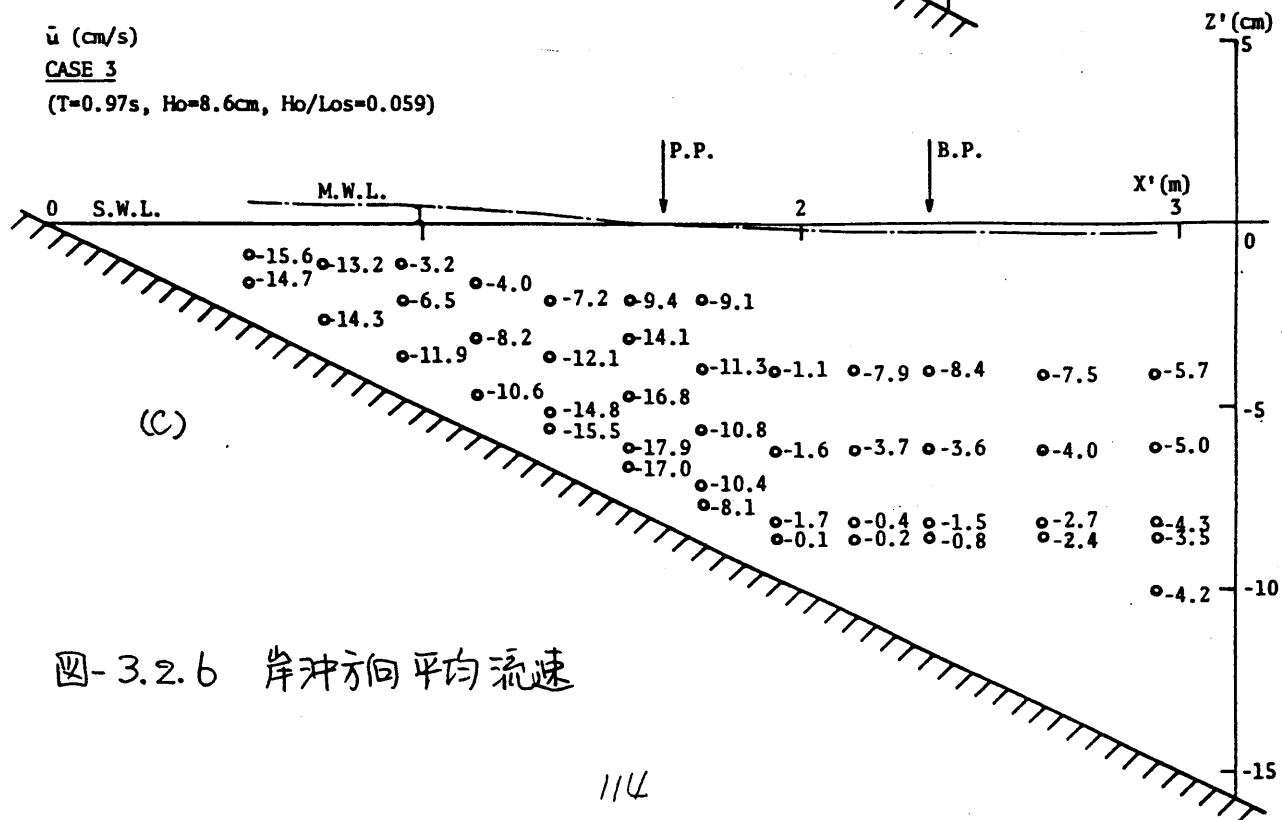


(b)

\bar{u} (cm/s)

CASE 3

($T=0.97s, H_o=8.6cm, H_o/Los=0.059$)



(c)

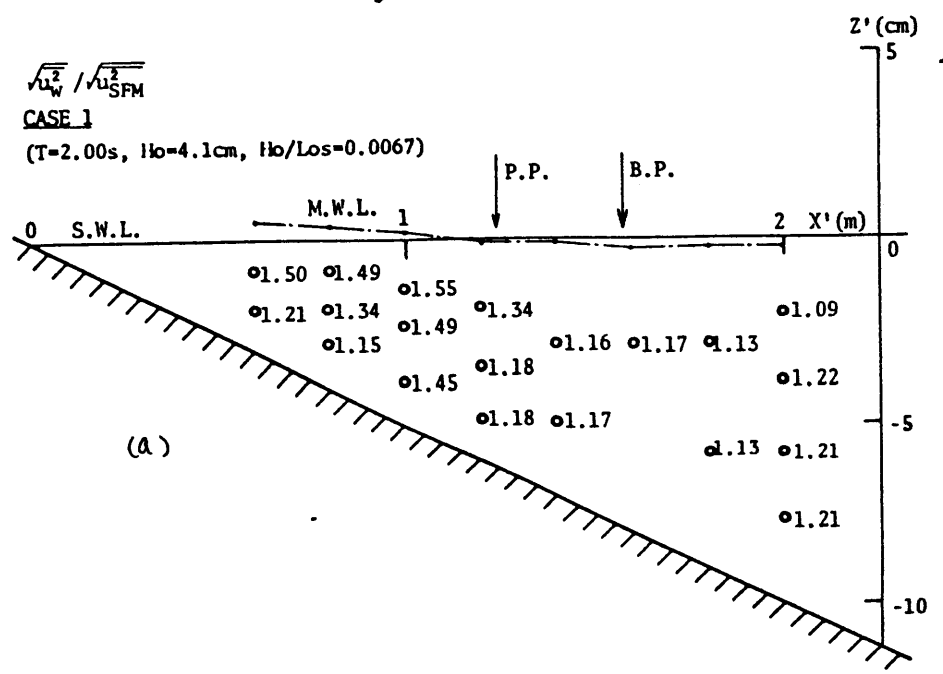
图-3.2.6 岸冲方向平均流速

一 波ごとの変動が大きく、位相平均を用いて定義した乱れ成分はこの影響をも含んでしまうためであり、移動平均を用いた場合の値の2倍に達する場合もある。図-3.2.7(a)-(c)は定常流成分および移動平均を用いて定義した乱れ成分を差し引いた残りを波動成分 u_w とした場合に、これと流山関数法による計算値 u_{SFH} の自乗平均の平方根の比 $\sqrt{u_w^2} / \sqrt{u_{SFH}^2}$ を示したものである。これを見れば CASE 3 のように崩れ波型砕波における砕波帯内の底面流速については1に近いものの、表面近くでは実測結果の方が大きく、巻き波型砕波の場合はさらに大きくなることわかる。この傾向の延長が実験Ⅱ〔渡辺ら(1980)〕における1/10勾配斜面の場合に見られ、流山関数法による計算値が5割近くも過小評価となる場合がある。これらの実験をまとめて総合的に判断すると、砕波帯において流山関数法は、砕波形式が崩れ波型であれば妥当な評価を与えるが、巻き波型の場合は過小評価となる。また、ステップ型地形の場合のように、波が再

$$\sqrt{u_w^2} / \sqrt{u_{SFM}^2}$$

CASE 1

(T=2.00s, Ho=4.1cm, Ho/Los=0.0067)

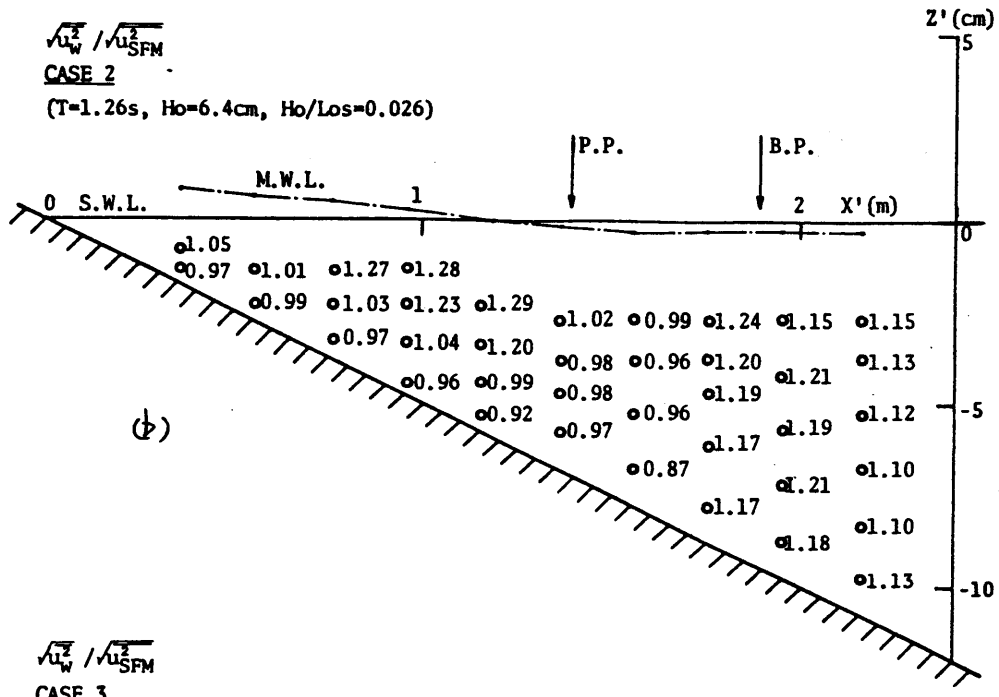


(a)

$$\sqrt{u_w^2} / \sqrt{u_{SFM}^2}$$

CASE 2

(T=1.26s, Ho=6.4cm, Ho/Los=0.026)

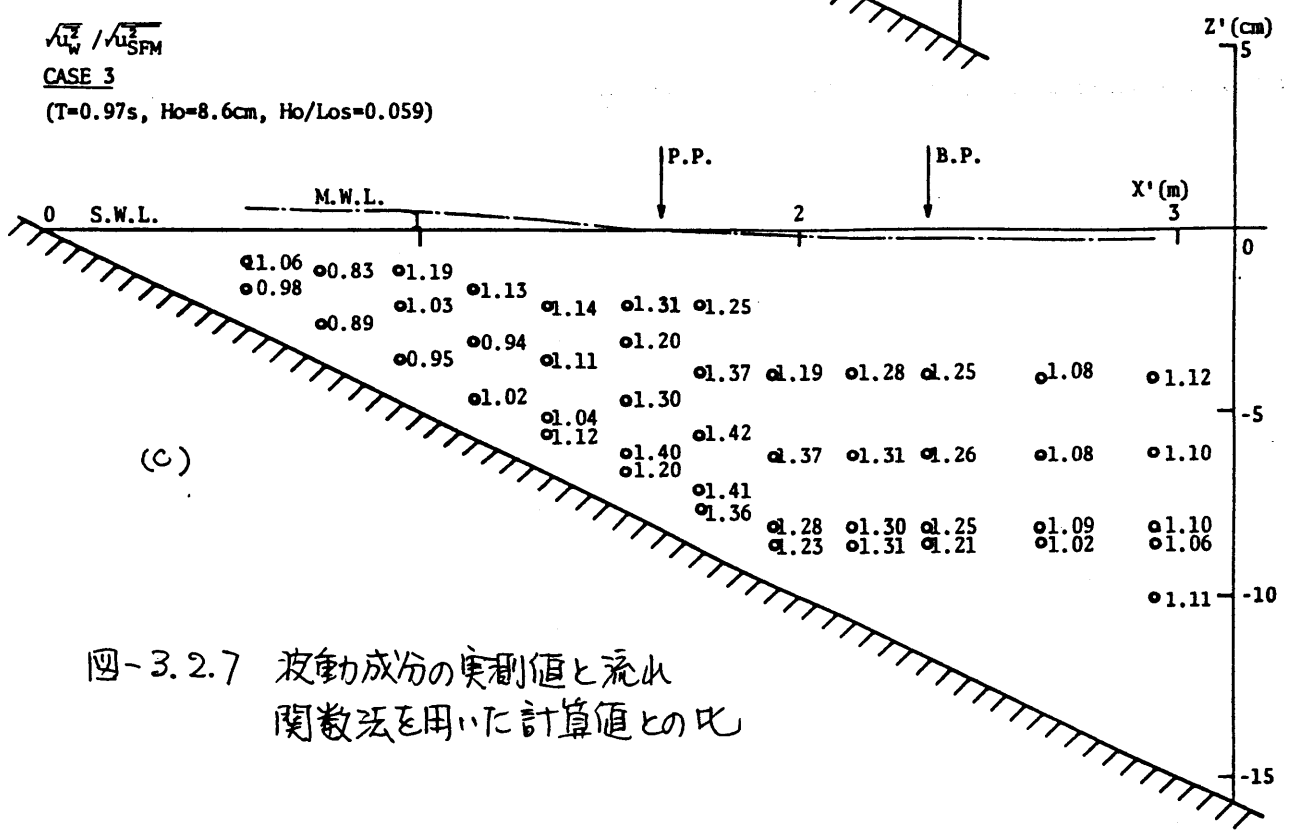


(b)

$$\sqrt{u_w^2} / \sqrt{u_{SFM}^2}$$

CASE 3

(T=0.97s, Ho=8.6cm, Ho/Los=0.059)



(c)

四-3.2.7 波動成分の実測値と流況
関数法を用いた計算値との比

成に何かうような場合にも妥当な評価を与えること
にする(実験Ⅱ)。

3.3 碎波帯付近における流速場に関する現地観測

3.3.1 観測手法の概要

現地観測は3期間にわたって行なわれた。このうち観測Ⅰ〔藤川ら(1979)〕および観測Ⅱ〔水口・磯部(1979)〕はそれぞれ1978年3月29日および12月15日に茨城県阿字ヶ浦海岸で、また観測Ⅲ〔磯部ら(1980)〕は1979年9月5日に茨城県大洗海岸で行なわれた。いずれも海底勾配の緩やかな海岸で、観測地点における平均勾配はそれぞれ $1/70$ 、 $1/60$ および $1/40$ である。3期間にわたる観測の測定項目は碎波帯付近の1点における水面変動と、そこでの流速の鉛直分布である。図-3.3.1 に例示するような流速計設置架台に2成分電磁流速計を4~5台固定し、出力信号をデジタルデータレコーダに記録した。また水面変動は架台中央に取り付けたボールを 16mm メモーションカメラで撮影し、フィルム解析装置を用いて最小単位 1cm で読み取ることによつて得た。サンプリング間隔は 0.2 秒で、1回の測定時間は観測ⅠおよびⅡで約

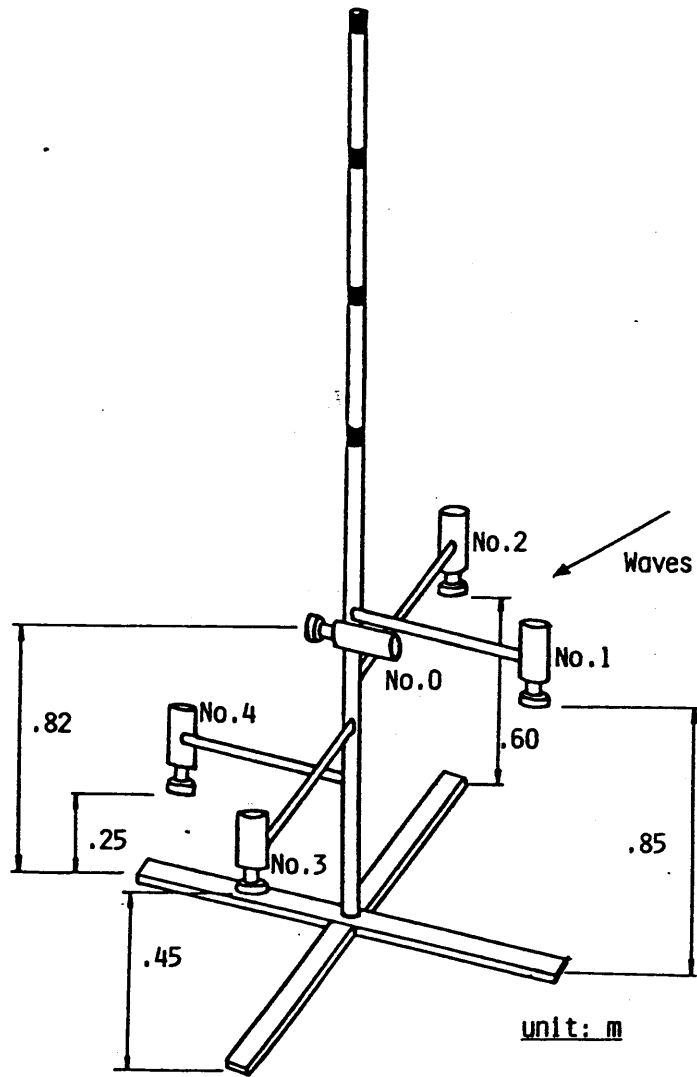


圖-3.3.1 流速計設置架台見取図

12.5分、観測Ⅲで25分であり、それぞれについて水深の異なる3、5および6ケースの観測を行なった。データレコーダと16mmカメラとの同期は合図により同時に手動で測定を開始するという方法によって行なったため、水面変動と流速の記録の間に位相差を生ずる一因となつてしまった。表-3.3.1に観測地点における観測時間内の水深 D 、有義波高 H_b および有義波周期 T_b を示す。有義値の計算に際しては、碎波帯内における長周期成分の影響を除去するため、周期20秒以上の成分を除くような数値フィルターを用い、ゼロダウンクロス法〔藤田・水口(1979)、水口・松田(1980)、磯部ら(1980)〕によって波の分割を行なっている。これに比べ、単に測定時間内の平均水位に対するゼロダウンクロス点を用いて計算すると、有義波高で0~5%、有義波周期で0~3%程度大きくなる。観測ⅠおよびⅡにおいては入射波高が大きかったために、碎波帯内のみの観測にとどまった。観測ⅢにおけるCASE 3~4の観測地点は平均的な碎波点付近

表-3.3.1 観測地点における波浪条件

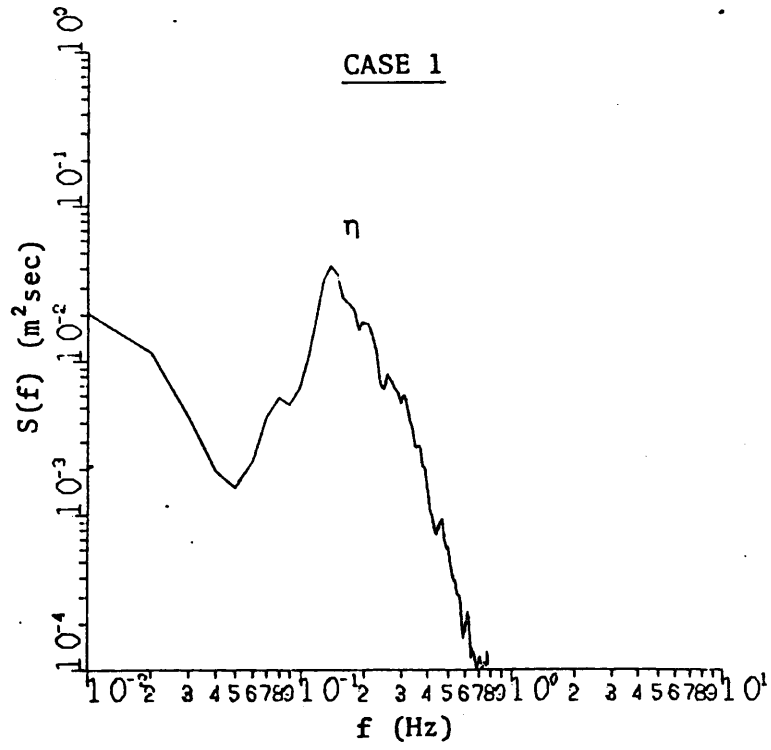
ケース番号		水深 D (cm)	有義波高 H _{1/3} (cm)	有義波周期 T _{1/3} (s)
観測Ⅰ (1978.3.29)	CASE 1	92	62	7.9
	CASE 2	127	65	6.3
	CASE 3	171	99	7.2
観測Ⅱ (1978.12.15)	CASE 1	82	60	7.0
	CASE 2	109	78	7.2
	CASE 3	130	99	7.2
	CASE 4	119	90	6.6
	CASE 5	111	70	6.5
観測Ⅲ (1979.9.5)	CASE 1	217	68	6.4
	CASE 2	162	73	6.8
	CASE 3	127	74	6.8
	CASE 4	119	80	6.3
	CASE 5	104	75	6.3
	CASE 6	92	67	6.5

であり、それ以深のCASE 1 および2の観測地点は碎波帯外であった。

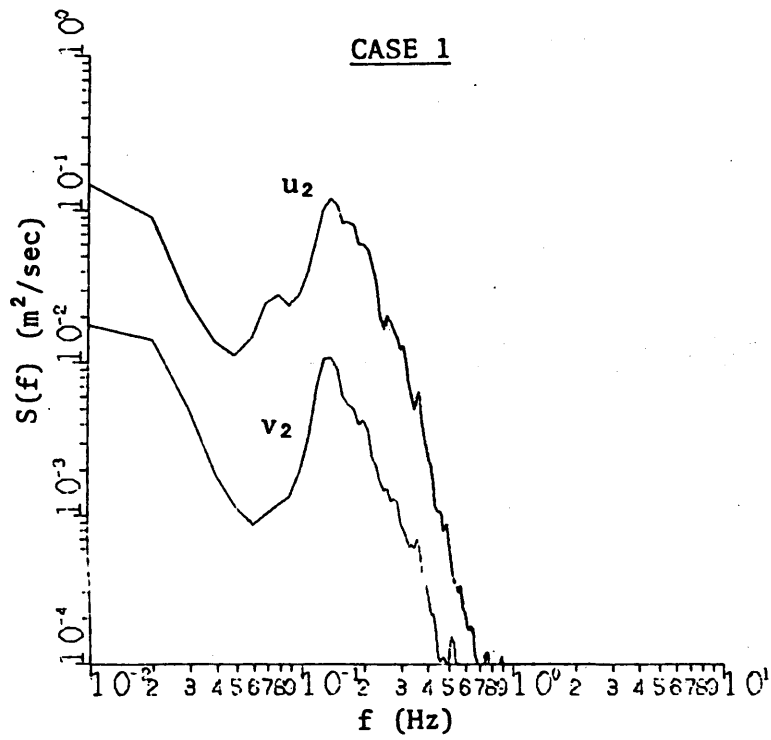
続いて 3.3.2 においては碎波帯付近における水面変動と流速場の特徴を把握するために行ったスプレッドシートの解析の結果について述べ、3.3.3 においては時系列で見た場合の、水面変動と流速変動との関係について述べる。

3.3.2 スペクトル解析結果

図-3.3.2 (a) ~ (d) は砕波帯外と砕波帯内とを代表する観測 I CASE 1 および CASE 6 についての、平均水面を基準とした水面変動、および底面から 60cm の高さにおける岸沖方向および沿岸方向流速 u_2 および u_3 のスペクトル密度関数を示す例である。計算においては、サンプリング間隔 0.2 秒、データ数 4000、ラフ 250 で Blackman-Tukey 法を用いた。なお u_2 も u_3 の周波数 0.15 Hz 程度であり、有義波周期に対応する値にほぼ等しい。高周波数側の減少傾向を比較すると、水面変動および流速とも砕波帯内に位置する CASE 6 の方が緩やかであるものの、かなり急激に減少している。従って波動成分を代表すると考えられるローフ近辺のパワーに比較すれば、乱水成分を代表すると考えられる高周波数領域のパワーは小さい。観測を通じ、ローフ周波数の 3 倍よりも高周波数側にあるパワーは全体の 0~25% 程度であった。しかも実際に乱水成分と考えられるのはさらに高周波数側

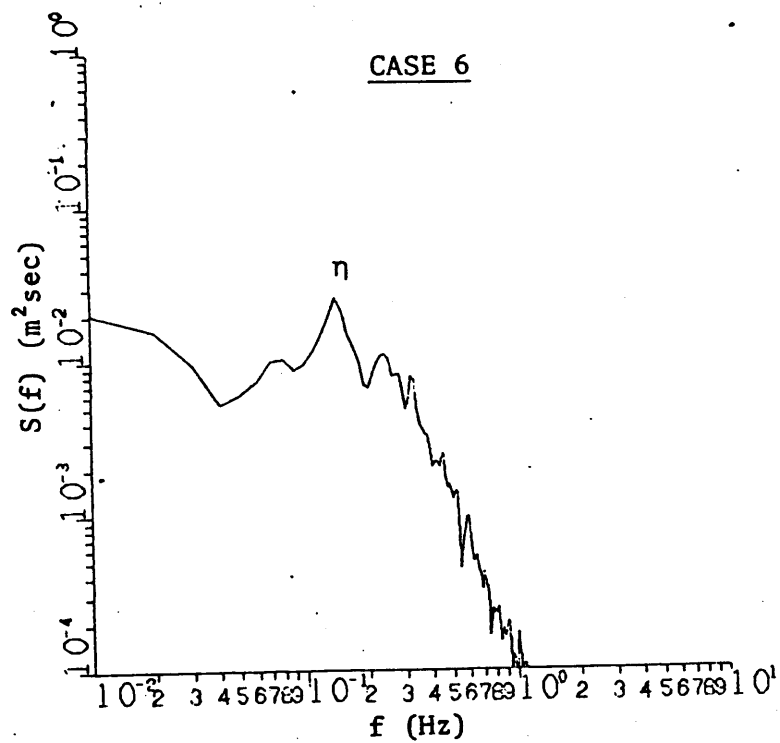


(a)



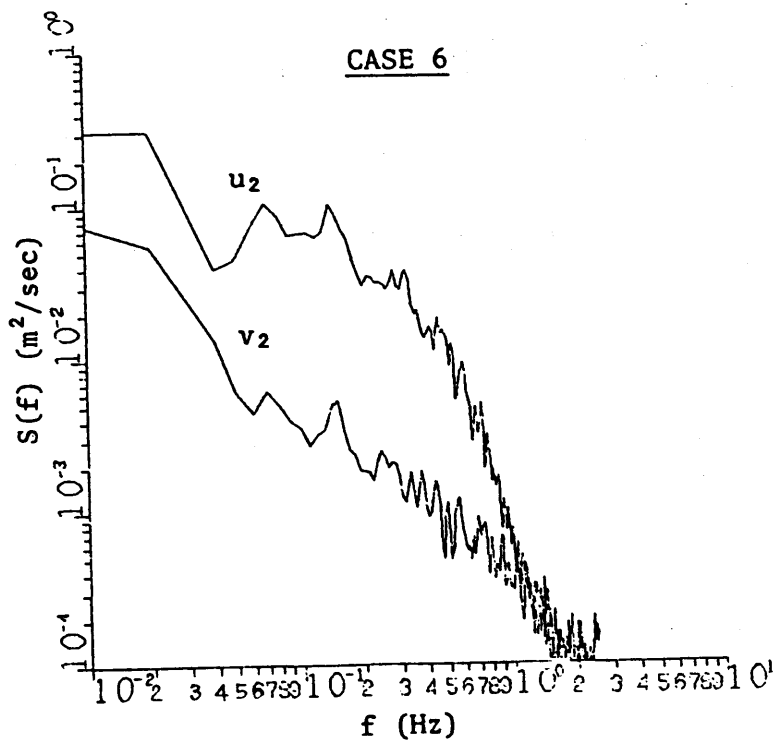
(b)

CASE 6



(c)

CASE 6



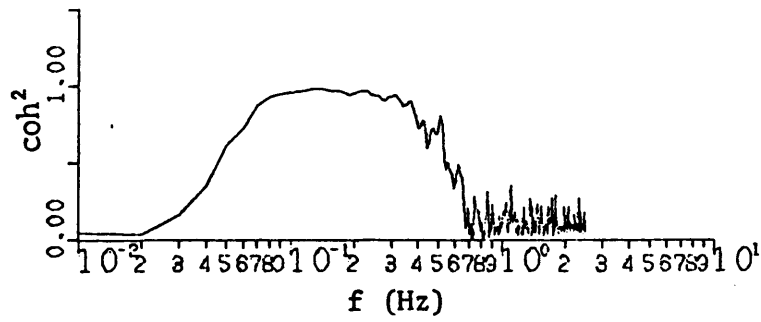
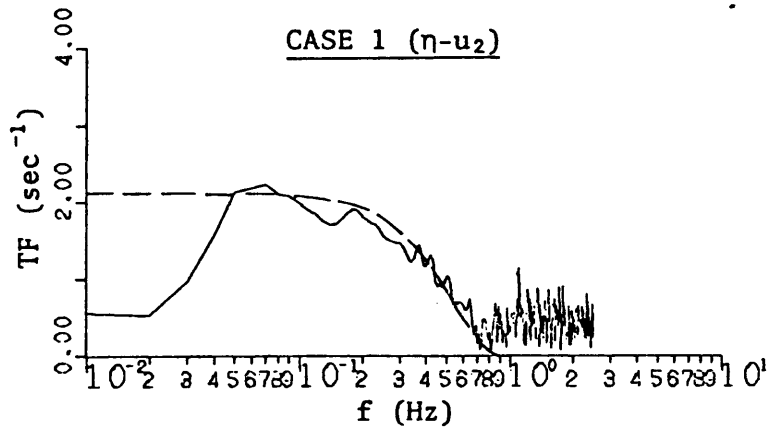
(d)

IV-3.3.2 117-277トル

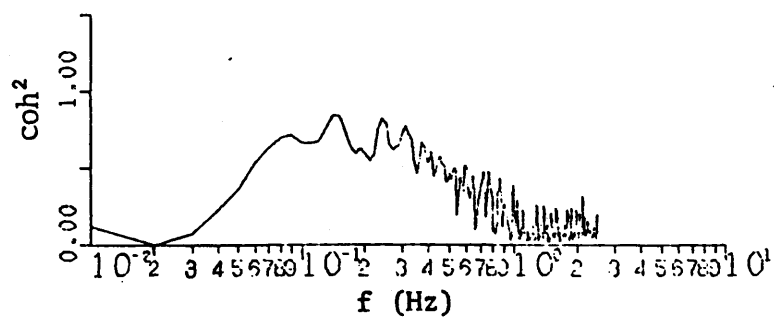
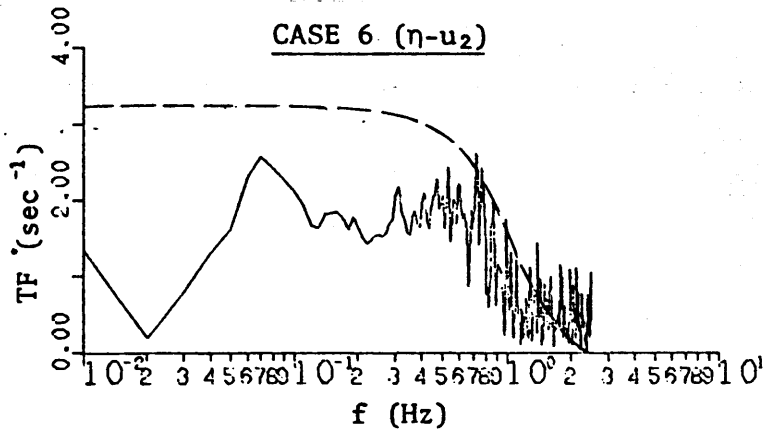
である。従って、エネルギー減衰等のように乱流が空間的な積分量として影響する問題ではなく、局所的な波動運動を問題とする場合には、観測が行なわれたような緩勾配海岸において乱流は副次的な要素であると考えられる。

次に低周波数側を見ると、CASE 6 についてはピーク周波数の $1/2$ である 0.07 Hz 付近に第2のピークが見られ、subharmonic な成分が存在することが見える。特に流速変動については、このピークの方が、有義波周期に対応する基本成分のピーク値よりも大きくなることもある。また、分解能が不十分ではあるが、碎波帯内外を通じ、 $0.01 \sim 0.02 \text{ Hz}$ にもスペクトルのピークが見られる。

以上のような事実について、さらに水面変動と岸沖方向流速との関連において考察する。図-3.3.3(a) および (b) は水面変動と岸沖方向流速との間のクロススペクトルを計算し、結果を伝達関数 TF およびコヒーレンス coh^2 について図示したものの例であり、



(a)



(b)

図-3.3.3 伝達関数およびコヒーレンス

スペクトル密度関数を示したのと同じデータに対するものである。図中、破線は微小振幅波理論を用いた場合の値を示している。砕波帯外に位置する CASE 1 では伝達関数は実測結果と計算結果とはほぼ一致し、コヒーレンスも 1 に近い値になっていて、水面変動と岸沖方向流速との関係を微小振幅波理論により説明し得ることを示している。ただし磯部ら(1980)が示したように、底面付近における測定結果は理論値よりも若干小さな値となっていて、その原因は必ずしも明らかではない。現在のところ、流速測定装置の流束への影響等により、測定結果が小さくなったことが考えられる。砕波帯内に位置する CASE 6 では伝達関数の実測値の方がかなり小さな値となり、しかもコヒーレンスの値が下がっていて、線形的な考え方では説明がつかないことを示している。0.07 Hz 付近の subharmonic 成分については、コヒーレンスの値が基本成分と同程度に大きく、伝達関数の値も同様であることから、進行性の波動成分であると言え

る。0.01~0.02 Hz程度の長周期成分については、コ
ヒーレンスは低いものの、位相差が $\pi/2$ に近く、堀
田ら(1980)によって観測された長周期成分に似てい
る。位相差から考えてエッジ波もしくは岸沖方向の
重複波であることが考えられるが、平面的な測定結
果だけではために、断定することはできない。

3.3.3 波動理論との比較・検討

以下においては岸沖方向流速の定常成分と変動成分とに分けて議論を行なう。特に変動成分については室内実験の場合と同様、各種波動理論の適用性について検討する。

図-3.3.4 は平均流速 \bar{u} を観測地点における平均水深 D を用いた線形長波の波速 \sqrt{gD} により無次元化したものと、底面からの相対的な高さ z/D との関係を図示したものである。記号を黒く塗りつぶした観測点 CASE 1 および CASE 2 の観測地点は碎波帯の外側であり、CASE 3 および CASE 4 では碎波点付近、残りのすべてのケースでは碎波帯内である。波の場の三次元性のため、各ケースにおける鉛直方向の平均値は必ずしも 0 とはならず、正味の質量輸送が生じていることがわかる。しかし、鉛直方向の相対的な変化に着目すれば、底面付近においては $\bar{u} < 0$ 、すなわち沖向きになっており、平均的に見れば平均水面付近との差は $0.07\sqrt{gD}$ 程度になっている。Longuet-Higgins (1953)

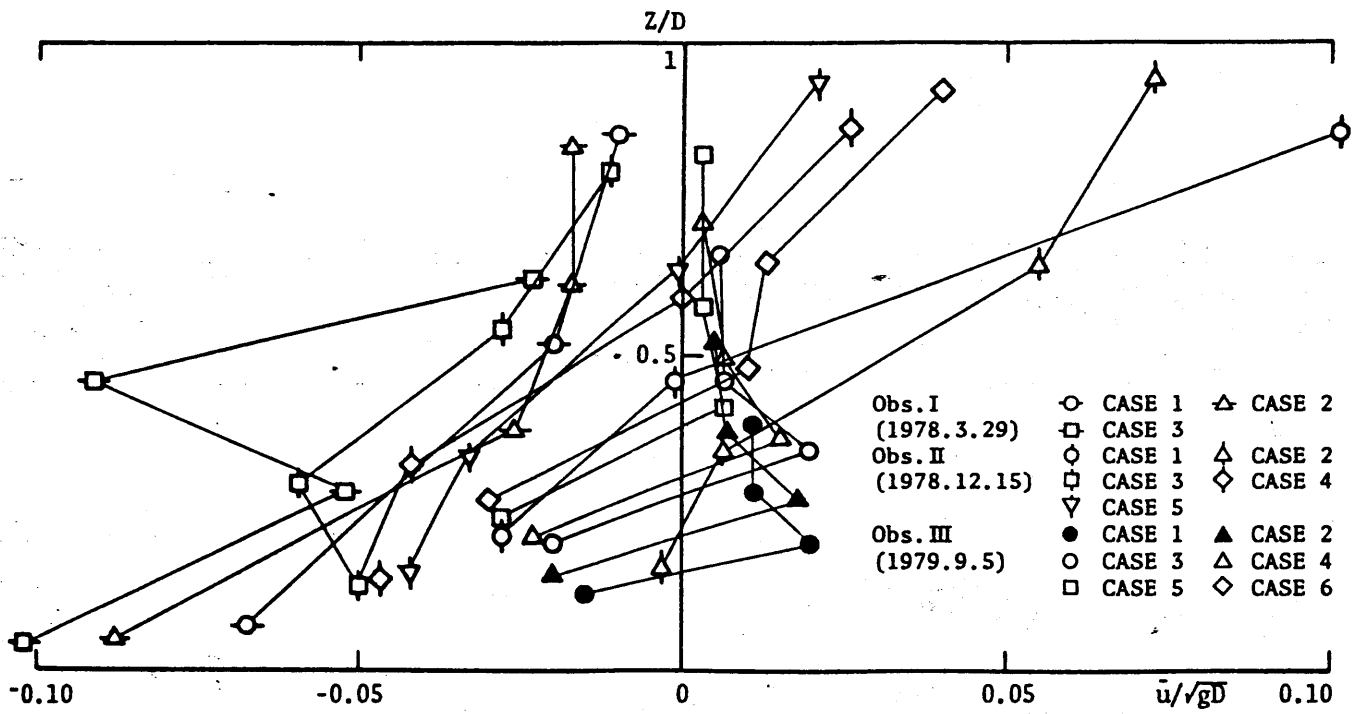


図-3.3.4 岸沖方向平均流速の鉛直分布

は波動による質量輸送について理論的な検討を行ない、底面付近で岸向きとなる質量輸送分布を得ているが、上述の結果とは逆である。むしろ砕波に伴う質量輸送分布は、砕波によって表面付近に生じた岸向きとの質量輸送を底面付近における沖向きとの質量輸送によって補償するという形で形成されていると考えられる。

次に水面変動と岸沖方向流速との関係に対する各種波動理論の適用性を調べる。まず図-3.3.5は砕波帯外において、ストークス波理論またはフノイド波理論を用いて計算した水面変動および岸沖方向流速の計算値と実測値とを比較したものである。計算に際しては、ゼロダウンクロス法を用いて波群を分割し、それぞれの波の平均水深、周期および波高より、アーセル数 gHT^2/c^3 の値が 25 以下であるかそれより大であるかによってストークス波理論とフノイド波理論とを使い分けることとした。図中、実線および点線はそれぞれ実測値および計算値を表す。計算

Obs. III (1979.9.5) CASE 2 (D=1.62m)

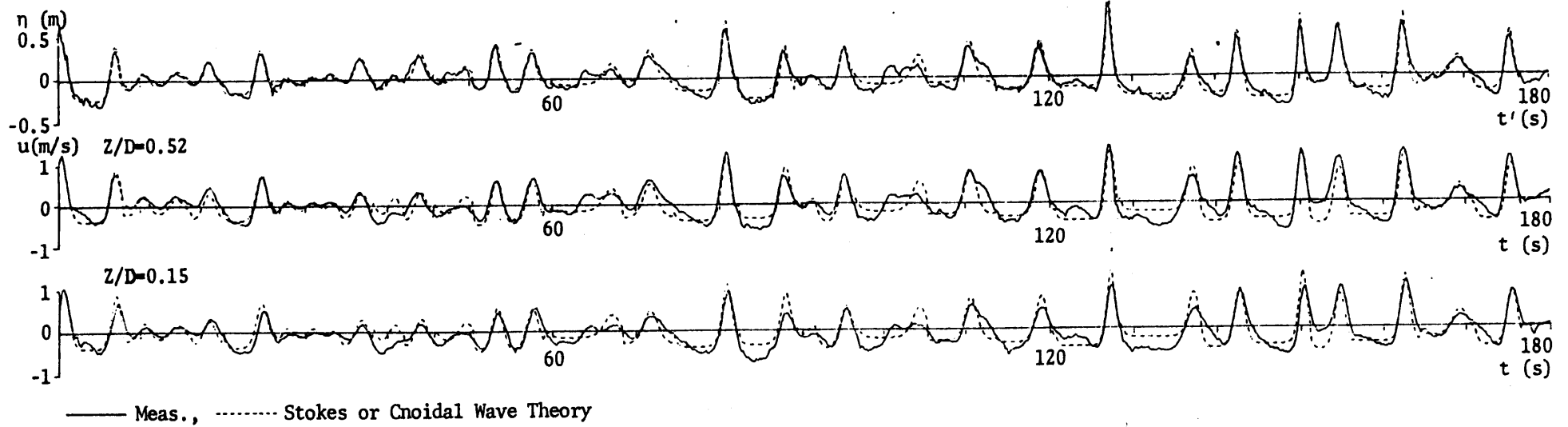


図-3.3.5 岸沖方向流速の実測値と計算値との比較 (ストークス波理論又はクノイド波理論)

133

における個々の波の位相に関しては、波峰が実測のものと同じするように決められている。1段目は水面変動、2・3段目は底面からの相対的高さ Z/D の値がそれぞれ0.52および0.15である点における岸沖方向流速について示している。既に述べたように、底面付近における流速変動の実測値が小さいのは、測定装置の影響であると考えれば、実測値と計算値との一致は全体に良好であると思われる。しかし、波谷の部分において実測結果は計算結果ほど平坦でなく、波形が前傾していることは、規則波を用いた室内実験の場合と同様である。また波群中でも波高の小さな波については規則波の波形と相当異なるものも含まれており、それらについて両者の一致は良くない。

次に、流氷関数法、線形重ね合わせ法および線形長波理論の適用性を調べるため、各理論を用いた計算値と実測値とを比較したものが図-3.3.6(a)~(d)である。各図において最上段は観測時間内における

Obs. III (1979.9.5) CASE 2 (D=1.62m)

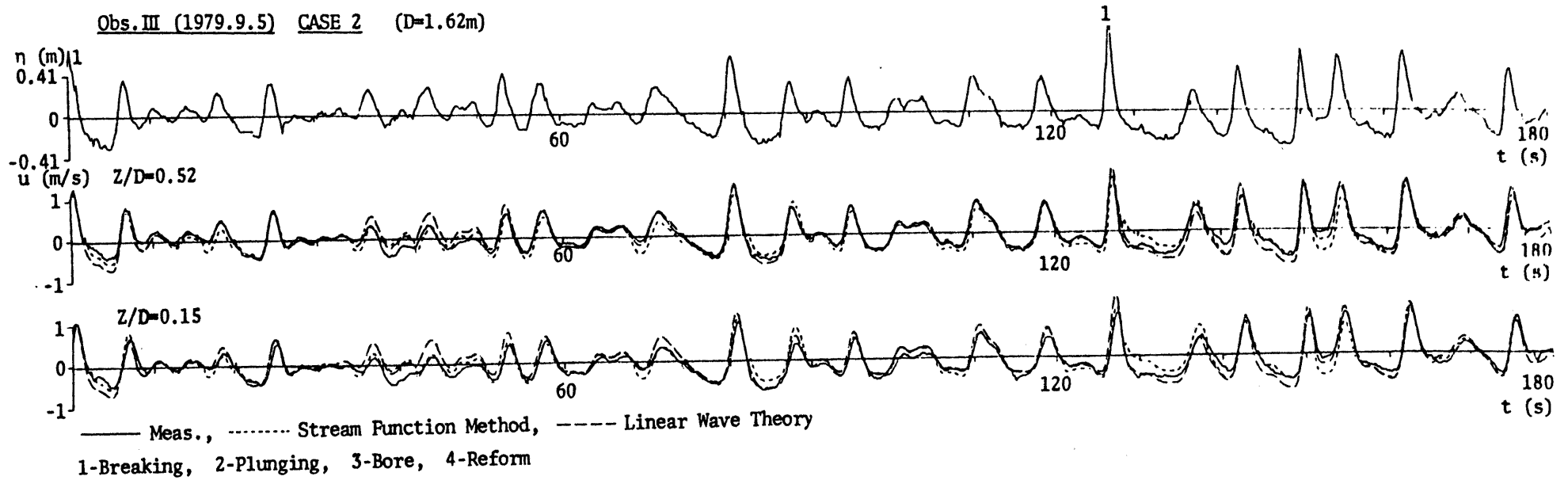


図-3.3.6(a) 岸沖方向流速の実測値と計算値との比較 (線形長波理論・線形重ね合わせ法・流関数法)

131

121

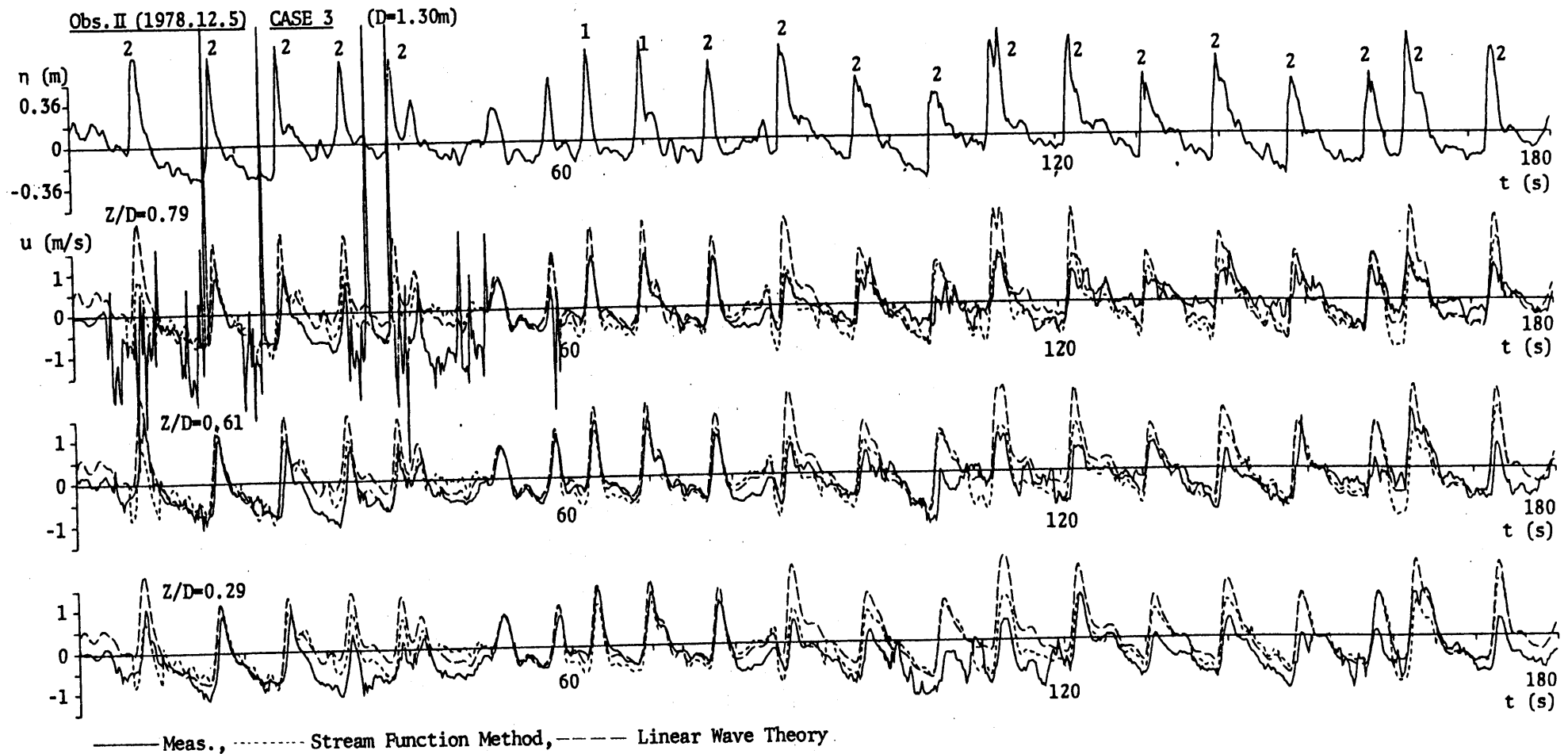
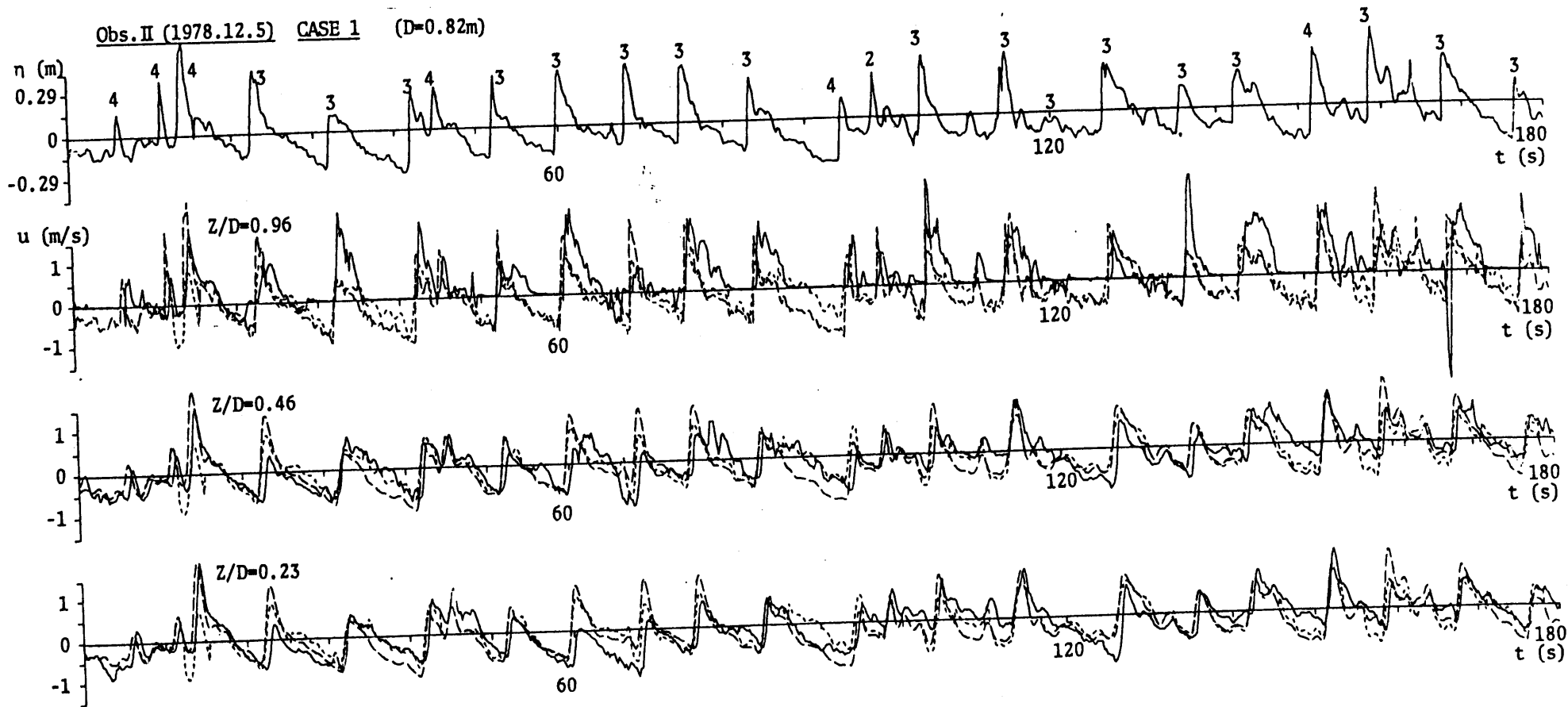


図-3.3.6(4) 岸沖方向流速の実測値と計算値との比較 (線形長波理論・線形重ね合わせ法・流関数法)

Obs. II (1978.12.5) CASE 1 (D=0.82m)



— Meas., - - - Stream Function Method, ····· Linear Wave Theory
 1-Breaking, 2-Plunging, 3-Bore, 4-Reform

四-3.3.6(c) 岸沖方向流速の実測値と計算値との比較 (線形長波理論・線形重ね合わせ法・流関数法)

197

138

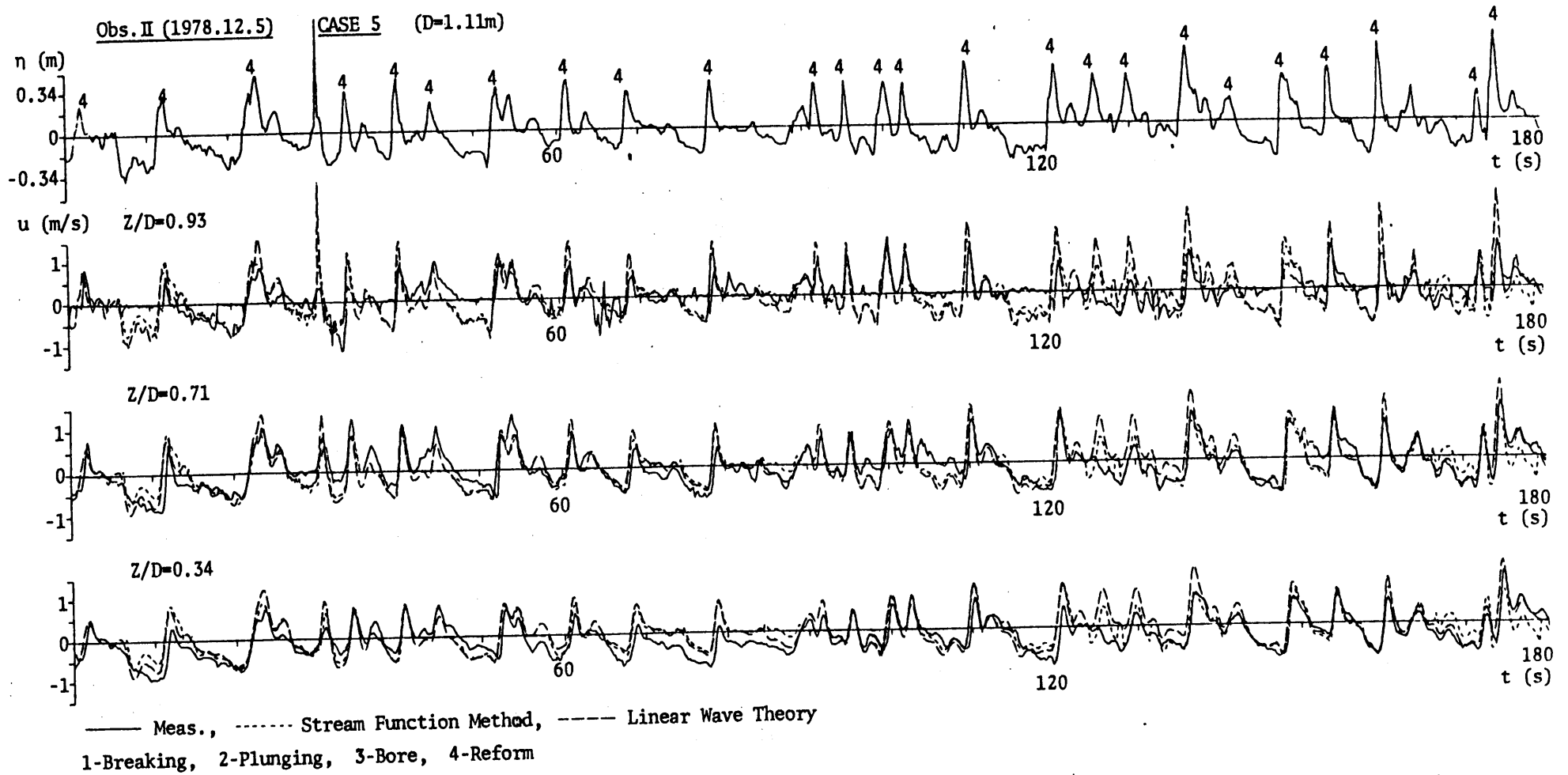


図-3.3.6(d) 岸沖方向流速の実測値と計算値との比較 (線形長波理論・線形重ね合わせ法・流関数法)

平均水面を基準とした水面変動 η を表わすが、縦軸のスケールは2段目以降に示す流速と同じスケールで読み取れば、線形長波理論を用いた場合の岸沖方向流速の計算値となるようにとってある。2段目以降は図中に示す相対的高さにおける流速を表わし、実線、点線および破線はそれぞれ実測値、流し関数法を用いた場合の計算値、および線形重ね合わせ法を用いた場合の計算値を示す。流し関数法の適用に際しては、ゼロダウシフロス法によって波群を分割し、周期3秒以上の波について一波ごとに計算を行なうものとした。線形理論の範囲ではあるが付録Bに示すように、ある時刻における岸沖方向流速に対して同時刻の水位 η が与える影響に比べ、時間 $t \approx 7.6\sqrt{D/g}$ だけずれた時刻の水位 η が与える影響は高々1%である。今、平均水深を1mとすれば、 $t \approx 2.4$ sとなる。従って個々の波の流速場に対し、境界付近を除いては、前後の波の波形の影響をうけることはないと言ってよい。個々の波の境界においては計算結果が不

連続になるが、そのほど顕著ではない。なお、3.3.2
で述べたように、砕波帯内においては長周期成分が
含まれているため、入射波と同程度の周期の成分に
ついて比較するには、長周期成分を除去したものを
用いる方がよい。しかし、ここでは長周期成分をも
含めた流速変動が計算値とどの程度の一致を示すか
という観点から、得られた流速記録そのものとの比
較を行なうこととした。各図において波峰付近に示
した数字は波の状態を示すものであり、無印は砕波
前であること、1は波面が切り立ち、砕波が始まっ
ていること、2は波の突っ込み点付近であること、
3は砕波が完了して段波状になったこと、および4
は波が再成し始めたことを示している。

砕波前に相当する図-3.3.6(a)において、線形重
ぬ合わせ理論および流心関数法による計算値は、と
もに全任として実測結果によく一致している。砕波
点に近づき、非常に切り立った波については、線形
重ね合わせ理論によると若干過大評価の傾向があり、

有限振幅性の影響が現われている。規則波を用いた室内実験の場合には、砕波点付近において流山関数法による計算値が過小評価となっており、この場合と異なる。これは海底勾配の大小による波の変形速度の相違によるものであると考えられる。図-3.3.6 (b) において2段目に示す流速測定結果の一部に雑音が入っているが、前半に多い砕波を開始したばかりの波については流山関数法を用いた計算値とよい一致を示し、線形重ね合わせ法による計算値は若干過大評価となる。後半には測定地点付近で波が突っ込みようになり、計算結果との一致が良くない。これは波の突っ込みにより波動場が乱れるためである。図-3.3.6 (c) において2段目に対応する流速計は、波峰通過時にのみ水中に没するという高さがあり、突出部が空気中に露出している時間帯には出カが0となっている。しかし計算結果は形式的にすべての時間帯について図示してある。砕波帯に多く存在する長周期成分の影響によって一浪ごとの流速

の平均値が、計算結果と若干異なっている。これを
除けば表面付近での限り流氷関数法による計算値
とはよい一致を示していると言えよう。しかし、2
段目に示す表面付近においては、実測値が計算値を
上回る傾向にあり、強い岸向きに質量輸送が生じて
いることを示唆している。図-3.3.6(d)に示すよう
に波が再成を始めると、再び波形が前後対称に近づ
くとともに、流速の実測値と計算値との一致はさら
に良好になる。しかも前回とは異なり、表面付近に
おいても計算値との一致は良好である。

現在までに実施した現地観測はいずれも緩勾配海
岸におけるものであるため、局所的な波の変形速度
は小さく、かつ3.3.2で見たように乱れ成分も波動成
分に比較して小さい。従って流氷関数法を用いるこ
とにより、有限振幅性を考慮すれば3.1で挙げた事
項のうち特に問題となることびなくなる。よって、
水面変動から流速を精度よく推定することびできる
ことになる。なお、線形重ね合わせ理論を用いると、

相対波高の値が大きすぎた場合、表面付近の流速を計算する場合に過大評価になる。それ以外の場合、たとえば底面流速を計算する際などには、実用上その程度問題は無いようである〔磯部ら(1979)〕。

3.4 水深変化に伴う流速場の変化

3.4.1 砕波帯外における流速場の変化

(1) エネルギーフラックス法

まずエネルギーフラックス法について略述する。
定常的な二次元の波動運動を考え、粘性によるエネルギー減衰を無視すれば、各水深におけるエネルギーフラックス F は一定の値となる。[たとえば Phillips (1977)]

$$F = \overline{\int_{-D_0}^{\xi} u \{ (\rho/2)(u^2 + w^2) + \rho g Z' + P \} dZ'} = \text{const.}$$

(3.4.1)

ここに Z' および ξ はそれぞれ水静水面を基準とした鉛直座標および水位であり、 D_0 は静水深、 u および w はそれぞれ岸沖方向および鉛直方向流速であって、
— は一周期にわたる平均値を表わすものとする。
ここで局所的には波が保存波であると見なし得るとすれば、ベルヌーイの定理より

$$(\rho/2)(u^2 + w^2) + \rho g Z' + P = -\dot{\Phi} = C \dot{\Phi}' = C u$$

(3.4.2)

となる。ここに、 Φ は速度ポテンシャルであり、 X' は岸沖方向座標、 t は時間、 C は波速を表わす。式(3.4.2)を式(3.4.1)に代入すれば

$$F = C \int_{-D_0}^{z_0} u^2 dz' = \text{const.} \quad (3.4.3)$$

となる。深海における波高 H_0 および周期 T を与えれば F の値が決定されるから、任意の水深においてエネルギーフラックスの値および周期が等しくなるように波高を決定すればよい。

実際の計算に際しては、磯部ら(1978)による波速の第2定義を用いた場合のストークス波理論第5次近似解又はクノイド波理論第3次近似解を用いた。第2章の結果に従ってそれぞれアーセル数が25以下とそれより大である場合とで使い分け、式(3.4.3)の数値積分を行なった。

なお、以下において用いる水面変動および流速の実測値は、それぞれの同位相平均値である。碎波帯外においては一浪ごとの変動が小さいため、代表値として特に問題は無い。

(2) 波高変化

図-3.4.1 はエネルギーフラックス法を用いて計算した波高の浅水変化と実験Ⅱの実測結果とを比較したものである。横軸および縦軸にはそれぞれ平均水深および波高を、微小振幅波理論を用いた場合の沖波波長 L_{0s} によって無次元化した相対水深 D/L_{0s} および波形勾配 H/L_{0s} がとってある。実線は計算値、点線によって結ばれた折れ線は実測結果を示している。なお下部には微小振幅波理論による計算値を沖波波形勾配 0.002 について示してあるが、これを上方へ平行移動して有限振幅波理論を用いた場合の計算値と比較すると、波高増大量が相当小さくなっていることがわかる。実測された波高変化は若干ばらついているものの、砕波点近傍を除いて有限振幅波理論を用いた計算値とよく一致を示すことがわかる。しかし、砕波点に近づくにつれて計算結果では急激に波高が増大するのに対し、実測結果ではそれ程ではない。このような傾向が現われる水深は波形勾

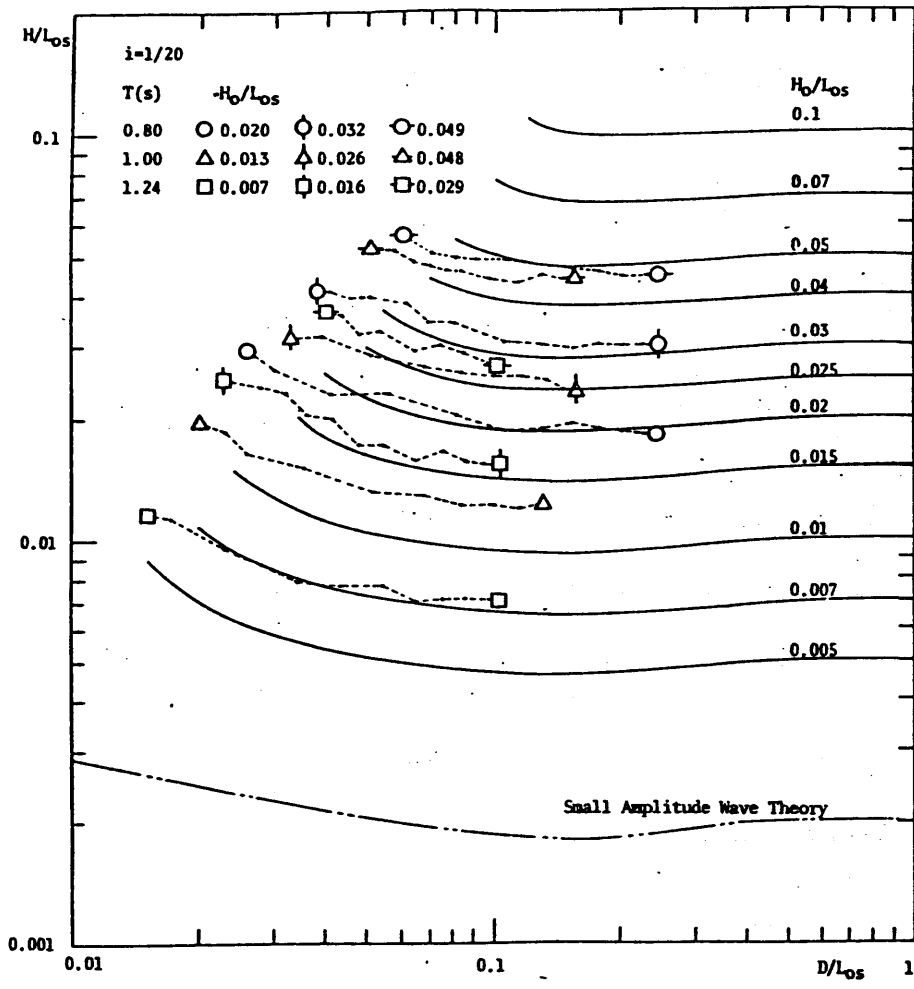


図-3.4.1 波高の浅水変化の計算結果と実測結果との比較

配の値によって異なる。いすれにしても波形が前後対称なものから前傾化するようになるのに対応している。局所的な保存波の仮定が満足されていなければ、海底勾配の影響を調べるために、実験Ⅱの $1/10$ 勾配およびステップ型斜面、Hansen: Svendsen (1979) による $1/34.26$ 勾配を用いた実験結果をも同様に検討した。その結果、砕波点に至る海底勾配が緩やかなほど確かにエネルギーフラックス法を用いた計算結果に近く、 $1/34.26$ 勾配では計算結果とほぼ一致した。なお、極く緩勾配の斜面における砕波を除いて、砕波波高は保存波の限界波高を越えてしまい〔倉田(1970)〕、エネルギーフラックス法の適用が不可能な領域がある。波高変化のみに着目するならば首藤(1974)の計算結果が砕波点に至るまで実験結果とよい一致を示すようである。しかし、首藤の計算によっても結果の式には海底勾配の影響が入らないため、実験結果を十分に説明し得るものではない。

(3) 岸沖方向流速の変化

振幅変化

図-3.4.2 はエネルギーフラックス法を用いて計算した岸沖方向流速振幅の浅水変化を示すものである。縦軸には波高に対応する岸沖方向流速の全振幅を、微小振幅波理論を用いた場合の沖波波速 $C_{os} = gT/2\pi$ により無次元化したもの、横軸には波高変化の場合と同様に相対水深 D/L_{os} となっている。図中において、実線および破線はそれぞれ海底面および平均水面に対応する結果を示している。なお、沖波波形勾配の値を 0.002 とし、微小振幅波理論を用いて計算した場合の結果が、海底面および平均水面に対応してそれぞれ二点鎖線および三點鎖線で示されている。これを上方に平行移動して有限振幅波理論を用いた場合と比較すれば、波形勾配が大なる場合に若干過大になるものの、かなり近い値を与えることがわかる。この傾向は式 (3.4.3) よりある程度理解される。すなわち、 u の振幅を等しくした場合、有限振幅波理論によって得

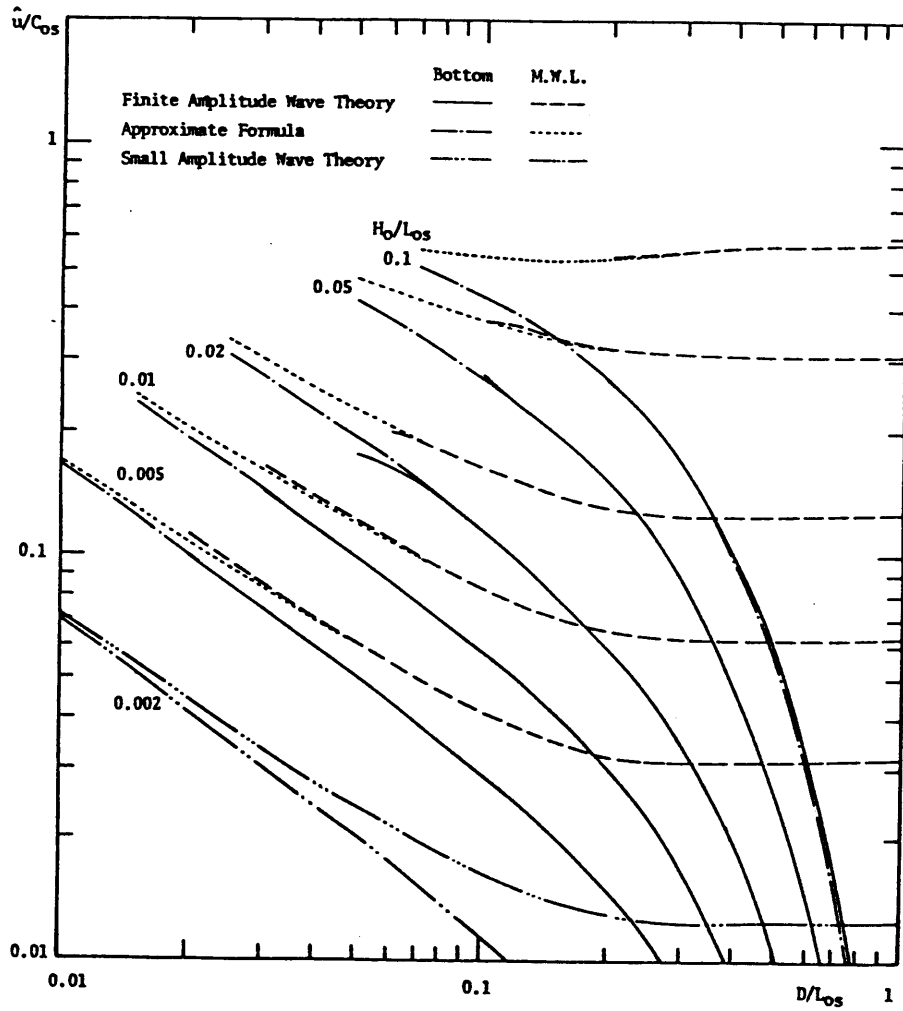


図-3.4.2 岸沖方向流速全振幅の浅水変化の計算結果

ら出る尖った流速波形の自乗平均値は、正弦波形の自乗平均値よりも小さい。しかし波峰水位が高いために u^2 の値が大である時の積分区間が広いために、積分値そのものとしては近づく傾向にある。しかも流速は両理論でそれほど大きな差がないために、流速の振幅の計算結果に大きな差が現れぬのである。

このような事情から、後の便宜のために、有限振幅波理論を用いた場合の流速の全振幅 \hat{u} の値を、微小振幅波理論を用いた場合の流速の全振幅 \hat{u}_s の値に補正係数 γ を乗ずることによって近似的に表現する。

$$\hat{u} = \gamma \hat{u}_s \quad (3.4.4)$$

γ の関数形については、簡単でしかも5%以上の誤差を含まないという観点から、次のように決定した。

$$\gamma = \gamma_1 - \gamma_2 \exp \{-\gamma_3 (D/Los)\} \quad (3.4.5)$$

ここに、

$$\gamma_1 = \begin{cases} 1 & \text{(底面)} \\ \exp \{-8.6 (H_0/Los)^2\} & \text{(平均水面)} \end{cases} \quad (3.4.6)$$

$$V_2 = 3.2 (H_0/L_0s)^{0.65} \quad (3.4.7)$$

$$V_3 = -27 \log_{10}(H_0/L_0s) - 17 \quad (3.4.8)$$

である。なお、底面流速に関しては、波形勾配が大きく水深が大きなる領域において、有限振幅波理論による計算値の方が大きくなるが、底面流速の絶対値が小さいので無視した。図-3.4.2における一点鎖線および点線は式(3.4.4)~(3.4.8)で与えられる近似式を示したものである。なお、本来この近似式は保存波の存在範囲内にも適用されるべきであるが、保存波の限界を越えても有限振幅性の影響の傾向は持続するであろうとの推測から、図中には若干拡張した領域まで描いてある。

図-3.4.3(a)~(c)は波高最大点に至る底面付近の岸沖方向流速全振幅の浅水変化について、実験Ⅱの実測結果と近似式を用いた計算結果とを比較したものである。3種の図はそれぞれ1/20、1/10勾配斜面、およびステップ地形に対するものである。一点鎖線は図-3.4.2と同様に底面流速全振幅の浅水変化に

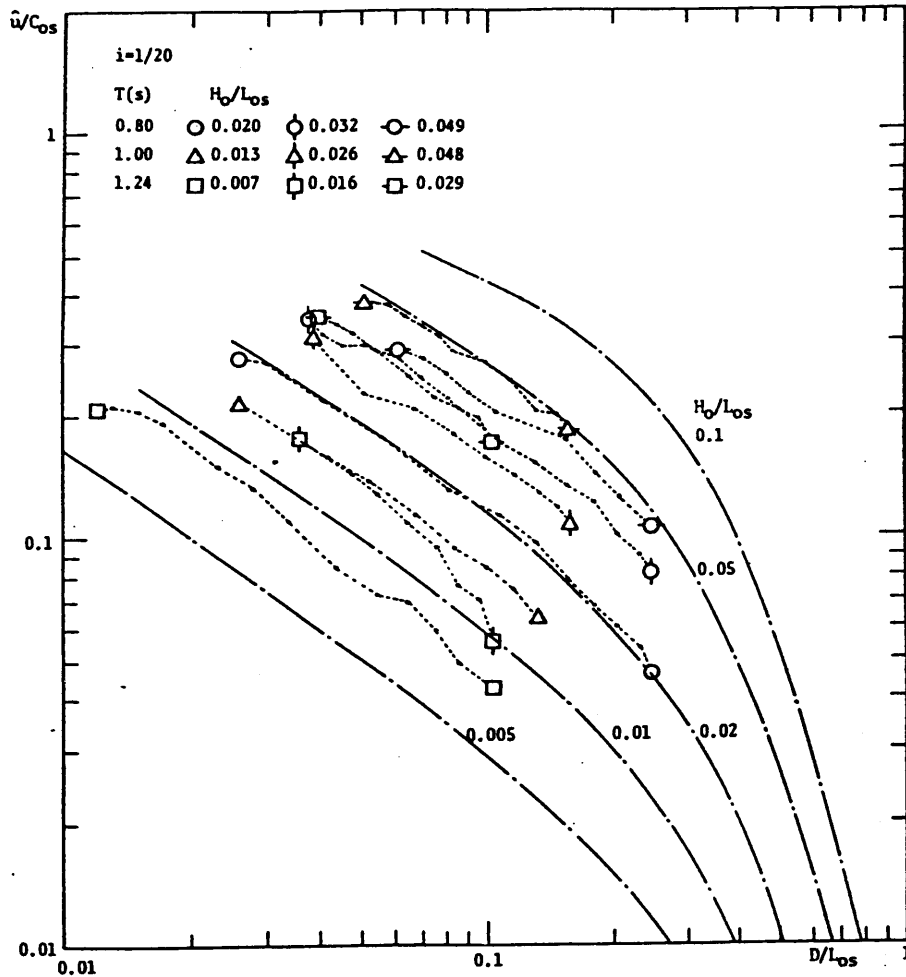


図-3.4.3(a)

岸沖方向流速全振幅の
浅水変化の計算結果と
実測結果との比較

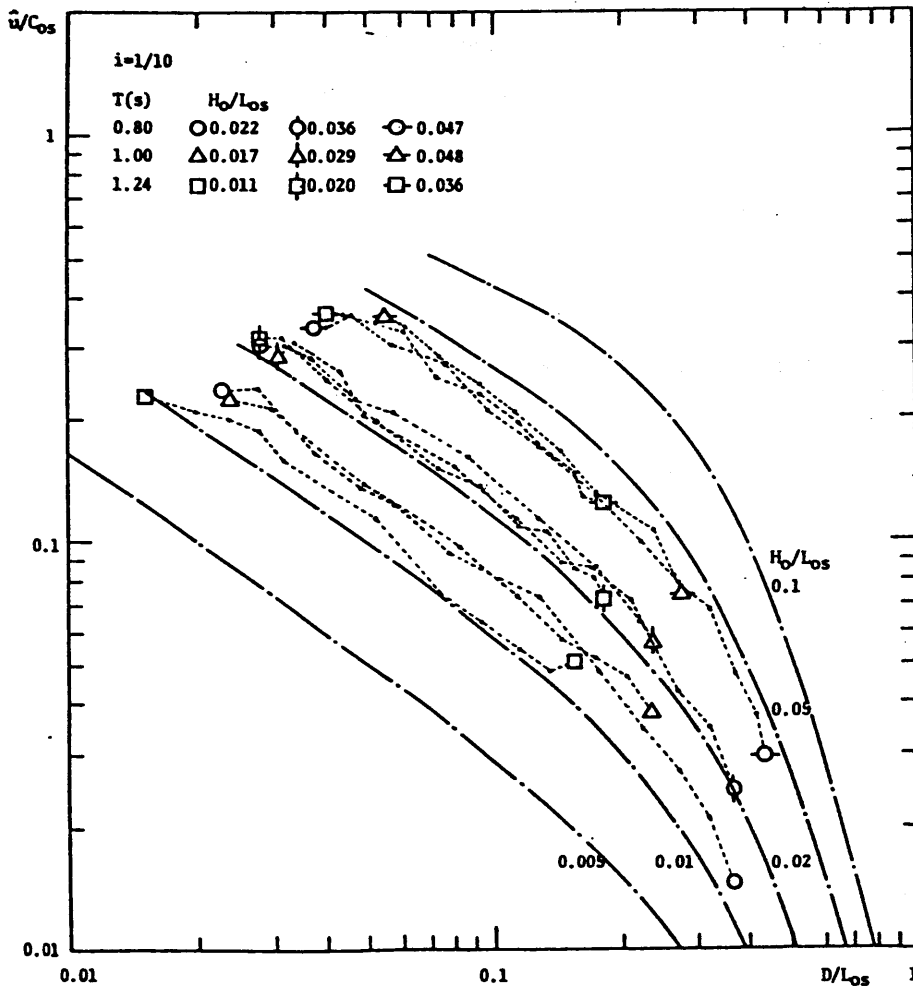
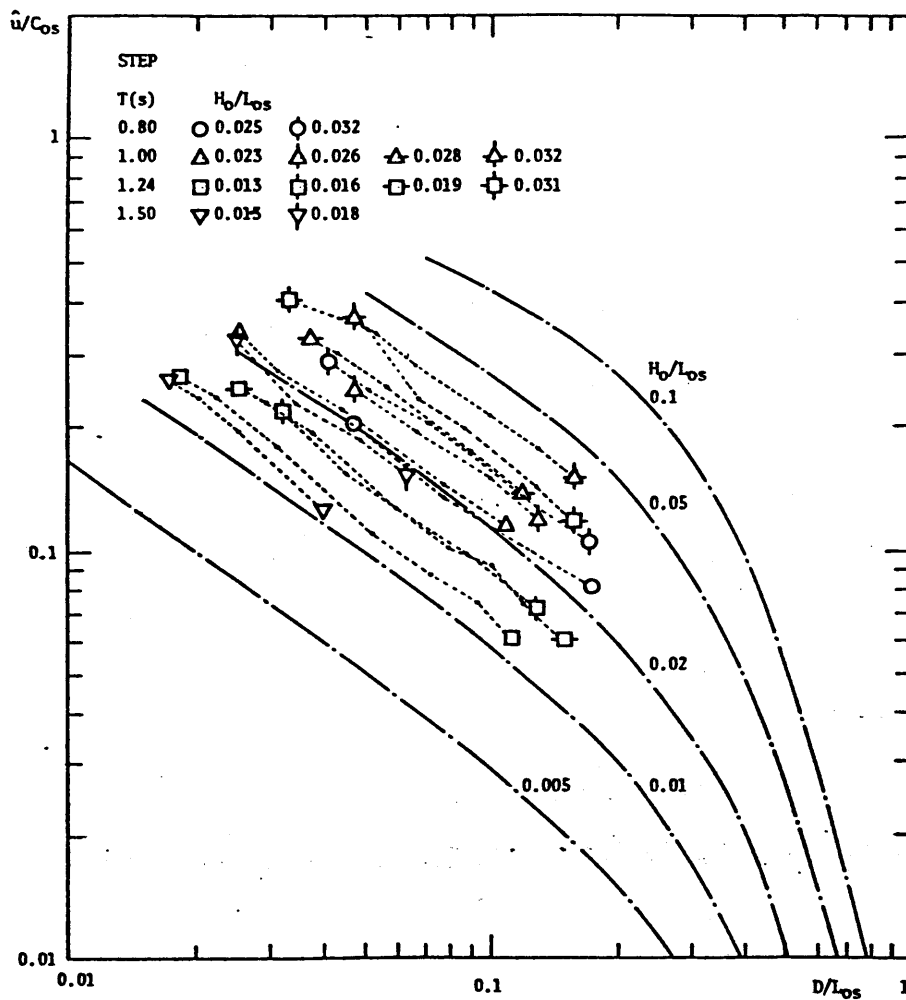


図-3.4.3(b)

岸沖方向流速全振幅の
浅水変化の計算結果と
実測結果との比較



(c)

図-3.4.3(c) 岸沖方向流速全振幅の浅水変化の
 計算結果と実測結果との比較

対する近似式を用いた計算結果を表わし、折れ線は実測結果を表わしている。図中、(a)の記号○, (b)の記号○, φ, (c)の記号○, 母のケースは、流速計の感度が変化したり、校正値が不正確であったと思われる。これらを除き、計算結果と実測結果とは、斜面勾配によらず砕波点に至るまでよい一致を示している。

この理由について考察するために式(3.4.3)に着目する。まず砕波点付近においては波の変形はかなり著しいものの、近似的に式(3.4.3)によってエネルギーフラックスが評価できるとある。ところで式の中の積分値は岸沖方向流速 u の振幅には敏感であるが、流速波形、特に前傾化の程度には敏感でない。さらに砕波前の波速については実測値と理論値とがよい一致を示す。従ってある岸沖方向流速振幅に対し、保存波の理論によって与えられる波速と流速波形とを用いても、精度よくエネルギーフラックスを評価できると考えられる。それ故、遂にあるエ

エネルギーフラックスの値に対応する岸沖方向流速振幅を求めた場合に、実測値に近い値を与えることになる。ところで水面変動とエネルギーフラックスとの関係は間接的である。既に述べたように $1/10$ および $1/20$ 程度の勾配において、波が定形進行波であるとの仮定に基づく流況関数法を用いて碎波点付近の岸沖方向流速を計算すると過小評価になる。従って逆に、同一の流速振幅に対応する波高の計算値は大きくなる。このようなことから、エネルギーフラックス法を用いて計算した波高変化は碎波点付近において過大評価になるのであろう。

流速波形の非対称性

次に流速の時間波形の浅水変化に関して考察を行なう。既に見たように碎波点付近の流速波形は複雑であり、これを正確に把握することは容易でない。ここでは波形の特徴を代表する2つのパラメータに関して検討を行なう。その第1は変動流速の最大値

と全振幅との比 U_c/A であり、模式図-3.4.4 に示す
ごとく正負の非対称性を代表するパラメータとなる。
第2は時間波形の尖度を表わすパラメータであり、
直感的には変動流速の値が正である時間と周期との
比が考えられる。しかし、図-3.2.5(a) No. 9 の流
速波形のように、0点付近において裾を引くような
形になる場合があるため、この定義は尖度を表わす
パラメータとして必ずしも適当でない。このため、
模式図-3.4.4 に示すように、変動流速の最大値の
 $1/2$ を超える時間に着目し、その1.5倍の値 T_c と周期
 T との比 T_c/T を考えた。なお1.5 という数値は、正
の側の流速波形が正弦的であると仮定した場合に、
 T_c が正の流速を生じる時間となることから決めてあ
る。

このように定義された2つのパラメータを用いれ
ば、次項で述べるように実測結果に近い流速波形を
再合成することができ、流速波形変化を含めた浅水
変化を予測することが可能である。

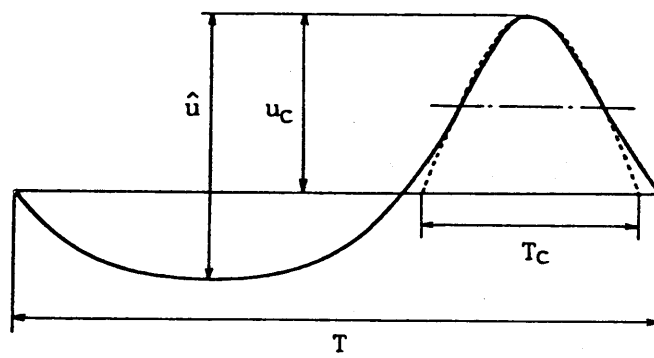
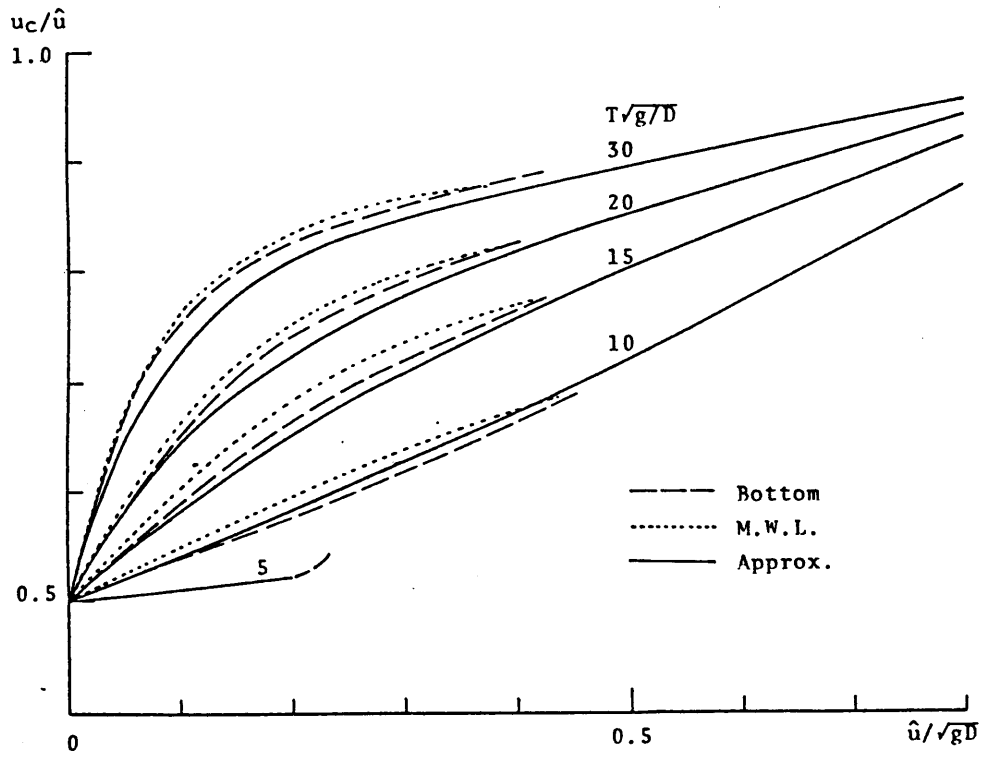
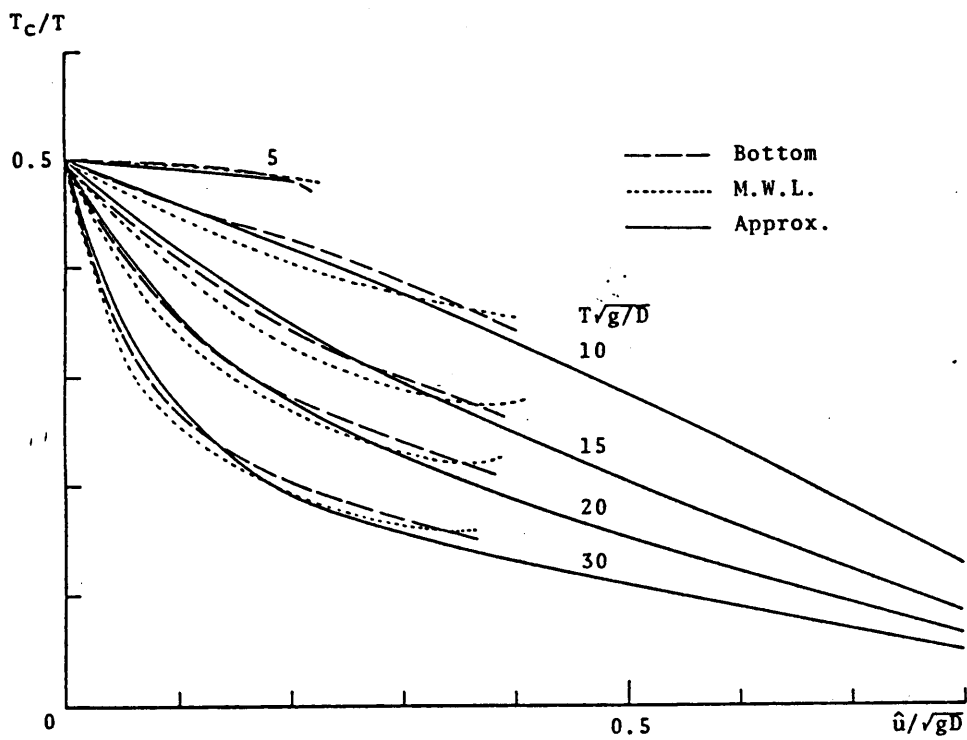


図-3.4.4 波形の非対称性に関する定義図

図-3.4.5 は第2章の結果に従ってストークス波理論およびクノイド波理論をアーセル数25を境として使い分け、定常成分を除いた変動流速成分について非対称パラメータ u_c/\hat{u} を計算した結果である。横軸には無次元流速全振幅 \hat{u}/\sqrt{gD} がとっており、無次元周期 $T\sqrt{g/D}$ をパラメータとして、底面および平均水面における計算結果がそれぞれ実線および点線で示してある。図-3.4.6 は尖度パラメータ T_c/T について同様に図示したものである。これらの図より、保存波の理論を用いた場合、底面と平均水面とにおける2つのパラメータの値には大きな差がみられないことがわかる。しかも2つのパラメータの値の和はほぼ1となる。このことは上述の定義を用いて変動流速波形の正および負の側を、それぞれ周期 $2T_c$ および $2(T-T_c)$ 、片振幅 u_c および $(\hat{u}-u_c)$ の正弦波形で近似した場合に、平均値が0となることを示している。これはそのような近似の妥当性を間接的に示すものである。ここで後の便宜のため、計算結果を



四-3.4.5 非対称パラメータの計算結果



四-3.4.6 尖度パラメータの計算結果

近似式で表現しておく。上述の2点から底面と平均水面とにおける結果の差は無視し、さらに非対称パラメータと尖度パラメータとの和は1であるとある。式(3.4.9) ~ (3.4.15)はこの条件で決定された近似式である。なお、係数の決定に際しては、まず $\hat{u}/\sqrt{gD} = 0$ において $u_c/\hat{u} = 0.5$ とし、また計算結果の延長線の傾向から $\hat{u}/\sqrt{gD} = 1$ において $u_c/\hat{u} = 1$ とした。残る2つの係数は $\hat{u}/\sqrt{gD} = 0.4$ 付近における値、および $\hat{u}/\sqrt{gD} = 0$ における微係数の値の誤差が小さくなるように定めた。

$$u_c/\hat{u} = \lambda_1 + \lambda_2 (\hat{u}/\sqrt{gD}) + \lambda_3 \exp\{-\lambda_4 (\hat{u}/\sqrt{gD})\} \quad (3.4.9)$$

$$T_c/T = (1-\lambda_1) - \lambda_2 (\hat{u}/\sqrt{gD}) - \lambda_3 \exp\{-\lambda_4 (\hat{u}/\sqrt{gD})\} \quad (3.4.10)$$

ここに

$$\lambda_1 = 0.5 - \lambda_3 \quad (3.4.11)$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 \lambda_4 + \lambda_5 \quad (3.4.12)$$

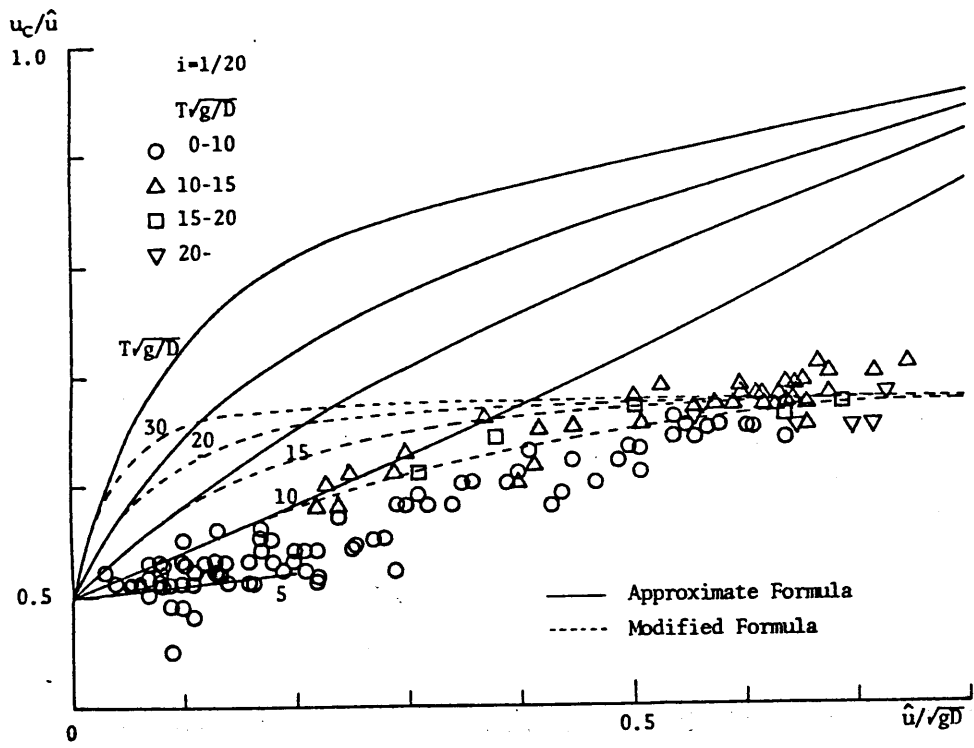
$$\lambda_3 = (0.5 - \lambda_5) / \{ \lambda_4 - 1 + \exp(-\lambda_4) \} \quad (3.4.13)$$

$$\lambda_4 = \begin{cases} -15 + 1.35 (T\sqrt{g/D}) & (T\sqrt{g/D} \leq 15) \\ -2.7 + 0.53 (T\sqrt{g/D}) & (T\sqrt{g/D} > 15) \end{cases} \quad (3.4.14)$$

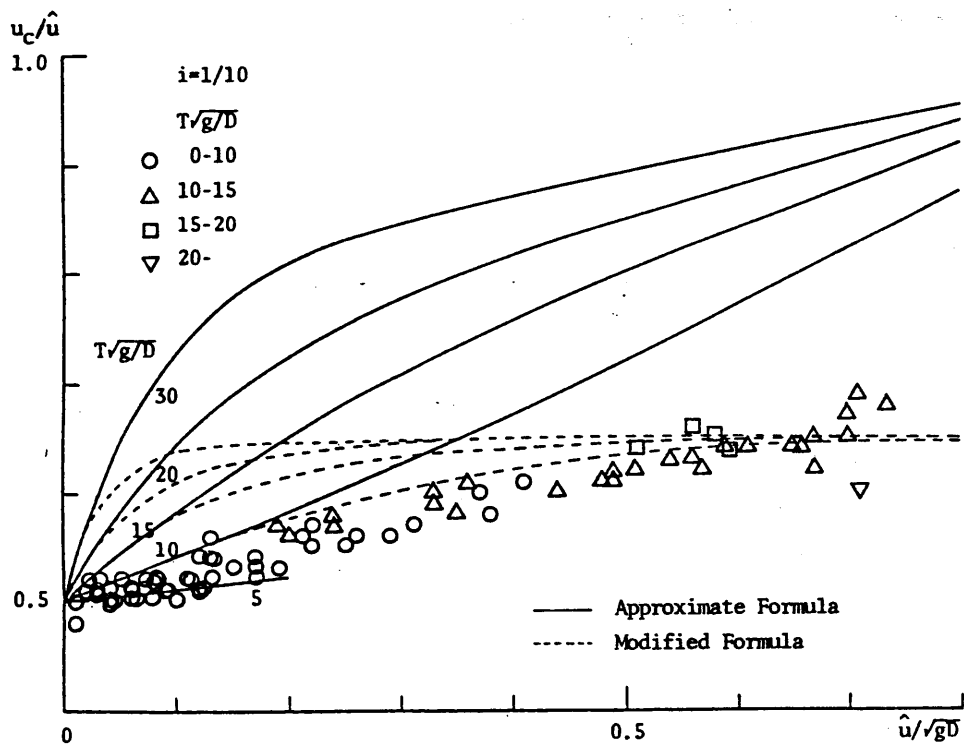
$$\lambda_5 = \begin{cases} 0.0032 (T\sqrt{g/D})^2 + 0.000080 (T\sqrt{g/D})^3 & (T\sqrt{g/D} \leq 30) \\ 0.0056 (T\sqrt{g/D})^2 - 0.000040 (T\sqrt{g/D})^3 & (T\sqrt{g/D} > 30) \end{cases} \quad (3.4.15)$$

図-3.4.5および3.4.6における実線は近似曲線を保存波の存在限界を越えた領域にまで形式的に拡張して描いたものであるが、もとの曲線と比較して精度の面から実用上問題となることは無いと思われる。

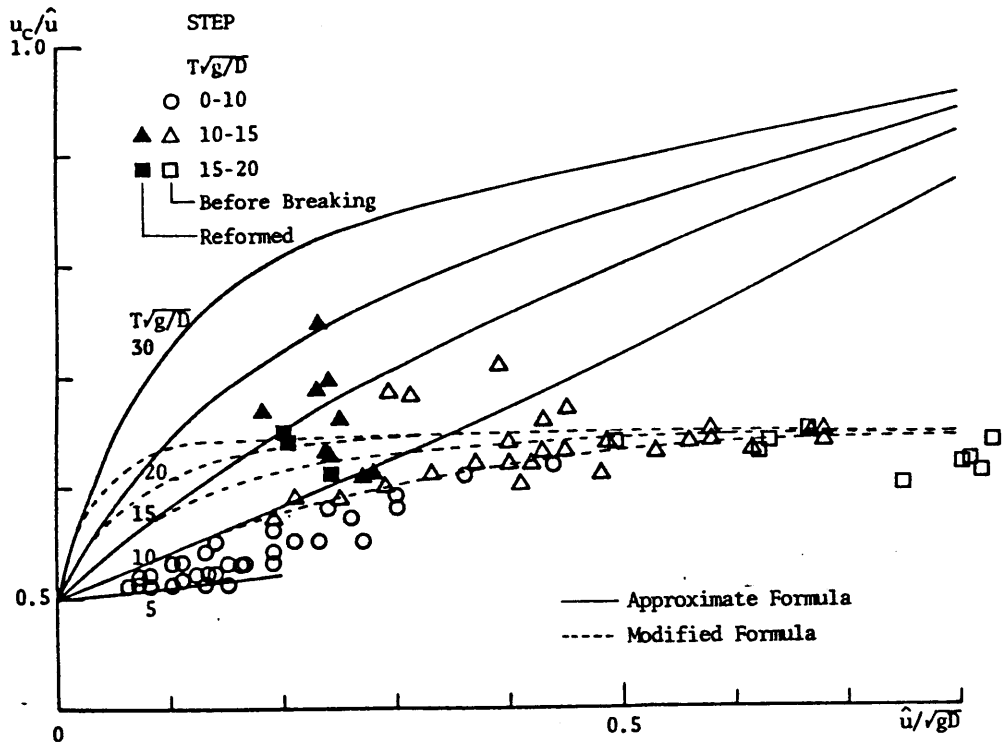
図-3.4.7(a)~(c)の白板の点は、それぞれ1/20勾配斜面、1/10勾配斜面およびステップ地形について、底面付近における非対称パラメータ u_c/\bar{u} の実測結果を示したものである。記号は無次元周期 $T\sqrt{g/D}$ の値によって分けられており、実線は近似式(3.4.9)および(3.4.11)~(3.4.15)を用いた場合の計算値を示す。無次元流速全振幅 \bar{u}/\sqrt{gD} の値が、1/20勾配斜面で0.3、



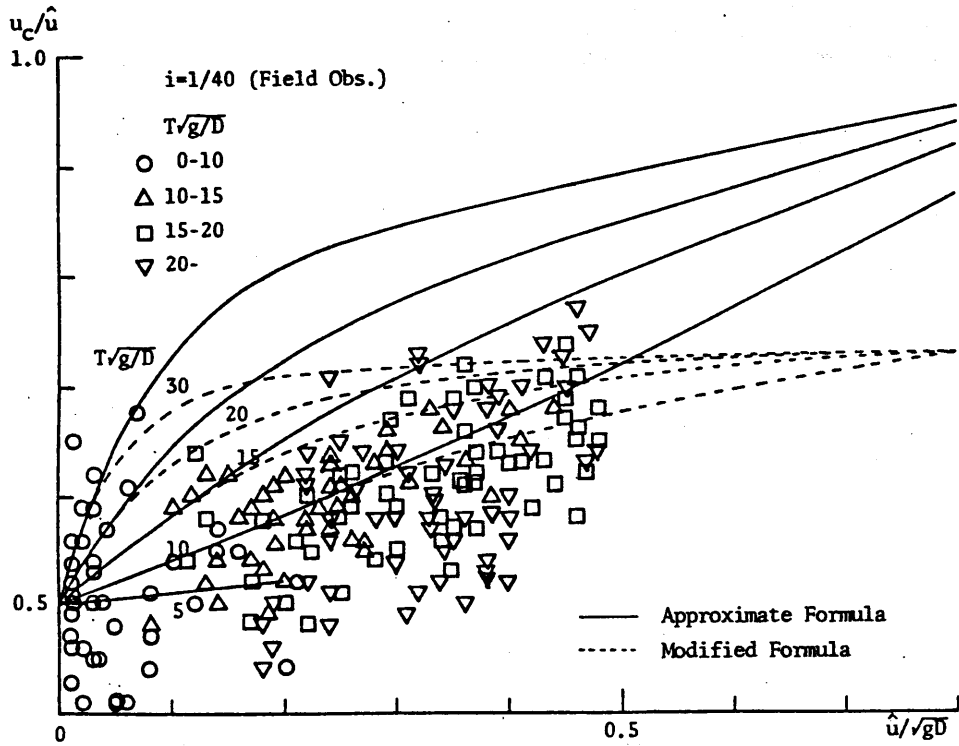
(a)



(b)



(c)



(d)
 四-3.4.7 非対称パラメータの計算値と実測値との比較

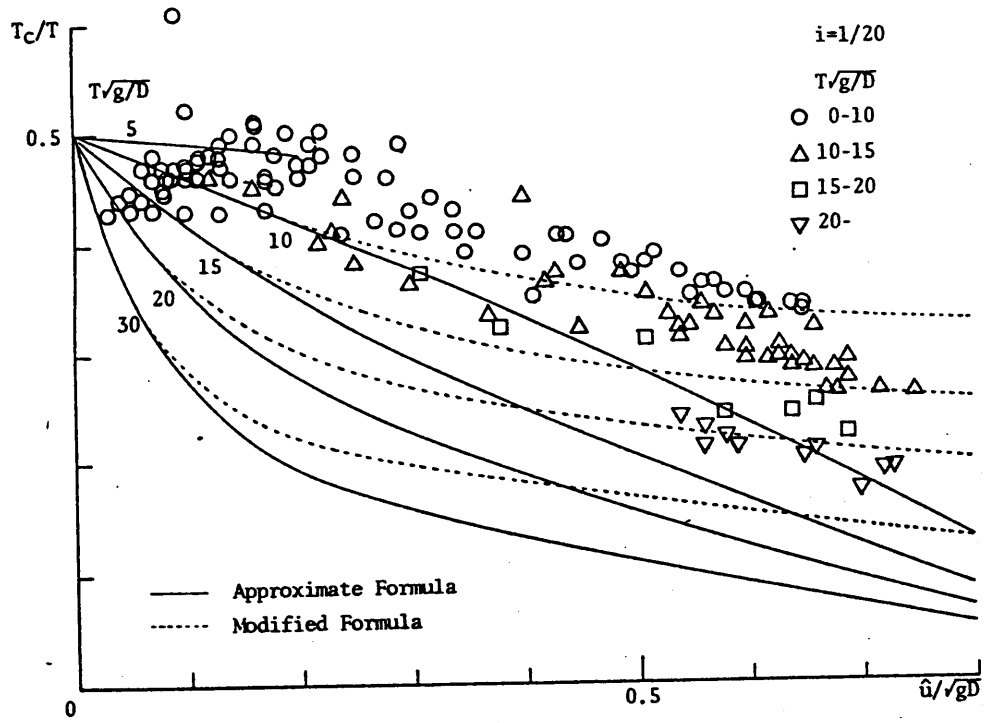
1/10 勾配斜面およびステップ地形については0.2程度までは計算結果との一致が良好である。この範囲においては波形も前後対称であり、局所的に保存波であると見なし得ることを示している。しかし、無次元流速全振幅の値がそれ以上になっても、非対称パラメータの実測値は計算値ほど増大せず、むしろ一定の値に近づく傾向にある。計算では保存波の理論を用いているために、波谷部分が平坦な流速波形になる。しかし、実際には斜面勾配の影響により、図-3.2.5(a) No.9 のごとく波が前傾化し、波谷が平坦でないために負の最大流速の絶対値が大きくなることと相異の原因である。ここでは実測結果に合致するように近似曲線を補正することにする。この場合、無次元流速全振幅の値が小さな領域では計算結果に一致すべきであり、大きな領域では実測値がほぼ一定の値に近づくという2点を考慮する。結果として、非対称パラメータの修正値 $(U_c/\bar{u})_m$ を次式のように表現した。

$$(Uc/\hat{u})_{m} = 0.5 + \{ (Uc/\hat{u})_{max} - 0.5 \} \\ \times \tanh [\{ (Uc/\hat{u}) - 0.5 \} / \{ (Uc/\hat{u})_{max} - 0.5 \}]$$

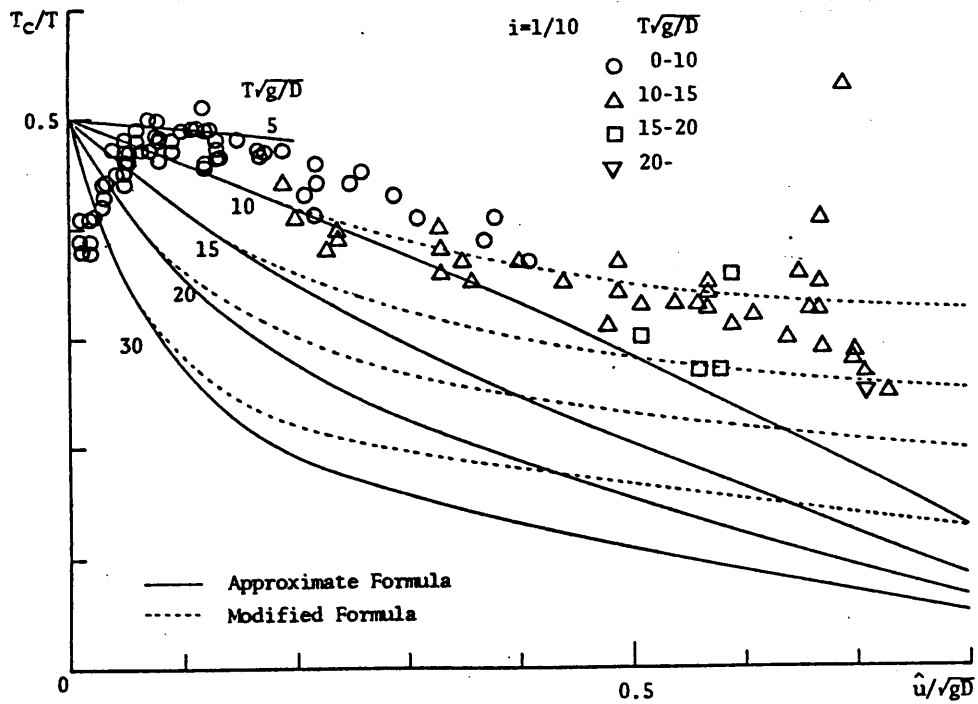
(3.4.16)

ここに、 $(Uc/\hat{u})_{max}$ は実測結果から定める一定値である。この値を $1/20$ 勾配斜面に対して 0.68、 $1/10$ 勾配斜面およびステップ地形に対して 0.65 として図示したものが図-3.4.7 (a) ~ (c) において点線で示されている。実測結果に良く合致する表示式であると言える。図-3.4.7 (d) は観測点が碎波点付近に位置していた観測Ⅲ CASE 3 について、ゼロダウンフロス法によって定められた個々の波に対する結果を図示したものである。なお、波峰に泡が立ち始めた約 1 割の波は除いてあり、 $(Uc/\hat{u})_{max}$ の値は 0.74 としてある。波の不規則性のためにばらつきは大きい、ある程度妥当な分類がはさしている。

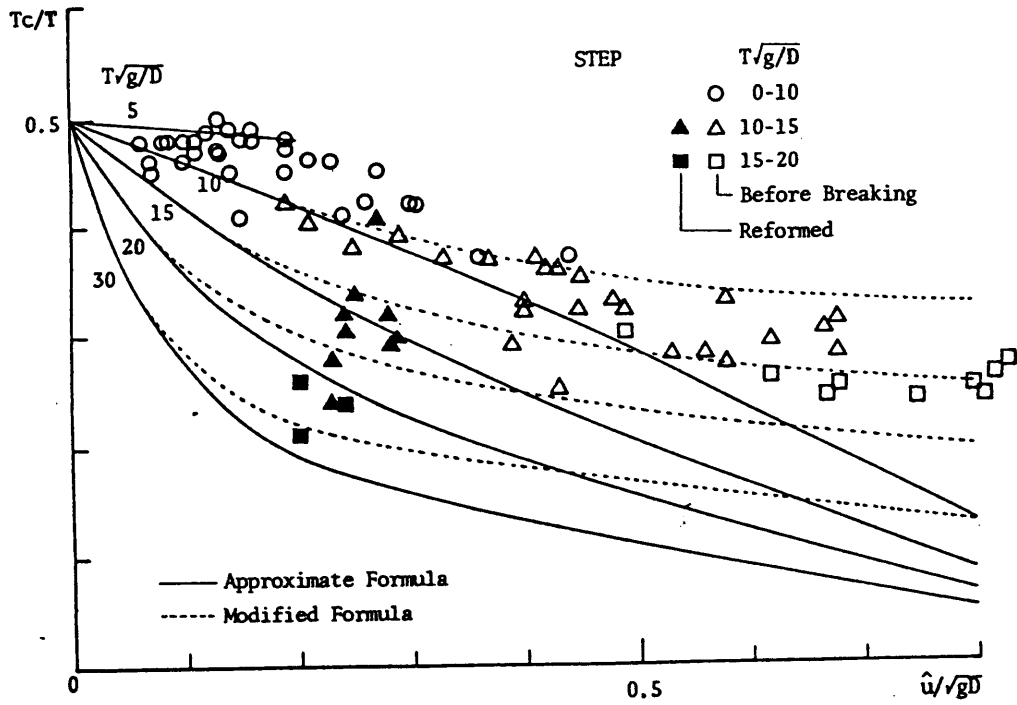
次に尖度パラメータ Tc/T について実測値と近似式の計算結果とを同様なケースについて比較したものが図-3.4.8 (a) ~ (c) である。非対称パラメータに比



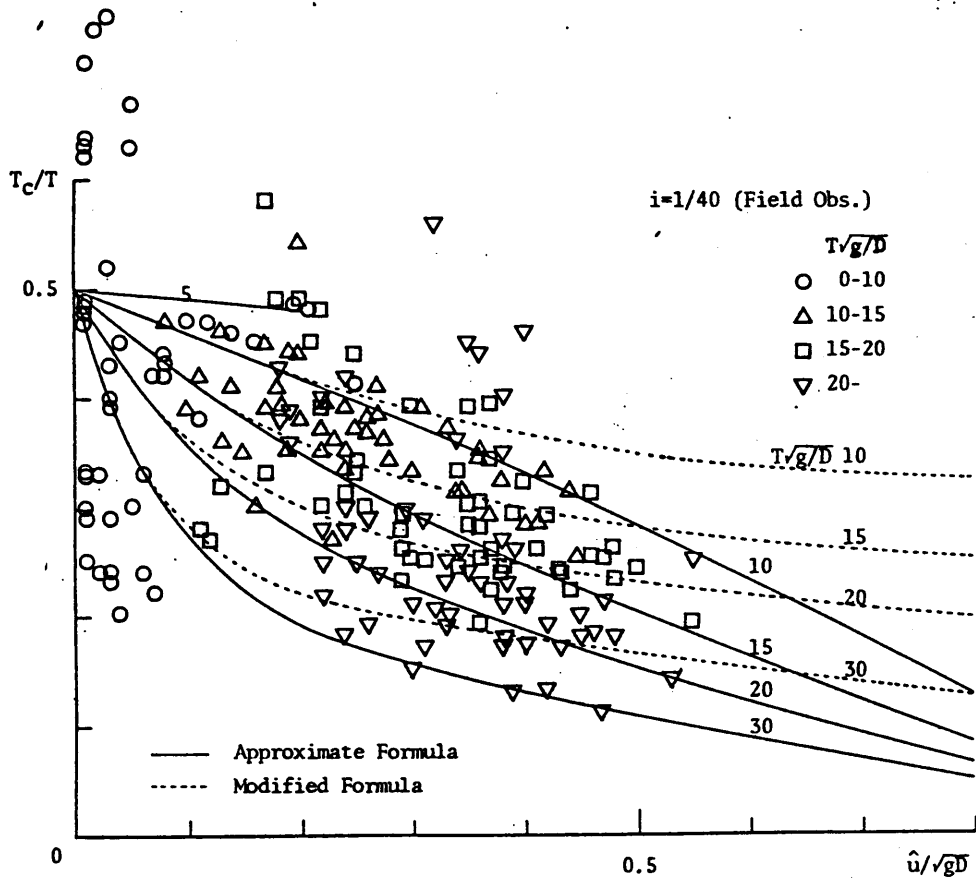
(a)



(b)



(c)



(d)

四-3.4.8 尖度パラメータの計算値と実測値との比較

較可いば計算値と実測値とは近くなるが、無次元流速全振幅の値が大きくな場合に計算値の方が小さな値となる傾向がある。このため前と同様に修正値 $(T_c/T)_m$ を式(3.4.17)によって表現する。

$$(T_c/T)_m = 0.5 - \{0.5 - (T_c/T)_{\min}\} \times \tanh \left[\frac{\{0.5 - (T_c/T)\}}{\{0.5 - (T_c/T)_{\min}\}} \right] \quad (3.4.17)$$

ここに、実測結果から

$$(T_c/T)_{\min} = 0.018 (T\sqrt{g/D}) \quad (3.4.18)$$

であり、これを図示したものが図-3.4.8(a)~(d)における点線であるが、現地の資料も含めて斜面勾配が異なっても同じ曲線によりよく分類されること分かる。

以上のように、保存波の理論を用いた非対称パラメータ U_c/\hat{u} および失度パラメータ T_c/T の計算値を修正することにより、実測値に近く、しかも無次元流速全振幅 $\hat{u}/\sqrt{g/D}$ の値が小さい領域で既存の理論と矛盾することのない表示式が得られた。

流速波形の再合成

以上によって予測が可能となった流速全振幅、非対称パラメータおよび失度パラメータから、流速波形を再合成する方法について述べる。まず、最も単純なものは、図-3.4.9の破線に示すごとく、流速波形の正および負の部分に対してそれぞれ半周期分の正弦波形を用いるものである。この場合、それぞれの周期および振幅は $2T_c$, $2(T-T_c)$ および u_c , $(\hat{u}-u_c)$ であり、これらの値は上記3種の数値および周期から求めることができる。しかし、非対称パラメータと失度パラメータの和が1より小さくなる場合には、平均値が0とならないという矛盾を生じてしまう。ところでこのようなことは図-3.2.5(a) No.9のように波形が前傾し、後側の勾配が緩やかになる場合に起こる。そこでこのような場合には、図-3.4.9の点線のごとく、位相をずらして半周期分ずつの正弦波形を接続し、平均値を0とするのが簡便である。このため、負の側の波形に対する位相の移動量 θ および 2

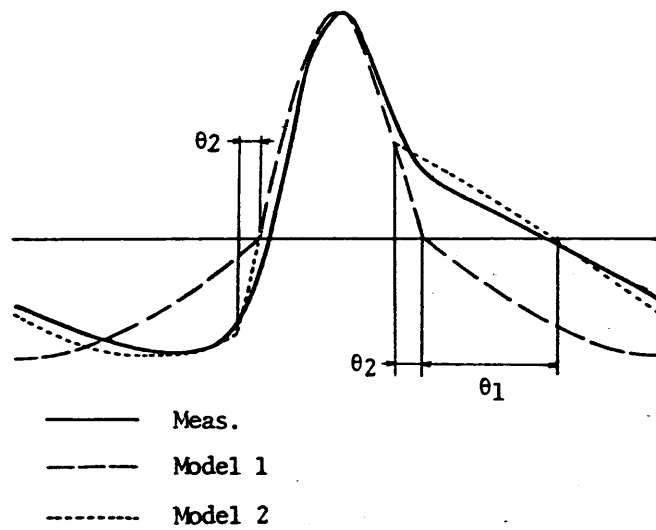


図-3.4.9 波形の再合成モデル

つの正弦波形の接続点の位相の移動量 θ_2 は、

$$\theta_1 = \frac{1-(T_c/T)}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{\gamma_u^2 \gamma_T^2 - 1}{\gamma_u^2 (\gamma_T^2 - 1)}} - \theta_2 \quad (3.4.19)$$

$$\theta_2 = \frac{T_c/T}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{\gamma_u^2 \gamma_T^2 - 1}{\gamma_T^2 - 1}} \quad (3.4.20)$$

$$\gamma_u = (1 - u_c/\hat{u}) / (u_c/\hat{u}) \quad (3.4.21)$$

$$\gamma_T = (1 - T_c/T) / (T_c/T) \quad (3.4.22)$$

とすればよい。これらを用いて流速波形を再合成すれば、 $-\theta_2 T$ より $T - \theta_2 T$ に至る 1 周期について、

$$u = \begin{cases} u_c \cdot \sin[\pi t / T_c] & (-\theta_2 T \leq t < T_c - \theta_2 T) \\ (\hat{u} - u_c) \cdot \sin\left\{\frac{\pi(t - T) - \theta_1 T}{T - T_c}\right\} & (T_c - \theta_2 T \leq t < T - \theta_2 T) \end{cases} \quad (3.4.23)$$

となる。なお、非対称パラメータと尖度パラメータの値の和が 1 を越える場合もあり得るが、超過分はわずかであるため無視してよいであろう。

以上により、沖波波高 H_0 および周期 T が与えられれば、まず任意の水深における岸沖方向流速全振幅が式 (3.4.4) ~ (3.4.8) によって計算される。さらに式 (3.4.9) ~ (3.4.18) を用いれば非対称パラメータおよび尖度パラメータの値が求められる。これ

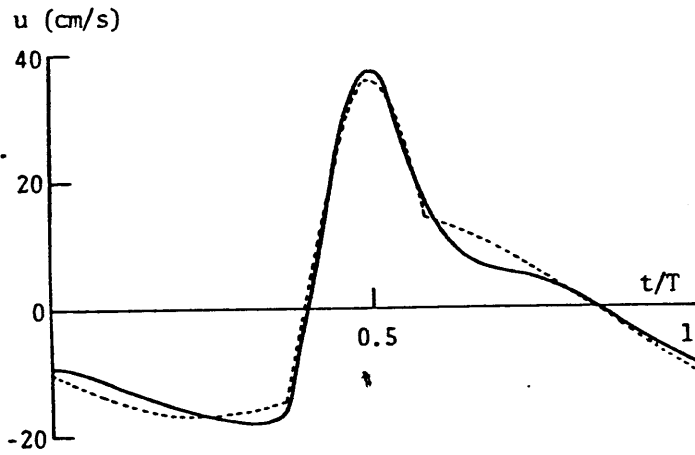
らから式(3.4.19)~(3.4.23)を用いれば近似的に表現された岸沖方向流速波形を得ることが出来る。図3.4.10はこのようにして得られた流速波形の計算値と実測値とを比較した例である。簡単なモデルであるにもかかわらず、実際の流速波形をかなりよく表現していると言える。

なお、モデルの適用限界となる砕波点の判定は、合田(1970)による砕波指標のうち、砕波水深 D_b を与える図を利用すればよい。式(3.4.24)は実際の計算に便利なように与えられた曲線を近似式で表現したものであり、 i は海底勾配である。

$$\frac{D_b}{H_0} = 0.63 + 0.22 \left(1 - \frac{0.184 i^2}{i^2 - 0.107 i + 0.0054} \right) (H_0/L_0)^{-0.37} + \frac{0.1}{-0.77 - \log(H_0/L_0)} \quad (3.4.24)$$

CASE 1 No.6

($H_0/L_{0S}=0.0067, T=2.00s, D=8.8cm, Z=3.1cm$)



CASE 3 No.13

($H_0/L_{0S}=0.059, T=0.97s, D=10.4cm, Z=2.6cm$)

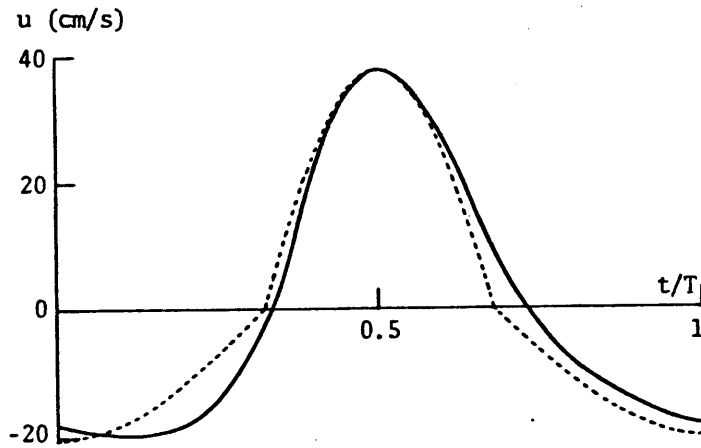


図-3.4.10 岸沖方向流速の予測波形と実測波形との比較

3. 4. 2 砕波帯内における流速場の変化

(1) 連続的砕波と再成

砕波点において一度砕波した波も、その進行とともに砕波を続ける場合と、再び乱れを含まない波に再成する場合とがある。一般に一様勾配斜面において波は砕波を続け、水面変動・岸沖方向流速とも図 3. 2.5 (a)~(c)に示すごとく鋸状の波形を示すようになり、正負の非対称性はほとんど見られなくなる。しかし、ステップ型地形およびバ一型地形のように砕波前に比べ砕波後の海底勾配が緩くなるような場合には、波が再成する。このような場合、砕波が起きている間は鋸状の波形に近いものの、再成波は前後対称な保存波に近いものとなる。任意の海底地形に対して、砕波帯内における流速波形はこの両極端とそれらの中間的なものであると考えられる。従って両極端が生ずる条件を把握することにより、流速場の概略を知ることができると思われる。しかし、現在のところそれを一般的に論ずるほどの資料の蓄

積りなこいであるわけではない。従って、以下においては一様勾配斜面とスラップ型地形の例について、測定結果を中心に議論を進めるものとする。

(2) 一様勾配斜面上における流速変化

一様勾配斜面上における砕波後の波高変化に関しては、波高水深比がほぼ一定となるという実験結果が得られている（たとえば佐々木・佐伯（1974））。

図-3.4.11(a) および(b)はこれに付らって、底面付近における岸沖方向流速の全振幅と線形長波の波速との比 \hat{u}/\sqrt{gD} と、砕波帯幅によって無次元化した静水深線からの距離 X/X_b との関係を示しており、それぞれ $1/20$ および $1/10$ 勾配斜面上における実験結果である。

なお、 $1/20$ 勾配斜面上において熱膜流速計にI型プローブを用いた実験IIについては、戻り流の影響で波峰通過時の流速が0に近くなり同位相平均値の精度が悪くなる。図中において(c)を行した点は、同位相平均をとった流速波形から判断して精度が悪いと考えられたものである。

岸沖方向流速全振幅についても水深によってある程度規定される状況がうかがえるが、波高の場合ほどではないようである。線形長波理論を用いれば、

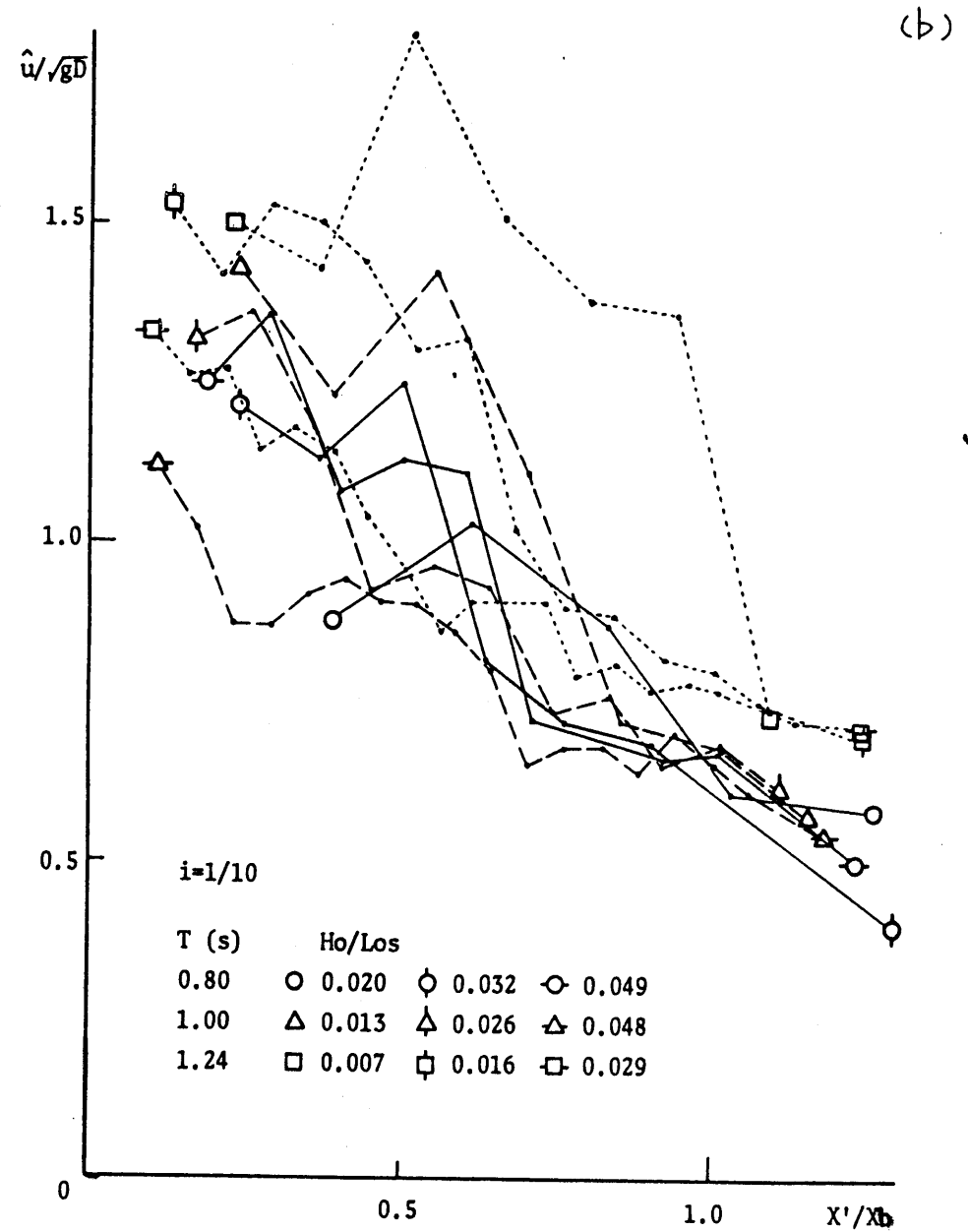
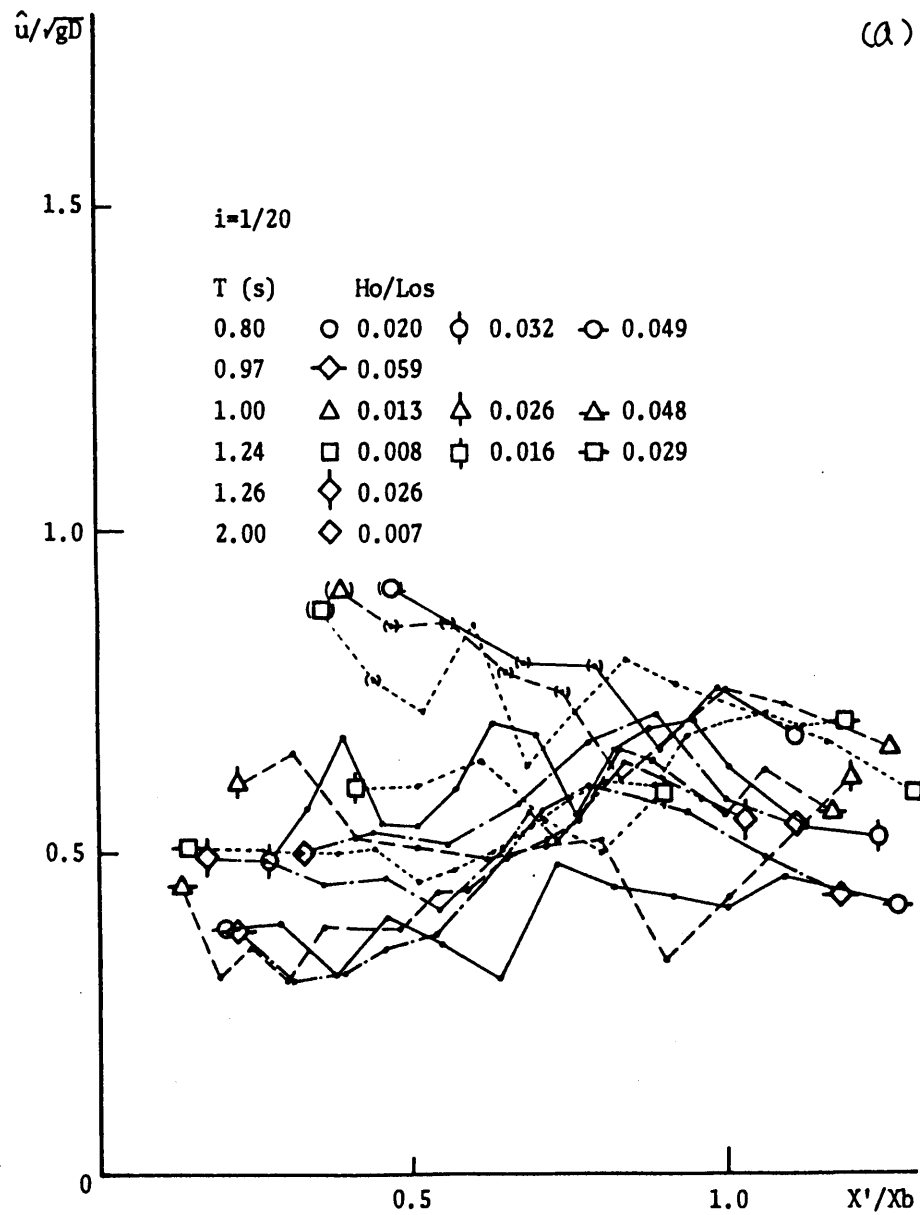


図-3.4.11 碎波帯内における底面流速全振幅の変化

無次元岸沖方向流速振幅 u/\sqrt{gD} の値は波高水深比 H/D の値と等しくなるはずである。しかし実際には、 $1/20$ 勾配斜面でそれよりも小さく、 $1/10$ 勾配斜面でそれよりも大きい。平均的に見ればそれより 0.5 および 1.2 である。このことは、 $1/10$ 勾配斜面のように巻き波型碎波が起こり易い場合に、流速が相対的に大きくなることによる。流速波形について言えば、図-3.2.5(a)~(c)に見られるように、ほぼ正負対称で前進している。なお、前進度の指標となる波谷通過時から波峰通過時までの時間と周期との比は、碎波帯を通じて約 0.2 であった。

四-3.4.12は、現地碎波帯内における岸沖方向流速成分の自乗平均の平方根を無次元化した $2\sqrt{2u^2/gD}$ の値の鉛直分布を示すものである。微小振幅波理論において浅海条件とすればこの値は波高水深比に等しくなる。なお u'' としては、測定された記録から周期 20 秒以上の長周期成分を除いたものを用いている。従って、 u'' には乱流成分も含まれることによるが、

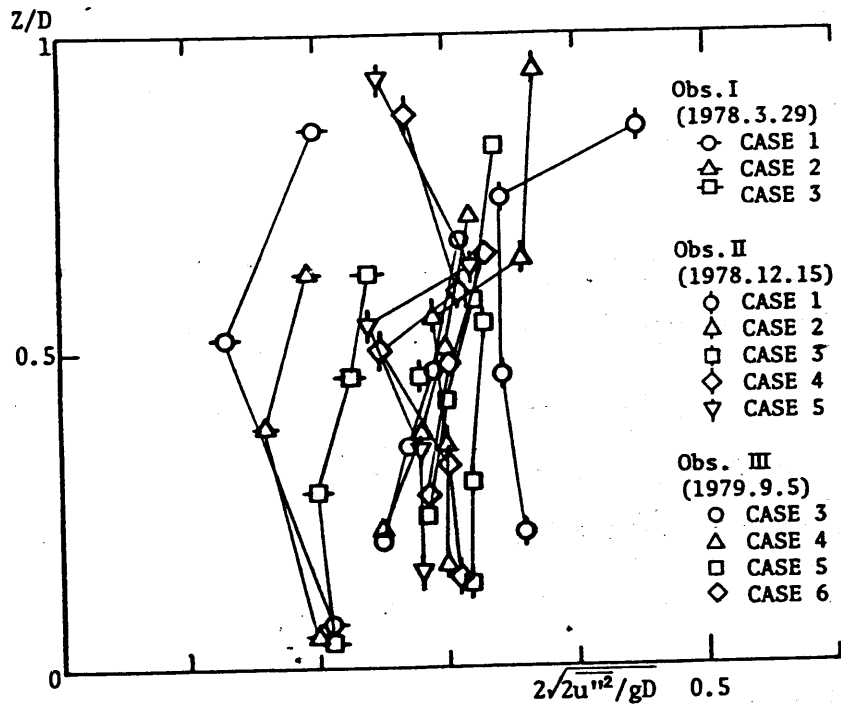


図-3.4.12 碎波帯内における岸沖方向流速のr.m.s.値

既に述べたように乱れ成分は波動成分に比較して小さい。観測Ⅲ(1978.3.29)の結果は、他に比較して小さい値となっているが、これは流速計の設置架台の影響で流況が乱されたことの原因であると思われる。他のケースについては、鉛直方向にほぼ一様で0.3程度の値をとる。さらに得られたデータの範囲において、有義流速全振幅 $\hat{u}_{1/3}$ は碎波帯内において $0.65 \sim 0.75 \times \sqrt{2\overline{u^2}}$ であるから、 $\hat{u}_{1/3} \doteq 0.4\sqrt{gD}$ となる。この値は $1/20$ 勾配斜面における実験結果よりも明らかに小さい。

(3) ステップ型地形における流速変化

ステップ型地形における実験結果から、波の再成条件に関する議論を行なう。一様水深部の沖側端部付近で碎波した波は、その直後に急激に波高を減少する。その後波高の減少率は小さくなり、岸側斜面上において二次碎波を起こす。ここでは主要なエネルギー減衰が終了する点として、平均水位の上昇がほぼ終了する点ととり、これを再成点とした。このような点の位置はかなり明確であり、しかもその後の波高減衰は非常に小さい。

図-3.4.13における記号○は碎波点から再成点までの距離とステップ部分の一様水深との比 X_r/D_u と無次元周期 $T\sqrt{g/D_u}$ との関係を示したものである。ばらつきは大きいものの、周期に無関係に $X_r \doteq 18 D_u$ となる。また記号●は再成点の底面付近における無次元岸沖方向流速振幅 $\hat{u}/\sqrt{gD_u}$ の値を図示したものである。この値も周期によらず $\hat{u} \doteq 0.24\sqrt{gD_u}$ であると言える。なお、図-3.4.7(c)および図-3.4.8(c)

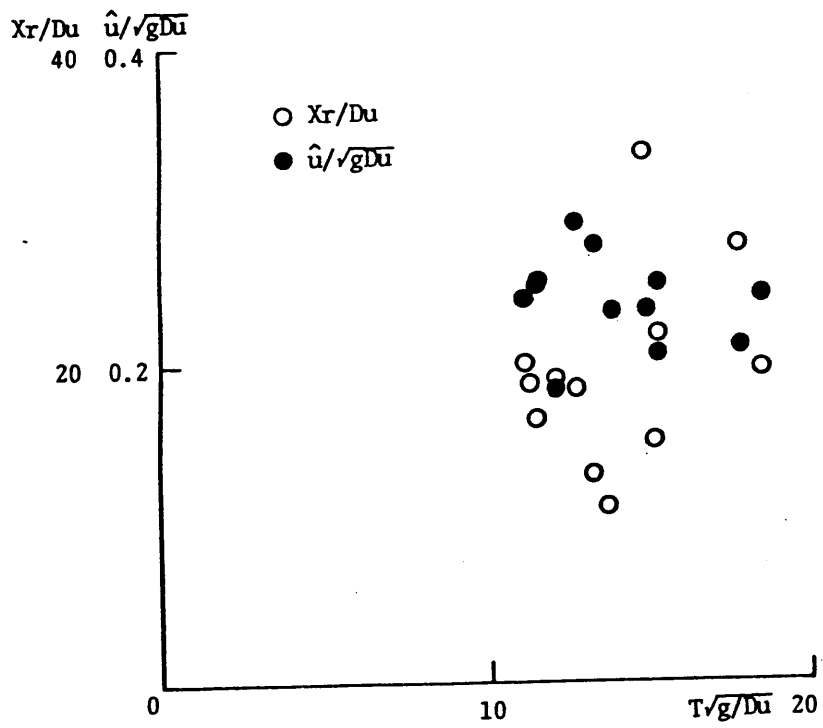


図-3.4.13 再成波の底面流速全振幅および再成距離

において、黒く塗りつぶした点はそれぞれ再成点に
あける非対称パラメータおよび尖度パラメータの値
を明示したものである。両図から再成点においては
保存波であると仮定した波形に近くなっていること
がわかる。

以上、一様勾配斜面とステップ地形における底面
付近の岸沖方向流速全振幅について論じた。鉛直分
布については図-3.2.7(a)~(c)が若干の参考になる。

また、現在の段階で任意の地形に対する流速場の変
化の予測を行なうためには、碎波後の波高変化に関
する水口ら(1978)のモデルを用いることの一つの方
法である。モデルにおける波高のかわりに岸沖方向
流速全振幅として計算を行なう。さらに流速波形に
ついて、碎波点付近と再成域においてはそれぞれ
一様勾配斜面およびステップ型地形における実験結
果を用いる。再成しつつある領域についてはそれら
の中間的なものを考えることになる。しかし、精
度のよい予測を行なうためには、基礎となるデー

が不足していると言わざるを得ない。

第4章 結論

本研究によつて得られた結論を列挙すれば以下のようになる。

1) 保存波に関する2つの無次元パラメータとして、アセル数および相対水深の自乗をとれば、これらに関する正則な2重級数解を求めることができる。これを1重級数解に還元する際にまとめるべき項の組合せ方により、ストークス波理論およびクノイド波理論を含む無数の現解が考えられる。しかし、有限次数で打ち切った場合に、上記2種の解は他のどのような解よりも多くの項を含んでいる。従つてそれらは解の精度の点で優れており、実用上有用なただ2つの解であると言える。

2) ストークス波理論およびクノイド波理論の有限次近似解の精度について、2通りの方法で理論的に論じた。1つは水面における非線形境界条件に対する残差を用いる方法である。他の1つは高次解から推定された厳密解との誤差を用いる方法である。これらの結果から、与えられた精度に対する近似解の

適用範囲を知ることが出来る。また特にストークス波理論とクノイド波理論とは、アーセル数 gHT^2/D^2 の値がそれぞれ25以下およびそれより大なる範囲に使い分けるのが合理的であることが明らかになった。

3) 碎波帯付近における流速場に関する室内実験および現地観測を行ない、水面変動と内部流速との関係について論じた。碎波帯外で波形が前後対称な地点においては、ストークス波理論またはクノイド波理論の適用が可能である。波形が前後非対称となる地点においても、流し関数法は良好な流速の推定値を与えるが、碎波点付近においては若干過小評価となる。碎波帯内においても、崩れ波型の碎波領域や再成波領域においては、流し関数法を用いた計算結果が実測結果に近くなる。しかし、巻き波型碎波の場合には波の変形が著しいため、相当程度に過小評価となる。なお乱れ成分については、定義において不明確な点があるものの、 $1/20$ 以下の緩勾配斜面における測定範囲内では、波動成分に比較して小さい。

砕波帯内の底面付近には強い戻り流が存在するが、その一般的な把握は今後の課題である。

4) 水深変化に伴う流速場の変化について論じた。砕波点に至る岸沖方向流速の全振幅をエネルギーフラックス法を用いて推定すると、実験結果と良好一致を示す。さらに実験結果をも考慮して、概略の流速波形の予測を可能にした。これらは式(3.4.4)~(3.4.23)によって示されている。砕波帯内において砕波が継続する場合には、流速波形は鋸状になり、その振幅は水深によって規定される傾向にあるが、斜面勾配の影響は大である。ステップ型地形において波が再成する場合、保存波の波形に近いものとなる。実験の範囲内で、再成波の岸沖方向流速全振幅および再成距離はステップ部の一様水深によって規定される。

謝 辞

本論文をまとめるにあたり、終始熱心な御指導と細やかな御配慮を頂いた東京大学教授堀川清司先生に深く感謝致します。

保存液に関する研究については、筑波大学助教授西村仁嗣先生が東京大学に勤務なさっている時に、御教示を受けて行なったものであり、改めて敬意を表する次第であります。また、室内実験および現地観測においてお世話になった、都立大学助手 堀田新太郎氏、中央大学助教授 水口優先生、海岸環境工学研究センター 久保田達氏、針貝聡一氏をはじめとする関係諸氏にお礼申し上げます。

最後に、論文執筆中、渡辺晃助教授、三村信男助手をはじめとする港湾研究室の方々には、陰に陽に御援助をいただいたことを感謝します。

参考文献

- 1) 磯部雅彦・西村仁嗣・塚川清司 (1978): 保存波の擾動解の波高による表示, 土木学会第33回年次学術講演会講演概要集(2), pp. 760-761.
- 2) 磯部雅彦・福田直利・塚川清司 (1979): 砕波帯における流速場に関する二次元実験, 第26回海岸工学講演会論文集, pp. 41-45.
- 3) 磯部雅彦・西村仁嗣・柄登志彦 (1980): 不規則波の砕波変形に関する実験的研究, 第27回海岸工学講演会論文集, pp. 139-142.
- 4) 磯部雅彦・水口優・塚川清司 (1980): 砕波帯付近の波にともなう流速場に関する現地観測, 第27回海岸工学講演会論文集, pp. 148-152.
- 5) 岩垣雄一・酒井哲郎 (1968): 有限振幅波の shoaling について, 第15回海岸工学講演会講演集, pp. 10-15.
- 6) 岩垣雄一・酒井哲郎 (1969): 有限振幅波の水粒子速度に関する実験, 第16回海岸工学講演会講演集, pp. 15-21.
- 7) 岩垣雄一・酒井哲郎・月岡康一・沢井信樹 (1973): 斜面上の砕波の水粒子速度の鉛直分布と砕波型について, 第20回海岸工学講演会論文集, pp. 553-557.
- 8) 谷田良実 (1970): 砕波指標の整理について, 土木学会論

文報告集, 第107号, pp. 39-49.

- 9) 酒井 哲郎・J.A. Battjes (1980): Cokerletの理論による波の浅水変形, 第27回海岸工学講演会論文集, pp. 25-29.
- 10) 佐々木 幹夫・佐伯 浩 (1974): 砕波後の波の変形に関する研究(2), 第21回海岸工学講演会論文集, pp. 39-44.
- 11) 榎木 亨・岩田 好一郎・松本 昇 (1973): 砕波後の波の変形に及ぼす乱水の効果について—砕波の内部機構に関する基礎的研究 第3報—, 第20回海岸工学講演会論文集, pp. 565-570.
- 12) 柴山 知也・堀川 清司 (1980): 波による長流砂量と堆積型海床の形成機構に関する研究, 第27回海岸工学講演会論文集, pp. 192-196.
- 13) 首藤 伸夫 (1968): 有限振幅の定常長波, 第15回海岸工学講演会講演集, pp. 212-219.
- 14) 首藤 伸夫 (1974): 非線型長波の変形, 第21回海岸工学講演会論文集, pp. 57-63.
- 15) 砂村 継夫・阪東 浩造・堀川 清司 (1978): 非対称砂山の上での砂移動機構と漂砂量に関する実験的研究, 第25回海岸工学講演会論文集, pp. 250-254.
- 16) 土屋 義人・山口 正隆 (1969): セッ動解による有限振幅重複波理論の適用限界について, 第16回海岸工学講演会講

演集, pp. 7-13.

- 17) 土屋義人・安田孝志(1974): 新しいクノイド波理論の試み, 第21回海岸工学講演会論文集, pp. 65-71.
- 18) 土屋義人・安田孝志(1978): 透減せつ動法による擬Stokes波理論, 第25回海岸工学講演会論文集, pp. 6-9.
- 19) 中川武夫(1980): テンションスレッド流速計を用いた水粒子速度の測定, 土木学会第35回年次学術講演会講演概要集(2), pp. 79-80.
- 20) 永田豊(1959): 電磁流速計の海況への応用, 第6回海岸工学講演会講演集, pp. 45-48.
- 21) 西村仁嗣・磯部雅彦・堀川清目(1978): 定常長波の擾動解, 第25回海岸工学講演会論文集, pp. 1-5.
- 22) 林建二郎・竹内俊雄(1978): レーガードックプラー流速計による波の水粒子速度の測定, 土木学会第33回年次学術講演会講演概要集(2), pp. 768-769.
- 23) 日野幹夫・柏柳正之(1978): Wave Set-down, Set-upおよび水粒子軌道速度の推定におけるDeanの流関数法の適用性, 第25回海岸工学講演会論文集, pp. 18-22.
- 24) 堀田新太郎・水口優(1979): 砕波帯内の波の現地観測, 第26回海岸工学講演会論文集, pp. 152-156.
- 25) 堀田新太郎・水口優・磯部雅彦(1980): 砕波帯内の波の

- 平面分布特性について，第27回海岸工学講演会論文集，
pp. 129-133.
- 26) 堀川清司・渡辺晃(1970)：波運動に伴う乱れと底質の浮遊，第17回海岸工学講演会論文集，pp. 229-233.
- 27) 堀川清司・西村仁嗣・福井直治(1972)：砕波機構に関する一考察，土木学会第27回年次学術講演会講演概要集，
pp. 31-32.
- 28) 堀川清司(1973)：海岸工学，東大出版会，317中.
- 29) 堀川清司・西村仁嗣(1976)：ストークス波とフノイド波の比較研究，第23回海岸工学講演会論文集，pp. 371-375.
- 30) 堀川清司・西村仁嗣・磯部雅彦(1977)：有限振幅波理論の適用範囲について，第24回海岸工学講演会論文集，
pp. 10-14.
- 31) 堀川清司・堀田新太郎・水口優・磯部雅彦(1979)：砕波後の波にともなう流速場に関する現地観測，第26回海岸工学講演会論文集，pp. 46-50.
- 32) 水口優・辻岡和男・堀川清司(1978)：砕波後の波高変化についての一考察，第25回海岸工学講演会論文集，pp. 155-159.
- 33) 水口優・磯部雅彦(1979)：電磁流速計による砕波帯内の流速分布観測，海岸環境工学研究センター，Rep. No. 9,

- TR-78-3, 第3回合同現地観測報告書, pp. 104-134.
- 34) 水口 優・松田 伸次 (1980): 現地不規則波浪の浅海変形について, 第27回海岸工学講演会論文集, pp. 134-138.
- 35) 安田 孝志・山下 隆男・後藤 真太郎・土屋 義人 (1979): $K-dV$ 方程式による斜面上の波の変形, 第26回海岸工学講演会論文集, pp. 21-25.
- 36) 安田 孝志・後藤 真太郎・土屋 義人 (1980): $K-dV$ 方程式による斜面上の波の水粒子速度, 第27回海岸工学講演会論文集, pp. 11-15.
- 37) 山口 正隆・土屋 義人 (1975): 有限振幅波理論に基づく波の Shoaling について, 第22回海岸工学講演会論文集, pp. 59-63.
- 38) 和田 明 (1973): 数値モデルによる有限振幅波の研究, 第20回海岸工学講演会論文集, pp. 387-392.
- 39) 渡辺 晃・磯部 雅彦・野次 是幸・坂川 清司 (1980): 斜面上で砕波する波の底面流速に関する実験的研究, 第27回海岸工学講演会論文集, pp. 40-44.

- 40) Airy, G.B.(1845): On tides and waves, Encyc. Metrop., Lond., Vol.192, pp.241-396.
- 41) Amein, M.(1966): A method for determining the behavior of long waves climbing a sloping beach, J. Geophys. Res., Vol.71, pp.401-410.
- 42) Apelt, C.J.(1979): Characteristics of the split film sensor, AIAA J., Vol.17, No.1, pp.101-102.
- 43) Baker, G.A.(1965): The theory and application of the Padé approximant method, Adv. Theor. Phys., Vol.1, pp.1-56.
- 44) Biesel, F.(1952): Study of wave propagation in water of gradually varying depth, Gravity Waves, Nat. Bur. of Stand., Circ.521, pp.243-253.
- 45) Boussinesq, J.(1871): Theorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire, Institut de France, Academie de Sciences, Comptes Rendus, pp.755.
- 46) Boussinesq, J.(1872): Théorie des ondes et des remous qui se propagent de long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond, J. Math. Pures Appl., Ser.2, Vol.17, pp.55-108.
- 47) Bretschneider, C.L.(1961): Theory for waves of finite height, Proc. 7th Int. Conf. on Coastal Eng., pp.146-182.
- 48) Byatt-Smith, J.G.B.(1970): An exact integral equation for steady surface waves, Proc. Roy. Soc. Lond., Ser.A, Vol.315, pp.405-418.
- 49) Chappellear, J.E.(1961): Direct numerical calculation of wave properties, J. Geophys. Res., Vol.66, pp.501-508.
- 50) Chappellear, J.E.(1962): Shallow water waves, J. Geophys. Res., Vol.67, pp.4693-4704.
- 51) Davis, T.V.(1952): The theory of symmetrical gravity waves of finite amplitude, Gravity Waves, Nat. Bur. of Stand., Circ.521, pp.55-60.
- 52) De, S.C.(1955): Contributions to the theory of Stokes waves, Proc. Camb. Phil. Soc., Vol.51, pp.713-736.
- 53) Dean, R.G.(1965): Stream function representation of nonlinear ocean waves, J. Geophys. Res., Vol.70, pp.4561-4572.
- 54) Dean, R.G.(1968): Relative validities of water wave theories, Proc. ASCE, Speciality Conf. of Civil Eng. in the Ocean, pp.1-30.
- 55) Domb, C. and M. F. Sykes (1957): On the susceptibility of a ferromagnetic above the Curie point, Proc. Roy. Soc. Lond., Ser.A, Vol.240, pp.214-228.
- 56) Fenton, J.(1972): A ninth-order solution for the solitary wave, J. Fluid Mech., Vol.53, pp.257-271.

- 58) Fenton, J.D. and S.A. Mills (1975): Shoaling waves; Numerical solution of exact equations, Lecture Notes on Physics, 64, Waves on Water of Variable Depth, pp.94-101.
- 59) Fenton, J.D.(1979): A high-order cnoidal wave theory, J. Fluid Mech., Vol.94, pp.129-161.
- 60) Freeman, J.C. and B.M. Le Mehauté (1964): Wave breakers on a beach and surges on a dry bed, Proc. ASCE, Vol.90, HY2, pp.187-216.
- 61) Friedrichs, K.O.(1948): On the derivation of the shallow water theory, Commun. Pure Appl. Math., Vol.1, pp.81-85.
- 62) Friedrichs, K.O. and D.H. Hyers (1954): The existence of solitary wave, Commun. Pure Appl. Math., Vol.7, pp.517-550.
- 63) Gaughan, M.K. and P.D. Komar (1975): The theory of wave propagation in water of gradually varying depth and the prediction of breaker type and height, J. Geophys. Res., Vol.80, pp.2991-2996.
- 64) Goda Y.(1967): The fourth order approximation to the pressure of standing waves, Coastal Eng. in Japan, Vol.10, pp.1-11.
- 65) Grimshaw, R.(1971): The solitary wave in water of variable depth, Part 2, J. Fluid Mech., Vol.46, pp.611-622.
- 66) Guza, R.T. and R.B. Thornton(1980): Local and shoaled comparison of sea surface elevations, pressures, and velocities, J. Geophys. Res., Vol.85, pp.1524-1530.
- 67) Gwyther, R.F.(1900): The classes of progressive long waves, Phil. Mag., Ser.5, Vol.50, pp.213,308,319.
- 68) Hansen J.B. and Ib A. Svendsen (1979): Regular waves in shoaling water, experimental data, Institute of Hydrodynamics and Hydraulic Eng., Tech. Univ. Denmark, Ser. Paper 21, 20p.
- 69) Ho, D.V. and R.E. Meyer (1962): Climb of a bore on a beach, Part 1, Uniform beach slope, J. Fluid Mech., Vol.14, pp.305-318.
- 70) Horikawa, K. and C.T. Kuo (1966): A study on wave transformation inside surf zone, Proc. 10th Int. Conf. on Coastal Eng., pp.217-233.
- 71) Huntley, D.A. and A.J. Bowen (1974): Field measurement of nearshore velocities, Proc. 14th Int. Conf. on Coastal Eng., pp.645-659.
- 72) Iversen, H.W.(1952): Waves and breakers in shoaling water, Proc. 3rd Int. Conf. on Coastal Eng., pp.1-12.
- 73) Iwasa, Y.(1955): Analytical considerations on cnoidal and solitary waves, Memoirs, Fac. Eng., Kyoto Univ., Vol.17, pp.264-276.
- 74) Kakutani, T.(1971): Effect of an uneven bottom on gravity waves, J. Phys. Soc. Japan, Vol.30, pp.272-276.

- 75) Keller, J.B.(1948): The solitary wave and periodic waves in shallow water, Commun. Pure Appl. Math., Vol.1, pp.323-339.
- 76) Keller, H.B., Levine, D.A. and G.B. Witham (1960): Motion of a bore over a sloping beach, J. Fluid Mech., Vol.7, pp.302-316.
- 77) Keulegan, G.H. and G.W. Patterson (1940): Mathematical theory of irrotational translation waves, J. Res. Nat. Bur. of Stand., Vol.24, RP.1272, pp.47-101.
- 78) Korteweg, D.J. and G. de Vries (1895): On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves, Phil. Mag., Ser.5, Vol.39, pp.422-443.
- 79) Laitone, E.V.(1960): The second approximation to cnoidal and solitary waves, J. Fluid Mech., Vol.9, pp.430-444.
- 80) Laitone, E.V.(1962): Limiting condition for cnoidal and Stokes waves, J. Geophys. Res., Vol.67, pp.1555-1564.
- 81) Le Mehauté, B. (1962): On non-saturated breakers and the wave run-up, Proc. 8th Int. Conf. on Coastal Eng., pp.77-92.
- 82) Le Mehauté B. and L.M. Webb(1964): Periodic gravity waves over a gentle slope at a third order approximation, Proc. 9th Int. Conf. on Coastal Eng., pp.23-40.
- 83) Leneau, C.W.(1966): The solitary wave of maximum amplitude, J. Fluid Mech., Vol.26, pp.309-320.
- 84) Long, R.R.(1956): Solitary waves in the one- and two-fluid systems, Tellus, Vol.8, pp.460-471.
- 85) Longuet-Higgins, M.S.(1953): Mass transport in water waves, Proc. Camb. Phil. Soc., Vol.245, pp.535-581.
- 86) Longuet-Higgins, M. S.(1974): On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave, Proc. Roy. Soc. Lond., Ser.A, Vol.377, pp.1-13.
- 87) Longuet-Higgins, M.S. and J.D. Fenton (1974): On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave, 2, Proc. Roy. Soc. Lond., Ser.A, Vol.340, pp.471-493.
- 88) Longuet-Higgins, M.S. and E.D. Cokelet (1976): The deformation of steep surface waves on water, 1, A numerical method of computation, Proc. Roy. Soc. Lond., Ser.A, Vol.350, pp.1-26.
- 89) McCowan, J.(1891): On the solitary wave, Phil. Mag., Ser.5, Vol.32, pp.45-58.
- 90) McCowan, J.(1894): On the highest wave of permanent type, Phil. Mag., Ser.5, Vol.38, pp.351-358.
- 91) Nishimura, H., M. Isobe and K. Horikawa (1977): Higher order solutions of the Stokes and the cnoidal waves, J. Fac. Eng., Univ. Tokyo, Ser.B, Vol.34, pp.267-293.

- 92) Packham, B.A.(1952): The theory of symmetrical gravity waves of finite amplitude, 2, Proc. Roy. Soc. Lond., Ser.A, Vol.213, pp.238-249.
- 93) Peregrine, D.H.(1967): Long waves on a beach, J. Fluid Mech., Vol.27, pp.815-827.
- 94) Phillips, O.M.(1977): The Dynamics of the Upper Ocean, 2nd ed., Chap.3, Camb. Univ. Press, 336p.
- 95) Rayleigh, J.W.S.(1876): On waves, Phil. Mag., Ser.5, Vol.1, pp.257-279.
- 96) Rayleigh, J.W.S.(1883): The form of standing waves on running water, Proc. Lond. Math. Soc., Vol.15, pp.69.
- 97) Reid, R.O.(1958): Correlation of water variations with wave forces on a vertical pile for nonperiodic waves, Proc. 6th Int. Conf. on Coastal Eng., pp.749-786.
- 98) Schwartz, L.W.(1974): Computer extension and analytic continuation of Stokes' expansion for gravity waves, J. Fluid Mech., Vol.62, pp.553-578.
- 99) Shen, M.C. and R.E. Meyer (1963): Climb of a bore on a beach, Part 2, Non-uniform beach slope, J. Fluid Mech., Vol.16, pp.108-112
- 100) Shuto, N.(1973): Shoaling and deformation of non-linear long waves, Coastal Eng. in Japan, Vol.16, pp.1-12.
- 101) Skjelbreia, L.(1958): Gravity waves, Stokes' third order approximation, Tables of functions, Council on Wave Research, the Eng. Foundation, pp.337.
- 102) Skjelbreia, L. and J. Hendrickson (1960): Fifth order gravity wave theory, Proc. 7th Int. Conf. on Coastal Eng., pp.184-196.
- 103) Stokes, G.G.(1847): On the theory of oscillatory waves, Trans. Camb. Phil. Soc., Vol.8, pp.441-455.
- 104) Strelkoff, T.(1971): An exact numerical solution of the solitary wave, Proc. 2nd Int. Conf. Num. Methods Fluid Dyn.
- 105) Svendsen, Ib A. and O. Brink-Kjær (1972): Shoaling of cnoidal waves, Proc. 13th Int. Conf. on Coastal Eng., pp.365-383.
- 106) Tadjbaksh, I. and J.B. Keller (1960): Standing surface waves of finite amplitude, J. Fluid Mech., Vol.8, pp.442-451.
- 107) Thornton, E.B., J.J. Galvin, F.L. Bub and D.P. Richardson (1976): Kinematic of gravity waves, Proc. 15th Int. Conf. on Coastal Eng., pp. 461-476.
- 108) Tsuchiya, Y. and M. Yamaguchi(1972): Some considerations on water particle velocities of finite amplitude wave theories, Coastal Eng. in Japan, Vol.15, pp.43-57.
- 109) Ursell, F.(1953): Long wave paradox in the theory of gravity waves, Proc. Camb. Phil. Soc., Vol.49, pp.685-694.

- 110) Weinstein, A. (1926): Sur la vitesse de propagation de l'onde solitaire, Proc. 2nd Int. Congr. Appl. Mech., pp.445-448.
- 111) Wilton, J.R. (1914): On deep water waves, Phil. Mag., Ser.6, Vol.27, pp.385-394.
- 112) Yamada, H. and T. Shiotani (1968): On the highest water waves of permanent type, Bull. Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ., Vol.18, Part 2, No.135, pp.1-22.

付録 A 保存波の 2 重級数解

本文中の議論により、保存波の解を求める問題は、水深および波高の定義式(2.2.20)および(2.2.21)を考慮して、水面における境界条件式(2.2.18)および(2.2.19)を満足するように、式(2.2.27)中の $\psi(x; \varepsilon, \delta)$ および水面変動 $m(x; \varepsilon, \delta)$ を決定することに帰着された。ここではそれらを ε と δ に関する2重級数に展開し、解を求める方法について述べる。

最初に未知関数 $\psi(x; \varepsilon, \delta)$ および $m(x; \varepsilon, \delta)$ はらびに未知定数 $\rho(\varepsilon, \delta)$ および $\rho_0(\varepsilon, \delta)$ を2重級数に展開する。

$$\psi(x; \varepsilon, \delta) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{ij}(x) \varepsilon^i \delta^j \quad (\text{A.1})$$

$$m(x; \varepsilon, \delta) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} m_{ij}(x) \varepsilon^i \delta^j \quad (\text{A.2})$$

$$\rho(\varepsilon, \delta) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \rho_{ij} \varepsilon^i \delta^j \quad (\text{A.3})$$

$$\rho_0(\varepsilon, \delta) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \rho_{ij} \varepsilon^i \delta^j \quad (\text{A.4})$$

ここで波高が0に近づいた極限を考慮することにより、 m_{ij} の一部を決定する。 δ の値が有限で $\varepsilon \rightarrow 0$ 、又は ε の値が有限で $\delta \rightarrow 0$ を考えると、定義式(2.2.22)より $m \rightarrow 0$ となり、これは $m = \text{const.}$ を意味する。

式(2.2.20)よりこの定数の値は1であるから、

$$m(\alpha; 0, \delta) = \sum_{j=0}^{\infty} m_{0j}(\alpha) \delta^j = 1 \quad (\text{A.5})$$

$$m(\alpha; \varepsilon, 0) = \sum_{i=0}^{\infty} m_{i0}(\alpha) \varepsilon^i = 1 \quad (\text{A.6})$$

とする。δ又はεの各べきに對する両辺の係数を比較することによりにだちに、

$$m_{00} = 1, \quad m_{0j} = 0 \quad (j \geq 1), \quad m_{i0} = 0 \quad (i \geq 1) \quad (\text{A.7})$$

を得る。これらを考慮して式(A.1)~(A.4)を式(2.2.18)および(2.2.19)に代入し、εおよびδのべきに整理する。しかし、このままだけ計算の途中における項の数が非常に多くなる。ここでは $\varepsilon^i \delta^0$ および $\varepsilon^0 \delta^j$ の係数を比較して得られる ψ_{i0} および ψ_{0j} が一定という結果をあらかじめ考慮して計算を進めることとする。次数については高次解を求めるための原理を示すために最小限必要なεとδに関する第2次近似解を求める。このためにεとδに関する4次式までの計算が必要である。

まず後に必要となるmのべき乗の展開形を、式(A.7)を考慮して書いておく。

$$\begin{aligned}
 m &= 1 + m_{11} \varepsilon \delta + m_{12} \varepsilon \delta^2 + m_{21} \varepsilon^2 \delta \\
 &\quad + m_{13} \varepsilon \delta^3 + m_{22} \varepsilon^2 \delta^2 + m_{31} \varepsilon^3 \delta + \dots \quad (A.8)
 \end{aligned}$$

$$m^2 = 1 + 2 m_{11} \varepsilon \delta + \dots \quad (A.9)$$

$$m^3 = 1 + 3 m_{11} \varepsilon \delta + \dots \quad (A.10)$$

$$m^4 = 1 + \dots \quad (A.11)$$

$$m^5 = 1 + \dots \quad (A.12)$$

式(2.2.18)の右辺を計算するために、水面における
流函数の値を式(2.2.27)により ψ_1 で表わせば、

$$\psi|_{z=m} = m \psi_1 - \delta m^3 \psi_1^{(2)}/6 + \delta^2 m^5 \psi_1^{(4)}/120 - \dots \quad (A.13)$$

とすれば、さらに式(A.8), (A.10)および(A.12)より
に ψ_{i0} および ψ_{0j} を一定であることを考慮すれば、

$$\begin{aligned}
 \psi|_{z=m} &= (1 + m_{11} \varepsilon \delta + m_{12} \varepsilon \delta^2 + m_{21} \varepsilon^2 \delta + m_{13} \varepsilon \delta^3 + m_{22} \varepsilon^2 \delta^2 \\
 &\quad + m_{31} \varepsilon^3 \delta + \dots) (\psi_{00} + \psi_{01} \delta + \psi_{10} \varepsilon + \psi_{02} \delta^2 \\
 &\quad + \psi_{11} \varepsilon \delta + \psi_{20} \varepsilon^2 + \psi_{03} \delta^3 + \psi_{12} \varepsilon \delta^2 + \psi_{21} \varepsilon^2 \delta + \psi_{30} \varepsilon^3 \\
 &\quad + \psi_{04} \delta^4 + \psi_{13} \varepsilon \delta^3 + \psi_{22} \varepsilon^2 \delta^2 + \psi_{31} \varepsilon^3 \delta + \psi_{40} \varepsilon^4 + \dots) \\
 &\quad - (\delta/6) (1 + 3 m_{11} \varepsilon \delta + \dots) (\psi_{11}^{(2)} \varepsilon \delta + \psi_{12}^{(2)} \varepsilon \delta^2 + \psi_{21}^{(2)} \varepsilon^2 \delta + \dots) \\
 &\quad + (\delta^2/120) (1 + \dots) (\psi_{11}^{(4)} \varepsilon \delta + \dots) \\
 &= \psi_{00} + \psi_{01} \delta + \psi_{10} \varepsilon + \psi_{02} \delta^2 + (\psi_{11} + m_{11} \psi_{00}) \varepsilon \delta + \psi_{20} \varepsilon^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \psi_{03} \delta^3 + (\psi_{12} + m_{11} \psi_{01} + m_{12} \psi_{00} - \psi_{11}^{(2)}/6) \varepsilon \delta^2 \\
& + (\psi_{21} + m_{11} \psi_{10} + m_{21} \psi_{00}) \varepsilon^2 \delta + \psi_{30} \varepsilon^3 + \psi_{04} \delta^4 \\
& + (\psi_{13} + m_{11} \psi_{02} + m_{12} \psi_{01} + m_{13} \psi_{00} - \psi_{12}^{(2)}/6 + \psi_{11}^{(4)}/120) \varepsilon \delta^3 \\
& + (\psi_{22} + m_{11} \psi_{11} + \psi_{12} \psi_{10} + m_{21} \psi_{01} + m_{22} \psi_{00} - \psi_{21}^{(2)}/6) \varepsilon^2 \delta^2 \\
& + (\psi_{31} + m_{11} \psi_{20} + m_{21} \psi_{10} + m_{31} \psi_{00}) \varepsilon^3 \delta + \psi_{40} \varepsilon^4 + \dots
\end{aligned}
\tag{A.14}$$

と仮定。従って式(2.2.18)に式(A.3)および(A.14)を代入し、 ε および δ の各べきに対する係数を比較することにより、次式を得る。

$$\varepsilon^i \delta^0 : \psi_{i0} = \delta_{i0} \quad (i \geq 0) \tag{A.15}$$

$$\varepsilon^0 \delta^j : \psi_{0j} = \delta_{0j} \quad (j \geq 1) \tag{A.16}$$

$$\varepsilon^1 \delta^1 : \psi_{11} + m_{11} \psi_{00} = \delta_{11} \tag{A.17}$$

$$\varepsilon^1 \delta^2 : \psi_{12} + m_{11} \psi_{01} + m_{12} \psi_{00} - \psi_{11}^{(2)}/6 = \delta_{12} \tag{A.18}$$

$$\varepsilon^2 \delta^1 : \psi_{21} + m_{11} \psi_{10} + m_{21} \psi_{00} = \delta_{21} \tag{A.19}$$

$$\varepsilon^1 \delta^3 : \psi_{13} + m_{11} \psi_{02} + m_{12} \psi_{01} + m_{13} \psi_{00} - \psi_{12}^{(2)}/6 + \psi_{11}^{(4)}/120 = \delta_{13} \tag{A.20}$$

$$\varepsilon^2 \delta^2 : \psi_{22} + m_{11} \psi_{11} + m_{12} \psi_{10} + m_{21} \psi_{01} + m_{22} \psi_{00} - \psi_{21}^{(2)}/6 = \delta_{22} \tag{A.21}$$

$$\varepsilon^3 \delta^1 : \psi_{31} + m_{11} \psi_{20} + m_{21} \psi_{10} + m_{31} \psi_{00} = \delta_{31} \tag{A.22}$$

次に、式(2.2.19)については、 δ の式の中に含ま

れる $\psi_z|_{z=m}$ および $\psi_x|_{z=m}$ を、式(2.2.27) および (A.8) ~ (A.12) ならびに ψ_{i0} および ψ_{0j} が一定であることを用いて展開しておく。ただし、 $\psi_x|_{z=m}$ については最終次が $\varepsilon\delta'$ であるから、式(2.2.19)においてこれに関する項の寄与は $\varepsilon^2\delta^3$ 以上のオーダーとほすため、考えている近似度の範囲では無視してよい。

$\psi_z|_{z=m}$ については、

$$\begin{aligned}
 \psi_z|_{z=m} &= \psi_1 - \delta m^2 \psi_1^{(2)}/2 + \delta^2 m^4 \psi_1^{(4)}/24 - \dots \\
 &= (\psi_{00} + \psi_{01} \delta + \psi_{10} \varepsilon + \psi_{02} \delta^2 + \psi_{11} \varepsilon \delta + \psi_{20} \varepsilon^2 + \psi_{03} \delta^3 \\
 &\quad + \psi_{12} \varepsilon \delta^2 + \psi_{21} \varepsilon^2 \delta + \psi_{30} \varepsilon^3 + \psi_{04} \delta^4 + \psi_{13} \varepsilon \delta^3 + \psi_{22} \varepsilon^2 \delta^2 \\
 &\quad + \psi_{31} \varepsilon^3 \delta + \psi_{40} \varepsilon^4 + \dots) \\
 &\quad - (\delta/2)(1 + \dots)(\psi_{11}^{(2)} \varepsilon \delta + \psi_{12}^{(2)} \varepsilon \delta^2 + \psi_{21}^{(2)} \varepsilon^2 \delta + \dots) \\
 &\quad + (\delta^2/24)(1 + \dots)(\psi_{11}^{(4)} \varepsilon \delta + \dots) - \dots \\
 &= \psi_{00} + \psi_{01} \delta + \psi_{10} \varepsilon + \psi_{02} \delta^2 + \psi_{11} \varepsilon \delta + \psi_{20} \varepsilon^2 \\
 &\quad + \psi_{03} \delta^3 + (\psi_{12} - \psi_{11}^{(2)}/2) \varepsilon \delta^2 + \psi_{21} \varepsilon^2 \delta + \psi_{30} \varepsilon^3 \\
 &\quad + \psi_{04} \delta^4 + (\psi_{13} - \psi_{12}^{(2)}/2 + \psi_{11}^{(4)}/24) \varepsilon \delta^3 + (\psi_{22} - \psi_{21}^{(2)}/2) \varepsilon^2 \delta^2 \\
 &\quad + \psi_{31} \varepsilon^3 \delta + \psi_{40} \varepsilon^4 + \dots \tag{A.23}
 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
\{\psi_{z|z=m}\}^2/2 &= \psi_{00}^2/2 + \psi_{00}\psi_{01}\delta + \psi_{00}\psi_{10}\varepsilon + (\psi_{00}\psi_{02} + \psi_{01}^2/2)\delta^2 \\
&+ (\psi_{00}\psi_{11} + \psi_{10}\psi_{01})\varepsilon\delta + (\psi_{10}\psi_{20} + \psi_{11}^2/2)\varepsilon^2 \\
&+ (\psi_{00}\psi_{03} + \psi_{01}\psi_{02})\delta^3 + \{\psi_{00}(\psi_{12} - \psi_{11}^{(2)}/2) + \psi_{10}\psi_{02} + \psi_{01}\psi_{11}\}\varepsilon\delta^2 \\
&+ (\psi_{00}\psi_{21} + \psi_{10}\psi_{11} + \psi_{01}\psi_{20})\varepsilon^2\delta + (\psi_{00}\psi_{30} + \psi_{10}\psi_{20})\varepsilon^3 \\
&+ (\psi_{00}\psi_{04} + \psi_{01}\psi_{03} + \psi_{02}^2/2)\delta^4 \\
&+ \{\psi_{00}(\psi_{13} - \psi_{12}^{(2)}/2 + \psi_{11}^{(4)}/24) + \psi_{10}\psi_{03} + \psi_{01}(\psi_{12} - \psi_{11}^{(2)}/2) \\
&\quad + \psi_{11}\psi_{02}\}\varepsilon\delta^3 \\
&+ \{\psi_{00}(\psi_{32} - \psi_{21}^{(2)}/2) + \psi_{10}(\psi_{12} - \psi_{11}^{(2)}/2) + \psi_{01}\psi_{21} + \psi_{20}\psi_{02} \\
&\quad + \psi_{11}^2/2\}\varepsilon^2\delta^2 \\
&+ (\psi_{00}\psi_{31} + \psi_{10}\psi_{21} + \psi_{01}\psi_{30} + \psi_{20}\psi_{11})\varepsilon^3\delta \\
&+ (\psi_{00}\psi_{40} + \psi_{10}\psi_{30} + \psi_{20}^2/2)\varepsilon^4 + \quad (A.24)
\end{aligned}$$

と作る。式(A.4), (A.8) および (A.24) を式(2.2.19) に代入し、両辺の係数を比較すれば、結局次式を得る。

$$\varepsilon^0\delta^0 : \psi_{00}^2/2 + 1 = \phi_{00} \quad (A.25)$$

$$\varepsilon^0\delta^1 : \psi_{00}\psi_{01} = \phi_{01} \quad (A.26)$$

$$\varepsilon^1\delta^0 : \psi_{00}\psi_{10} = \phi_{10} \quad (A.27)$$

$$\varepsilon^0\delta^2 : \psi_{00}\psi_{02} + \psi_{01}^2/2 = \phi_{02} \quad (A.28)$$

$$\varepsilon^1 \delta^1 : \psi_{00} \psi_{11} + \psi_{10} \psi_{01} + \eta_{11} = \bar{p}_{11} \quad (\text{A.29})$$

$$\varepsilon^2 \delta^0 : \psi_{00} \psi_{20} + \psi_{10}^2 / 2 = \bar{p}_{20} \quad (\text{A.30})$$

$$\varepsilon^0 \delta^3 : \psi_{00} \psi_{03} + \psi_{01} \psi_{02} = \bar{p}_{03} \quad (\text{A.31})$$

$$\varepsilon^1 \delta^2 : \psi_{00} (\psi_{12} - \psi_{11}^{(2)} / 2) + \psi_{10} \psi_{02} + \psi_{01} \psi_{11} + \eta_{12} = \bar{p}_{12} \quad (\text{A.32})$$

$$\varepsilon^2 \delta^1 : \psi_{00} \psi_{21} + \psi_{10} \psi_{11} + \psi_{01} \psi_{20} + \eta_{21} = \bar{p}_{21} \quad (\text{A.33})$$

$$\varepsilon^3 \delta^0 : \psi_{00} \psi_{30} + \psi_{10} \psi_{20} = \bar{p}_{30} \quad (\text{A.34})$$

$$\varepsilon^0 \delta^4 : \psi_{00} \psi_{04} + \psi_{01} \psi_{03} + \psi_{02}^2 / 2 = \bar{p}_{04} \quad (\text{A.35})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^1 \delta^3 : \psi_{00} (\psi_{13} - \psi_{12}^{(2)} / 2 + \psi_{11}^{(4)} / 24) + \psi_{10} \psi_{03} + \psi_{01} (\psi_{12} - \psi_{11}^{(2)} / 2) \\ + \psi_{11} \psi_{02} + \eta_{13} = \bar{p}_{13} \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \delta^2 : \psi_{00} (\psi_{22} - \psi_{21}^{(2)} / 2) + \psi_{10} (\psi_{12} - \psi_{11}^{(2)} / 2) + \psi_{01} \psi_{21} + \psi_{20} \psi_{02} \\ + \psi_{11}^2 / 2 + \eta_{22} = \bar{p}_{22} \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

$$\varepsilon^3 \delta^1 : \psi_{00} \psi_{31} + \psi_{10} \psi_{21} + \psi_{01} \psi_{30} + \psi_{20} \psi_{11} + \eta_{31} = \bar{p}_{31} \quad (\text{A.38})$$

$$\varepsilon^4 \delta^0 : \psi_{00} \psi_{40} + \psi_{10} \psi_{30} + \psi_{20}^2 / 2 = \bar{p}_{40} \quad (\text{A.39})$$

さらに式 (A.2) を式 (2.20) および (2.21) に代入すれば、右辺の値がそれぞれ \bar{p}_{ij} および $\varepsilon \delta$ であることより、

$$\bar{m}_{00} = 1, \quad \bar{m}_{ij} = 0 \quad (i \geq 1 \text{ 又は } j \geq 1) \quad (\text{A.40})$$

$$m_{ii}(0) - m_{ii}(1/2) = 1, \quad m_{ij}(0) - m_{ij}(1/2) = 0 \quad (i \geq 1 \text{ 又は } j \geq 1) \quad (\text{A.41})$$

を得る。

まず、 $\varepsilon^0 \delta^j$ および $\varepsilon^i \delta^0$ の係数から得られる式は、 ψ_{0j} および ψ_{i0} が決定された時に、 ρ_{0j} 、 ρ_{i0} 、 ρ_{0j} および ρ_{i0} を求めるための式となる。

$\varepsilon^i \delta^i$ に関する式 (A.17) および (A.29) より ψ_{ii} を消去すれば、

$$(1 - \psi_{00}^2) m_{ii} + (\psi_{i0} \psi_{0i} + \psi_{00} \rho_{ii} - \rho_{ii}) = 0 \quad (\text{A.42})$$

となる。ここで m_{ii} 以外すべて定数であるから、自明でない解 m_{ii} が存在するためには、() 内はそれより 0 でなければならぬ。固定座標系において正の方向に進行する波を考えると ψ_{00} の符号を真にとれば、

$$\psi_{00} = -1 \quad (\text{A.43})$$

であり、これを $\varepsilon^0 \delta^0$ に関する式 (A.15) および (A.25) に代入すれば、

$$\rho_{00} = -1 \quad (\text{A.44})$$

$$\rho_{00} = 3/2 \quad (\text{A.45})$$

を得る。さらに式 (A.42) の右側の () 内を 0 とする

式および式(A.17)より、 ψ_{01} , ψ_{10} , m_{11} および δ_{11} が得られた時に p_{11} および ψ_{11} を計算するための式が得られる。

$$p_{11} = -\delta_{11} + \psi_{10}\psi_{01} \quad (\text{A.46})$$

$$\psi_{11} = m_{11} + \delta_{11} \quad (\text{A.47})$$

次に ε^2 に関する式(A.18)および(A.32)を加え、これまでに得られた結果を考慮して整理すれば、

$$m_{11}^{(2)}/3 + 2\psi_{01}m_{11} + (\psi_{10}\psi_{02} + \psi_{01}\delta_{11} - \delta_{12} - p_{12}) = 0 \quad (\text{A.48})$$

となる。水平方向の座標が波長によって無次元化されていることにより、 $m_{11}(x)$ は周期を1とする周期関数である。しかも式(A.48)の同期平均をとれば、第1項および第2項は0となるから、第3項も0でなければならぬ。故に、

$$p_{12} = -\delta_{12} + \psi_{01}\delta_{11} + \psi_{10}\psi_{02} \quad (\text{A.49})$$

であり、この時式(A.48)は、

$$m_{11}^{(2)} + 6\psi_{01}m_{11} = 0 \quad (\text{A.50})$$

となる。 m_{11} の同期が1で、波高が1すなわち振幅が1/2であることを考慮し、 x 座標の原点を波峰の

位置にとることによれば、

$$m_{11} = (1/2) \cos 2\pi\alpha \quad (\text{A.51})$$

$$\psi_{01} = 2\pi^2/3 \quad (\text{A.52})$$

を得る。これを再び $\varepsilon^0\delta^1$ に関する式 (A.16) および (A.26) に代入すれば、

$$\delta_{01} = 2\pi^2/3 \quad (\text{A.53})$$

$$p_{01} = -2\pi^2/3 \quad (\text{A.54})$$

とほす。さらに式 (A.18) より

$$\psi_{12} = m_{12} - (2\pi^2/3) \cos 2\pi\alpha + \delta_{12} \quad (\text{A.55})$$

とほす。

$\varepsilon^2\delta^1$ に関する式 (A.19) および (A.33) を加え、これまでの結果を考慮して整理すれば、

$$2\psi_{10} m_{11} + \{\psi_{10} \delta_{11} + (2\pi^2/3)\psi_{20} - \delta_{21} - p_{21}\} = 0 \quad (\text{A.56})$$

とほり、 m_{11} だけが定数でほりことから、

$$\psi_{10} = 0 \quad (\text{A.57})$$

$$p_{21} = -\delta_{21} + (2\pi^2/3)\psi_{20} \quad (\text{A.58})$$

である。ここで $\varepsilon^1\delta^0$ に関する式 (A.15) および (A.27) にもどれば、

$$\delta_{10} = 0 \quad (\text{A.59})$$

$$\phi_{10} = 0 \quad (\text{A.60})$$

とほり、さらに式(A.19)より、

$$\psi_{21} = m_{21} + \delta_{21} \quad (\text{A-61})$$

とほる。

これから先は、計算が煩雑になるものの、式の誘導は規則的になる。

ε^3 に関する式(A.20)および(A.36)を加え、整理すれば、

$$\begin{aligned} \text{II} \quad & (1/3) m_{12}^{(2)} + (4\pi^2/3) m_{12} + (38\pi^4/45 + \psi_{02}) \cos 2\pi x \\ & + \{ (2\pi^2/3) \delta_{12} + \psi_{02} \delta_{11} - \delta_{13} - \phi_{13} \} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

となる。 m_{12} に対する特解が存在するための条件および m_{12} の同期平均値が 0 であることから、第3項および第4項はそれぞれ 0 である。よって、

$$\psi_{02} = -38\pi^4/45 \quad (\text{A.63})$$

$$\phi_{13} = -\delta_{13} + (2\pi^2/3) \delta_{12} - (38\pi^4/45) \delta_{11} \quad (\text{A.64})$$

を得る。このとき m_{12} の一般解は、

$$m_{12} = \alpha_{12} \cos 2\pi x + \beta_{12} \sin 2\pi x \quad (\text{A.65})$$

と仮するが、定数 α_{12} および β_{12} は式(A.41)および
 $\varepsilon^1 \delta^4$ の式より 0 と仮してしまふことにする。 $\varepsilon^0 \delta^2$
 に関する式(A.16)および(A.28)にもどれば、

$$\delta_{02} = -38\pi^4/45 \quad (\text{A.66})$$

$$\phi_{02} = 16\pi^4/15 \quad (\text{A.67})$$

とより、式(A.20)より ψ_{13} を m_{13} を用いて表現す
 る式が得られる。

$\varepsilon^2 \delta^2$ に関しても同様な操作をすれば、

$$\begin{aligned} & (1/3) m_{21}^{(2)} + (4\pi^2/3) m_{21} + \delta_{11} \cos 2\pi x + (3/16) \cos 4\pi x \\ \text{A.} \quad & + \left\{ (3/16) + (1/2) \delta_{11}^2 + (2\pi^2/3) \delta_{21} - 38\pi^4/45 - \delta_{22} - \phi_{22} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

より、 ϕ_{22} を δ_{22} 等によつて表わす式と、

$$\delta_{11} = 0 \quad (\text{A.69})$$

$$m_{21} = \alpha_{21} \cos 2\pi x + \beta_{21} \sin 2\pi x - (9/64\pi^2) \cos 4\pi x \quad (\text{A.70})$$

を得るが、前と同様に定数 α_{21} および β_{21} は結局 0
 である。また、 δ_{11} が決定されたことにより、式
 (A.46)を用いれば、

$$\psi_{11} = (1/2) \cos 2\pi x \quad (\text{A.72})$$

となる。

$\varepsilon^3 \delta^1$ に関しても同様に、

$$\psi_{20} \cos 2\pi x + \{(2\pi^2/3) \psi_{20} - \delta_{31} - \rho_{31}\} = 0 \quad (\text{A.73})$$

より、 ρ_{31} を δ_{31} 等によって等しい式と、

$$\psi_{20} = 0 \quad (\text{A.74})$$

を得る。 $\varepsilon^2 \delta^0$ に関する式 (A.15) および (A.30) にも
どおし。

$$\delta_{20} = 0 \quad (\text{A.75})$$

$$\rho_{20} = 0 \quad (\text{A.76})$$

となる。

以上により、 ε と δ に関して 2 次以下の解がすべて
決定された。まとめて示せば以下のようになる。

$$\psi_{00} = -1, \quad \psi_{01} = 2\pi^2/3, \quad \psi_{10} = 0,$$

$$\psi_{02} = -38\pi^4/45, \quad \psi_{11} = (1/2) \cos 2\pi x, \quad \psi_{20} = 0 \quad (\text{A.77})$$

$$m_{00} = 1, \quad m_{01} = 0, \quad m_{10} = 0, \quad m_{02} = 0,$$

$$m_{11} = (1/2) \cos 2\pi x, \quad m_{20} = 0 \quad (\text{A.78})$$

$$\delta_{00} = -1, \quad \delta_{01} = 2\pi^2/3, \quad \delta_{10} = 0, \quad \delta_{02} = -38\pi^4/45,$$

$$\beta_{11} = 0, \quad \beta_{20} = 0 \quad (\text{A.79})$$

$$\phi_{00} = 3/2, \quad \phi_{01} = -2\pi^2/3, \quad \phi_{10} = 0, \quad \phi_{02} = 16\pi^4/15,$$

$$\phi_{11} = 0, \quad \phi_{20} = 0 \quad (\text{A.80})$$

従って、2重級数を用いた保存波の第2次近似解は、

$$\psi = \sum \left[-1 + \delta(2\pi^2/3) + \delta^2(-38\pi^4/45) + \varepsilon\delta(1/2) \cos 2\pi x \right] \quad (\text{A.81})$$

$$m = 1 + \varepsilon\delta(1/2) \cos 2\pi x \quad (\text{A.82})$$

となる。

以上の過程から明らかのように、この計算をさらに続け、高次近似解を求めることは原理的に可能である。従って、パラメータを ε および δ を用いれば、正則な2重級数による解を得ることができるとなる。

付録 B 線形重ね合わせ法を用いた流速の計算法

以下においては線形重ね合わせ法を用いて流速・圧力等を計算する際、使いぬる線形フィルターについて略述した後、実際に数値計算をする場合の問題点について述べる。

水面変動等の入力信号を $f_I(t)$ 、流速・圧力等の出力信号を $f_O(t)$ とし、式(B.1)および(B.2)によって定義されるそれぞれのフーリエ変換を $F_I(\omega)$ 、 $F_O(\omega)$ とする。

$$F_I(\omega) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} f_I(t) e^{i\omega t} dt \quad (B.1)$$

$$F_O(\omega) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} f_O(t) e^{i\omega t} dt \quad (B.2)$$

伝達関数を $H(\omega)$ として、それらの間に式(B.3)のような関係式があるとする。

$$F_O(\omega) = H(\omega) \cdot F_I(\omega) \quad (B.3)$$

このとき出力信号 $f_O(t)$ は $F_O(\omega)$ のフーリエ逆変換によって求められ、若干の変形を行えば、

$$\begin{aligned} f_O(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F_O(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \cdot F_I(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \left[(1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} f_I(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \right] e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega \right] f_I(\tau) d\tau \\
&= (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \cdot f_I(\tau) d\tau \\
&= (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau') \cdot f_I(t-\tau') d\tau' \quad (\text{B.4})
\end{aligned}$$

となる。ここに

$$h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (\text{B.5})$$

であり、 $H(\omega)$ が与えられれば、式(B.5)を用いてあらかじめ $h(\tau)$ を計算することができる。この結果を式(B.4)に代入すれば、任意の時刻における出力信号 $f_O(t)$ を求めることができる。実際には数値計算に用いなければならないため、積分の下限および上限をそれぞれ $-M\Delta\tau$ および $M\Delta\tau$ として、式(B.4)を離散化すれば

$$f_O(t) = (\Delta\tau/2\pi) \sum_{m=-M}^M h(m\Delta\tau) \cdot f_I(t-m\Delta\tau) \quad (\text{B.6})$$

となる。

特に $H(\omega)$ が実数値をとる偶関数であれば、式(B.5)より、

$$\begin{aligned}
h(\tau) &= \int_{-\infty}^0 H(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega + \int_0^{\infty} H(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \\
&= 2 \int_0^{\infty} H(\omega) \cos \omega\tau d\omega
\end{aligned}$$

$$= 2 h_c(\tau) \quad (\text{B.7})$$

$$h_c(\tau) = \int_0^{\infty} H(\alpha) \cdot \cos \alpha \tau \, d\alpha \quad (\text{B.8})$$

であり、 $h_c(\tau)$ は偶関数となるから、式(B.6)は

$$\begin{aligned} f_0(t) = (\Delta\tau/\pi) & \left[h_c(0) \cdot f_I(t) \right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^M h_c(m\Delta\tau) \{ f_I(t-m\Delta\tau) + f_I(t+m\Delta\tau) \} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

となる。同様に $H(\alpha)$ の純虚数の値をとる奇関数ならば、

$$h(\tau) = 2 h_s(\tau) \quad (\text{B.10})$$

$$h_s(\tau) = \int_0^{\infty} H(\alpha) \cdot \sin \alpha \tau \, d\alpha \quad (\text{B.11})$$

$$f_0(t) = (\Delta\tau/\pi) \left[\sum_{m=1}^M h_s(m\Delta\tau) \{ f_I(t-m\Delta\tau) - f_I(t+m\Delta\tau) \} \right] \quad (\text{B.12})$$

となる。

ところで水面変動 $\zeta(t)$ から底面からの高さ Z における岸沖方向流速 $u(t)$ および加速度 $\dot{u}(t)$ 、鉛直方向流速 $w(t)$ および加速度 $\dot{w}(t)$ 、ならびに圧力 $P(t)$ を計算する際の伝達関数をそれぞれ H_u 、 $H_{\dot{u}}$ 、 H_w 、 $H_{\dot{w}}$ 、ならびに H_P とすれば、微小振幅波理論により、

$$H_u(\alpha) = \alpha \cosh kZ / \sinh kD \quad (\text{B.13})$$

$$H_v(\alpha) = -i\alpha^2 \cosh kZ / \sinh kD \quad (\text{B.14})$$

$$H_w(\alpha) = -i\alpha \sinh kZ / \sinh kD \quad (\text{B.15})$$

$$H_{\phi_1}(\alpha) = -\alpha^2 \sinh kZ / \sinh kD \quad (\text{B.16})$$

$$H_P(\alpha) = \rho g \cosh kZ / \cosh kD \quad (\text{B.17})$$

である。ここに D は平均水深、 ρ は流体の密度、 g は重力加速度であり、 k は波数であって

$$\alpha^2 = gk \tanh kD \quad (\text{B.18})$$

なる分散関係式を満たし、 i は虚数単位である。

ここで積分の下限および上限の決め方等、実際の計算における問題点について、岸沖方向流速 u を計算する場合を例にとりて説明を加える。

まず式 (B-8) の上限を決定するために、 $\alpha \rightarrow \infty$ と $\alpha \rightarrow 0$ における $H_u(\alpha)$ の値の比を考える。それぞれ深海および浅海条件に対応し、 $H_u(\alpha)$ の値はそれぞれ $\alpha \exp\{-\alpha^2(D-Z)/g\}$ および $\sqrt{g/D}$ に近づくから、

$$H_u(\alpha)/H_u(0) \rightarrow \sqrt{\alpha^2 D/g} \exp\{-\alpha^2(D-Z)/g\} \quad (\text{B.19})$$

となる。この値が十分に小さい値 ϵ_0 以下になるように

積分すればよい。たとえば、 $Z \leq 0.95 D$ においては、 $\varepsilon_0 = 2 \times 10^{-4}$ の場合、 $\sqrt{0.25 D^2} = 15$ ならば $\alpha = 15 \sqrt{3}$ まで積分すればよい。数値積分においてはごみ幅 Δ の値は用いる積分公式によって異なる。特に τ の値が大きい場合には Δ の値を $\pi/2\tau$ に比べて十分小さくするか、Filom の公式を用いる必要がある。

式(B.9)における上限 $H\Delta$ の値は相対的な高さ Z/D の値によって異なる。底面においては α の値の増大に伴う $Hu(\alpha)$ の減少が急激であるため、これをフーリエ変換した $f_c(\tau)$ の減少は最も緩慢である。この条件で実際に計算を行なうと、 $f_c(\tau)/f_c(0)$ の値が 10% および 1% となるのは $\tau\sqrt{g/D}$ の値がそれぞれ約 2.0 および約 7.6 であった。次にごみ幅 Δ に関しては、水面変動の実測値のサンプリング間隔によって決定してしまう。しかし、平均水面直下の場合の計算を行なおうとすると、 $f_c(\tau)$ が Δ に比べて短い周期で振動するため、単に式(B.9)を用いたのでは精度が非常に悪くなる。このような場合に

は Filom の公式と同様な発想を用いて、次のように
 可成はよい。式(B.4)における積分区間を $\Delta\tau$ ごと
 に分割すれば、

$$f_0(t) = (1/2\pi) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{m\Delta\tau}^{(m+1)\Delta\tau} h(\tau) \cdot f_I(t-\tau) d\tau \quad (B.20)$$

となる。ここで各区間における f_I の値は両端におい
 て実測値が与えられるのみとなるため、直線によ
 って内挿すれば、

$$f_I(t-\tau) = f_I(t-m\Delta\tau) \cdot \{(m+1) - \tau/\Delta\tau\} \\
 + f_I(t-(m+1)\Delta\tau) \cdot \{\tau/\Delta\tau - m\} \quad (B.21)$$

となる。これを式(B.20)に代入し、 $f_I(t-m\Delta\tau)$ につ
 いて整理すれば次式を得る。

$$f_0(t) = (\Delta\tau/2\pi) \sum_{m=-\infty}^{\infty} h'(m\Delta\tau) \cdot f_I(t-m\Delta\tau) \quad (B.22)$$

ここに

$$h'(m\Delta\tau) = (1/\Delta\tau) \left\{ \int_{(m-1)\Delta\tau}^{m\Delta\tau} h(\tau) \{ \tau/\Delta\tau - m + 1 \} d\tau \right. \\
 \left. + \int_{m\Delta\tau}^{(m+1)\Delta\tau} h(\tau) \{ m + 1 - \tau/\Delta\tau \} d\tau \right\} \quad (B.23)$$

である。式(B.22)は式(B.6)中の h を h' とした形に
 なっているだけであるから、式(B.9)に対応する式
 についても h_c を h'_c と可成はよい。また式(B.23)より、

$h'(m\Delta\tau)$ は区間 $(m-1)\Delta\tau, (m+1)\Delta\tau$ における $h(\tau)$ の重み付き平均値であることがわかる。ところで、 $H_u(\alpha)$ の深海条件における近似値 $\alpha \cdot \exp\{-\alpha^2(D-Z)/g\}$ より、この値が最大となるような α の値を、微分係数を 0 とおくことによつて求めると、

$$\alpha_0 = \sqrt{g / \{2(D-Z)\}} \quad (\text{B.24})$$

となる。従つて式 (B.8) において $\cos \tau\alpha_0$ の値が +1 および -1 の場合に $h_c(\tau)$ は極大または極小に近い値をとる。よつて $h_c(\tau)$ の振動の周期はおよそ $2\pi/\alpha_0$ であり、式 (B.23) の数値計算に際してはきざみ幅をこの値に対して十分小さくとればよい。