

# Bitterlich 法 と 調 和 平 均

文 部 教 官 平 田 種 男

Tanco HIRATA

## Harmonic Means in Bitterlich's Sampling

### 目 次

ま え が き	9	Ⅲ 文 献	12
I B-Population と Population	9	Résumé	13
II 円め (括約又は分類) と本数推定	11		

### ま え が き

さきに発表した平均樹高の推定式<sup>6)</sup>  $h=100\sqrt{Z/N}$  では、1 ha 当りの径級別、または全本数の値が必要であつた。その推定には、測量不要の方法としては、Bitterlich 法、幹距数 (Abstandzahl) 法、(光学的な) 円形標準地法その他がある。第 1 の方法については、小林、高田、Unterdörfer<sup>4)</sup> らの、第 2 の方法については——これは古くから知られているが、最近では Köhler、Stoffels<sup>5)</sup> らの研究報告があり、また第 3 の方法については Baumann<sup>12)</sup> の紹介がある。筆者はこゝで、Bitterlich の方法でつかんだ立木の  $g_i$ 、 $d_i$  の分布と、もとの林での分布との関係と、そこからの本数推定について、すでに行われていることがらを形式的に整理してみた。

ごべんたつと、おおしえをうけた、東大・嶺一三、篠田六郎、扇田正二の諸先生と、日大・鈴木太七、新大・高田和彦、静内営林署・谷口純平<sup>8)</sup>の諸氏に深謝する。

## I B-Population と Population

面積 1-ha の林に立つ  $N$  個の木で、断面積  $g_i (= \frac{\pi}{4} d_i^2)$  のものが  $f_i$  個——したがつて  $g_i$ 、 $d_i$  の相対ヒン度  $P_i = f_i/N$ ——あるとき、この林に  $k$  個の点を random におとし、 $g_i$  の拡大円 ( $q^2 g_i$ 、 $q$  は拡大率) におちる点の数 (すなわち Bitterlich 法でつかんだ  $g_i$  の木の本数) が、 $g_i$  の拡大円合計 ( $q^2 \sum g_i f_i$ 、 $s$  は階級数) におちる点の数 (すなわち Bitterlich 法でつかんだ木の全本数) に対する比の値を  $P_{iB}$  とかけば、それは両拡大円の面積比にひとしいから：

$$P_{iB} = q^2 g_i f_i / q^2 \sum g_i f_i \dots \dots \dots (1)$$

この林の  $g$ 、 $d$  の C.V.、算術母平均をそれぞれ  $C_g$ 、 $C_d$ 、 $g$ 、 $d$  とし、また  $g_i$ 、 $d_i$  を規準化したものをそれぞれ  $t_i [= (g_i - \bar{g}) / \sigma_g]$ 、 $\sigma_g$  は  $g$  の母標準偏差、 $\tau_i [= (d_i - \bar{d}) / \sigma_d]$ 、 $\sigma_d$  は  $d$  の母標準偏差) として上式をかきかえれば：

$$g_i \text{ では } : P_{iB} = P_i(1 + C_g t_i) \dots\dots\dots (2)$$

$$d_i \text{ では } (C_g = 2 C_a \text{ を用いて}) : P_{iB} = P_i(1 + C_a \tau_i)^2 / (1 + C_a^2) \dots\dots\dots (3)$$

大きさ  $k$  の標本 (点) を random に抽出して、そこでつかまれた木の  $g, d$  をはかつておけば、さうしてそのような抽出、測定を繰返せば、 $g, d$  の分布は上の2式にしたがうものと考えられる。かりに、上式にしたがう分布をもつ測定値の集団を、はじめの (立木) 母集団と区別するために、B-Population とよぶ。つまり  $P_{iB}$  は B-Population における  $g_i, d_i$  の相対ヒン度である。亦それは (1) 式が示すように  $g_i, d_i$  上の断面積合計の全断面積合計に対する割合である。

いま (2) を用いて B-Population での  $g$  の算術平均 (=  $g_{AB}$ ) をもとめれば :

$$\begin{aligned} g_{AB} &= \int g_i P_{iB} = \bar{g} \int (1 + C_g t_i)(1 + C_g t_i) P_i \\ &= \bar{g} \int (1 + C_g^2 t_i^2 + 2 C_g t_i) P_i = \bar{g}(1 + C_g^2) \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

すなわち B-Population の算術平均は Population のそれより小さくない。しかし同様に B-Population での  $g$  の調和平均 (=  $g_{HB}$ ) をもとめれば :

$$g_{HB} = \int \frac{P_{iB}}{g_i} = \frac{1}{\int \frac{(1 + C_g t_i) P_i}{g(1 + C_g t_i)}} = \int \frac{g}{P_i} = g \dots\dots\dots (5)$$

すなわち B-Population の調和平均は Population の算術平均に一致する。B-Population の  $g$  の算術平均が Population のそれより小さくないことはすでに高田が指摘していたが、Bitterlich 自身が最近まで述べていなかった。上式によれば B-Population の算術平均は Population の算術平均の  $(1 + C_g^2)$  倍である。

次に  $d$  について上と同様な計算で B-Population の算術平均 (=  $d_{AB}$ ) をもとめれば :

$$\begin{aligned} d_{AB} &= \int d_i P_{iB} = \int \frac{\bar{d}(1 + C_a \tau_i)(1 + C_a \tau_i)^2 P_i}{1 + C_a^2} \\ &= \frac{\bar{d}}{1 + C_a^2} \int (1 + C_a^3 \tau_i^3 + 3 C_a \tau_i + 3 C_a^2 \tau_i^2) P_i \\ &\doteq \frac{\bar{d}(1 + 3 C_a^2)}{1 + C_a^2} \geq \bar{d} \quad (\because \text{対称型に近い分布では } \int C_a^3 \tau_i^3 P_i \doteq 0 \text{ とみて}) \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

また B-Population での  $d$  の調和平均 (=  $d_{HB}$ ) をもとめれば :

$$d_{HB} = \frac{1}{\int \frac{P_{iB}}{d_i}} = \frac{1}{\int \frac{(1 + C_a \tau_i)^2 P_i}{\bar{d}(1 + C_a \tau_i)(1 + C_a^2)}} = \frac{\bar{d}(1 + C_a^2)}{\int (1 + C_a \tau_i) P_i} = \bar{d}(1 + C_a^2) \geq \bar{d} \dots\dots\dots (7)$$

$d_{AB}, d_{HB}$  を直径とする断面積をそれぞれ  $g_{dAB}, g_{dHB}$  とかけば :

$$g_{dAB} = \frac{\pi}{4} \bar{d}^2 \left( \frac{1 + 3 C_a^2}{1 + C_a^2} \right)^2 = \bar{g} \frac{(1 + 3 C_a^2)^2}{(1 + C_a^2)^3} \geq \bar{g} \dots\dots\dots (8)$$

$$g_{dHB} = \frac{\pi}{4} \bar{d}^2 (1 + C_a^2)^2 = \bar{g}(1 + C_a^2) \geq \bar{g} \dots\dots\dots (9)$$

以上4種の  $g$  を  $\bar{g}$  と比べれば次表のようになる。各  $C_a$  に対して  $\bar{g}=1$  として示す。( ) 内は逆数。

**Table 1.** Relative values of Means of 4 kinds in B-population to population mean  $\bar{g}$ .

kiod of $g$ ( $g_b$ )	$\bar{g}$	$\bar{g}_{HB}$	$\bar{g}_{dHB}$	$\bar{g}_{dAB}$	$\bar{g}_{AB}$
		1	1	$1+C_d^2$	$\frac{(1+3C_d^2)^2}{(1+C_d^2)^3}$
$C_d=0.1$	1	1	1.01 (0.99)	1.03 (0.97)	1.04 (0.96)
$C_d=0.2$	1	1	1.04 (0.96)	1.12 (0.89)	1.16 (0.86)
$C_d=0.3$	1	1	1.09 (0.92)	1.25 (0.80)	1.36 (0.74)

(2), (3) 式を用いれば,  $P_{iB}$ ,  $P_i$  の大小関係が次のように判る。

$t_i \leq 0$  すなわち  $g_i \leq \bar{g}$  に対応して, また

$$\frac{(1+C_d\tau_i)^2}{1+C_d^2} \leq 1$$

したがって

$$\tau_i \leq (-1 + \sqrt{1+C_d^2})/C_d$$

このときもちろん  $d_i \leq d\sqrt{1+C_d^2} (=d_{\bar{g}})$

に対応して  $P_{iB} \leq P_i$  となる。以上の関係を<sup>\*</sup>図示すれば Fig. 1. のようになる。すなわち B-P-population では Population より mode が右に偏し,  $\bar{g}$ , したがって直径では  $d\sqrt{1+C_d^2}$  のうえで両分布曲線が交わっている。Stoffels<sup>10)</sup> の表示でもこの関係が読める。

## II 円め (括約又は分類) と本数推定

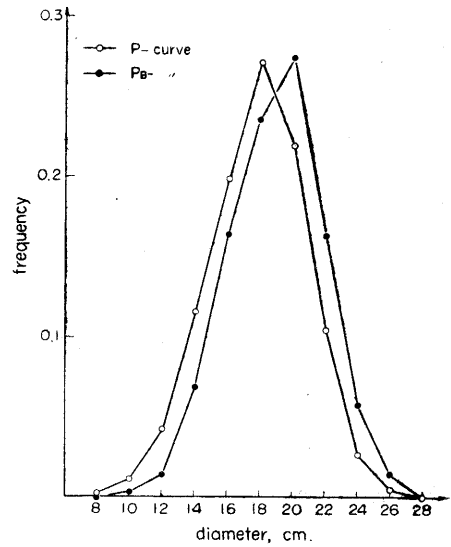
ha 当り全本数の推定は以上から  $G/g_{HB} (=G/g)$  となる。これは直径階 (級) 別 ha 当り本数の推定 ( $f_i$ ) の合計  $\sum f_i$  を全本数  $N$  の推定とする, 上記文献にみられる推定手順に他ならない。Bitterlich 法で  $g_i$  (その直径  $d_i$ ) の立木を  $Z_i$  本つかめば  $P_{iB} = Z_i / \sum Z_i$  とかけ, 断面積係数 Zählfaktor ( $Z_f$ ) = 1 (拡大率 100) のときをかんがえれば  $G = \sum G_i = \sum Z_i$  で, このとき

$$\frac{G}{g_{HB}} = G \int \frac{Z_i}{g_i} = G \int \frac{Z_i}{G g_i} = \int \frac{G_i}{g_i}$$

上式の右端は直径階別 ha 当り本数の合計であるからである。

このようにしてもとめた分布関係から,  $d$ ,  $g$  に関する諸統計量を推定することができる。上掲の諸式をつかうのも一法であらうが, 本来同じ内容のものであるから, いづれも簡便さに大小がない。

$g_{HB}$  による方法, すなわち直径階 (級) 別 ha 当り本数推定の合計による方法の代りに, もし



**Fig. 1.**

P and  $P_B$ -curves

\* 文献 3) の実験資料 ( $d_{\bar{g}}=18$  cm, 1ha 内 40 点設定) による。  
Sample size=40 within 1ha-plot.

他の  $g$  の平均をつかえば、真の全本数 ( $N=G/g$ ) に対してすべて過少の推定となり、その割合は Table 1 の括弧内に示したとおりである。

次に直径の円めと本数推定との関係についてはどうであろうか。いま級の代表値 (midvalue) を  $d_{Mj}$ 、級の幅を  $\delta$  とし、 $d$  の両端で頻度が 0 に近い分布のばあいをかんがえる。すでに述べたことから、第  $j$  級では、Population の第  $j$  級内、 $g$  の算術平均に対する直径 ( $d_{\bar{g}j}$ ) と、B-Population での第  $j$  級内、 $g$  の調和平均に対する直径とは同値であり、またこの値は、Population の mode の左の諸級では  $d_{Mj}$  より大きく、右の諸級では  $d_{Mj}$  より小さく、したがって本数推定に必要な B-Population 第  $j$  級の  $g$  の調和平均 ( $=g_j$ ) は  $d_{Mj}$  に対応する  $g_{aMj}$  に比べて、上のばあいに応じ、大または小となり、そのため第  $j$  級の本数は円めのばあい、mode の左側では過大となり、右側では過少となる。従つて平均樹高の推定は、mode の左では過小、右では過大となり、もし材積表 ( $d, h$  の函数のもの) によるときは mode の左の平均 (材積) は過小に、右の平均は過大となる。総材積では、本数の大小が上と逆になっているから、相殺の傾向を示すであらう。林分表<sup>11)</sup>によるときも同様であらう。しかし、全本数の推定には  $\delta$  の影響が小さいようである。級の代表値は上のように、その級内調和平均 (B-Population の  $g$  についての)、すなわち算術平均 (Population での) と喰違いを示すが、代表値の全級での (B-Population における) 調和平均、すなわち全級での (Population における) 算術平均は、円めないときの (Population での) 母算術平均 ( $g$ ) に一致することが、分布が両端で高度の接触を示すばあいには統計的に認められているから、結局円めの問題は、 $d$  の円めが  $g$  に及ぼす影響ということに帰せられる。いま、直径を円めてもとめた  $g$  の B-Population での調和平均 ( $=$  Population での算術平均) を  $g_R$ 、円めないときの平均を  $\bar{g}$ 、直径級の幅を  $\delta$  とすれば、Sheppard の修正によつて

$$g_R = \frac{\pi}{4} d^2 (1 + C_d^2 + \delta^2 / 12 d^2) = \bar{g} \left\{ 1 + \delta^2 / 12 d^2 (1 + C_d^2) \right\}$$

$$= \bar{g} \{ 1 + (1/12) (\delta/d_{\bar{g}})^2 \} \geq \bar{g}$$

$$\therefore \frac{G}{g_R} = \frac{G}{\bar{g} \{ 1 + (1/12) (\delta/d_{\bar{g}})^2 \}}$$

こゝで  $G/g_R$ ,  $G/g$  を  $N_R$ ,  $N$  とかけば

$$N_R/N = \frac{1}{1 + (1/12) (\delta/d_{\bar{g}})^2} \leq 1$$

つまり、直径を円めれば、それによつた推定本数 ( $N_R$ ) は真の本数 ( $N$ ) より小さくなるが、その割合を 0.99 以上にする  $\delta/d_{\bar{g}}$  の値は大体  $(\delta/d_{\bar{g}}) < 1/3$  となるから、實際上大低の円めは、全本数のみの推定には殆んど影響がないようである。

### III 文 献

- Allg. F. u. Jztg. **123** (3) 69—74, 1952.
- 2) 小林四郎 : 可変半径プロット法による材積測定法 (熊本営林局刊), 1954.
  - 3) 高田和彦 : Plotless Sampling による材積推定について. 九大演集報 (3) 57—75, 1954.
  - 4) UNTERDÖRFER, C. : Die Bestandesstammzahl nach der Winkelzählprobe. Allg. F. u. Jztg. **126** (8/9) 176—179, 1955.
  - 5) STOFFELS, A. : Die Genauigkeit der Bestimmung der Stammzahl pro Hektar durch Messung von Stammabständen. Forstwiss. Centralbl. **74**, 211, 1955.
  - 6) 平田種男 : 定角測高法——新しい平均樹高の推定. 山林 (860), 1956.
  - 7) BITTERLICH, W. : Fortschritte der Relaskopmessung. Holzkurier **11** (1), 1956.
  - 8) 谷口純平 : Winkelzählprobe について (東大, 卒業論文, 未刊), 1956.
  - 9) BITTERLICH, W. : Beiblatt (zur Fortschritte der Relaskopmessung), 1956.
  - 10) STOFFELS, A. : L'exactitude de la détermination de la surface terrière par hectare à l'aide de la méthode de Bitterlich. Nedellandsch Boschbouw Tijdschrift **26** (10) 260, 1954.
  - 11) 吉田正男, 平田種男 : 植栽林の林木構成状態に関する統計的研究 (Ⅶ). 東大演報 (52), 1956.
  - 12) BAUMANN, H. : Ratioelle Stichprobenverfahren in der Forsteinrichtung. Allg. F. u. Jztg. **126** (1) 13, 1955.

### Résumé

Since the expected number of trees  $g_i$ , whose frequency is  $f_i$  in the population of  $N$  trees, counted through Bitterlich's sampling is related with the expected total number of counted trees just proportionally to their basal area of  $g_i f_i$  and  $\sum_i g_i f_i (= G)$ , the relative frequency of  $g_i$  in B (itterlich's)-population regarded as such is formulated followingly :

$$P_{iB} = g_i f_i / \sum_i g_i f_i \dots\dots\dots (1)$$

When  $g_i$  is normalized by  $t_i = (g_i - \bar{g}) / \sigma_g$  and  $f_i / N$  is represented as  $P_i$ ,

$$P_{iB} = P_i (1 + C_g t_i) : \dots\dots\dots (2)$$

or in case of diameter ( $d_i$ ), from the above formula and wellknown statistical relation of  $C_g = 2 C_d$ , the relative frequency of  $d_i$  in B-population is also followed by similar formulation as :

$$P_{iB} = P_i (1 + C_d \tau_i)^2 / (1 + C_d^2) \dots\dots\dots (3)$$

where  $\tau_i = (d_i - \bar{d}) / \sigma_d$ .

Arithmetic and harmonic Means of  $g$  and  $d$  in B-population ( $= g_{AB}$ ,  $g_{HB}$  and  $d_{AB}$ ,  $d_{HB}$ ) are resulted consequently as follows by conventional statistical computations through above formulae :

$$g_{AB} = \bar{g} (1 + C_g^2) \geq \bar{g} \dots\dots\dots (4)$$

$$g_{HB} = \bar{g} \dots\dots\dots (5)$$

and

$$d_{AB} = \bar{d} (1 + 3 C_d^2) / (1 + C_d^2) \dots\dots\dots (6)$$

$$d_{HB} = \bar{d} (1 + C_d^2) \dots\dots\dots (7)$$

Accordingly

$$g_{dAB} = \bar{g} (1 + 3 C_d^2)^2 / (1 + C_d^2)^3 \geq \bar{g} \dots\dots\dots (8)$$

$$g_{dHB} = \bar{g} (1 + C_d^2) \geq \bar{g} \dots\dots\dots (9)$$

These values expected are in Table 1 shown in terms of  $C_d$ , and their reciprocals are shown sa bracketed.

That  $P_{iB}$  is smaller or larger than  $P_i$  corresponding to

$$t_i \leq 0 \quad \text{i.e.} \quad g_i \leq \bar{g}$$

$$\text{or } \tau_i \leq (-1 + \sqrt{1 + C_d^2}) / C_d \quad \text{i.e.} \quad d_i \leq d\sqrt{1 + C_d^2} (=d_g)$$

is shown in Fig. 1 explaining the relation of  $P_{iB}$  to  $P_i$ .

The total stem number per hectare ( $=N$ ) is estimated by  $G/g_{NB}(=G/g)$ , the approach to which is in itself as same as when the method published of summation of stem number per hectare on  $d_i$  are used.

Estimating total stem number per hectare with other means than  $\bar{g}(=g_{NB})$  is always negatively biased in such a degree as shown by values bracketed in Table 1.

An error caused by rounding off or grouping diameter is truly in estimating the total stem number per hectare rather negligible as far as the rounding breadth  $\delta$  is smaller than about 1/3-time as the average tree diameter of basal area, and of course only in a distribution highly contacted at both ends of diameter, but the stem number per hectare by diameter class is estimated with positive bias on the left side of the mode in population and with negative one on its right side.