

BITTERLICH 法における林縁の問題とその実験例

助手 前 沢 完 次 郎

Kanjiro MAEZAWA :

Bias due to Edge Effect in BITTERLICH Method and Its Examples

目 次

I まえがき	229	3. BIASの傾向	233
II BITTERLICH 法における BIAS	229	IV 断面積常数を用いる場合	238
III 実験例	231	V あとがき	240
1. 供試料	231	VI 参考文献	242
2. BIAS の生起	232	Résumé	242

I. ま え が き

BITTERLICH 法の実行に際して、臨界角度の効果的な大きさとか、標本点についての妥当な数、或は、樹木が不透明体であることから現実に生ずる推定の偏りに対する補正手段等とともに、未だ明確な指針の与えられていないものの一つに、調査対象林地の境界近くにとられた標本点についての取扱い方、即ち、林縁処理の問題がある。

先年、増山はこの種の問題に対して“不偏性の条件”を与え、偏りのない推定値をうるためには、この問題をいかにあつかうべきかを明らかにした。これを BITTERLICH 法についてみれば、もし、拡大円面積の一部が林地面積の外にはみ出している場合、標本点を林地面積内のみにとると、推定値は偏りをもってしまうことをその理論は示している。本稿はその偏り (BIAS) をしらべ、その大きさ、或は、傾向をしるために行つた実験の結果を記載したものである。

もとより、実際上の指針を与えるためには、定量的な説明の加えられることがのぞましい。そのためにこそ、この小文においても実験例を示したのであるが、こゝであつかつた林分は一つであり、従つて、えられた結果に対してもその限りにおける意味しか与ええない。今後このような実験が積み重ねられ、生起する BIAS についてより多くの情報がえられてはじめてこの問題の大勢をつかむことができるだろう。

御鞭撻と御教えを賜つた、永田龍之助、扇田正二、増山元三郎の諸先生、原稿の御校閲と有益な御批判を賜つた、嶺 一三、田口玄一、平田種男の諸先生、及び、試料をこゝろよく提供して下さつた東京営林局、子幡弘之技官 (当時) に深謝する。

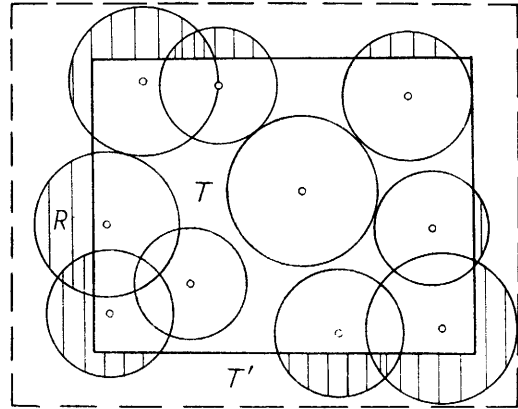
II. BITTERLICH 法における BIAS

i. 大きさ T の面積のなかに、いろいろな大きさの立木胸高断面が含まれていて、その断面

積合計を g とし、それぞれの胸高直径の p 倍の直径を有する拡大円面積の合計を G とする。
 $G=p^2g$ として示されるから、 g を推定するのにまず G をもとめることを考える。いま、 T 内に確率的に N ケの点をおとし、拡大円のうちそれらの点をふくむもの数をかぞえ、その合計を n とすれば、 $\frac{n}{N} \cdot T$ は G の値にほぼひとしいから、このようにしてもとめた G を p^2 で割つてやれば g が推定できる。

この場合、拡大円面積の一部が T の外にはみ出すならば、 T の外側に拡大した面積 T' を考え、 T' は全ての拡大円面積を含むようにし、 N ケの標本点は T' について選ばなければならない。これが増山のいう“不偏性の条件”である¹⁾⁻⁶⁾。(換言すれば、全ての拡大円面積が T' のなかに含まれている場合、 T' は不偏性の条件を満たすという)。拡大円面積のある部分が T の外にはみ出している場合、 T' を考慮しないで推定すると、 $\frac{n}{N} \cdot T$ は $G \cap T^*$ の不偏推定量になり、従つて、これからえられる g の値は偏りをもつてしまう。

このようなことから、もし、現実の T がこの不偏性の条件を満たさないならば、 T の代りに T を含む拡大面積 T' をとつて、 T' については不偏性の条件を満たすようにすることが必要である。なお、この条件に関する数学上の一般的な説明については、増山の原著を参照されたい。不偏性の条件が満たされない場合、推定値に BIAS を生ずることは、増山、黒岩、Sengupta が実験上でも示している。



第1図 T : 林地面積, T' : 拡大面積, $R=G-G \cap T$: 線影の部分 Fig. 1. T : Forest land area, T' : Extended area, R : Shaded area

ii. BITTERLICH 法において拡大円面積の一部が T の外にはみ出している場合、i) に示した条件を無視すると、どのような BIAS が生ずるであろうか。

拡大面積 T' に対して N ケの標本点をおとし、かぞえられた本数の合計 n' の数学的期待値を $E\{n'\}$ とすれば

$$\frac{E\{n'\}}{N} = \frac{G}{T'} = \frac{p^2g}{T'} \quad \dots\dots\dots(2.1)$$

一方、拡大しないもとの面積(林地面積) T に対して、 N ケの標本点をおとし、この場合にかぞえられた本数の合計 n の数学的期待値を $E\{n\}$ とすれば

$$\frac{E\{n\}}{N} = \frac{G \cap T}{T} \quad \dots\dots\dots(2.2)$$

いま $G \cap T = p^2g_b$ とおけば、(2.2) 式は

*) G のうち T の面積内に含まれた部分を示す。

$$\frac{E\{n\}}{N} = \frac{G \cap T}{T} = \frac{p^2 g_b}{T} \quad \dots\dots\dots(2.3)$$

(2.1) 式及び (2.3) 式より, g 及び g_b は

$$g = \frac{E\{n'\}}{N} \cdot \frac{T'}{p^2} \quad \dots\dots\dots(2.4)$$

$$g_b = \frac{E\{n\}}{N} \cdot \frac{T}{p^2} \quad \dots\dots\dots(2.5)$$

としてもとめられるから, 不偏性の条件を無視することによつて生ずる BIAS b は

$$b = g_b - g = \frac{E\{n\}}{N} \cdot \frac{T}{p^2} - \frac{E\{n'\}}{N} \cdot \frac{T'}{p^2} \quad \dots\dots\dots(2.6)$$

従つて
$$R = G - G \cap T \quad \dots\dots\dots(2.7)$$

とおけば (2.6) 式は次のように与えられる。

$$b = \frac{G \cap T}{p^2} - \frac{G}{p^2} = -\frac{R}{p^2} \quad \dots\dots\dots(2.8)$$

即ち, 拡大円面積のうち T 外にはみ出した部分 R に対応した断面積が, 偏りとなつて生起する。そして, (2.7) 式はつねに正であるから, その符号はマイナスである。

相対誤差 e をもとめると

$$e = \frac{b}{g} = -\frac{R}{p^2} \cdot \frac{p^2}{G} = -\frac{R}{G} \quad \dots\dots\dots(2.9)$$

となり, その絶対値は R と拡大円面積合計 G との比として示される。

Ⅲ. 実 験 例

BIAS b 及びその相対的な大きさ e は, 夫々, (2.8) 式, (2.9) 式として示されたが, その大きさ或は傾向を実験上でしらべた結果を次に記す。

1. 供 試 料

この実験においては, 現地での測定をさけて林分位置図を利用した。標本点の数を相当に多くして, しかも, できるだけ正確な測定をしようとする場合, 机上実験の方がやりやすいためである。たしかに, 立木の位置については不正確さをまぬかれないが, この実験の目的に対しては, 多少の位置のずれはそれ程重要とはおもわれないし, 又, 拡大率を大きくした場合を考えると, 現地実験は非常に困難になつてくる。

供試林分は, 東京営林局, 賀茂経営区, 荻野入収穫試験地のスギ人工植栽林で, 林令 31 年, 平均直径約 15 cm, 平均樹高約 13 m のものである。試験地面積は 0.2049 ha^{*)} であり, 立木本数は 584 本かぞえられた。その直径階別本数は次のとおりである。

*) 試験地の現況調査表によると, 試験地面積は 0.18 ha となつていますが, 実験用に作成した縮尺 1/50 の位置図から逆にもとめた値は 0.2049 ha であつたので, この実験においてはその値を用いた。

第1表 直径階別本数
Table 1. Number of trees by diameter class

直径階 (cm) Diameter class	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
本数 Number of trees	1	20	69	103	106	116	94	45	19	6	4	1

又、これら毎木の胸高直径測定値より計算した胸高断面積合計は 10.7450 m^2 であつた。なお、この試験地の位置図は縮尺 1/200 であつたが、それを原図として縮尺 1/50 に拡大し、実験用の林分位置図とした。

2. BIAS の生起

1) に示した供試料にもとづいて作成した位置図 (約 $100 \text{ cm} \times 80 \text{ cm}$) を $4 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$ の格子縞でおおい、それによつてつくられた格子の交点をこの実験における標本点とした。(用いた位置図は縮尺 1/50 であるから、実際には、縦、横 2 m おきに標本点をとつたことに相当する)。林地面積 T 内にとられた標本点の数 N は 528 点であつた。次に $p^2 = 2500$ (断面積常数 4 の場合に相当する)、即ち、夫々の胸高直径の 50 倍の直径をもつた拡大円を各立木断面のまわりにえがき、図上設定した各標本点において記録木の測定をおこなつた。かぞえられた本数合計 n は 6371 本であつた。 $T = 2049 \text{ m}^2$ であるから、これらの値より \hat{g}_b は、(2.5) 式によつて

$$\hat{g}_b = \frac{n}{N} \cdot \frac{T}{p^2} = \frac{6371}{528} \cdot \frac{2049}{2500} = 9.8895 \text{ (m}^2\text{)}.$$

これは、不偏性の条件を無視した場合の推定値である。

次に、 T 外にはみ出た拡大円面積を考慮して、それらの全部を含む面積 T' をとり、これを調査対象の面積とした。 $(T' - T)$ の面積については、まへの T に対すると同様に格子でおおい、その交点を $(T' - T)$ の面積における標本点とした。 T' の形及び大きさは、理論上どのようなものであつてもさしつかえないわけであるが、この実験においては、なるべく小さな、しかも、その大きさの算出を容易ならしめるために、不整形ではあつても矩形の集合した形のものをとつた。図上よりもとめた T' の面積は 2964 m^2 であつた。 $(T' - T)$ については 213 ケの標本点がとられたから、この場合の標本点の数は $528 + 213 = 741$ ^{*)} である。この場合にかぞえられた記録本数合計は 6739 本であつたから、(2.4) 式から \hat{g} は次のようにもとめられる。

$$\hat{g} = \frac{6739}{741} \cdot \frac{2964}{2500} = 10.7824 \text{ (m}^2\text{)}.$$

これは、不偏性の条件を考慮にいたした上での測定結果である。

これらの結果と対比すべき g の値は、1) にみられるとおり 10.7450 m^2 であるから、 $\hat{g} = 10.7824 \text{ m}^2$ は g の値に非常に近いことがわかる。 $\hat{g}_b - g = -0.8555 \text{ m}^2$ は (2.8) 式に相当する BIAS の推定値であり、それを g で割つた値 -0.08 は (2.9) 式に相当する相対誤差の推定値

*) T 内については、あらためて標本点をとることなしに、さきのものをそのまま用いた。

である。従つて、この例のような林分構造及び林地面積をもつた林においては、不偏性の条件を無視すると、 $p^2=2500$ の場合、 -8% 程度の BIAS が生ずるものと考えられる。

註) T の場合、528 ケの標本点においてかぞえられた本数の分散は $\hat{\sigma}^2=9.3409$ であつたから、これより g_b の分散 σ_{gb}^2 は

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{gb}^2 &= \left(\frac{T}{p^2}\right)^2 \cdot \frac{\hat{\sigma}^2}{N} = \left(\frac{2049}{2500}\right)^2 \cdot \frac{9.3409}{528} \\ &= 0.0118839.\end{aligned}$$

故に

$$\hat{\sigma}_{gb} = 0.1090$$

として計算される。

又、 T' については本数の分散は 29.5694^{*)} であつたから、これより g の分散 σ_g^2 は

$$\hat{\sigma}_g^2 = \left(\frac{2964}{2500}\right)^2 \cdot \frac{29.5694}{741} = 0.0560920.$$

故に

$$\hat{\sigma}_g = 0.2368$$

として計算される。

従つて、2 倍のシグマをとれば、これらの値から g_b 及び g は

$$g_b = 9.8895 \pm 0.2180 \quad (\text{m}^2)$$

$$g = 10.7824 \pm 0.4736 \quad (\text{m}^2)$$

としてもとめられる。

従つて又、 $\hat{b} = \hat{g}_b - g = -0.8555 \text{ m}^2$ は、厳密には $-0.8555 \pm 0.2180 \text{ m}^2$ と記さねばならないし、 g で割つた値 -0.08 は $-0.06 \sim -0.10$ として示すべきであろう。しかし乍ら、この小文においては、モデル実験的な意味から一応の量的目安を与えればよいと考えて、便宜的ではあるが点推定による数値計算をおこなつた。これは以下の推論においても同様であるが、そのためにサンプル・サイズはできるだけ大きくしたつもりである。

なお、この実験において真値とみなされる 10.7450 m^2 の値は、 g の推定値のなかには含まれるが、 g_b のそれには含まれない。 $|\hat{g}_b - g| = 0.8555 \text{ m}^2$ は $\hat{\sigma}_{gb} = 0.1090 \text{ m}^2$ にくらべてはるかに大きく、約 8 倍もの値をとり、その差が単なる偶差とは考えられないことを示している。

3. BIAS の傾向

(2.9) 式からみられるように BIAS の相対的な大きさ e は、 R 及び G の函数として示される

*) T の場合にくらべて大きくおもわれるが、これは記録本数 0 という測定値がかなりできたためであろう。

から、実際には、調査対象林分の構造とか、林地の大きさ、形状、或は、その調査に用いる p の値等によつて、その値は変つてくるだろう。まえの例においては、 -8% 程度の **BIAS** が推定されたが、これは $T=0.2$ ha, $p^2=2500$ でしかも形状は比較的正方形に近い場合の一つの結果であつた。もし、 T をかえ、 p をかえた場合に e はどのような傾向を示すだろうか、以下、イ) 林分構造は一定、ロ) 林地の形状は正方形という2つの前提のもとに e と T 、及び e と p^2 との関係をし、又、ロ) の仮定を除いてある p^2 、 T の場合の e と林地の周囲の長さ L との関係をしらべてみた。勿論、このような前提をかえてやれば、 e は異つた値を示すものと考えられる。従つて、多くの場合についての分析がなされてはじめて e に対する一般的なそして定量的な説明が与えられることになる。

i. まえの例において、 G は $g \times 2500 = 26862 \text{ m}^2$ であり、 $G \cap T$ は $\frac{6371}{528} \cdot 2049 = 24724 \text{ m}^2$ と推定されるから、(2.7) 式より $R = 2138 \text{ m}^2$ と推定される。いま、この R が林地面積 T (その周囲の長さ L) のまわりを一樣な巾 r をもつてとりまいていると考えることにすれば

$$R = Lr + \pi r^2 \quad \dots\dots\dots(3.1)$$

とおくことができるだろう。

位置図よりもとめた L は 182.55 m であつたから、(3.1) 式によつて r をもとめてみると

$$2138 = 182.55 r + 3.14 r^2$$

$$r = 9.99 \approx 10 \text{ (m)}.$$

T がどのように変つても、林分構造及び p の値が一定であれば、この r の値は変わらないと仮定すれば、(3.1) 式は次のようにかきかえられる。

$$R = 10L + 314. \quad \dots\dots\dots(3.2)$$

林地の形状を正方形と仮定すれば、 $L = 4\sqrt{T}$ であるから、(3.2) 式は又

$$R = 40\sqrt{T} + 314 \quad \dots\dots\dots(3.3)$$

となる。

従つて、たとえば、林分構造は同じで面積が2倍になつた場合を考えると

$$\text{林地面積} = 2 \times 2049 = 4098 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$\text{拡大円面積合計} = 2 \times 26862 = 53724 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$R = 40\sqrt{4098} + 314 = 2874 \text{ (m}^2\text{)}$$

より、(2.9) 式によつて

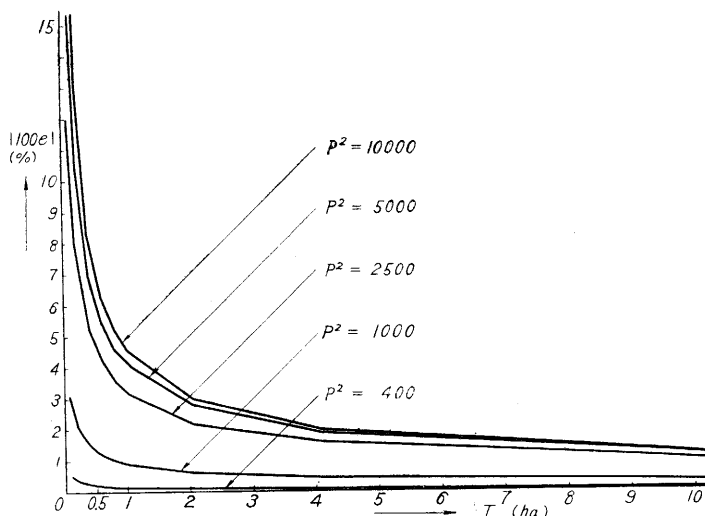
$$e = -\frac{2874}{53724} = -0.053$$

即ち、この場合の e は -5% 程度と推定される。

$T = 2049 \text{ m}^2$ なるまえの例における林地は、正方形に近い形を呈していたから、面積が2倍に

なると、 $|e|$ は大よそ 8% から 5% に減少する。

このような方法で T の大きさをいろいろにとつて $|100e|$ をもとめ、それらの結果を図示したものが第 2 図における $p^2=2500$ の場合である。 T が小さいときは、その値はかなり大きく 10% 以上もの値を示すが、 T が 1 ha 以上になると急激に減少し 1~2% 程度になつてくる。



第 2 図 $|100e|$ と T との関係

Fig. 2. Relationship between $|100e|$ and T

ii. i) における結果は、 $p^2=2500$ の場合であつた。次に同様な実験を $p^2=400, 1000, 5000, 10000$ の各場合についておこなつてみた。

e をもとめるためには、それぞれの場合について r を実験的にもとめる必要があり、そのためにはまず R を推定しなければならない。 R の推定、換言すれば、 $G \cap T$ を推定するために $p^2=2500$ の場合には標本点の数 N は 528 ケとられたが、 $p^2=400, 1000, 5000$ については $N=100$ とし、又、 $p^2=10000$ については $N=30$ とした。これは、 N を大きくしてやればその推定値はより正確ではあろうけれども、実際に 500 点以上もの測定をくりかえすことは多くの時間を要するし、又、 $p^2=10000$ の場合等時間というよりもむしろ測定が著しく困難になつたためである。

100 ケの標本点は $p^2=2500$ の場合に用いた 528 ケのうちから JIS 乱数表を用いて抽出設定し、 $p^2=400, 1000, 5000$ の 3 つの場合の標本点はそれぞれ共通のものとした。 $N=30$ については、100 ケのうちから又あらためて 30 ケ抽出し決定した。

次にそれぞれの場合の測定結果を示す。

$p^2=400$:

$N=100$ の各標本点においてかぞえられた記録本数合計 n は 209 であつたから、これより $\hat{G} \cap T$

$= \frac{209}{100} \cdot 2049 = 4282.41$ 。一方、 $G = g \times 400 = 4298.00$ であるから

$$\hat{R} = 16.$$

$L = 182.55$ を用い、(3.1) 式によつて r をもとめると、 $r = 0.09$ ともとめられるから、これより R と T との関係式は

$$R = 0.36\sqrt{T} + 0.0. \quad \dots\dots\dots(3.4)$$

$p^2 = 1000$:

$$N = 100.$$

$$n = 513$$

$$\hat{G} \cap T = \frac{513}{100} \cdot 2049 = 10511$$

$$G = g \times 1000 = 10745$$

従つて、 $\hat{R} = 234$ であるから、 $r = 1.25$ 。これより

$$R = 5\sqrt{T} + 4.9. \quad \dots\dots\dots(3.5)$$

$p^2 = 5000$:

$$N = 100$$

$$n = 2334$$

$$\hat{G} \cap T = \frac{2334}{100} \cdot 2049 = 47824$$

$$G = g \times 5000 = 53725$$

従つて、 $\hat{R} = 5901$ であるから、 $r = 23$ 。これより

$$R = 92\sqrt{T} + 1661. \quad \dots\dots\dots(3.6)$$

$p^2 = 10000$:

$$N = 30$$

$$n = 1362$$

$$\hat{G} \cap T = \frac{1362}{30} \cdot 2049 = 93025$$

$$G = g \times 10000 = 107450$$

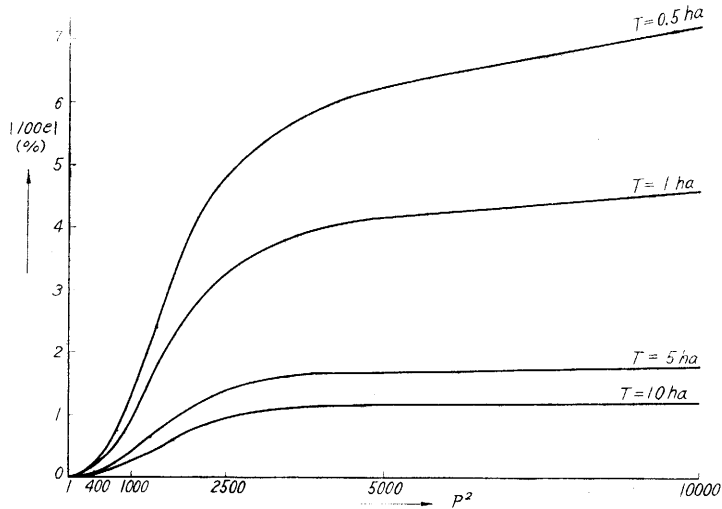
従つて、 $\hat{R} = 14425$ であるから、 $r = 45$ 。これより

$$R = 180\sqrt{T} + 6288. \quad \dots\dots\dots(3.7)$$

(3.4)~(3.7) 式をもちいて、i) の場合と同様に T と $|100e|$ との関係をもとめた結果が第2図である。その図からみられるとおり、不偏性の条件を無視することによつて生ずる BIAS の相対的な大きさは、林地面積の増大につれて減少する傾向を示し、林地面積が大きいときにはそれ程大きいとはおもわれないが、面積が小さくなると急激に増大している。そして、とくに p^2 の

値が大ききときには十分考慮をはらう必要があるようにおもわれる。

p^2 の各場合についてみると、 p^2 の値の小さい程 e も小さい。このことから見方を変えて林地面積毎についてみれば、 p^2 の大きさにつれて e は増大するといえるだろう。その傾向を明白にするために、いくつかの T について示したものが第3図である。林地面積が小さい程 e の変化ははげしい。そして各場合とも $p^2=500\sim 3000$ 程度において大きく変つてゆくが、それをすぎると急に横向きになる。



第3図 $|100e|$ と p^2 との関係

Fig. 3. Relationship between $|100e|$ and p^2

iii. 以上 i), ii) の各場合における結果は、林地の形状が正方形であることを前提としたものであつたが、この形についての仮定をとりのぞいて、林地の周囲長 L と e との関係を $p^2=2500$ の場合についてもとめた結果を次に示す。

$e = -\frac{R}{G}$ であり、又、(3.2) 式から $R=10L+314$ として与えられるから

$$e = -\frac{(10L+314)}{G}$$

従つて、たとえば、 $T=1$ ha の場合について考えると

$$G = \frac{10000}{2049} \times 26862 \doteq 131100 \text{ (m}^2\text{)}$$

とおくことによつて、 e と L との関係式は

$$e = -\frac{(10L+314)^{*})}{131100}$$

として示されるだろう。

*) L は、形が円形のときに最少になり、形が帯状になりしかもその中がせまくなるにつれて大きな値をもつてくる。

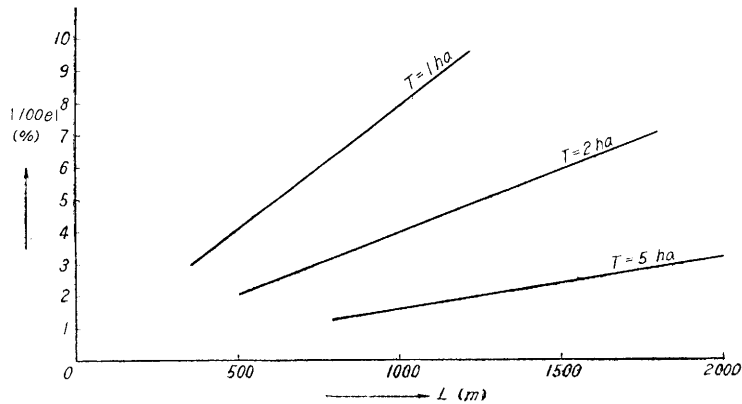
このようにして、 $T=2ha$ 、 $5 ha$ の各場合については、それぞれ

$$e = - \frac{(10L + 314)}{262200}$$

$$e = - \frac{(10L + 314)}{655500}$$

として示される。

これら3つの場合について L に対する $|100e|$ をもとめ、図示したものが第4図である。関係式からその傾向線は直線で示されるが、 L の大きい程 e は大きい。他の p^2 の場合についてもその傾向はおそらく同様であろう。ある林地面積のもとでは、林地が細長いか、或は、不規則な形状を呈すると周囲長の値が大きくなるから、その様な場合には、たとえ面積が大きくても不偏性の条件についての考慮が必要となるだろう。



第4図 $|100e|$ と L との関係 ($p^2=2500$)

Fig. 4. Relationship between $|100e|$ and L

IV. 断面積常数を用いる場合

BITTERLICH 法の実行においては、ha 当りの断面積を推定すればよいという立場から、平均記録本数に断面積常数 (BAF) をかける方法をとることが一般である。このように、直接 ha 当りの値をもとめるやり方に対しては、不偏性の条件を無視した場合、どの程度の BIAS を考慮しなければならぬか次に考えてみよう。

BAF は $BAF = \frac{10000}{p^2}$ と定義されるから、不偏性の条件を満たした上での平均記録本数を $\frac{E\{n'\}}{N}$ とすれば

$$\frac{E\{n'\}}{N} \cdot BAF = \frac{E\{n'\}}{N} \cdot \frac{10000}{p^2} \quad \dots\dots\dots(4.1)$$

この N ケの標本点は面積 T' についておとされるはずであるから、上式は理論上次式の左辺を略記したものにはかならない。

$$\frac{E\{n'\}}{N} \cdot \frac{T'}{p^2} \cdot \frac{10000}{T'} = g \cdot \frac{10000}{T'} \quad \dots\dots\dots(4.2)$$

従つて、 $\frac{E\{n'\}}{N} \cdot \text{BAF}$ は、 g に対応する面積を T' としてこれを ha 当りに換算したものである。

さて、林業の実際においては、もとめられた断面積に対応する林地面積としては T' よりも T をとることの方がこのましいから、拡大面積 T' のもとにえられた値を T についての換算値として示しなおす必要が生じてくる。即ち、ha 当りの換算値 g_H は、 $g_H = g \cdot \frac{10000}{T'}$ としてではなくて、 $g_H = g \cdot \frac{10000}{T}$ として与えることにすれば

$$g_H = g \cdot \frac{10000}{T} = \frac{E\{n'\}}{N} \cdot \frac{T'}{p^2} \cdot \frac{10000}{T} = \frac{T'}{T} \left(\frac{E\{n'\}}{N} \cdot \text{BAF} \right) \quad \dots\dots\dots(4.3)$$

として示される。一方、不偏性の条件を無視した場合の断面積 g_b は $\frac{E\{n\}}{N} \cdot \frac{T}{p^2}$ であるから、この ha 当り換算値 g_{bH} は

$$g_{bH} = \frac{E\{n\}}{N} \cdot \frac{T}{p^2} \cdot \frac{10000}{T} = \frac{E\{n\}}{N} \cdot \text{BAF} \quad \dots\dots\dots(4.4)$$

従つて、ha 当りの BIAS は

$$\begin{aligned} b_H = g_{bH} - g_H &= \left(\frac{E\{n\}}{N} \cdot \frac{T}{p^2} - \frac{E\{n'\}}{N} \cdot \frac{T'}{p^2} \right) \cdot \frac{10000}{T} \\ &= \left(-\frac{R}{p^2} \right) \cdot \frac{10000}{T} \quad \dots\dots\dots(4.5) \end{aligned}$$

として示される。これは (2.8) 式からみられるとおりに、対象面積が $T \text{ m}^2$ であつたときに生じた BIAS を ha 当りに換算したものに相当する。

又、相対誤差 e_H は

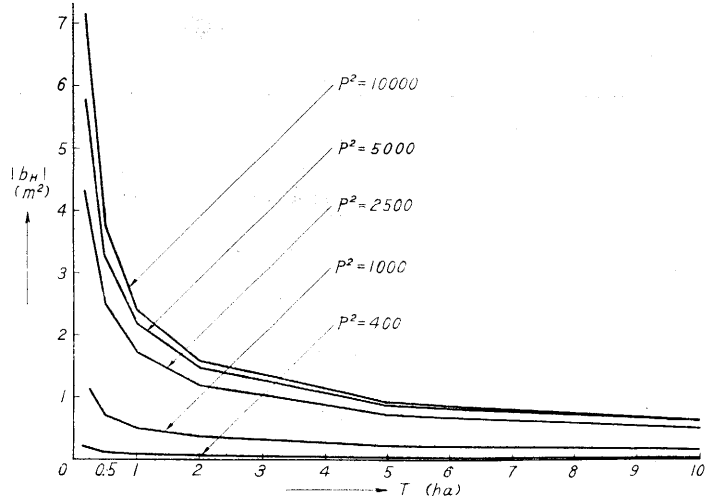
$$e_H = \frac{b_H}{g_H} = -\frac{R}{G}$$

であつて、これは (2.9) 式に一致する。

前節においてえられた R と T との関係式を用いて、 $p^2 = 400, 1000, 2500, 5000, 10000$ の各場合について $|b_H|$ の値をもとめ図示したものが第 5 図である*)。その傾向は第 2 図の場合と同様であり、 T が小さいと $|b_H|$ は大きな値を示すが、 T が 1~2 ha 程度をこすと、その値は極端に横向きになる。又 p^2 の各場合についてみると、 p^2 の値の小さい程 $|b_H|$ も小さい。

第 5 図は $|b_H|$ のなまの値を示しているから、調査対象の林分についての条件が、この実験における場合と近似しているならば、不偏性の条件を無視した推定に直接用いることができるだろう。この図は、 T, p^2 を与えたときにどの程度の $|b_H|$ が期待されるかを示しているのだから、不偏性の条件を無視した上での推定値に、その場合に対応した値を加えてやればよい。たとえば

*) 林分構造、林地の形状等についての前提は、前節における場合と全く同様である。



第5図 $|b_H|$ と T との関係

Fig. 5. Relationship between $|b_H|$ and T

$T=0.2$ ha, $p^2=2500$ の場合に \hat{g}_{bH} が 48 m^2 であったとすれば、これに 4 m^2 を加えた値 52 m^2 を \hat{g}_H と考えることができるだろう。

なお、BAF を用いる推定では、(4.3) 式に示されるように拡大面積 T' のもとでもとめた $\frac{E\{n'\}}{N}$ に $\frac{T'}{T} \cdot \text{BAF}$ をかけて、 T 当りの値に引き直さなければならない。即ち、そのためには単に BAF 倍した値に $\frac{T'}{T}$ なる補正係数を乗じてやる必要がある。 T に対して T' はつねに大であるから、 $\frac{T'}{T}$ は1よりも大きい。

たとえば、前節 2) の例において、 $\frac{E\{n'\}}{N}$ の推定値は $\frac{6739}{741} \approx 9.1$ であったから

$$9.1 \times 4 = 36.4 \text{ (m}^2\text{)}$$

という値は、 T' にもとづいた ha 当り換算値であり

$$9.1 \times 4 \times \frac{2964}{2049} = 52.6 \text{ (m}^2\text{)}$$

という値は、 T にもとづいた ha 当り換算値である。

V. あとがき

i. N 個の標本点をおとして n 個の記録本数をかぞえるという手段をとおしての推定の対象は、断面積そのものではなくて、それらの直径の p ($\gg 1$) 倍の直径をもつた拡大円面積の合計であることに注意しなければならない。この拡大円面積合計 G がもとめられてはじめて、 $G = p^2 g$ から g がもとめられるのであるから、 G の推定値が BIAS をもつてしまつたら g も当然 BIAS をもつたものになる。 G の一部が林地面積 T の外にはみ出している場合に、 T 内のみ標本点をとることは、 G のうち T 内に含まれた部分 $G \cap T$ を推定することであるから、これ

を p^2 で割つても g はもとめられない。そして、その場合 $G > G \cap T$ であるから、推定値はマイナスの方向に **BIAS** をもつてしまう。

ii. その **BIAS** の傾向については、前文における結果から、つぎのようにいうことができるだろう。林分の構造が一応均一であり、極端に大きい拡大率 p をつかわなければ、 T が小さいか、或は、特種な形状（たとえば、細長いとか、とくに入りこんでいるとかの）を呈しない限り、その **BIAS** は無視しうるほどに小さい。

しかし乍ら、無視しうるかどうかということは、たゞ大きい小さいというような定性的な推察によらずに、偏りの程度を実際に見積つてから決定すべき問題である。この実験もそのために、即ち、量的な目安を与えるためにおこなわれたものであつたが、いかん乍ら、この小文においては、ある一つの林分についてのしかもいくつかの仮定をもうけた上での結果しか記載しえなかつた。従つて、たとえば、立木密度を異にした、或は、直径分布が異なるというような林分については、たとえ同一の前提をもうけたにしても異つた数値がえられるだろう。このようなことから、偏りの定量的な大きさについて一般的な説明を加えるためには、いろいろと異つた林分について、数多くの実験がなされることが必要である。

iii. **BITTERLICH** 法に関するこれまでの実測結果をみると、その多くが毎木調査の結果にちかい値を示しているが、その差の方向については必ずしもマイナスの傾向をもつているようにもおもわれない。供試林分は大概小面積のものであろうから、不偏性の条件を無視している限り、マナスイの値をもつた結果が多くあつてもよいようにおもわれるが、実際にそのような傾向がみられないということは、現実には、平均記録本数か本来とるべきその値よりも大きな値をとつているからであらう。即ち、實際上、標本点は比較的大きい記録値を与える個所がとられすぎているために、結果としては見合つているのではないだろうか。

iv. この林縁の問題に関しては、**BERTRAM HUSCH** 及び **L. R. GROSENBAUGH** が *Journal of Forestry* 誌上で意見を交換している。**HUSCH** は、標本点は林内において、少くとも定距離 $2D$ 以上はなしてとられなければならないとして、そのことから、林縁についても D なる距離をおき、標本点はその内部においてとるべきであるとのべている。これに対して **GROSENBAUGH** は、そのような方法によると推定値に **BIAS** を生ずるとして、標本点のとられた林縁のなす角度によつて、それに対応する係数（たとえば、 180° 、 120° 、 90° に対しては、それぞれ、2, 3, 4 というような）を乗じてやることを提案している。後者は興味ぶかい方法のようにおもわれるが、その係数について疑問があり、なお多くの研究を必要とするだろう。

v. 臨界角度の効果的な大きさ、換言すれば、どの程度の拡大率を用いることが一番このましかという問題は非常に重要である。拡大率が大きければ大きいほど推定値の分散は一般に小さ

くなるであろうから、理論上は、大きな拡大率を用いればよいようにも考えられるが、もし、そうした場合に不偏性の条件を無視すると、こゝで問題とした BIAS があるいはきいてくるかもしれない。拡大率についての問題は、なかなか厄介であろうとおもわれるが、そのための一つの資料としてこの実験において $G \cap T$ を推定するために用いた測定結果からえられた分散の値を次にしておく。

p^2	標本の大きさ	本数についての分散
400	100	1.1837
1000	100	2.4576
2500	528	9.3409
5000	100	32.9135
10000	30	109.9724

VI. 参 考 文 献

- 1) MASUYAMA, M. : A rapid method of estimating basal area in timber survey, Sankhyā, 12, 291—302, 1953.
- 2) " and SENGUPTA, J.M. : On a bias in a crop-cutting experiment, Sankhyā, 15, 373—376, 1955.
- 3) 増山元三郎 : 積分幾何学の工学的応用, QCC—CLD₅₀, 資料 2, 1—12, 1955. (日本規格協会).
- 4) " : 幾何学的調査法の話, オペレーションズ・リサーチ 1 (1), 41—49, 1956. (日科技連).
- 5) 黒岩洋子 : 積分幾何学的面積調査の実験例, 農業統計研究, 2 (4), 1—4, 1954.
- 6) 芳賀敏郎 : 積分幾何学の繊維への応用, 標準化, 10 (1), 18—24, 1957. (日本規格協会).
- 7) HUSCH, B. : Results of an investigation of the variable plot method of cruising, Journal of Forestry, 53 (8), 570—574, 1955.
- 8) " : Comments on the variable plot method of cruising, Journal of Forestry, 54 (1), p. v. 41, 1956.
- 9) GROSENBAUGH, L.R. : Comments on "Results of an investigation of the variable plot method of cruising", Journal of Forestry, 53 (10), p. v. 734, 1955.

Résumé

One of the difficulties on BITTERLICH method is how to treat sampling points which were selected near a boundary. Several years ago, M. MASUYAMA discovered "the condition of unbiasedness" to this kind of subject and threw light on it theoretically. Under the theory, the writer mentioned here of the bias which would be arisen when the condition was neglected in a survey using BITTERLICH method and introduced several experimental results on it.

Let the total of basal area be g , and let the total of enlarged circle area having p times diameter of each d.b.h. be G , when various sizes of tree cross section at breast height are contained within the area T . Further, let the size of sampling points selected at random in T be N , and the total number of enlarged circle which contained concern sampling points be n . Then g would be able to estimate by using G divided by p^2 because $n/N \cdot T$ is nearly equal to G . In this case, if a partial area of the enlarged circle swells out of T , it is necessary to consider an extended area T' which contains

all of the enlarged circle. This is the condition of unbiasedness proposed by MASUYAMA, and if it is neglected in such a case g would have a bias because $n/N \cdot T$ becomes to an unbiased estimate of $G \cap T^{**}$.

Now, let $E(n')$ be a mathematical expectation of the total counted number n' at sampling points N selected at random in T' . Then

$$\frac{E(n')}{N} = \frac{G}{T'} = \frac{p^2 g}{T'}$$

On the other hand, if n is counted regarding the original area (forest land area) T , in a case like the above,

$$\frac{E(n)}{N} = \frac{G \cap T}{T} = \frac{p^2 g_b}{T}$$

where $g_b = G \cap T / p^2$.

As G and $G \cap T$ are equal to $E(n')/N \cdot T'$ and $E(n)/N \cdot T$, respectively, the bias b is obtained as follows :

$$b = g_b - g = \frac{E(n)}{N} \cdot \frac{T}{p^2} - \frac{E(n')}{N} \cdot \frac{T'}{p^2} = -\frac{R}{p^2}, \quad \dots\dots\dots(1)$$

where $R = G - G \cap T$.

Namely, the basal area corresponding to the difference R between G and $G \cap T$ becomes bias and its sign is negative because R has always positive value. The relative error e is obtained as follows :

$$e = \frac{b}{g} = -\frac{R}{p^2} \cdot \frac{p^2}{G} = -\frac{R}{G} \quad \dots\dots\dots(2)$$

In case of using a basal area factor, what bias would be expected? In practice of a forestry, T is more appropriate than T' as forest land area corresponds to the basal area surveyed. Accordingly, if a converted value per ha g_H is given as not $g_H = g \cdot \frac{10000}{T'}$ but $g_H = g \cdot \frac{10000}{T}$, g_H would be shown as

$$g_H = \frac{10000}{T} \cdot \frac{E(n')}{N} \cdot \frac{T'}{p^2} = \frac{T'}{T} \left(\frac{E(n')}{N} \cdot \text{BAF} \right)$$

Since a basal area g_b is shown as $E(n)/N \cdot T/p^2$ when the condition of unbiasedness is neglected, a converted value g_{bH} in this case would be shown as

$$g_{bH} = \frac{10000}{T} \cdot \frac{E(n)}{N} \cdot \frac{T}{p^2} = \frac{E(n)}{N} \cdot \text{BAF}$$

Then the bias per ha b_H is obtained as follows :

$$b_H = g_{bH} - g_H = \left(-\frac{R}{p^2} \right) \cdot \frac{10000}{T}$$

Moreover, the relative error per ha e_H is obtained as

$$e_H = \frac{b_H}{g_H} = -\frac{R}{G}$$

and it is just accorded with the preceding formula (2).

According to the formulas above mentioned, the writer actually estimated the bias by a desk experiment.

Fig. 2 shows the relationship between $|100e|$ and T under the preconditions of 1) stand structure is homogeneous, 2) figure of a forest land is square.

*) $G \cap T$ shows a partial area of G contained within T .

Fig. 3 shows the relationship between $|100e|$ and p^2 under the same preconditions as the above mentioned.

Fig. 4 shows the relationship between $|100e|$ and a length of girth L under the preconditions of 1) and $p^2=2500$.

Fig. 5 shows the relationship between $|b_H|$ and T under the same preconditions as in the case of Fig. 2.

Since e is shown as the function of R and G , its value would be varied due to a structure of the stand to be surveyed, size and figure of a forest land, a value of p , and so on. Therefore, many experiments on various types of forest would be necessary in order to make clear this bias quantitatively applicable to the general case. However, the following explanation would be plausible due to the experimental results figured out in this paper. Namely, if a structure of the stand is homogeneous and excessive value of p is not used, the bias would be negligibly small as far as a forest land is sufficiently large and its figure is not so specific as slender or complicate.

The experiments mentioned here were done by using a stand map, and the stand was artificially reproduced even-aged one composed of Sugi (*Cryptomeria japonica*) and 31 years old, with a mean diameter of about 15 cm and a mean height of about 13 m. The land area was 0.2049 ha and 584 trees were contained in it. The number of trees by diameter class is shown as Table 1.