線型計画の林業への適用 (1)

——製材原木の最適混合の問題——

助手 有水 疆

Tsutomu ARIMIZU

Application of the Linear programming to Forestry (1)

Optimum mixture of logs in the Sawmill

目　次

Ⅰ はしがき

筆者は 1952 年の五月中旬から二週間，米国アーカンソー州クロセットにある，クロセット木材・パルプ会社で，エール大学林学部の学生として，製材に関する実習を受けた。

その際，アーサー・R・マシュラー講師の御指導の下に，ヘルマン・C・サマ（現在米国ウエヤー・ハウザー・木材会社勤務），ジョン・L・ホール（アラスカ国有林勤務）及びボーダン・キズマ氏（現在オハイオ州林務部勤務）らと共に，同会社の第一製材工場の経済分析を行い，標本調査を用いて製材の時間分析と費用分析に関するレポートを作製した〔19〕。その分析の結果に，リニア・プログラミングの考え方を応用し，我々の用いた方法と，リニア・プログラミングによる分析を比較しようとするのがこの報告の意図である。因みにこの報告は林業生産におけるリニア・プログラミングの応用という，私の一連のレポートの第一部をなすものである。

なお，本研究に当り，御教示，御指導を賜つた永田龍之助教授，扇田正二助教授，篠田六郎助教授，加藤誠平助教授，並びに東京大学経済学部宮下藤太郎助教授，エール大学マシュラー講師，その他協同研究者，及びクロセット木材・パルプ会社の方々に深く感謝する。

Ⅱ 従来の分析方法

元来，企業の最終目標は利益の獲得にあると仮定してよいであろう。そしてその利益は与えられた制限条件のもとで最大にすることが当然要求されてくるであろう。この場合に企業が決定し

なければならないことは，次の三つの事柄に帰着すると思われる。〔(6) p.4〕。

〔1〕 採用すべき生産方法を決める技術上の決定，

〔2〕 企業が生産し販売しようとする財の量に関する決定，

〔3〕 企業の得意先である買手の需要曲線を変更するための方法を対象とする，マーケティングに関する決定。

所で，この三者の中で，製材工場に関する限り，〔1〕の技術上の決定が，林業経済の立場からみれば，主たる関心事であつたといえよう。そしてそこで用いられている分析方法は何れも限界分析であつた。

〔註 1〕 Research in the Economics of Forestry 〔(7) pp. 〕の 297 頁においては，57. Guide to Maximizing Net Returns of Forest-products Firms という見出の下で，次の事が述べられている。
"……この種の研究グループは，純利益を最大にするために選択される支配的な経済上の指針に関心をもつてきた。これらの指針は，生産の限界の一単位を増加させることによつて得られる収益が，その一単位の生産に要する費用に等しくなるよう生産が組織されているときに，得られる純利益は最大になる，という原則に基づくものである。"（筆者訳）

このような限界分析のために従来伝統的に用いられてきた解決方法は，生産函数の利用であつた。その方法は Samuelson の典型的な定式化によつて次の如く説明されている〔(16) pp. 57—58〕.

(2.1.1) $f(x_1, x_2, \cdots\cdots x_m;\ v_1, v_2, \cdots\cdots v_n)=0$, を生産函数とする。

こゝで，

$(x_1\cdots\cdots x_m)$ は産出量：但し x_i はその産出量の最大値とする。

$(v_1\cdots\cdots v_n)$ は投入量

x_i, v_j は何れも正，または零

なる生産函数をつくり，次に投入物，産出物に対して，それぞれ

(2.1.2) $$q_i=q_j\ (v_1\cdots\cdots v_m)$$

(2.1.3) $$p_j=p_i\ (x_1\cdots\cdots x_m)$$

なる販売函数をつくる。その上で，総収入 r，及び生産量 c をそれぞれ，

(2.1.4) $$r=\sum_{i=1}^{m}p_i x_i$$

(2.1.5) $$c=\sum_{j=1}^{n}q_j v_j$$

と定義し，最後に利潤を π として，

(2.1.6) $$\pi=r-c$$

と表わすと，(2.1.1) から (2.1.6) 式までの 6 つの式によつて，利潤のみならず，その他のすべての変数が投入量 v_j と産出量 x_i の函数となることがわかる。そして (2.1.1) 式の制限条件の下で，(2.1.6) 式の極大値を求めることが一般に行われていた。そしてこの場合 Lagrange の

方法がそのまゝ適用されていたのである〔(6) pp.4—8〕。

しかしながら，製材工場の場合においては，そこで使用される生産要素の性質と量がこのような生産函数をつくるために不可欠な自由な変化を全く許さなかつた。そればかりでなく，同一の成果を達成するためには，生産要素の性質と量の点で異つている，いくつかの利用可能なプロセスがあるのが普通である。つまり異つたプロセスが可成りあるので，それらをいくつか組合せて用いることにより，企業全体としては生産要素の投入量の比率と，生産物の産出量の比率とを広範囲にわたつて変化させることが出来るという事情にあつた。この場合，その選択の範囲は連続的に変化できる部分をもたず，したがつて実際は不連続な限られた選択の対象から択ぶことになり，また原料として丸太の性質及び量にも制限があつた。したがつて，生産計画を技術的に決定する場合にしても，個々の投入物と産出物の量に関して偏微分するという理論的操作によつては，十分に表現されない関係があつたことを見逃す訳には行かないであろう〔(6) pp.4—8〕。

そのために現実の問題として，製材工業の関心は，その産業の価格構造と，それぞれの企業の資金構造にある種の“正常な”関係を維持することにおかれてきたように思われる。しかしながら，この“正常な”規準とは，一体どのような過程によつて確立され，またどのような過程によつて修正されるのかは明らかにされていない〔(6) p.2〕。

リニア・プログラミングは，この種の問題を解決する上には，現在最も役に立つ解決方法であるが，従来の製材工業の環境の下で施されてきた，計画決定の研究方法を先ずふりかえり，その後リニア・プログラミングの問題に進むことにする。

2. .1 生産函数

さきに，限界分析は，生産の限界の一単位を増加させることによつて得られる利益が，その一単位の生産に要する費用に等しくなるよう生産が組織されているとき，得られる純利益は最大になる，という考え方の上に立つていることが説明された。ところで，この考え方は，実は完全競争市場を予想するものであつて，更に投入物と産出物との間のある技術的な関係を前提とするものである。この技術的な関係が前述した生産函数であることは明かである。

製材工業において，その経済分析のために生産函数を用いた例としては，京都大学農学部岸根卓郎による“わが国製材工業，木製品製造工業に関する生産函数の測定”に関する報告がある。(20)(第62回日本林学会講演集昭和28年4月：17頁)。岸根氏は，Douglas 生産函数，Durand によつて修正された Douglas 函数，並びに，Wilcox 生産函数等，3種の生産函数を用い，生産量（P）を，労仂量（L），操業馬力量（C）の函数とした。すなわち，それぞれ

(2.2.1) $$P=5.8856L^{0.7133}C^{0.2367}$$

(2.2.2) $$P=5.0230L^{0.6981}C^{0.2279}$$

(2.2.3) $$P=2.6749R^{-0.00025}L^{0.6549}C^{0.3456}$$

で表わし，次に生産無差別曲線，労仂と資本の限界生産力，労仂もしくは資本の附加的増加がそれぞれの限界生産力に及ぼす効果，所得分配率，Aggregate return，需要函数，及び需要の安定均衡に言及している。

このような生産函数は，投入物（L）と（C）がその生産過程によつて（P）に転化することを説明している。所で，価格とか費用の問題はそれから先の問題になつている。この生産函数は非線型の生産函数であるが，それは函数の parameter の測定上の便宜さから用いられてきた〔(12) pp. 2—4〕。

〔註 2〕 線型の生産函数は

$x=p_1 l,\ x=p_2 c\cdots\cdots$

等で表わされるものと，

$x=p_1 l+p_2 c+\cdots\cdots$

で表わされるものとがある。こゝで p は生産係数と呼ばれるものである。前者は制限的な生産函数である。何となれば，この式では，l 及び c 等は相互に独立だからである。後者は代替的な生産函数で，それは $l,\ c,\cdots\cdots$ 等の間に相互に代替的な関係が存在している。

製材工業の経済分析で，このような線型の生産函数を用いて分析した例は，恐らく，W. W. Leontief の投入産出分析に止まるであろう〔(14) (15) 及び (22)〕。所で，リニア・プログラミングはこのような線型の生産函数を用いる〔(17) pp. 51—57〕。

この非線型の生産函数をつくるためには，実際の面でそれぞれの変量を更に細かく分類し，それらの間の関係を知ることが，より必要な場合が実はすくなくない。その場合，専ら最小自乗法によつて parameter の測定を行うのであるが，そのような連続的な場合をとらえて，函数を規定することは仲々容易でない。したがつて，この種の生産函数は，従来主として aggregate model について用いられてきた例が多いのであつて，〔(12) pp. 226—236〕，〔(17) pp. 51—57〕，京大の岸根氏の研究もその線に沿つたものである。したがつて個々の製材工場の生産函数を陽表的に作つた例はない。その理由は，Lagrange の未定乗数法の所で述べた理由に基くものである。

このように生産函数を個々の製材工場に適用することは容易でなかつたゝめに，米国では次のような一種の利益図表が考えられ，費用分析の用に供せられた。

2. 2 利益図表

ある一つの生産方式について費用分析を行うときは，その生産方式による総費用を C，そのうちの固定費用を F，単位生産量当りの比例費用の部分を k，操業度を x で表わすと，これら4つの費用の間の関係は先ず次の如く表わされる。

(2.3.1) 逓減総費用 $C=kx+F$

この場合，操業度 x は一定期間における企業の生産高，労仂時間等をもつて表わすのが普通の方法であつて，x と C とに関する3組以上の資料から最小自乗法を用いて，F と k との値を求める。この関係を先ず図表に表わし，同様な計測を他の類似の生産方式についても行い，これ

ら2つの方式について操業度と総費用の関係から利益の比較を行つたり，或いは総費用と販売収入との関係を操業度について図表に示し，損益分岐点を求めること等が利益図表の作製の普通の方法である。

しかしながら，我々の行つた製材工場の分析の場合は，このような方法とは幾分異つた方法が用いられた。そこでその方法を説明すると，今，括約によつてある内皮直径〔以下，これを DIB (IN) と略記する〕をもつ，長さ 16 呎の原木から製材を行う場合を考えてみることにする。検尺は International Log Rule を使用し，単位材積として製材々積 1,000 ボード呎〔以下これを MBF，と略記する〕を用いる。この場合，ある DIB (IN) i の MBF を製材するに要する時間を T_i とし，単位時間当りの平均比例費用を k，MBF 当りの固定費用を F_i，その場合の総費用を C_i とすると，次の如く表わされる。

$$C_i = kT_i + F_i \qquad (i=1,\ \cdots\cdots n) \tag{2.3.2}$$

そこで，DIB (IN) i に属する末口直径を有し，製材々積 V' を有する原木の製材時間 T' を測定すると，DIB (IN) i を有する原木の MBF V_i を製材するに要する時間 T_i は，次の式から求められる。

$$T_i = T' \times \frac{V_i}{V'} \tag{2.3.3}$$

かくして，原木の DIB (IN) が，i から $i+1$ に変化したゝめに，製材時間が T_i から T_{i+1} に変り，従つて総費用が C_i から C_{i+1} に移つたときに，単位時間当りの平均比例費用 k が既知であるならば，総費用 C と固定費用との分析を行うことは可能になる。

TABLE I　AVERAGE SAWING TIME FOR ALL LOGS

DIB (in)		DIB (in)	
7～10	1165	15	550
11	990	16	495
12	835	17	455
13	715	18	425
14	620	19	410

TABLE II　COSTS PER MBF FOR ALL LOGS

D I B (in)	Sawing Time/M Shipping (sec.) Curved Values	Milling Cost/M Shipping Dollars*	Mfg. Costs	Total Costs/M
7	3155	68, 684	22. 93	91, 614
8	1775	38, 642	22. 93	61, 572
9	1380	30, 043	22. 93	52, 973
10	1165	25, 362	22. 93	48, 292
11	990	21, 552	22. 93	44, 482
12	835	18, 178	22. 93	41, 108
13	715	15, 566	22. 93	38, 496
14	620	13, 497	22. 93	36, 427
15	550	11, 974	22. 93	34, 907
16	495	10, 776	22. 93	33, 706
17	455	9, 905	22. 93	32, 835
18	425	9, 252	22. 93	32, 182
19	410	8, 926	22. 93	31, 856

* Sawing Time × Avg. Milling costs.

TABLE Ⅲ RECOVERY PER CENT AND VALUE FOR ALL LOGS

	B and Better		No. 1 Common		No. 2 Common		No. 3 Common		No. 4 Common	
	%	Value	%	Value	%	Value	%	Value	%	Value
10	4.1	6.49	27.6	36.41	56.9	51.05	9.0	7.18	2.4	1.14
11	6.3	9.98	41.2	54.36	43.8	39.30	6.6	5.26	2.1	1.00
12	8.6	13.62	49.7	65.57	54.7	31.13	5.0	3.99	2.0	.95
13	11.3	17.90	53.2	70.19	29.3	26.29	4.2	3.35	2.0	.90
14	16.8	26.61	50.6	66.76	26.6	23.36	4.1	3.27	1.9	1.09
15	22.1	35.01	44.9	59.24	27.0	24.22	3.7	2.95	2.3	1.47
16	25.5	46.39	39.0	51.45	29.3	26.29	3.1	2.47	3.1	1.47
17	24.8	39.28	36.2	47.76	32.5	29.16	3.4	2.71	3.1	1.19
18	21.5	34.06	35.0	46.18	36.2	32.48	4.8	3.83	2.5	1.10
19	16.1	25.50	34.9	46.04	40.1	35.98	7.9	6.30	1.0	.48

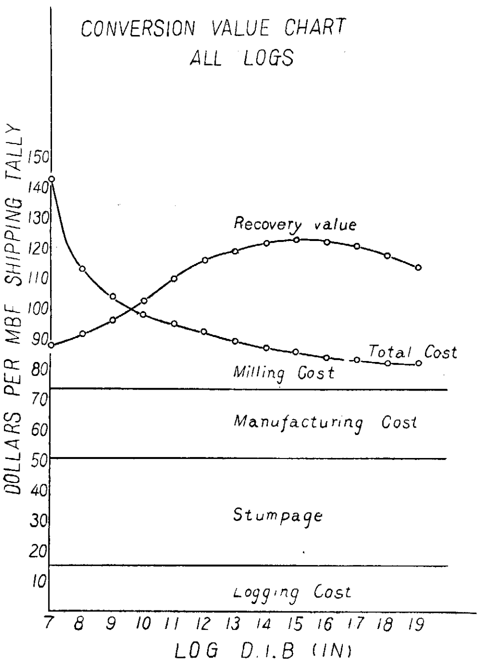


Fig. 1

我々は最小自乗法を用いてこれらの値を求めた。また (2.3.3) 式を用いて，標本から T_i を求める場合は期待値を用いた。かくして得られた，各々の DIB (IN) に対する製材所要時間は第1表に示されており，生産費については第2表に示されている。この第2表の Mfg. Cost は生産過程における製材の固定費用と，それが終了した後，最終製品に至る迄辿る諸生産過程における諸費用の合計である。

所で，一本の原木を製材することによつて，通常5種類の品等をもつ製材製品が短時間の中に産出される。そこで DIB (IN) 別の，MBF 当りの原木と，それから得られる5種類の製品との間の材積の割合と，それぞれの価格を第3表において示した。前者は，Recovery Per Cent，後者は Recovery Value と名付けられている。この Recovery Per Cent は，経済学では生産係数 (Production co-efficient)，又は投入産出係数 (Input-output co-efficient) と呼ばれているものである。それは技術的には Recovery value と，何等平行的な関係をもつものではない。

最後にある DIB (IN) をもつ原木 MBF から得られる収益――それは，第3表に示されている。その DIB (IN) に属する Recovery value の合計，つまり，第4表の Total Returns に相当する――から，それを実現するのに要した製材加工費，立木価格，及び伐木運材費等の合

TABLE Ⅳ CONVERSION VALUES, ALL LOGS

D I S (In)	Total Returns (Dollars)	Total Mfg. Costs (Dollars)	Stumpage and Logging Cost (Dollars)	Conversion Value Per M (Dollars)
7	88.04	91.61	50.52	−54.09
8	91.04	61.57	〃	−21.05
9	95.60	52.97	〃	−17.89
10	102.27	48.29	〃	3.46
11	109.90	44.48	〃	14.90
12	115.26	41.11	〃	23.63
13	118.68	38.50	〃	29.66
14	121.40	36.43	〃	34.65
15	122.51	34.90	〃	37.09
16	122.07	33.71	〃	17.84
17	120.18	32.84	〃	37.22
18	117.74	32.18	〃	35.04
19	114.30	31.86	〃	31.92

計，つまり，MBF 当りの総生産費（Total Mfg. Cost）を控除したものを，Conversion value と名付けたが，それはその DIB（IN）に属する原木 MBF を製材することによつて得られる利益に相当するものである。それぞれの DIB（IN）についてその値を求め，第4表に示した。そしてこの Conversion value と Recovery value との関係は第1図に示されている。

次に，DIB（IN）を変化させることにより生ずる，限界費用，限界収益，限界利益の諸関係を第1図について見よう。

（1） 限界費用は DIB（IN）の増大につれて減少して行くことが判る。それは製材時間が短縮されるからであつて，DIB（IN）のより大きな原木をえらんでも原則として固定費用の増加が顕著でないので，DIB の大きな原木を選ぶことによつて減少する費用は，原則として変動費になる訳である。

（2） 限界収益としての Recovery value は，DIB の増加と共に比例的に増加する。そして9吋と10吋との間では，それは総費用と等しくなる。それは DIB の増加につれて，高級な製材製品がより多くえられるからである。その後は，15吋を頂上として，以下次第に減少して行く。

（3） 限界利益としての Conversion value についてみると，DIB が7吋から9吋の間では限界利益はないが，10吋を越えると次第に増加し，16吋で最大に達し，それから先は DIB が増加するに伴つて，限界利益は減少してくる。

そこでクロセット木材会社として，調査の行われていた時期においては，この調査の結果に従つてなるべく DIB の大きく，品等のよい原木を入手することが利益を大きくする所以であつた。しかし原木価格が上昇すれば，限界原木はより DIB の大きな原木に移行するであろうし，製材価格が下落すれば，限界原木はより DIB の大きな原木に移行すること，及びその逆も明かである。このような関係を，この種の利益図表は教えてくれる。

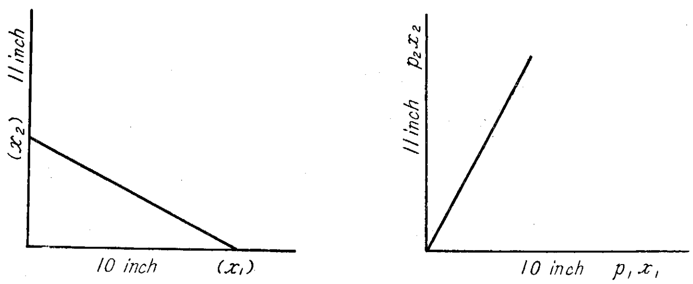
しかしながら，この利益図表には経営計算学の立場からみると種々の欠陥が認められるのであるが，それらを別にしてもこの図表は高々小範囲の最適値を求めるのには適当している。そしてこの方法によれば，個々のDIB(IN)をもつた原木の限界利益は判るのであるが，総生産量と限界利益との連関は，製材製品の価格を不変としても，一義的に求めることは出来ない。つまり，全範囲の最適値の問題を取扱うことは，この方法によつては不可能であるといえる。こゝに従来用いられた限界分析の限界が製材工場の場合においても認められるのである。この関係を更に説明するために，リニア・プログラミングと限界分析との関係を，後者の批判を主にしながら説明を試みる。

Ⅲ　限界分析の批判

限界分析が小範囲の最適値を求めて来たのに対して，リニア・プロラミングは全範囲における最適値を一義的に求めることが，その使命である。

先づ説明を容易にするために，10 吋の原木と，11 吋の原木だけを用いて，一級品を製材する場合を考えてみよう。この場合，生産函数は線型であつても，非線型であつても本質的には差がないので，説明の便宜上線型の場合について考えてみる。

今，最大利益を実現するために 10 吋の原木と 11 吋の原木の何れかを選択する。この両者が代替的な関係にあり，且つ生産函数が与えられている場合，一級品の製材々積に対しては，両者の代替率が一定になることは明かである。そこで等生産物線を描くと，第2図Aの如くなる。この場合，10 吋の原木と 11 吋の原木から製材される利益の比率が代替率に等しい場合を除いて利益率と代替率の大小に従い，この2種類の原木の何れか一つが選択される。



(p_1p_2 はそれぞれ x_1x_2 の価格)

(A) 等生産物線　　(B) 代替利益比直線

FIG. 2 (A) Indifferential Line of production
(B) Alternative profit-ratio Line

次に 10 吋の原木と 11 吋の原木の代替率に等しい利益の割合を示す直線を代替利益比直線と名付け，第2図Bで表わす。これによると与えられたそれぞれの原木の利益比が，代替利益比直線の何れの側にあるかに従つて，両者の中の何れが一種類の原木がえらばれる筈である。そこで等生産物線と代替利益比直線との交点が，この与えられた条件の下において利益を最大にする点

である。

所で一級品の製材の原料となる原木には，こゝでは 10 種類あるので一級品についてこれらすべての場合について考えるとなると，10 次元空間における代替利益比直線を想定しなければならない。また製材製品についても 5 種類あるので，10 次元空間における代替利益比直線は合計 5 本となり，それらは原点を頂点とする凸円錐多面体を構成することは明かである。

このようにリニア・プログラミングの理論的な基礎はこの凸円錐多面体 (Convex Polyhedral Cone) の理論にある。

従つて位相幾何学の立場からすると，従来の限界分析の行われた解空間は二次元空間であつたと言えよう。これに対してリニア・プログラミングはN次元空間をその世界としてもつている。こゝに今迄の限界分析とリニア・プログラミングとの根本的な相異点があると考えられる。それ故に限界分析が小範囲の最適値しか求められなかつた理由と，リニア・プログラミングが全範囲の最適値を一義的に求めることが可能になつた理由が存在する訳である。

所で凸円錐多面体については，Herman Weyl の論文〔(18)〕を参考にして頂くことにして，この理論からリニア・プログラミングの理論を発展させた，G. B. Dantzig, 及び T. C. Koopmans の原典に従つて，その理論的厳密性を失わない範囲において，努めて説明を簡略にしながら，上述した製材工場の原木混合の問題が技術関係において如何にして凸集合を構成しているかということゝ，そうした凸集合の問題を解決する方法として考えられた Simplex 解法について言及し，最後にその解を示したいと思う。

Ⅳ リニア・プログラミングについて

リニア・プログラミングは 1947 年，George B. Dantzig 博士が米空軍の要請に基いて発展させたものである。Gerhard Tintner はリニア・プログラミングを新しい種類の生産函数であると説明している〔(17) p.51〕。そしてその函数は線型である。

W. D. Fisher と L. W. Shruben は農業におけるリニア・プログラミングを評して〔(8) p. 471〕

今世紀の第二の 10 年間においては Business Survey が中心問題であり，第三の 10 年間においてはFarm Account Analysis が，第四の 10 年間においては Correlation Analysis が，第五の 10 年間においては Production Function が中心問題であつたが，次の 10 年間においては Linear Programming が中心的な問題として研究されるであろう。

といつている。

Robert Dorfman は，「経済学の抽象的な問題の中心的な問題はある所与を目標を最大限に達成するために稀少な資源を最も有効適切に配分することにある。この問題に対して，今迄最も普

通に行われてきた定式化——すなわち限界分析——から導かれる結論は，社会政策や経済政策の多くの問題を理解するために極めて大切である。しかし実際の仕事に担る人々が経済問題，経営問題を現実に解決する場合に，この分析方法があまり顧みられないという事実は最早常識となつている。リニア・プログラミングは実際の経済問題，経営問題を解決するための計画決定に役立つような形に，この同じ抽象的な問題を叙述しなおす点にある。」といつている〔(5) p. 798〕。この説明は数多くのリニア・プログラミングについての説明の中では最もよくその性格を物語つていると思われる。

V　リニア・プログラミングの基本的な数学的模型

リニア・プログランミグの基本的な数学的模型は生産活動（activity）と要素（commodity）より構成されている〔(13) p. 35)〕。Koopmans の定義によれば〔(13) p. 35〕，要素とは，考えられている活動の全期間内では質的には均一であり，量的には連続的に増減され得るものであつて，土地・労仂等の基本的な生産要素，原木のような中間生産物，製材等の最終製品等がこれに相当する。今 n 番目の要素を y_n（$n=1$，……n）で表わすならば，y_1，y_2，……は連続変数になる。$+y_n$ は n 番目の産出量を，$-y_n$ は n 番目の投入量を意味する。

生産活動（activity）とは，静体モデルでは経営体において，一定期間中に一定量の投入物を，一定の量的比率によつて，一定量の産出物を産出する，それら諸要素の結合体より構成される。K番目の生産活動は a_{nk} なる係数の集合であると定義され，a_{nk} とは一単位の期間中において，K番目の生産活動の一単位の中に含まれる n 番目の要素の量の投入・産出における流れを表わす。$+a_{nk}$ は関係する要素の生産されること，$-a_{nk}$ は費消されることを意味する。

こゝである DIB (IN) をもつた 16 呎の原木から，5種類の品等をもつた製材製品を産出することは，一つの生産活動を構成すると見做すことが出来る。

この生産活動については差当り二つの仮定が考えられる。1つは可分割の仮定，他は加法性の仮定である。

可分割の仮定とは，各生産活動が連続的且つ比例的に増減が可能であるということであり，加法性とはある数の生産活動が，ある要素 y_n の符号の如何を問わず，その純最終製品の総量が，その y_n の基本的生産要素の量を越えない限り，決められた一定の技術的割合を修正することなく，同時に遂行され得る。いいかえれば，各々の生産活動は相互に独立で，且つ同時に使用できるということである。更に付け加えるならば，その一定期間中使用されたすべての生産活動から産出される純総量は，各々の生産活動からの純産出物の総量の合計に等しいことを意味する。今非負のスカラー量 x_k を以て K 番目の生産活動の水準を意味するならば，この場合の要素の投入産出は $x_k a_{nk}$ で表わすことが出来る。

この二つの仮定を認めるならば，次の有限個の基本的な生産活動の存在を仮定出来るであろう。つまりベクトルを用いると

(5.1)
$$a_n(k)=\begin{pmatrix} a_1k \\ \vdots \\ \vdots \\ a_nk \end{pmatrix}$$

で表わされるのであるが，この生産状況は非負の x_k と，基本的な生産活動との線型結合をもつて現わすことが可能なので，産出量を y_n とするならば，

(5.1)
$$y_n=\sum_{k=1}^{K}a_{nk}x_k \qquad (n=1\cdots\cdots N,\ k=1\cdots\cdots K)$$

(5.2)
$$x_k\geqq 0$$

となり，また (5.1) は生産活動ベクトルであるから，技術マトリクスを形成することが出来る。つまり生産活動 $a_n(k)$ の全集合として，

(5.3)
$$A\equiv\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{1K} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{2K} \\ & \\ a_{N1} & a_{N2}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{NK} \end{pmatrix}$$

また

(5.4)
$$X=(x_1,\ x_2\cdots\cdots x_K)$$

(5.5)
$$Y=(y_1,\ y_2\cdots\cdots y_N)$$

とすると，(5.1) は

(5.6)
$$Y=AX$$

と簡単に表わされる。(5.6) が産出量を表わすことは明かである。

次に，第一の生産要素の投入量を v_1，第二の生産要素の投入量を $v_2\cdots\cdots$ として，

(5.7)
$$V=(v_1,\ v_2,\ \cdots\cdots v_N)$$

とすると，この生産計画の必要とする各投入量のマトリックスは

(5.8)
$$V=AX$$

今，第一の要紙については s_1 単位まで利用可能であり，第二の要素については s_2 単位まで利用可能である，等々として

(5.9)
$$P_0=(s_1,\ s_2,\ \cdots\cdots s_N)$$

とすると，(5.8) と (5.9) から

(5.10) $$AX \leqq P_0$$

これらの条件の下で

(5.11) $$f(x)=c_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_Kx_K$$

の最大値を求める問題を我々は考えることになる。c_i は一単位の x_i による利益を表わす。

今 $c=(c_1, c_2, \cdots\cdots c_K)$ とし，

$(')$ の記号を以て，転置行列を示すものとすると，(5.6) から (5.11) 迄の諸関係は次の如く整理されるであろう。すなわち，

(5.12) $$\left.\begin{array}{r} AX \leqq P_0 \\ X \geqq 0 \end{array}\right\} \text{なる条件の下において，}$$

(5.13) $$f(x)=C'X$$

を最大にする X の値を求めることになつてくる。

次に行列 A は N 行 K 列の行列であるが，その各列を P_i とすると，

(5.14) $$P_i=\begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{iN} \end{bmatrix}$$

で表わされる。すると

(5.15) $$A=[P_1, P_2 \cdots\cdots P_K]$$

$$V=x_1P_1+x_2P_2+\cdots\cdots+x_KP_K$$

で表わされる。

さて，行の問題を解く第一歩として，(5.12) 式の不等号を取除いて，これを等号に変えるために次のような手続をとる。つまりこの式で等号が成立せず，右辺の方が左辺より大きい場合に，その差に相当する変数が成り立つようにする。このために George, B. Dantzig が考案した手段，つまり disposal processes を取入れる〔(3) pp. 345—347〕。そのためにある生産計画において制限されている要素の一つ，或いはいくつかのものゝ利用可能な総量が使いつくされていない場合には，要素の余剰分は経費を必要とせずに処分できるものと仮定する。制限されている各要素に対し，それぞれ一つ宛，全部で n 個の diposal processes を取入れることゝし，それらを $P_{K+1}, P_{K+2}, \cdots\cdots P_{K+n}$ と表わす。こゝで P_{K+j} とは制限されている要素のうち，j 番目のものゝ一単位を処分する生産活動である。ベクトルの形では disposal processes は次のように書ける。

(5.16) $$P_{K+1}=(1, 0, 0, \cdots\cdots, 0)$$

$$P_{K+2}=(0,\ 1,\ 0,\ \cdots\cdots,\ 0)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_{K+N}=(0,\ 0,\ 0,\ \cdots\cdots,\ 1)$$

このように考えると，企業にとつて利用出来る生産活動は $K+N$ 個になり，その中K個が有効な生産活動であり，N 個は処分のための生産活動である。従つて企業の生産ベクトルは $K+N$個の水準をもつている。すなわち，

(5.17) $$X=(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots x_{K+N})$$

である。生産の可能な範囲を示す行列を，$K+N$ 個の列をもつ行列に拡張しなければならない。これは次の行列となる。つまり

(5.13) $$P_0=[P_1,\ P_1,\ \cdots\cdots,\ P_{N+K}]$$
$$=[A,I]$$

たゞし，I はN行N列の単位行列である。また総利益に対する公式を書き換えることができる。すなわち

(5.19) $$c=(c_1,\ c_2,\ \cdots\cdots,\ c_{N+K})$$

$$\text{但し } c_i=\begin{cases}1,\ P_j \text{ が活動している生産活動の場合}\\ 0,\ P_j \text{ が処分のための生産活動の場合}\end{cases}$$

この様に定義しておくと，総利益の総額は

(5.20) $$f(x)=C'X$$

となる。かくして

(5.21) $$\left.\begin{array}{l}X\geqq 0\\ AX=P_0\end{array}\right\}\text{という条件のもとで}$$
$$f(x)=C'X$$

を最大にすることに問題が変つてくる。

〔註 1〕 以上の説明は，企業が自由に処分できるいくつかの固定した生産要素をもつており，またこの企業はこの固定要素を利用するのに必要な可変生産要素を，完全競争市場で調達することが出来る場合を仮定している。

〔註 2〕 (5.3) の A は凸集合であつて，ベクトル $a(k)$ の集合であると定義される。しかしながら David Gale〔(9)〕 と，Murray Gterstenhaber〔(11)〕 によつて凸集合の基本的性格が明らかにされた以上，この式をベクトル・マトリックスで表示することには，たゞそれだけの意味しか持たなくなつた。しかし，マトリックスで (5.3) を表示することが一般の慣習として依然として残つているので，マトリックスで表示することにした。

Ⅵ リニア・プログラミングの解法

リニア・プログラミングの解法については，種々な人達によつて種々な説明が行われているの

で，筆者は George B. Dantzig の論文に準拠して説明を試みることにした〔(3)〕　その中で用いられている記号は前後を統一するために〔4〕と同じ記号を用い，記号による混乱を避けた。

(5.21) の基本的な関係を言いかえると，次のような関係を満足する $x_k \geqq 0$ を求めることである。すなわち

(6.1)　$$x_1P_1+x_2P_2+\cdots\cdots+x_KP_K=P_0$$

(6.2)　$$x_1C_1+x_2C_2+\cdots\cdots+C_KP_K=f(x)=\max$$

ところで，

(6.2) の値を最大にすることなく，(6.1) を満足する，有限値 x_k の集合は適正値（feasible solution）と呼ばれ，(6.2) を満足させる解は最適値（Maximum feasible solution）と名付けられている。その解法は simplex 解法と呼ばれているものである。

適正値をうることは左程困難ではなく，一瞥して直ちに得られるので，先づ適正値が得られると仮定した場合の最適値の求め方を説明し，しかる後に適正値の解法について考察してみる。

先づ次の仮定を設ける。

(非退化の条件)：集合〔P_0, P_1, P_2, $\cdots\cdots P_K$〕の m 個の点よりなる部分集合は一次独立である。

6—a　基本解の求め方

非負で m 個の点からなる或る適正解 P_i が得られたとすると，

(6.3)　$$x_1P_1+x_2P_2+\cdots\cdots+x_mP_m=P_0, \qquad x_i>0$$

(6.4)　$$x_1C_1+x_2C_2+\cdots\cdots+x_mC_m=Z_0$$

となる。

そこで最適解をうるための条件を求めるためには，上記の適正解を形成する m 個の点からなる基底 (basis) によつて，すべての点 P_j を説明することが先づ必要になる。すなわち，

(6.5)　$$x_{1j}P+x_{2j}P+\cdots\cdots+x_{mj}P_m=P_j \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots\cdots m)$$

と表わし，次の式を z_j で表わすと

(6.6)　$$x_{1j}C_1+x_{2j}C_2\cdots\cdots++x_{mj}C_m=z_j$$

となる。

こゝで，次の定理を証明する必要が生ずる。

〔定理 I〕　若しある特定の j に対して，$C_j>z_j$ なる条件が成立するならば，適正解の集合は，z が有限なる値を上限にもつと，否とにかゝわらず，如何なるその集合に対しても，$z>z_0$ が成立する。(必要条件)

〔証　明〕　今，$C_j>z_j$ と仮定し，(6.5) 式に θ を掛けて (6.3) 式から引き，同様に (6.6) 式に θ を掛けて，(6.4) 式から引くと，

$$(6.7) \qquad (x_1-\theta x_{1j})P_1+(x_2-\theta x_{2j})P_2+\cdots\cdots+(x_m-\theta x_{mj}) \times P_m+\theta P_j=P_0$$

$$(6.8) \qquad (x_1-\theta x_{1j})C_1+(x_2-\theta x_{2j})C_2+\cdots\cdots+(x_m-\theta x_{mj}) \times C_m+\theta C_j=z_0+\theta(C_j-z_j)$$

となる。但し (6.8) 式の両辺には θC_j が加えてある。

(6.7) 式では凡ての i に対して，x_i は正であるから，正なる θ の値に対しては $\theta_0>\theta\geqq 0$ か，あるいは P_i の係数を正ならしめる，有限値をもつある範囲にあることは明かである。また (6.8) 式から，この適正値の集合よりなる z は，厳密に θ の単調増加函数であることも明かである。つまり，仮定

$$(6.9) \qquad z=z_0+\theta(C_j-z_j)>z_0, \qquad \theta>0$$

仮定により，$C_j>z_j$，それ故 $z>z_0$

が成立する。所で (6.7) 式，又は (6.8) 式において，$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots m$ の中のすくなくとも1つの値に対して $x_{ij}>0$ ならば，(6.7) 式の凡ゆる係数を非負ならしめる θ の最大値は

$$(6.10) \qquad \theta=\min(x_i/x_{ij}), \qquad x_{ij}>0$$

で与えることが出来る。

そこで (6.9) 式において $i=i_0$ に等しく，そのときの値が θ_0 になるならば，(6.7) 式及び (6.8) 式の中の i_0 を含む係数はなくなる。それ故 $\theta=\theta_0$ とすることによつて与えられる適正値は正確に m 個の正値によつて作られる。しかも $z>z_0$ である。かくして，この m 個の点の新しい集合は，新しい点 P_j と，前に用いられた m 個の点の中の $(m-1)$ 個の点から出来ていることが明かにされる。このような m 個の新しい集合は，新たな基底として用いられ，再び (6.5) 式及び (6.6) 式で行われたような方法を繰返えすことによつて，すべての点をこの新しい基底と，新たに計算された z_j と比較される C_j の値とによつて表すことが可能である。そこで，若しも $C_j>z_j$ であるならば，この値は増加し，すくなくとも x_{ij} が正なる限り，他の新しい基底の形成に導く筈である。かくして，この方法により，最早新しい基底を形成出来なくなる迄，繰返されることが出来ると考えても差支えないであろう。何となれば，こゝではたかだか $\binom{m}{n}$ 個の基底があるだけにすぎないし，同一の基底がもう一度出てくることがあり得ないので，この繰返の数が有限個に止るからである。万一同じ基底が繰返されるとしても，そのときの z の値も繰返しを受けて，しかも厳密には増加する。

このために，繰返しの作業は，或る段階において $x_{ij}\leqq 0$，〔但し $i=(1,\ 2,\ \cdots\cdots n)$ 迄のすべての値をとる。〕が成立する或る j において，あるいは $j=1,2,\ \cdots\cdots n$ 迄のすべての値に対し $Cj\leqq z_j$ を成立せしめる点で終結する。

つまり，z に有限なる値をもつ上限が存在する限り，繰返しの作業の終結は $C_j\leqq z_j$ なる条件の有無に帰着する。ここで繰返の作業を止めなくてはならなくなる。

次に定理IIとして，次の事柄を証明する。これは定理Iの逆であり，充分条件である。

〔**定理II**〕 $j=1, 2, \cdots\cdots n$ なるすべての j の値に対して，$C_j \leqq z_j$ が成立するならば (6.3) 式と (6.4) 式は最適値をもつ。

〔**証　明**〕 (6.11) $\qquad \mu_1 P_1+\mu_2 P_2+\cdots\cdots+\mu_n P_n=P_0, \qquad \mu_j \geqq 0$

(6.12) $\qquad \mu_1 C_1+\mu_2 C_2+\cdots\cdots+\mu_n C_n=z^*$

が他の適正値をもつとしよう。そして $z \geqq z^*$ とする。仮定により，$C_j \leqq z_j$，

したがつて (6.12) 式において z_j によつて C_j をおきかえると，

(6.13) $\qquad \mu_1 z_1+\mu_2 z_2+\cdots\cdots+\mu_n z_n \geqq z^*$

(6.5) 式で与えられる P_j の値の代りに (6.11) 式を，(6.6) 式で与えられる z_j の値の代りに (6.13) 式を用いると，

(6.14) $$\left(\sum_{j=1}^{n}\mu_j x_{1j}\right)P_1+\left(\sum_{j=1}^{n}\mu_j x_{2j}\right)P_2+\cdots\cdots+\left(\sum_{j=1}^{n}\mu_j x_{mj}\right)P_m=P_0$$

(6.15) $$\left(\sum_{j=1}^{n}\mu_j x_{1j}\right)C_1+\left(\sum_{j=1}^{n}\mu_j x_{2j}\right)C_2+\cdots\cdots+\left(\sum_{j=1}^{n}\mu_j x_{mj}\right)C_m \geqq z_*$$

を得る。

こゝで退化が生じないと仮定すると，(6.3) 式及び (6.14) 式の対応する係数は等しくならなければならない。故に (6.15) 式は次の如くなる。

(6.16) $$x_1 C_1+x_2 C_2+\cdots\cdots+x_m C_m \geqq z^*$$

か，或いは (6.4) 式によつて，

(6.17) $$z_0 \geqq z^*$$

したがつて，他の最適値が存在するためには，最後の基底ではない。P_j に対して，$P_j=z_j$ が成立することが必要である。しかし，この場合の拡大マトリックス

(6.18) $$\begin{bmatrix} P_1, & P_2, & \cdots\cdots P_n \\ C_1, & C_2, & \cdots\cdots C_n \end{bmatrix}$$

において，一次独立のすくなくとも $m+1$ 個の列の集合をもつことが判るであろう。かくして所与の適正値から得られる最適値が一義的であるための充分条件は，(6.18) で定義される $m+1$ 個の点をもつ如何なる集合も一次独立でなければならないということである。

この G. B. Dantzig によつて考えられた simplex 解法に従つて，筆者は計算を試みた。

VII 仮 設 の 検 定

経済学の問題においては，利用したモデルが果して現実をある妥当な範囲で代表しているか否かを検討することが，特に計量経済学に於て要求されている〔(12) pp. 92—100〕〔(17) pp. 154—184〕。

そこでリニア・プログラミングの基本的な数学的模型が，我々の行つた現実の製材工場への接近方法に合致するか，否かを次に検討する。

G. E. Dantzig 及び T. C. Koopmans 等の活動分析（Activity Analysis――リニア・プログラミングはその一部をなす）の創始者たちによれば，リニア・プログラミングは次の5つの仮定の上に成立していることが理解されている〔(2)〕。

それらは，

〔1〕 線型の仮定

〔2〕 有限性の仮定

〔3〕 独立性の仮定

〔4〕 加法性の仮定

〔5〕 経済安定の仮定

である。

これらの仮定の上に組立てられたリニア・プログラミングの数定的な基本的模型と，我々が現実の製材工場を理解している仕方との距りが，どの位あるかを調べてみる。先ず

〔1〕 線型の仮定：これは各々の生産活動において，投入財と産出財との間に正比例の関係がある，ということを意味する。

この仮定はリニア・プログラミングの本質をなす理論的な前提である。この製材工場の場合，ある一単位の DIB (IN) をもつ丸太から生ずる産出量は，その投入量を二単位にするとき，産出量も二倍になると考えても，差支えないと思われる。我々の標本調査では，括約により同一の DIB (IN) をもつた丸太から産出される5種類の品等区分をもつ製材製品の分布を考え，その期待値を採用しているので，この仮定は許されてよいであろう。

尤も厳密に考えた場合，産出量に対してそれほど量的な比例的な関係が明かでない原価要素（補助材料，消耗品類，間接労仂等の費消に関するもの，つまり逓減的原価）については，線型の仮定が許されるか，否かは問題の生ずる所である。しかしながら，我々は製材工場の長年に渉る経験と実績を基にして，比例費用と固定費用とを最小自乗法を用いて分析し，その比例部分だけにリニア・プログラミングを用いようとしている〔第 1, 2, 4 表参照〕。したがつて，こゝで線型を一応仮定しても差支えないであろうし，その仮定の是非は，寧ろ今後，現実にリニア・プログラミングを適用したことより生ずる誤差が，精度，計算，技術上の制約を考慮するとき，許容されるものであるか，否かに係つている。

〔2〕 有限性の仮定：この製材工場の場合，そこで用いられる生産要素は，可変的な生産要素は完全競争市場で調達され，固定的な生産要素は企業が自由に処分できる幾つかのものをもつているとしても，種々の経済上の制約により，それら生産要素の供給は制限されていると

考えてよいであろう。若しそうであれば制限された要素の最適な分配計画を考察するこのリニア・プログラミングの有限性の仮定を満足させることになるであろう。

〔3〕 独立性の仮定：これを製材工場の場合について考えるならば，ある DIB (IN) をもつた丸太だけを非常に多量に製材した結果，他の大きさの丸太を製材する場合，その生産活動の能率が阻害されたか，否かということを問題にしてみる。そして現実の問題として，このようなことが生じなかつたと考えられるので，この仮定を承認出来ると思われる。

〔4〕 加法性の仮定：二つ以上の生産活動が与えられたときに，投入される要素の総和は，その生産活動が別々に稼仂された場合であつても，同時に稼仂された場合であつても等しいという，この仮定は〔第五章参照〕，製材工場の場合認めてもよいであろう。

〔5〕 経済安定の仮定：リニア・プログラミングの対象としている投入・産出される要素の価格が，生産活動の行われている期間一定であるというのがこの仮定の意味である。所で製材の所要時間というものは極めて短期であるし，現実の問題としてこのようなことは生じなかつたので〔5〕の仮定は当然承認されるべきである。

以上の仮設の検定の結果，この5の仮定をもつた数学的基本模型を現実に適用することの妥当性と，そのような仮定の上に構成された simplex 解法を用いても計算の途中で理論的な誤謬の生ずる恐れのないことが承認された。そこで次に現実の製材工場で集計され，整理されたデーターを用いて計算を試みる。

Ⅷ 計 算

リニア・プログラミングの中心をなす技術マトリックスとして，第3表の "Recovery Per Cent for all logs" をそのまゝ用いた。この表について説明すると，例えば DIB (IN) が 10 吋の丸太を MBF (これが一単位とする，且つ International Log Scale を用いた) だけ投入すると，一級品 (B and Better) が 41 ボード呎，二級品 (No. 1 Common) が 276 ボード呎，三級品 (No. 2 Common) が 569 ボード呎，四級品 (No. 3 Common) が 90 ボード呎，五級品 (No. 4 Common) が 24 ボード呎，だけそれぞれ産出されることを意味する。

次に，それぞれの生産活動を第4表の Conversion Values, All Logs についてみると，利益の生ずるのは DIB (IN) が 10 吋からであつて，9吋以下はそれを生産活動に乗せることにより損失を来すことになる。筆者はこゝで，利益の最大化を考えている関係から，この DIB (IN) が7吋，8吋及び9吋に属する丸太の生産活動を技術マトリクスから除外することにした。

所でこのような措置は，如何なる技術マトリクスについても行えるものではないことは明かである。何故ならば，そのような措置が他の生産活動のベクトルに重大な影響を与え，残りの技術マトリクス全体を無意味にするような場合があるからである。しかしながら，製材工場に関する

限り，このような種類の生産活動を任意に除外することによつて，残りの他の生産活動に影響を生ずる恐れのないことは極めて明かである。従つてこのような措置を妥当と認めてもよいであろう。

そこで（5.3）式に相当する，この製材工場の技術マトリクスを書くと次のようになる。

$$(8.1)\ A \equiv \begin{bmatrix} 0.041 & 0.063 & 0.086 & 0.113 & 0.168 & 0.221 & 0.255 & 0.248 & 0.215 & 0.161 \\ 0.276 & 0.412 & 0.497 & 0.532 & 0.506 & 0.449 & 0.390 & 0.362 & 0.350 & 0.349 \\ 0.569 & 0.438 & 0.347 & 0.293 & 0.266 & 0.270 & 0.293 & 0.325 & 0.362 & 0.401 \\ 0.009 & 0.066 & 0.050 & 0.042 & 0.041 & 0.037 & 0.031 & 0.034 & 0.048 & 0.079 \\ 0.024 & 0.021 & 0.020 & 0.020 & 0.019 & 0.023 & 0.031 & 0.031 & 0.025 & 0.010 \end{bmatrix}$$

次に投入される投入物の水準として，（5.4）に相当する式を書くと，

$$(8.2)\qquad X=(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_{10})$$

我々の標本調査においては産出量として5種類の製材製品が得られたが，それを次に示す。

(8.3)

	一級品 B & Better	二級品 No. 1 Common	三級品 No. 2 Common	四級品 No. 3 Common	五級品 No. 5 Common
材積	4.227	13.591	6.860	1.578	0.325

単位：MBF　　合計 26,581

一方，投入される原木はその全部がクロセット木材，パルプ会社所有の森林から生産されたものであつた。

所で筆者は，この会社の社有林の施業案の作製に参加し，伐木，運材のレポートも書いたので社有林の令級構成に関する資料をもつている。しかしながら，長さ 16 呎の原木の DIB (IN) と，その原木のもとである立木の DBH との関係については十二分の資料を残念ながらもつていない。公式の資料としてはこの会社で発表した Taper Table（第5表）があるだけである。それによると，それぞれの DBH から得られる長さ 16 呎の丸太の本数と，その最上部の丸太の DIB (IN) も記入されているのであるが，それから下の丸太の各々の DIB (IN) については正確には判らない。そこで森林調査のときに，収集した資料を基礎にして，DIB 区分による材積の割合について次のような推定を下した。

(8.4)

DIB (IN)	10—13	14—16	17	18	19
比率 (Per Cent)	45	43	7	3	2

所で第4表によれば，DIB (IN) 10″—13″ の Conversion Values は他のそれと比較してみるとすくない。そこでこの階級に属するものは DIB (IN) 14″—16″ に属するものより，すくなめに投入することがより経済の原則に従うという見地から，（8.4）における DIB (IN) 14″

TABLE V PINE TAPER TABLE

Based on 269 stem analyses, Crossett, Ark. Diameter rounded off to nearest inch.

DBH	D	DIB				Utilized Top DIB
	Log Height	1st Log	2nd Log	3rd Log	4th Log	
12	1	10				9.7
	2	10	8			
14	1	11				
	2	11	10			9.9
	3	12	10	9		
16	1	13				
	2	13	11			10.3
	3	13	12	10		
	4	14	12	11	9	
18	1	14				11.0
	2	14	12	10		
	3	15	13	11	9	
	4	15	14			
20	2	16	14	13		12.0
	3	16	15	14	11	
	4	17	16			
22	2	18	15	14		13.0
	3	18	16	15	13	
	4	19	17			
24	2	19	17	15		14.1
	3	20	18	17	14	
	4	20	19			
26	2	21	18	17		15.5
	3	22	20	18	15	
	4	22	20			
28	2	22	19			16.9
	3	23	21	18	16	
	4	24	22	19		
30	3	25	22	19		18.2
	4	26	23	21	17	

—16″ のものと，それより DIB (IN) の大なるものとの比率を越えないように注意しつゝ，投入される原木の材積を次の如く決めた。そのために次の合計が (8.3) のそれより多くなつた。

(8.5)

DIB (IN)	10—13	14—16	17	18	19	合 計
材 積 (単位: MBF)	13.000	19.000	1.500	0.800	0.600	34.900
比 率 (Per cent)	38	54	4	2	2	100

そして (8.5) と (8.3) から，(5.9) に相当する要素に関する制限条件として，次の式を作つた。

(8.6) $P_0=(4.227,\ 13.591,\ 6.868,\ 1.018,\ 0.640,\ 13.000,\ 19.000,\ 0.600)$

次に目的函数として，(5.11) 式に相当する (8.7) 式は各々の DBI (IN) の Conversion Value の和を最大にするものとして，

(8.7) $$f(x)=3.46x_1+14.96x_2+23.63x_3+29.66x_4+34.65x_5+37.09x_6$$
$$+37.84x_7+37.22x_8+35.04x_9+31.92x_{10}$$

を作つた。

かくして，上記の (8.1) から (8.7) 式迄を整理して (5.10) 式に相当するものを作ると，

$$
(8.8)\quad \begin{bmatrix} 0.041 & 0.063 & 0.086 & 0.113 & 0.168 & 0.221 & 0.255 & 0.248 & 0.215 & 0.161 \\ 0.276 & 0.412 & 0.497 & 0.532 & 0.506 & 0.449 & 0.390 & 0.362 & 0.350 & 0.349 \\ 0.569 & 0.438 & 0.347 & 0.293 & 0.266 & 0.270 & 0.293 & 0.325 & 0.362 & 0.401 \\ 0.090 & 0.066 & 0.050 & 0.042 & 0.041 & 0.037 & 0.031 & 0.034 & 0.048 & 0.079 \\ 0.024 & 0.021 & 0.020 & 0.020 & 0.019 & 0.023 & 0.031 & 0.031 & 0.025 & 0.010 \end{bmatrix} (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10})
$$

$$
\geqq \begin{bmatrix} 4.227 \\ 13.591 \\ 6.868 \\ 1.018 \\ 0.640 \\ 13.000 \\ 19.000 \\ 1.500 \\ 0.800 \\ 0.600 \end{bmatrix}
$$

但し $(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10}) \geqq 0$

なる条件の下に，

$$
\begin{bmatrix} 3.46 \\ 14.96 \\ 23.63 \\ 29.66 \\ 34.65 \\ 37.09 \\ 37.84 \\ 37.22 \\ 35.04 \\ 31.92 \end{bmatrix} (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10})
$$

を最大にする問題になる。

換言すれば，標本調査の結果与えられた，それぞれの製材製品の量の制限内で，利益を最大にするためには，DIB (IN) の異なる原木の材積の和が与えられている場合，そのような制限条件の下において，どのように原木の量を DIB 別に撰べば，製材工場の利益が最大になるか，という関係を求める問題がこゝで取扱つている問題になる。

この解法は (6) で説明された方法を図表によつて解く，simplex Table による解法を用いた。その経過は第6表に示されている。この結果を整理し，我々が標本調査を行つた時に得た各々の DIB (IN) の原木の材積と比較すると，次の如くなる。

DIB (IN)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	合 計
標 本 調 査	1.014	2.370	3.196	3.450	4.902	3.912	3.440	1.624	0.824	1.572	26.344
リニア・プログラミング	0.246	0.818	0.377	8.260	8.686	5.488	3.048	1.500	0.800	0.600	29.825

（単位：MBF）

合計において，リニア・プログラミングによる方が幾分材積が多くなつているのは，(8.5 及び8) において，制限条件をすこし緩めたゝめであるが，(8.5) の合計以内には止まつている。上記の結果が (8.8) で与えられた制限条件の下においては，この製材工場の最適の原木投入の方法であるといえる。この場合に実現された最大利益は 969.55 弗で，これを MBF 当りに換算すると，33.19 弗であり，我々の行つた標本調査の場合に得た MBF 当りの利益，30.41 弗に比較すると，2.75 弗，つまり 9 パーセントの利潤率の増加があることになる。尤もこの数字は，上記の制限条件と最終製品の価格の下において実現される利益であるから，この種制限条件，殊に製材価格の如何によつて変化するものであることは言う迄もない。一般に，リニア・プログラミングを用いることにより，利潤率の増加は 1 割乃至 3 割前後といわれているので，この程度の利率潤の増加は決して過大ではないであろう。

IX 結　　語

リニア・プログラミングは製材工場の場合，限界分析の土台の上に，その全般的な問題についての解決を一義的に与えるものであるが，他産業で使用されているケースから見ると，それを適用し得る分野は広くはない。その場合，リニア・プログラミングを行うことを前提とした標本調査が必要になる。リニア・プログラミングはそれに用いるデータを所与のものとして受取るものであるから，その場合，標本調査の精度が問題になるのは当然であるが，実用的な要求から近似的な値で満足出来る場合であれば，特に高い精度を要求する必要もないであろう。こゝでの最大の問題は何といつてもモデルの作り方で，他の事は二次的な意味しかない。

リニア・プログラミングの計算については，技術マトリックスの各要素の桁数を成可く簡単なものにすることが望ましい。筆者は普通の電気計算機を用いたが，この程度の計算になれば，電子計算機，UNIVAC 等を用いるべきと考える。

この報告を終るに当つて，更に一言付け加えさせて頂くならば，このリニア・プログラミングを製材工場に適用する問題は，大規模な製材工場で，原木の選択に余裕があり，木材市場に最大の利益を実現出来る条件が存在する場合にのみ適用されるものであろう。そこで我が国で見られる大多数の小規模な製材工場のように，こゝで試みた方法で最大の利益を得ることが困難な事情にある場合は，この方法は制限条件の如何によつて適用されないこともあり得る。このような場

合は利益の安定が企業の目標になるかも知れない。このような場合には，最大利益の実現という原理に取つて代るものとして，Mini-max の理論が生産行動を決定する原理として考えられる。

引 用 文 献

(1) Cooper, W. W., Henderson, A., and Charnes, A. 1953. An Introduction to Linear Programming.

(2) Dantzig, George B. 1949. The Programming of Inter-dependent activities : Mathematical Model. Econometerica. 17 : 200—211.

(3) ——————— Maximazation of Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities, in (13).

(4) ——————— A Proof of the Equivalence of the Programming Problem and the Game Program, in (13).

(5) Dorfman, Robert. 1953. Mathematical or Linear Programming : A Nonmathematikal Exposision. American Economic Review. 153. No. 5 : 797—825. (小宮隆太郎氏訳)

(6) ——————— 1951. Application of Linear Programming to the Theory of Firm including an Analysis of Monopolistic Firm by Non-Linear Programming. (小宮隆太郎氏訳)

(7) Duerr, William A. and Vaux, Henry J. 1953. Forest Harvesting and Processing. Chapter 5. Research in the Economics of Forestry.

(8) Fisher W.D. and Shruben, L.W. 1953. Linear Programming Applied to Feed Mixing under Different Price Conditions. Jor. Farm Economics. 35, Nov : 471—483.

(9) Gale, David. Convex Polyhederal Cones and Linear Programming, in (13).

(10) Gale, David, H. W. Kuhn and A. W. Tucker. Linear Programming and the Theory of Games, in (13).

(11) Gerstenhaber, Murray. Theory of Convex Polyhederal Cones, in (13).

(12) Klein, Lawrence R. 1953. Econometrics.

(13) Koopmans, Tjalling C. 1951. Activity Analysis of Production and Allocation. Cowles Commission for Research in Economics. Monograph No. 13.

(14) Leontief, W. W. 1951. The Structure of American Economy. 1919—1929. Empirical Application of Equilibrium Analysis.

(15) ——————— 1953. Studies in the Structure of American Economy : Theoretical and Empirical Explorations in Input-output Analysis.

(16) Samuelson, Paul Anthony. 1948. Foundation of Economic Analysis.

(17) Tintner, Gerhard. 1952. Econometrics.

(18) Weyl, Herman. 1950. The Elementary Theory of Conven Polyhedera. Analysis of Mathematics Studies No. 24 : 3—18.

(19) Sommer, Herman C, Bohdan, Kizyma j, Hall, John L, and Tsutomu Arimizu. 1952. Sawmill Report and Mill Production Report.

(20) Takuro Kishine : 1953. Estimation of the Production Function of the Lumber and Timber Products Fsrms in Japan. Transaction of the 62 Meeting of the Japanese Forestry Society : 17—18. (Japanese)

(21) Tsutomu Arimizu. 1955. Leontief's Input-output Table and Japanese Forestry. Green Age. 5. Dec : 32—34. (Japanese)

(22) Netherlands Economic Institute. 1953. Input-output Relations. Proceedings of a Conference on Interindustrial Relations Held at Dreibergen, Holland.

(23) Teiichi kyono, 1955. Economic mixture of fertilizers for rice-plant. Hokkaido Agricuctural Research No. 9 (Japanese)

Résumé

Introduction

During the last two weeks of May, 1952, the writer conducted the sawmill production study in Sawmill # 1 of the Crossett Lumber Company, Crossett, Arkansas, in the United States of America, as a student of the Yale School of Forestry with John L. Hall, Herman C. Sommer and Bohdan J. Kizyma under the guidance of Arthur R. Muschler, instructor of the Yale Camp.

This sawmill production study was carried out by sampling to make the economic analysis of the sawmill and we wrote a paper on the subject. The purpose of this paper is only to suggest the possibility of application of the linear programming to the above problem by comparing the method we employed at Crossett with the new one the writer introduced here as the first step to the application of the linear programming to forestry.

Traditional method

It is a well-known fact that the traditional method employed in the studies on the sawmill production from the economic standpoint has been marginal analyses (7) (19).

The most extensively used method along this line which is a straightforward application of Lagrange's method (6) (16) has not been adapted in the studies on sawmill production, perhaps, due to difficulty of making the production function concerned.

However, in an aggregated model a non-linear production function was produced in the economic analysis of the forest products firms in this country (20). As far as the linear production function is concerned, W. W. Leontief was the first in the application of it to the lumber and timber products industry in the United States, though it was also about the aggregated model.

Under these circumstances in the sawmill production study, a kind of profit map was devised in the United States. It is this profit map that we made use of at Crossett to clarify the activity of sawmill production up there. Before discussing the application of this linear programming, it is necessary to refer to this profit map breifly.

We denote a certain DIB (IN) by i, and the fixed and the variable cost per MBF of logs with the length of 16 feet, having the DIB (IN) at the top of it which comes in the range of DIB (IN) i, F_i and C_i, respectively. The volume here is measured by the International Log Rule. Then we can form the decreasing total coast formula:

$$C_i = kT_i + F_i \qquad (i=1, \cdots\cdots, n)$$

where

k=average milling cost per MBF per unit time

T_i=sawing time per MBF

In the case of sawmill operation, sawing time T' was measured about a log with the length of 16 feet, having the DIB (IN) i and a volume V'. In this case the sawing time T_i per MBF of the logs may be described by:

$$T_i = T' \times \frac{V_i}{V'}$$

where

V_i=MBF of log with the DIB (IN) i

If the operation time changes from T_i to T_{i+1} as the DIB (IN) of log shifts from i to $i+1$, then the total cost will be transformed from C_i to C_{i+1}. From this when the the value of k, average milling cost, is known beforehand, the values of C_i and F_i can be worked out. In our mill study we obtained the values of each fixed cost and the variable cost per MBF of logs with the DIB (IN) i by applying the least squears method to the data gathered by the sampling.

The averaga sawing time needed to saw logs with each size and each average manufacturing cost are shown in the Table I and Table II. In this sawing process five classes of sawn timber such as B & Better, No. 1 Common, No. 2 Common, No. 3 Common and No. 4 Common, were produced from a log in a very short lapse of time.

The proportion between each size of log-input-, and sawn timber-output-in terms of per cent, was named as "Recovery Per Cent" which is corresponding to the so-called production co-efficient. These relasions are indicated in the Table III.

On the other hand, the monetary expression of the recovery per cent is called "Recovery Value" which points out the value of sawn timber according to each class, though it should be noted that the recovery value has no parallel relation whatsever with the recovery per cent in terms of production co-efficient. These values are also shown in Table III. In other words, these values are the prices of the final products which comprise five classes of sawn timber from a log.

Under these relations the profit to be realized from MBF of logs with each DIB (IN) can be worked out, by deducting all expenses such as manufacturing cost, logging cost and the stumpage price from the total prices of the final products from these logs which are represented by recovery values above mentioned. We named this value as "Conversion Value" per MBF of logs with DIB (IN) i. These values are indicated in Table IV and Figure I.

The fact obtained from the last paragraph is the variation of marginal profit in the sawing process according as DIB (IN). It is needless to say that the marginal profit of MBF of logs with each DIB (IN) due to the shift of DIB (IN) will be obtained from the table of conversion value.

Our report reads that when the conversion value of different log diameters were found, it was seen that there is a loss on logs smller than 9″ DIB, and the greatest return was in the 16″ DIB class: thus it is evident that as the diameter increases, and that the higher the log grade, the more profit returned per thousand.

In regard to this method, the writer cannot but feel that this is very much original kind of analysis, considering the complicated process of sawing from the standpoint of accounting. However, it can not be denied that from this partial solution of optimal mixture of logs that cover all DIB (IN) will be obtained but to determine uniquely the relations between the total maximum feasible profit or minimum feasible costs and the total output of the sawmill through the possible combinnation of various size of logs in volume will be hard to get except for the long-years experience. The reason why I took up the linear programming for this case is because it seems to me that the linear programming could throw light upon the overall solution of this problem-optimal mixture of all sizes of logs. The reasoning of it will have to be mentioned as the next procedure.

The relationship between the linear programming and the traditional marginal analysis we employed at Crossett will be explained in this way if the simplest statement has to be made. The profit map we used is made up of the concept of two dimension in the Euclidean space, while the linear programming N-dimension, 10-dimension here, in the affin space (18), though we can increase the number of dimension according to the need for the solution. In other words, the linear programming will make use of the theory of convex polyhederal cone (5) (9) (11) which is more advanced than a mere arithmetics.

Linear Programming

It it well-known that it is G. B. Danzig that developed the idea of the linear pregramming in 1947 (2) (13). T. J. Koopmans introduced the basic mathematical model which consists of activity and commodity (13). The former can be represented by the technology matirix (2) (3), and the latter by input going through this matrix and output coming out of it. This model can work under the requirements for which the linear programming will be made available. If the variables of the mathematical model of the linear qrogramming are:

A = technology matrix which is corresponding to the table of recovery per cent (Table Ⅲ) here.

X = matrix of input which is a row vector and will be a basic solution: ten kinds of logs here.

Y = matrix of output which is corresponding to five classes of sawn timber here.

P = colume vectors representing requirements for output that covers five classes of sawn timber.

C' = transposed matrix of profit per unit of input. The unit of input here is MBF, mill tally.

$f(x)$ = The total profit realized from this sawing operation.

Since $Y = AX = P$, our problem will be to obtain the maximum values of X of $f(x) = C'X$, under the conditions of:

$$AX \leqq P$$
$$X \geqq 0$$

The model of the linear programming here is as follows:

Model of the Linear Programming

$$\begin{bmatrix} .041 & .063 & .086 & .113 & .168 & .221 & .255 & .248 & .215 & .161 \\ .276 & .412 & .497 & .532 & .506 & .449 & .390 & .362 & .350 & .349 \\ .569 & .438 & .347 & .293 & .266 & .270 & .293 & .325 & .362 & .401 \\ .090 & .066 & .050 & .042 & .041 & .037 & .031 & .034 & .048 & .079 \\ .024 & .021 & .020 & .020 & .019 & .023 & .031 & .031 & .025 & .010 \end{bmatrix}$$

$$\times (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10})$$

$$\begin{bmatrix} 4.227 \\ 13.591 \\ 6.868 \\ 1.018 \end{bmatrix}$$

$$\leq \begin{bmatrix} .640 \\ 13.000 \\ 19.000 \\ 1.500 \\ .800 \\ .600 \end{bmatrix},$$

$$(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10}) \geq 0$$

Under the above conditions, the maximnm value of x_1, x_2, ……, x_1 will be obtained as to the following objective functional:

$$f(x) = \begin{bmatrix} 3.46 \\ 14.96 \\ 23.63 \\ 29.66 \\ 34.65 \\ 37.09 \\ 37.84 \\ 37.22 \\ 35.04 \\ 31.92 \end{bmatrix} (x_1 x_2 x_2 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9)$$

Solution : For the solution of this problem, that is, the overall and unique solution of the problem to get the optimal mixture of all sizes of logs, I used the so-called simplex method which was devised by Danzig in his original paper (3), making use of the linear equation that corresponds to the linear production function. The name of the linear programming has originated from these circumstances, though some other school uses other name for this programming.

Before the computation of it, as the linear programming is based upon the five hypotheses, I conducted examination of whether each one of them can be applicable to the actual problems of sawmill production. If it is permitted to say a word here, as the requirements for the output, I employed the very data which we obtained from the sampling at Crossett, though a very much slght modification was made to the volume of No. 3 and No. 4 commons within the extent giving no unfavourable influence to the outcome of the sampling. Along with this, to make this model just indentifiable, I took up an arbitaray volume for the input of the summation of each size of possible logs with a plausible probability of production, considering the existing age classes of the growing stock up there.

The development of the computation in accordance with the simplex method is indicated in the Table VI.

The comparision of the volume obtained from the sampling and that from this computation by the linear programming is listed below:

DIB (IN)	Samplng	Programming
10	1.014	0.246
11	2.370	0.818
12	3.196	0.377
13	3.450	8.260

14	4.902	8.686
15	3.912	5.488
16	3.440	3.048
17	1.624	1.500
18	0.824	0.800
19	1.572	0.600
	26.344	29.823

(Unit : MBF)

Compared with the mixture of logs which was obtained by the sampling, the linear programming uses less of less profitable logs, and less of more profitable logs, influenced by the requirements that big logs are less as the probability of input due to the age classes of the existing growing stock. I discarded such logs as with DIB (IN) less than 9 inches because they made no profit and they are not join products of forest production there where the single selection system has been adopted in an extensive way as the company's policy in silviculture; hence there is no danger of misuse of the technology matrix in any way. Therefore, I will not loose the generality of the model in this case, and it will be plausible for the Crossett Lumber Company to produce less small diameter logs with small profit or no log without any profit, if the policy of the company aims to realize the maximum profit in any production process.

As far as the profit is concerned, the average profit per MBF was $ 30.41 in our study at Crossett, while this linear programming brought about $ 33.19 per MBF, with the increase of $ 2.75, 9 per cent of of the former average profit, per thousaod. But the writer wants to call attention that this figures was obtained under the requirements above mentioned. Further increase of profit will be possible under the favorable possible requirements and price of sawn timber.

Conclusion

The linear programming has its merit in obtaining the maxmum feasible values uniquely in such an activity as above mentioned. However, there are some obstacles on the way to reach the fine goal. The greatest obtacle is the medel building to which the linear programming can be applicable. Way of sampling and computation have secondary meaning, though we can not understimate the importance of them. The demand for it depends upon the actual need for the linear programming.

The programming here will be applicabl to such a big sawmill at Crossett as having the opportunity which is able to realize the maximum profit. Hence, it can be not be applicable to a small-sized sawmill without such favorable situations whoes sole purpose is the stabilization of their profit. However, to such case, the writer presumes that the mini-max theory will be replaced with the linear programming.

TABLE Ⅵ

														3.46	14.96	23.63	29.66	34.65	37.09	37.84	37.22	35.04	31.92
			P_0	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}	P_{15}	P_{16}	P_{17}	P_{18}	P_{19}	P_{20}	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
a		P_{11}	4.227	1										0.041	0.063	0.086	0.113	0.168	0.221	0.255	0.248	0.215	0.161
		P_{12}	13.591		1									0.276	0.412	0.497	0.532	0.506	0.449	0.390	0.362	0.350	0.349
		P_{13}	6.868			1								0.569	0.438	0.347	0.293	0.266	0.270	0.293	0.325	0.362	0.401
		P_{14}	1.018				1							0.090	0.066	0.050	0.042	0.041	0.037	0.031	0.034	0.048	0.079
		P_{15}	0.640					1						0.024	0.021	0.020	0.020	0.019	0.023	0.031	0.031	0.025	0.010
		P_{16}	13.000						1					1	1	1	1						
		P_{17}	19.000							1								1	1	1			
	←	P_{18}	1.500								1										1		
		P_{19}	0.800									1										1	
		P_{20}	0.600										1										1
	z_j-c_j													−3.46	−14.96	−23.63	−29.66	−34.65	−37.09	−37.84	−37.22	−35.04	−31.92
b		P_{11}	4.227	1							−0.248			0.041	0.063	0.086	0.113	0.168	0.221	0.255		0.215	0.161
		P_{12}	13.591		1						−0.362			0.276	0.412	0.497	0.532	0.506	0.449	0.390		0.350	0.349
		P_{13}	6.868			1					−0.325			0.569	0.438	0.347	0.293	0.266	0.270	0.293		0.362	0.401
		P_{14}	1.018				1				−0.034			0.090	0.066	0.050	0.042	0.041	0.037	0.031		0.048	0.079
		P_{15}	0.640					1			−0.031			0.024	0.021	0.020	0.020	0.019	0.023	0.031		0.025	0.010
		P_{16}	13.000						1					1	1	1	1						
		P_{17}	19.000							1								1	1	1			
	→ 37.22	P_{18}	1.500								1												
	←	P_{19}	0.800									1										1	
		P_{20}	0.600										1										1
	z_j-c_j	955.83												−3.46	−14.96	−23.63	−29.66	−34.65	−37.09	−37.84		−35.04	−31.92
c		P_{11}	4.227	1							−0.248	−0.215		0.041	0.063	0.086	0.113	0.168	0.221	0.255			0.161
		P_{12}	13.591		1						−0.362	−0.350		0.276	0.412	0.497	0.532	0.506	0.449	0.390			0.349
		P_{13}	6.868			1					−0.325	−0.362		0.569	0.438	0.347	0.293	0.266	0.270	0.293			0.401
		P_{14}	1.018				1				−0.034	−0.048		0.090	0.466	0.050	0.042	0.041	0.037	0.031			0.079
		P_{15}	0.640					1			−0.031	−0.025		0.024	0.021	0.020	0.020	0.019	0.023	0.031			0.010
		P_{16}	13.000						1					1	1	1	1						
		P_{17}	19.000							1								1	1	1			
	37.22	P_8	1.500								1												
	→ 35.04	P_9	0.800									1											
	←	P_{20}	0.600										1										1
	z_j-c_j	83.86												−3.46	−14.96	−23.63	29.66	−34.65	−37.09	−37.84			−31.92
d	←	P_{11}	4.227	1							−0.248	−0.215	−0.161	0.041	0.063	0.086	0.113	0.168	0.221	0.225			
		P_{12}	13.591		1						−0.362	−0.350	−0.349	0.276	0.412	0.497	0.532	0.506	0.449	0.390			
		P_{13}	6.868			1					−0.325	−0.362	−0.401	0.569	0.438	0.347	0.293	0.266	0.270	0.293			
		P_{14}	1.018				1				−0.034	−0.048	−0.079	0.090	0.066	0.050	0.042	0.041	0.037	0.031			
		P_{15}	0.640					1			−0.031	−0.025	−0.010	0.024	0.021	0.020	0.020	0.019	0.023	0.031			
		P_{16}	13.000						1					1	1	1	1						
		P_{17}	19.000							1								1	1	1			
	37.22	P_8	1.500								1												
	35.04	P_9	0.800									1											
	→ 31.92	P_{10}	0.600										1										
	z_j-c_j	103.01												−3.46	−14.96	−23.63	−29.66	−34.65	−37.09	−37.84			

			P_0	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}	P_{15}	P_{16}	P_{17}	P_{18}	P_{19}	P_{20}	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{19}
→	3.46	P_1	12.070	1		0.1757					−0.5711	−0.6362	−0.0134	1	0.7698	0.6908	0.5149	0.4675	0.4745	0.5149			
	←	P_{11}	3.732		1	−0.0072					0.1180	0.1928	−0.1525		0.0314	0.0610	0.0919	0.1488	0.2015	0.2339			
		P_{12}	10.260			−0.0485					−0.2044	−0.1754	−0.3454		0.1995	0.3307	0.3899	0.3770	0.3180	0.2479			
		P_{14}	0.032			−0.0158	1				0.0170	0.0092	−0.0778		−0.0033	−0.0049	−0.0043	−0.0010	−0.0057	−0.0153			
		P_{15}	0.350			−0.0012		1			−0.0170	−0.0097	−0.0097		0.0025	0.0054	0.0014	0.0078	0.0116	0.0816			
e		P_{16}	0.030			−0.1757			1		0.5711	0.6362	0.0134		0.2302	0.3902	0.4851	−0.4675	−0.4745	−0.5149			
		P_{17}	19.000							1								1	1	1			
	37.22	P_8	1.500								1										1		
	35.04	P_9	0.800									1										1	
	31.92	P_{10}	0.600										1										1
	z_j-c_j	144.77				0.61					35.24	29.72	31.88		−12.30	−21.52	−27.88	−33.04	−35.45	−36.06			
	3.46	P_1	3.717	−0.2355		0.1920					−0.8590	−1.0902	0.3457	1	0.6959	0.4662	0.2985	0.1171		−0.0359			
		P_{12}	4.370	−0.1578		−0.0371					−0.3906	−0.4797	−0.1047		0.1500	0.2444	0.2449	0.1423		−0.1212			
		P_{14}	0.137	0.0028		−0.0160	1				0.0203	0.0147	−0.0735		−0.0024	−0.0032	−0.0017	0.0032		−0.0087			
		P_{15}	0.135	0.0058		−0.0017		1			−0.0238	−0.0208	−0.0011		0.0007	0.0019	0.0025	0.0008		0.0051			
	←	P_{16}	8.383	0.2355		−0.1920			1		0.8590	1.0902	−0.3457		0.2797	0.4865	0.7015	0.2327		−0.1458			
f →	37.09	P_6	18.521	0.4963		−0.0357				1	0.5856	0.9568	−0.7568		0.1558	0.3027	0.4561	0.7385	1	1.1608			
		P_{17}	0.479	−0.4963		0.0357					−0.5856	−0.9568	0.7568		−0.1558	−0.3027	−0.4561	0.2615		−0.1608			
	37.22	P_8	1.500								1										1		
	35.04	P_9	0.800									1										1	
	31.92	P_{10}	0.600										1										1
	z_j-c_j	801.34		17.59		−0.65					56.00	63.64	5.05		−6.78	−10.79	−11.71	−6.86		5.09			
	3.46	P_1	1.150	−0.3357		0.2637			−0.0426		−1.2245	−1.5541	0.4928	1	0.5769	0.2592		0.0181		0.0261			
		P_{12}	1.443	−0.2400	1	0.0299			−0.0349		−0.6905	0.8603	0.0160		0.0524	0.0746		0.0611		−0.0703			
	←	P_{14}	0.167	−0.0022		−0.0165			0.0002		0.0182	0.0173	−0.0707		−0.0017	−0.0020		0.0038		−0.0091			
→	29.66	P_4	11.950	0.3357		−0.2737	1		0.1426		1.2245	1.5541	−0.4928		0.3987	0.6935	1	0.3317		−0.2078			
		P_{15}	0.165	−0.0036		−0.0011		1	0.0021		−0.0269	−0.0247	0.0046		−0.0003	0.0002		−0.0003		0.0056			
	37.09	P_6	13.071	0.3432		0.1191			−0.0650		0.0271	0.2480	−0.5320		−0.0260	−0.0136		0.5872	1	1.2556			
		P_{17}	5.929	−0.3432		−0.1191			0.0650	1	−0.0271	−0.2480	0.5320		0.0260			0.4218		−0.2556			
g	37.22	P_8	1.500																		1		
	35.04	P_9	0.800								1	1										1	
	31.92	P_{10}	0.600										1										1
	z_j-c_j	941.27		21.52		−3.86			1.67		70.33	81.84	−0.73		−2.11	−2.67		−2.98		2.66			
	3.46	P_1	0.970	−0.3252		0.3423	−4.7632		−0.0436		−1.3112	−1.6365	0.8296	1	0.5850	0.2687				2.5382			
	←	P_{12}	0.270	−0.2046	1	0.2952	−16.0789		−0.0381		−0.9831	−1.1385	1.1528		0.0797	0.1068				0.0632			
		P_{15}	0.166	−0.0038		0.0002	0.0789		−0.0003		−0.0255	−0.0233	−0.0010		−0.0003	0.0002				0.0056			
	29.66	P_4	10.397	0.5277		1.1666	−87.2894		0.1252		−0.3642	0.0440	5.6786		0.5471	0.8681	1			0.5167			
→	34.65	P_5	4.395	−0.5789		−4.3421	263.1578	1	0.0526		4.7895	4.5526	−18.6053		−0.4474	−0.5263		1		−2.1842			
h	37.09	P_6	10.446	0.6832		2.5688	−154.5263		−0.0959		−2.7853	−2.4253	10.3930		0.2367	0.2954			1	2.5382			
		P_{17}	3.076	0.0010		1.7024	−111.0000		0.0428	1	−2.0291	−2.1683	8.3797		0.2107	0.2309				0.6460			
	37.22	P_8	1.500								1										1		
	35.04	P_9	0.800									1										1	
	31.92	P_{10}	0.600										1										1
	z_j-c_j	954.37		19.79		−16.80	784.21		1.51		56.06	95.41	−56.17		−3.44	−4.24				−3.85			

			P_0	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}	P_{15}	P_{16}	P_{17}	P_{18}	P_{19}	P_{20}	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
	3.46	P_1	0.281	0.1895	−2.5159	−0.4004	35.6900		−0.0340		1.1622	1.2279	−4.0716	1	0.3845					−0.0934			
	←	P_{15}	0.166	−0.0034	−0.0019	−0.0004	0.1010		−0.0357		−0.0236	−0.0211	−0.0046		−0.0002					0.0055			
→	23.63	P_3	2.566	−1.9157	9.3633	2.7640	−150.5515		−0.0003		−9.2051	−10.6601	18.2405		0.7463	1				0.5918			
	29.66	P_4	8.169	2.1907	−8.1283	1.2328	43.4044		0.1562		7.6388	9.2980	−10.1560		−0.1008		1			0.0030			
	34.65	P_5	3.045	−1.5871	4.9279	−2.8874	183.9225	1	0.0338		−0.0551	−1.0578	−9.0453		−0.5046			1		−1.8727			
i	37.09	P_6	9.688	1.2491	−2.7659	1.7523	−110.0534		−0.0854		−0.0661	6.7237	5.0048		0.0161				1	2.3634			
		P_{17}	2.484	0.4433	−2.1620	1.0642	−76.2526		0.0510	1	0.1067	0.2939	4.1680		0.0484					0.5094			
	37.22	P_8	1.500								1										1		
	35.04	P_9	0.800									1										1	
	31.92	P_{10}	0.600										1										1
	z_j-c_j	955.25		11.67	39.70	−5.08	335.57		1.36		16.84	50.21	21.17		−0.28					−1.34			
	3.46	P_1	0.563	0.1318	−2.5482	−0.4070	37.4052	1.6982	−0.0391		0.7614	0.8696	−4.1497	1	0.3879								
	←	P_{17}	0.547	0.7582	−1.9860	1.1012	−12.7500	−9.2618	−0.0787	1	2.2925	2.2482	4.5941		0.0669								
	23.63	P_3	0.780	−1.5498	9.5678	2.8070	−161.4191	−10.7600	−0.0034		−6.6648	−8.3997	18.7355		0.7248	1							
	29.66	P_4	8.178	2.1926	−8.1273	1.2328	43.4595	0.0545	0.1564		7.6517	9.3095	−10.1535		−0.1007		1						
	34.65	P_5	8.697	−2.7442	4.2509	3.0235	218.3070	34.0491	0.1359		−8.0907	−8.2422	−10.6116		0.0136			1					
	37.09	P_6	5.573	2.7112	−2.1493	1.9241	−153.4595	−42.9709	0.0434		10.0750	15.7906	6.9815		0.1041				1				
j →	37.84	P_7	3.018	−0.6182	−0.3455	−0.0727	18.3636	18.1818	−0.0545		−4.2909	−3.8364	−0.8364		−0.0364					1			
	37.22	P_8	1.500																		1		
	35.04	P_9	0.800																			1	
	31.92	P_{10}	0.600																				1
	z_j-c_j	969.29		10.84	39.24	−5.18	360.18	243.64	0.63		11.09	45.07	20.05		−0.32								
	3.46	P_1	0.246											1									
→	14.96	P_2	0.818												1								
	23.63	P_3	0.377													1							
	29.66	P_4	8.260														1						
	34.65	P_5	8.686															1					
k	37.09	P_6	5.488																1				
	37.84	P_7	3.048																	1			
	37.22	P_8	1.500																		1		
	35.04	P_9	0.800																			1	
	31.92	P_{10}	0.600																				1
	z_j-c_j	969.55		7.21	38.72	0.09	299.10	199.34	1.01	11.36	22.06	55.82	42.02										