

三軸織物複合材料の力学的特性に関する研究

吉田啓史郎

目次

第1章 序論.....	1
1.1 研究の背景.....	1
1.2 三軸織物の位置付け.....	2
1.3 従来の研究.....	3
1.3.1 二軸織物複合材料の解析法.....	3
1.3.2 三軸織物複合材料に関する解析的研究.....	5
1.3.3 三軸織物複合材料に関する実験的研究.....	7
1.4 本研究の目的と本論文の構成.....	9
第2章 三次元有限要素法による解析.....	17
2.1 緒言.....	17
2.2 均質化法.....	17
2.3 擾乱変位に基づく有限要素法定式化.....	26
2.4 擾乱変位に基づく有限要素法定式化における周期的境界条件の取扱い.....	28
2.5 全変位に基づく有限要素法定式化.....	30
2.6 全変位に基づく有限要素法定式化における周期境界条件の取扱い.....	31
2.7 結言.....	34
第3章 梁連結モデルによる解析.....	37
3.1 緒言.....	37
3.2 梁連結モデル.....	37
3.3 梁連結モデルへの均質化法の適用（擾乱変位に基づく方法）.....	38
3.4 梁連結モデルへの均質化法の適用（全変位に基づく方法）.....	40
3.5 結言.....	42
第4章 解析結果.....	45
4.1 緒言.....	45
4.2 解析対象.....	45
4.3 解析モデルの作成方法.....	46
4.3.1 三次元有限要素モデルの作成方法.....	46
4.3.2 三次元有限要素モデルの要素分割数に起因する解析誤差の評価.....	48
4.3.3 梁連結モデルの作成方法.....	48
4.4 等価な平板の剛性解析.....	52
4.4.1 三軸織物複合材料と等価な平板の剛性解析結果.....	52
4.4.2 他の材料との比較.....	54
4.4.3 引張-ねじりカップリング剛性に関する考察.....	54
4.4.4 織り構造が異なる場合の剛性解析結果.....	55

4.5 自由端を有する場合の剛性解析	56
4.5.1 三次元有限要素モデルによる解析	56
4.5.2 梁連結モデルによる解析	58
4.5.3 まとめ	59
4.6 織物複合材料中の繊維束の非線形引張挙動の解析	60
4.6.1 三次元有限要素モデルによる解析	60
4.6.2 梁モデルによる解析	61
4.7 織物複合材料の非線形引張挙動の解析	62
4.7.1 三次元有限要素モデルによる解析	62
4.7.2 梁連結モデルによる解析	65
4.8 結言	66
第5章 力学的特性の実験的評価	146
5.1 緒言	146
5.2 試験試料	146
5.3 引張試験方法	148
5.3.1 繊維束の引張試験	148
5.3.2 織物複合材料の引張試験	148
5.4 曲げ試験方法	150
5.4.1 三点曲げ試験	150
5.4.2 純曲げ試験	150
5.4.3 曲げ破断曲率評価試験	151
5.5 引張試験結果	151
5.5.1 繊維束の引張試験結果	151
5.5.2 織物複合材料の引張試験結果	152
5.6 曲げ試験結果	156
5.6.1 三点曲げ試験結果	156
5.6.2 純曲げ試験結果	156
5.6.3 曲げ破断曲率評価試験結果	157
5.7 結言	157
第6章 結論	196
Appendix A 面内周期的構造物におけるユニットセルに関する事項	199
Appendix B 均質平板の剛性に関する諸性質	204
Appendix C 剛性平均法	208
Appendix D 均質化法と古典積層理論	213
Appendix E 体積平均応力の算出	216
Appendix F 梁の剛性マトリックス	223

Appendix G 繊維束の材料定数の算出法	227
Appendix H 平板の諸特性の算出法	228
Appendix I 平板の剛性が等方性となる条件	231
Appendix J 熱膨張係数の解析	237
J.1 均質化法による等価な平板の熱膨張係数の算出法	237
J.2 有限要素法定式化	239
J.3 解析結果	240
J.4 自由端を有する場合の熱膨張係数の解析	240
参考文献	245
謝辞	251

図目次

図 1.1	三軸織物複合材料	12
図 1.2	テキスタイルの分類	13
図 1.3	二軸織物(ref. [1])	14
図 1.4	三軸織物(ref. [3])	14
図 1.5	三次元織物(ref. [4])	15
図 1.6	二次元組物(ref. [4])	15
図 1.7	三軸織物複合材料中の角度 θ の定義	16
図 2.1	面内周期的板状構造物	35
図 2.2	ユニットセル領域	35
図 2.3	$2a \times 2b$ の長方形ユニットセル	36
図 3.1	繊維束の梁モデル	43
図 3.2	梁連結モデル	44
図 4.1	三軸織物複合材料の幾何学的寸法	68
図 4.2	繊維束交差部の有限要素モデルの作成方法	71
図 4.3	試験試料 SK-802 の拡大写真($\times 5$)	72
図 4.4	空隙を有する三軸織物複合材料の幾何学的寸法	72
図 4.5	繊維束の三次元ソリッド有限要素モデルの断面の様子	72
図 4.6	2つの楕円柱の3次元ソリッド有限要素モデル	73
図 4.7	接触解析後のメッシュの様子	73
図 4.8	繊維束同士の接触領域	74
図 4.9	正六角形形状ユニットセル	75
図 4.10	要素分割パラメータ n_x, n_y, n_z	76
図 4.11	要素分割の様子 ($n_x = 1, n_y = 2$)	77
図 4.12	要素分割の様子 ($n_x = 6, n_y = 12$)	78
図 4.13	要素分割数が引張剛性値に及ぼす影響	79
図 4.14	要素分割数が曲げ剛性値に及ぼす影響	80
図 4.15	要素分割数がポアソン比に及ぼす影響	80
図 4.16	解析に用いた有限要素解析モデルの様子 (六角形ユニットセルモデル ($n_x = 4, n_y = 8$))	81
図 4.17	解析に用いた有限要素解析モデルの様子 (長方形ユニットセルモデル ($n_x = 4, n_y = 8$))	82
図 4.18	3Dsolid 有限要素解析モデルにおける繊維束断面図心上の節点	83
図 4.19	3Dsolid 有限要素解析モデルにおける繊維束断面図心上の節点の座標	83

図 4.20 繊維束 1 波長領域の梁モデル	84
図 4.21 梁モデルにおける繊維束の断面形状	84
図 4.22 梁連結モデルの改良方法	85
図 4.23 織り構造を逆にした三軸織物	88
図 4.24 (1/n,1/n,1)モデルにおける引張剛性 A_{11}	89
図 4.25 (1/n,1/n,1)モデルにおける曲げ剛性 D_{11}	90
図 4.26 三軸織物複合材料の幾何学的寸法とクリンプ率	90
図 4.27 ユニットセル(unit cell)	91
図 4.28 自由端を有する場合の剛性解析方法 (0 度方向負荷解析 幅方向 3unit モデル)	92
図 4.29 自由端を有する場合の剛性解析方法 (90 度方向負荷解析 幅方向 4unit モデル)	93
図 4.30 見掛けの引張剛性値の幅方向ユニットセル数に対する変化 (3Dsolid 有限要素解析結果)	94
図 4.31 見掛けの曲げ剛性値の幅方向ユニットセル数に対する変化 (3Dsolid 有限要素解析結果)	94
図 4.32 ユニットセルで引張および曲げ剛性を算出	95
図 4.33 0 度方向引張負荷時の幅方向の剛性の変化 (3Dsolid 有限要素解析結 果)	95
図 4.34 90 度方向引張負荷時の幅方向の剛性の変化 (3Dsolid 有限要素解析結 果)	96
図 4.35 0 度方向曲げ負荷時の幅方向の剛性の変化 (3Dsolid 有限要素解析結 果)	96
図 4.36 90 度方向曲げ負荷時の幅方向の剛性の変化 (3Dsolid 有限要素解析結 果)	97
図 4.37 自由縁近傍領域	97
図 4.38 見掛けの引張剛性値の幅方向ユニットセル数に対する変化 (梁連結モ デルによる解析結果)	98
図 4.39 見掛けの曲げ剛性値の幅方向ユニットセル数に対する変化 (梁連結モ デルによる解析結果)	98
図 4.40 見掛けの引張剛性値の幅方向ユニットセル数に対する変化 (改良梁連 結モデルによる解析結果)	99
図 4.41 見掛けの曲げ剛性値の幅方向ユニットセル数に対する変化 (改良梁連 結モデルによる解析結果)	99
図 4.42 0 度方向引張負荷時の幅方向の剛性の変化 (梁連結モデルおよび改良 梁連結モデルによる解析結果)	100

図 4.43	90 度方向引張負荷時の幅方向の剛性の変化（梁連結モデルおよび改良梁連結モデルによる解析結果）	100
図 4.44	0 度方向曲げ負荷時の幅方向の剛性の変化（梁連結モデルおよび改良梁連結モデルによる解析結果）	101
図 4.45	90 度方向曲げ負荷時の幅方向の剛性の変化（梁連結モデルおよび改良梁連結モデルによる解析結果）	101
図 4.46	幅方向ユニットセル数による引張剛性の減少率	102
図 4.47	幅方向ユニットセル数による曲げ剛性の減少率	102
図 4.48	繊維束の一波長領域のモデル化	103
図 4.49	繊維束の 3Dsolid 有限要素解析モデル（±60 度繊維束を含む場合）	103
図 4.50	繊維束の 3Dsolid 有限要素解析モデル（±60 度繊維束を含まない場合）	104
図 4.51	繊維束の引張解析結果(荷重 vs.ひずみ曲線)	105
図 4.52	繊維束の引張解析結果(接線剛性 vs.ひずみ曲線)	105
図 4.53	引張負荷(ひずみ 5000 $\mu\epsilon$)時の繊維束の面外変位（±60 度繊維束を含む場合）	106
図 4.54	引張負荷(ひずみ 5000 $\mu\epsilon$)時の繊維束の面外変位（±60 度繊維束を含まない場合）	106
図 4.55	繊維束断面図心上の節点	107
図 4.56	引張負荷に伴う繊維束の屈曲形状の変化（3Dsolid 有限要素解析モデルによる比較）	107
図 4.57	引張負荷に伴う繊維束の屈曲形状の変化（3Dsolid 有限要素解析モデルと梁モデルの比較）	108
図 4.58	引張負荷に伴う繊維束の屈曲形状の変化（3Dsolid 有限要素解析モデルと改良梁モデルの比較）	108
図 4.59	(1/2,1/2,1)モデルの繊維束の引張解析結果（合応力 vs.ひずみ曲線）	109
図 4.60	(1/2,1/2,1)モデルの繊維束の引張解析結果（接線剛性 vs.ひずみ曲線）	109
図 4.61	(1/2,1/2,1)モデルの繊維束の屈曲形状の変化(3Dsolid 有限要素解析モデルによる比較)	110
図 4.62	(1/2,1/2,1)モデルの繊維束の屈曲形状の変化(3Dsolid 有限要素解析モデルと梁モデルの比較)	110
図 4.63	(1/2,1/2,1)モデルの繊維束の屈曲形状の変化(3Dsolid 有限要素解析モデルと改良梁モデルの比較)	111
図 4.64	0 度および 90 度方向一軸引張解析結果（合応力 vs.ひずみ曲線）	112
図 4.65	0 度および 90 度方向一軸引張解析結果（接線剛性 vs.ひずみ曲線）	112
図 4.66	0 度および 90 度方向一軸引張解析結果（負荷に垂直方向ひずみ vs.	

負荷方向ひずみ曲線)	113
図 4.67 一軸引張解析結果 (負荷に伴うポアソン比の変化)	113
図 4.68 0 度方向一軸引張負荷(ひずみ $\varepsilon_x = 10000\mu\varepsilon$)時の面外変位	114
図 4.69 繊維束の屈曲形状算出のための節点配置	115
図 4.70 0 度方向一軸引張負荷時の 0 度繊維束の屈曲形状変化	116
図 4.71 0 度方向一軸引張負荷時の 60 度繊維束の屈曲形状変化	116
図 4.72 0 度方向一軸引張負荷時の-60 度繊維束の屈曲形状変化	117
図 4.73 90 度方向一軸引張負荷(ひずみ $\varepsilon_y = 9000\mu\varepsilon$)時の面外変位	118
図 4.74 90 度方向一軸引張負荷時の 0 度繊維束の屈曲形状変化	119
図 4.75 90 度方向一軸引張負荷時の 60 度繊維束の屈曲形状変化	119
図 4.76 90 度方向一軸引張負荷時の-60 度繊維束の屈曲形状変化	120
図 4.77 二軸引張解析結果	121
図 4.78 二軸引張負荷ひずみ($\varepsilon_x = \varepsilon_y = 10000\mu\varepsilon$)時の面外変位	122
図 4.79 二軸引張負荷時の 0 度繊維束の屈曲形状変化	123
図 4.80 二軸引張負荷時の 60 度繊維束の屈曲形状変化	123
図 4.81 横方向ひずみ拘束時の引張解析結果	124
図 4.82 90 度方向ひずみ拘束 0 度方向引張負荷(ひずみ $\varepsilon_x = 10000\mu\varepsilon$)時の面外 変位	125
図 4.83 0 度方向引張負荷時の 0 度繊維束の屈曲形状変化 (90 度方向拘束の 影響)	126
図 4.84 0 度方向引張負荷時の 60 度繊維束の屈曲形状変化 (90 度方向拘束の 影響)	126
図 4.85 0 度方向ひずみ拘束 90 度方向引張負荷(ひずみ $\varepsilon_y = 10000\mu\varepsilon$)時の面外 変位	127
図 4.86 90 度方向引張負荷時の 0 度繊維束の屈曲形状変化 (0 度方向拘束の 影響)	128
図 4.87 90 度方向引張負荷時の 60 度繊維束の屈曲形状変化 (0 度方向拘束の 影響)	128
図 4.88 幅方向の拘束条件が 0 度方向引張剛性増加率に及ぼす影響	129
図 4.89 一軸引張解析結果 (合応力 vs.ひずみ曲線, 梁連結モデルと 3Dsolid 有 限要素モデルの比較)	130
図 4.90 一軸引張解析結果 (接線剛性 vs.ひずみ曲線, 梁連結モデルと 3Dsolid 有限要素モデルの比較)	130
図 4.91 一軸引張解析結果 (負荷に垂直方向ひずみ vs.負荷方向ひずみ曲線, 梁 連結モデルと 3Dsolid 有限要素モデルの比較)	131
図 4.92 一軸引張解析結果 (負荷に伴うポアソン比の変化, 梁連結モデルと	

3Dsolid 有限要素モデルの比較)	131
図 4.93 繊維束の屈曲形状算出のための節点配置 (梁連結モデル)	132
図 4.94 0 度方向引張負荷(ひずみ $\varepsilon_x = 5000\mu\varepsilon$)時の 0 度繊維束の屈曲形状変化 (梁連結モデルと 3Dsolid 有限要素モデルの比較)	132
図 4.95 0 度方向引張負荷(ひずみ $\varepsilon_x = 5000\mu\varepsilon$)時の 60 度繊維束の屈曲形状変化 (梁連結モデルと 3Dsolid 有限要素モデルの比較)	133
図 4.96 90 度方向引張負荷(ひずみ $\varepsilon_y = 5000\mu\varepsilon$)時の 0 度繊維束の屈曲形状変化 (梁連結モデルと 3Dsolid 有限要素モデルの比較)	133
図 4.97 90 度方向引張負荷(ひずみ $\varepsilon_y = 5000\mu\varepsilon$)時の 60 度繊維束の屈曲形状変化 (梁連結モデルと 3Dsolid 有限要素モデルの比較)	134
図 4.98 二軸引張解析結果 (梁連結モデルと 3Dsolid 有限要素モデルの比較)	134
図 4.99 二軸引張負荷(ひずみ $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 10000\mu\varepsilon$)時の 0 度繊維束の屈曲形状変化 (梁連結モデルと 3Dsolid 有限要素モデルの比較)	135
図 4.100 二軸引張負荷(ひずみ $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 10000\mu\varepsilon$)時の 60 度繊維束の屈曲形状変化 (梁連結モデルと 3Dsolid 有限要素モデルの比較)	135
図 4.101 横方向ひずみ拘束時の引張解析結果 (梁連結モデルと 3Dsolid 有限要素モデルの比較)	136
図 4.102 改良梁連結モデルによる横方向ひずみ拘束時の引張解析結果 (改良梁連結モデルと 3Dsolid 有限要素モデルの比較)	136
図 4.103 90 度方向ひずみ拘束 0 度方向引張負荷(ひずみ $\varepsilon_x = 10000\mu\varepsilon$)時の 0 度繊維束の屈曲形状変化 (梁連結モデルと 3Dsolid 有限要素モデルの比較)	137
図 4.104 0 度方向ひずみ拘束 90 度方向引張負荷(ひずみ $\varepsilon_y = 10000\mu\varepsilon$)時の 60 度繊維束の屈曲形状変化 (梁連結モデルと 3Dsolid 有限要素モデルの比較)	137
図 4.105 (1/2,1/2,1)モデルの一軸引張解析結果 (合応力 vs.ひずみ曲線, 梁連結モデルと 3Dsolid 有限要素モデルの比較)	138
図 4.106 (1/2,1/2,1)モデルの梁連結モデルによる一軸引張解析結果(接線剛性 vs.ひずみ曲線, 梁連結モデルと 3Dsolid 有限要素モデルの比較)	138
図 4.107 (1/2,1/2,1)モデルの一軸引張解析結果 (負荷に垂直方向ひずみ vs.負荷方向ひずみ曲線, 梁連結モデルと 3Dsolid 有限要素モデルの比較)	139
図 4.108 (1/2,1/2,1)モデルの一軸引張解析結果 (負荷に伴うポアソン比の変化, 梁連結モデルと 3Dsolid 有限要素モデルの比較)	139
図 4.109 (1/2,1/2,1)モデルの 0 度方向引張負荷(ひずみ $\varepsilon_x = 10000\mu\varepsilon$)時の 0 度繊維束の屈曲形状変化 (梁連結モデルと 3Dsolid 有限要素モデルの比較)	140

図 4.110 (1/2,1/2,1)モデルの 0 度方向引張負荷(ひずみ $\varepsilon_x = 10000\mu\varepsilon$)時の 60 度 繊維束の屈曲形状変化 (梁連結モデルと 3Dsolid 有限要素モデルの比 較)	140
図 4.111 (1/2,1/2,1)モデルの 90 度方向引張負荷(ひずみ $\varepsilon_y = 10000\mu\varepsilon$)時の 0 度繊 維束の屈曲形状変化(梁連結モデルと 3Dsolid 有限要素モデルの比較)	141
図 4.112 (1/2,1/2,1)モデルの 90 度方向引張負荷(ひずみ $\varepsilon_y = 10000\mu\varepsilon$)時の 60 度 繊維束の屈曲形状変化 (梁連結モデルと 3Dsolid 有限要素モデルの比 較)	141
図 4.113 (1/2,1/2,1)モデルの二軸引張解析結果 (梁連結モデルと 3Dsolid 有限要 素モデルの比較)	142
図 4.114 (1/2,1/2,1)モデルの二軸引張負荷(ひずみ $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 10000\mu\varepsilon$)時の 0 度繊 維束の屈曲形状変化(梁連結モデルと 3Dsolid 有限要素モデルの比較)	142
図 4.115 (1/2,1/2,1)モデルの二軸引張負荷(ひずみ $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 10000\mu\varepsilon$)時の 60 度 繊維束の屈曲形状変化 (梁連結モデルと 3Dsolid 有限要素モデルの比 較)	143
図 4.116 (1/2,1/2,1)モデルの横方向ひずみ拘束時の引張解析結果 (梁連結モデ ルと 3Dsolid 有限要素モデルの比較)	144
図 4.117 (1/2,1/2,1)モデルの横方向ひずみ拘束時の引張解析結果 (改良梁連結 モデルと 3Dsolid 有限要素モデルの比較)	144
図 4.118 (1/2,1/2,1)モデルの 90 度方向ひずみ拘束 0 度方向引張負荷(ひずみ $\varepsilon_x = 10000\mu\varepsilon$)時の 0 度繊維束の屈曲形状変化 (梁連結モデルと 3Dsolid 有限要素モデルの比較)	145
図 4.119 (1/2,1/2,1)モデルの 0 度方向ひずみ拘束 90 度方向引張負荷(ひずみ $\varepsilon_y = 10000\mu\varepsilon$)時の 60 度繊維束の屈曲形状変化 (梁連結モデルと 3Dsolid 有限要素モデルの比較)	145
図 5.1 三軸織物複合材料の幾何学的寸法とクリンプ率	160
図 5.2 繊維束屈曲形状および断面形状の写真	161
図 5.3 試験試料 SK-802 の空隙部の様子($\times 5$).....	162
図 5.4 試験試料 SK-802 の空隙部を拡大した様子($\times 10$).....	162
図 5.5 試験試料 SA-8005 の空隙部の様子($\times 10$).....	163
図 5.6 試験試料 SA-8005 の空隙部を拡大した様子($\times 20$).....	163
図 5.7 繊維束引張試験片固定台紙	164
図 5.8 繊維束引張試験片作成方法	164
図 5.9 繊維束引張試験片(SK-802).....	164

図 5.10 繊維束引張試験の様子	165
図 5.11 引張試験片寸法	166
図 5.12 引張試験片(SK-802).....	166
図 5.13 幅方向寸法が異なる試験片におけるユニットセル	166
図 5.14 引張試験全景	167
図 5.15 繊維束三点曲げ試験全景	167
図 5.16 三点曲げ試験片(SK-802).....	168
図 5.17 三点曲げ試験圧子および支点先端寸法	168
図 5.18 三点曲げ試験全景	169
図 5.19 純曲げ試験装置概略図	170
図 5.20 純曲げ試験の様子	171
図 5.21 曲げ破断曲率評価試験法概略図	172
図 5.22 曲げ破断曲率評価試験の様子	172
図 5.23 繊維束の引張荷重 vs. ひずみ曲線(SK-802).....	173
図 5.24 繊維束の接線剛性 vs. ひずみ(SK-802).....	173
図 5.25 繊維束の引張荷重 vs. ひずみ曲線(SA-8005).....	174
図 5.26 繊維束の接線剛性 vs. ひずみ(SA-8005).....	174
図 5.27 引張試験結果 合応力 vs. ひずみ曲線(SK-802).....	175
図 5.28 引張試験結果 接線剛性 vs. ひずみ曲線(SK-802).....	175
図 5.29 引張試験結果 負荷方向ひずみ vs. 負荷方向に垂直な方向のひずみ (SK-802).....	176
図 5.30 引張試験結果 荷重 vs. ひずみ曲線(SA-8005).....	177
図 5.31 引張試験結果 接線剛性 vs. ひずみ曲線(SA-8005).....	177
図 5.32 引張試験結果(伸びひずみ 0~1000 $\mu\epsilon$ における合応力 vs. ひずみ曲 線)(SK-802).....	178
図 5.33 引張試験結果(伸びひずみ 0~1000 $\mu\epsilon$ における合応力 vs. ひずみ曲 線)(SA-8005).....	179
図 5.34 試験片幅方向寸法を変化させた時の引張試験結果 (SK-802)	180
図 5.35 試験片幅方向ユニット数を変化させた時の見掛けの引張剛性の変化 (SK-802)	180
図 5.36 引張試験結果 荷重 vs. ひずみ曲線(SK-802).....	181
図 5.37 引張試験結果 接線剛性 vs. ひずみ曲線 (SK-802).....	181
図 5.38 引張試験結果 荷重 vs. ひずみ曲線 (SA-8005).....	182
図 5.39 引張試験結果 接線剛性 vs. ひずみ曲線 (SA-8005).....	182
図 5.40 除荷がある場合の 90 度方向引張試験結果 (合応力 vs. ひずみ曲線, SK-802)	183

図 5.41 除荷がある場合の 90 度方向引張試験結果 (合応力 vs.ひずみ曲線, 最初の 3 サイクル, SK-802)	184
図 5.42 除荷がある場合の 90 度方向引張試験結果 (合応力 vs.ひずみ曲線, SA-8005)	185
図 5.43 除荷がある場合の 90 度方向引張試験結果 (合応力 vs.ひずみ曲線, 最初の 2 サイクル, SA-8005)	185
図 5.44 破断後の引張試験片の様子(SK-820).....	186
図 5.45 三点曲げ試験結果 荷重 vs.たわみ曲線 (0deg 方向試験)	188
図 5.46 三点曲げ試験結果 荷重 vs.たわみ曲線 (90deg 方向試験)	188
図 5.47 三点曲げ試験結果と自由端を有する場合の解析結果との比較	189
図 5.48 純曲げ試験結果 (モーメント vs.曲率曲線)	190
図 5.49 0 度方向純曲げ試験除荷時の挙動	190
図 5.50 90 度方向純曲げ試験除荷時の挙動	191
図 5.51 0 度方向純曲げ試験曲率 0.066(1/mm)時の変形の様子	191
図 5.52 純曲げ試験結果と自由端を有する場合の解析結果との比較	192
図 5.53 破断後の試験片の様子	194
図 5.54 0 度方向試験片破断後の様子	195
図 5.55 90 度方向試験片破断後の様子	195

表目次

表 4.1 炭素繊維 T300 の特性値(ref. [80]).....	68
表 4.2 Epoxy 樹脂 NM35 の特性値	68
表 4.3 三軸織物複合材料 SK-802 の特性値.....	68
表 4.4 解析に使用した繊維束の材料特性値	69
表 4.5 等価剛性算出における要素分割の影響	79
表 4.6 三軸織物複合材料 (SK-802) の剛性 (3Dsolid 有限要素解析モデル)	86
表 4.7 三軸織物複合材料 (SK-802) の剛性 (梁連結モデル)	86
表 4.8 三軸織物複合材料 (SK-802) の剛性 (改良梁連結モデル)	86
表 4.9 剛性平均法を用いた三軸織物複合材料 (SK-802) の剛性 (3Dsolid 有限 要素解析モデル)	87
表 4.10 剛性平均法を用いた三軸織物複合材料 (SK-802) の剛性(梁連結モデ ル)	87
表 4.11 剛性平均法を用いた三軸織物複合材料 (SK-802) の剛性(改良梁連結 モデル)	87
表 4.12 三軸織物複合材料 (SK-802) と等重量の擬似等方積層板の剛性 (積層 構成 [-60/0/60])	88
表 4.13 三軸織物複合材料と[-60/0/60]積層板の剛性に関する性質の比較	88
表 4.14 (1/n,1/n,1)モデルにおける剛性解析結果	89
表 5.1 試験試料の構成材料	159
表 5.2 炭素繊維材料特性値(ref. [81],[82]).....	159
表 5.3 試験試料の幾何学的寸法および重量特性	160
表 5.4 初期引張剛性値(SK-802).....	178
表 5.5 初期引張剛性値(SA-8005).....	179
表 5.6 破断ひずみおよび破断荷重値(SK-802).....	187
表 5.7 破断ひずみおよび破断荷重値(SA-8005).....	187
表 5.8 三点曲げ試験による曲げ剛性測定値	189
表 5.9 純曲げ試験による曲げ剛性測定値	192
表 5.10 最小破断曲率半径測定結果	193

第1章 序論

1.1 研究の背景

宇宙構造物は一般にミッション毎に設計要求が異なり、仕様の統一やユニット化等によるコストの削減が困難であるため、個々の構造物の研究開発にコストを割かざるを得ないのが現状である。このような状況を変えるためには、使用する部材レベルでの仕様の統一が効果的であり、宇宙構造に適した材料を複数種類用意し、その力学的特性や信頼性等を含めて、適宜利用できる環境を整えておくことが望ましい。

一般に宇宙構造物の構成材料には、輸送系の搭載能力の制限から高比剛性、高比強度であることが要求される。また宇宙での過酷な温度変化に対し熱変形を生じず高い寸法安定性を保持するよう、低熱膨張率が要求される。これらの要求を満足する材料として、繊維強化複合材料が挙げられる。なかでも繊維材料として炭素繊維を使用することにより、高比剛性、高比強度と共に、その繊維方向の負の熱膨張率を生かして熱膨張率がゼロの材料を設計することも可能である。

また、宇宙構造物を地上から輸送する際、できるだけ収納効率を高めることが打上コスト削減につながる。このような収納展開型宇宙構造物では、収納性と展開の容易性・信頼性が要求されるが、既に実用化されている伸展トラスなどは、その構成材料として可撓性に優れ高強度である繊維強化複合材料を用いていることが、実用化に極めて重要な役割を果たしている。伸展トラスには棒状の構成材料が用いられているが、これを発展させて、板状の材料で構成される展開構造物を考えると、その構成材料としてはやはり繊維強化複合材料が候補となる。しかし、従来の一方向繊維強化複合材料や、繊維束を面内に二方向に配向させて織られた二軸織物を強化相とする複合材料を用いる場合、一層のみでは巨視的な面内剛性が異方性となるため、面内剛性が等方性を有する構造物を得るには、これを複数層積層する必要がある、その結果重量増、成形工程の複雑化を招くことになり、加えて面外剛性過多となり可撓性が損なわれる恐れがある。

そこで、板状展開宇宙構造物の構成材料として繊維束を面内に三方向に120度間隔に配向させて織られた三軸織物を強化相とする三軸織物複合材料(図 1.1)が注目される。当該材料は、その幾何学的形態から一層のみで巨視的に等方的な剛性を持つことが期待され、かつ可撓性に優れた板状材料であり、展開構造の主要構成部材として使える可能性が高い。

これらの点から、三軸織物複合材料の熱弾性的特性を詳細に把握し、その基本的特性

を明らかにしておくことは、これからの宇宙用展開構造に本材料を使う上で極めて有用であると思われる。なお、三軸織物複合材料の力学的特性に関する研究は国内外で進められているが、引張挙動が解明されつつあるのが現状であり、面外の力学的特性（曲げ特性）および熱変形特性に関する研究については研究途上にある。

1.2 三軸織物の位置付け

本研究では三軸織物を強化相とする複合材料を対象とするが、現在ではその他にも糸あるいは繊維束を互いに交絡させた様々なテキスタイル(textile)が複合材料の強化相に用いられている。そこでここでは複合材料の強化相として用いられるテキスタイルの代表的な形態について分類し、本研究で取り上げる三軸織物の位置付けを明確にする。

複合材料の強化相として用いられるテキスタイルの代表的な形態を図 1.2 に示すように分類する。まずテキスタイルの代表的な形態として、織物(weave)、編物(knit)および組物(braid)が挙げられる。織物は二系統以上の繊維束を互いに絡ませたものであり、編物は繊維束で形成するループを互いに連結させたものである。組物は織物と同様二系統以上の繊維束を互いに絡ませて形成されるが、全ての繊維束が長手方向に対して斜めに(あるいは長手方向に沿って)配向し、切断されることなく連続しているものである。

またテキスタイルが負担することのできる(線形)独立な荷重方向が二方向か三方向かにより、それぞれ二次元テキスタイル(2D textile)および三次元テキスタイル(3D textile)と定義する。なお、独立な方向によってテキスタイルの次元を定義するので、面内の三方向に荷重を負担することができる場合でも、二次元テキスタイルとなる。

織物(weave)は、上で定義された次元に応じて二次元織物と三次元織物に分類されるが、二次元織物の代表的な形態としては、面内に繊維束を直交二方向に配向させて織られた二軸織物(biaxial weave)および繊維束を 120 間隔で三方向に配向させて織られた三軸織物(triaxial weave)が挙げられる。

二軸織物は直交二方向に配向した繊維束に交絡により構成されるが、一つの方向の繊維束に注目し、その繊維束が次の何本目の他方向の繊維束と交絡するかという繰返し数(n_g)により平織(plain weave)、綾織(twill weave)、縐子織(satin weave)に分類される[1](図 1.3)。 $n_g = 2$ の場合を平織と呼び、二方向の繊維束が一本ずつ上下して交絡する構造をしている(図 1.3(a))。また $n_g = 3$ の場合および $n_g \geq 4$ でかつ織目が連続して形成されている場合を綾織と呼ぶ。図 1.3(b)に $n_g = 3$ の場合の綾織を示す。そして $n_g \geq 4$ の場合でかつ織目が連続して形成されていない場合を縐子織と呼ぶ。図 1.3(c),(d)にそれぞれ $n_g = 4, 8$ の場合の縐子織を示す。

代表的な三軸織物としてはベーシック三軸織物(basic weave)(図 1.4(a))とバイプレーン三軸織物(biplain weave)(図 1.4(b))が挙げられる[2,3]。ベーシック三軸織物は二軸織物

の平織物と同様、三方向に配向しているそれぞれの繊維束が他の繊維束に対して一本浮いて一本沈む構造となっている。よって繊維束の重なり状態は最大で繊維束が二本分となっている。バイプレーン三軸織物は、ベーシック三軸織物を二つ織り重ねた構造をしており、織り密度が増し複合材料にした場合ベーシック三軸織物に比べて繊維の体積含有率を上げられる。ただし、繊維束の重なり状態に注目すると、繊維束が三本分のところがあり、繊維束の面外方向への屈曲（クリンプ）が大きくなる。

また三次元織物は、互いに織られていない真直な縦繊維束あるいは横繊維束からなる層を数層重ねて、これを縦繊維束を用いて厚さ方向に結合した織り構造を有しており、縦繊維束が面内に配向した繊維束の両方向に垂直である場合とそうでない場合で、直交三次元織物 (Orthogonal interlock weave) (図 1.5(a))および斜交三次元織物 (Angle interlock weave) (図 1.5(b))に分類される[4]。

組物はその次元により二次元組物と三次元組物に分類される。二次元組物の代表的な織り構造として二次元バイアス組物(図 1.6(a))と二次元三軸組物(図 1.6(b))が挙げられる[4]。二次元バイアス編物は、円筒状のマンドレルに二系統の繊維束を互いに交絡させながら巻きつけて円筒状組物を製作し、これを切断して平面状に展開することにより得られる。またマンドレルの軸方向に沿って真直な繊維束を入れ、これを二次元バイアス組物に組み入れたものが二次元三軸組物である。

なお本論文では“ベーシック三軸織物“を強化相とする複合材料を研究対象とする。これ以降”ベーシック三軸織物“およびこれを強化相とする複合材料をそれぞれ”三軸織物“および”三軸織物複合材料“と呼ぶ。ただし本論文では、図 1.1 に示すように繊維束の間を樹脂で埋めないメッシュ状の三軸織物複合材料を研究対象としている。ところで上述の分類から明らかであるが、面内に三系統の繊維束を用いて織られた二次元織物を“三軸織物”と呼んでおり、同じく三系統の繊維束を用いて製作される三次元織物とは異なる。また面内に三系統の繊維束が配向している二次元三軸組物と混同される場合があるが、二次元三軸組物では三系統の繊維束の内一系統の繊維束は真直な形状をしており、本研究で対象とする三軸織物とは異なる。

1.3 従来の研究

1.3.1 二軸織物複合材料の解析法

織物複合材料の解析法の研究は、従来広く実用に供されている二軸織物を強化相とする複合材料を対象として発展して来た。そこで二軸織物複合材料の力学的特性に関する研究について概観することにする。二次元織物複合材料も積層した形態で用いられる場合が多いが、ここでは二軸織物複合材料一層のみの力学的特性に関する解析法について述べることにする。この織物複合材料の力学的特性を解析する際には、通常繊維束は均

質体と見なして、さらに言えば一方向材と見なして解析がなされる。そして織物複合材料をこの繊維束と母材の複合材料と見なして、これと等価な剛性を算出する手法が採られる。構成材料の材料特性、幾何学的形状などの諸特性を用いてこれと等価な均質弾性体の剛性を解析的に予測する様々な手法が提案されているが、その代表的な手法を以下に挙げる。

二軸織物複合材料の等価剛性の解析法として最初に提案されたのは、Ishikawa[5]およびIshikawa and Chou[1,6,7]による方法である。まず繊維束が交差している各部分をクロスプライの積層板とみなしその剛性を古典積層理論を用いて見積もり、織物複合材料をクロスプライの積層板をモザイク状に並べてモデル化したモザイクモデルを提案した[5,6]。またモザイクモデルでは考慮されていなかった繊維束の連続性を一次的に考慮したクリンプモデル[1]、さらにはこれを二次元状に組み合わせたブリッジングモデルへと発展させている[7]（なおこれらの解析法はChou and Ishikawa[8]にまとめられている）。これらのモデルでは一様応力、一様ひずみあるいはその組み合わせにより等価剛性を評価している。ただし、繊維束の一つに注目してその方向の繊維束の連続性のみ考慮したモデルを用いており、これと垂直方向の繊維束の連続性が考慮されていない点が問題であった。Naik and Shembekar[9,10]およびShembekar and Naik[11]は垂直方向の繊維束の連続性を考慮した二次元モデルを提案した。その際にも一様応力や一様ひずみの仮定を用いて等価剛性を算出している。

またSheng and Hoa[12]は二軸織物複合材料の代表体積に対して剛性平均法およびコンプライアンス平均法を用いてこれと等価な三次元連続体の剛性マトリックスの上下界を求めている。ただしその際にも一様応力や一様ひずみの仮定を用いて等価剛性を算出するため、内部の微視的な応力やひずみの状態を評価することはできないという問題がある。

ところで、織物複合材料に限らず一般に周期的な不均質性を有する物体の巨視的弾性定数を算出する場合に、その一周期領域あるいは数周期領域を取り出して、この代表領域の挙動を解析することにより巨視的な均質体の弾性定数を求める方法を代表体積法と呼ぶ。上述のIshikawa[5]、Ishikawa and Chou[1,6,7]、Naik and Shembekar[9,10]およびSheng and Hoa[12]の解析法は代表体積法の一種であると見なすことができる。しかし、代表体積法においては一般に、解析領域の境界における境界条件が明確でないという問題点がある。代表領域の解析においてその境界条件として考慮されるべき周期性が考慮されていない場合、代表領域で得られた剛性がもとの周期性を有する物質の剛性と等しくなる保証はない。

上述の解析手法の問題点を克服する解析法として均質化法[13-16]が注目される。均質化法では周期的な不均質性を有する物体から「ユニットセル」と呼ばれる一周期領域を取り出し、その境界に周期境界条件を考慮することにより等価な均質連続体の剛性を評価する。この様にユニットセルの境界条件として周期性が明確に導入されている点が肝

要である。また均質化法によれば等価な連続体の剛性解析のみならず、内部の局所的な応力やひずみの情報を得ることが可能である。現在では三次元の周期性を有する構造物について等価な三次元連続体の剛性を算出する均質化法[13-16]のみならず、一次元の周期性を有する構造物について等価な梁の剛性を算出する均質化法[17-21]および二次元の周期性を有する構造物について等価な平板の剛性を算出する均質化法[22-33]が提案されている。また均質化法に有限要素法を適用する手法に関する研究も行われている[34,35]。

均質化法を二軸織物複合材料に適用した例としては、高野、座古[36]および高野ら[37,38]の研究が挙げられる。また Sankar and Marrey[39], Marrey and Sankar[40]および Zhu et al.[41]は二軸織物複合材料を対象にして周期性を考慮した有限要素解析を実施している。なお、参考文献[39-41]の中では明確に均質化法を適用したとは述べられていないがその解析手法は均質化法と等価である。

1.3.2 三軸織物複合材料に関する解析的研究

上述のように織物複合材料の解析法の研究は二軸織物を対象として発展し、その力学的挙動の把握に貢献している。三軸織物複合材料の力学的挙動の解析においても、これらの解析法を基礎とするものが多い。なお、三軸織物の力学的挙動に関する解析的な研究として[42-46]も挙げられるが、これらは基布の状態の（樹脂を含まない）三軸織物を対象としているため参考文献に挙げるにとどめることにする。

本題に入る前に、三軸織物複合材料では剛性とその面内に等方性となることが期待されてきたため、剛性の解析においても面内で異なる方向についての解析が実施されてきた。そこでまず三軸織物複合材料の面内の方向を定義する。図 1.7 に示すように三軸織物を構成する繊維束の1つに注目してそれに沿った方向を0度と定義し、反時計回りに角度 θ を取ることにする。

三軸織物複合材料の力学的特性に関して、構造材料としての要求から面内の引張特性に関して重点的に研究が進められてきた。Fujita et al.[2], 前川ら[47]および藤田ら[48]は、繊維束を梁でモデル化し、さらに繊維束が交差する点においてこれを連結した解析モデルを用いて、0度方向と90度方向の二方向につき引張剛性の解析を実施した。この解析モデルを本論文では「梁連結モデル」と呼ぶ。なお、参考文献[2], [47]および[48]では繊維束交差部において、繊維束同士を接着している樹脂も梁でモデル化し、これを用いて繊維束をモデル化した梁同士を連結する方法を用いている。なお Fujita et al.[2]は90度方向の剛性が0度方向の剛性に比べて4%程度低い解析結果を示し、これらは同値と見なすことができると判断し、当材料は引張剛性に関し等方性の性質を有していると述べている。

また Dano et al.[49]は、Fujita et al.[2]と同様な梁連結モデルを用いて引張挙動の解析を実施した。Dano et al.[49]は90度方向の剛性が0度方向の剛性に比べて約6%低い解析結

果を示している。Dano et al.[49]はこの差を有意な差と捉え、また後述する実験結果も考慮に入れて、三軸織物複合材の剛性は等方性を有していないと述べている。また Dano et al.[49]は短冊型引張試験片を梁連結モデルでモデル化しこれに引張負荷を課すと面外に振れる変形をすることを示し、三軸織物複合材料が引張ねじりカップリングを有する可能性を示唆している。

なお、藤田ら[48]、Fujita et al.[2]、前川ら[47]および Dano et al.[49]の研究に用いられた梁連結モデルでは梁の特性、中でも繊維束交点部の樹脂をモデル化する梁の特性の決定法に関して物理的な根拠が希薄であるという問題がある。(実際 Dano et al.[49]ではその特性を解析パラメータとして取り扱っている。)

D'amato[50]は繊維束を構成する繊維および樹脂をそれぞれトラス要素、三次元ソリッド要素でモデル化し、これらを組み合わせた有限要素解析モデルを作成し、矩形型の解析領域をについて0度方向にのみ引張解析を実施し引張剛性を算出した。そして解析に用いる解析領域の寸法を変化させた時に、算出される見かけの剛性が変化することを示した。また D'amato[51]は非線形引張挙動の解析を実施した。まず三軸織物複合材料を構成する繊維束一本につき幾何学的非線形性を考慮して引張挙動解析を実施した。解析法としては繊維束を単純に三次元の要素に分割した有限要素解析法を用いている。幾何学的非線形性を導入したのは、織物複合材料中の繊維束は互いに織られていることにより無負荷状態で面外に屈曲形状を有しているが、負荷に伴いうねりが小さくなり繊維束が真直な形状に近づく形状の変化を考慮するためである。解析結果は、負荷に伴い屈曲形状が真直に近づき、それに応じて見かけの引張剛性が増加することを示している。次に0度方向および90度方向に非線形引張挙動の解析を実施したが、その解析においては解析コストを考慮して三次元有限要素法は用いず、梁連結モデルを用いて幾何学的非線形性を考慮した解析を実施している。その結果0度方向および90度方向共に見かけの剛性が増加する非線形挙動を示し、特に0度方向に剛性増加が著しい結果を示している。D'amato[52]は、D'amato[51]とは構成材料が異なる三軸織物複合材料の非線形引張挙動につき解析を実施した。その際幾何学的非線形性のみを考慮すると、実験より得られる非線形挙動を捉えることができないため、材料非線形性をも考慮した解析を実施している。ただし、解析結果が実験結果に合致するように材料非線形挙動を決定する手法を採っており、0度方向と90度方向の引張挙動の解析に用いた繊維束材料の材料非線形挙動が異なるという点で矛盾を含む解析になっている。

また Hoa and Sheng[53]は二軸織物複合材料を対象とする Sheng and Hoa[12]の手法を三軸織物複合材料に適用し、三軸織物複合材料の代表体積に対して剛性平均法およびコンプライアンス平均法を用いてこれと等価な三次元の剛性マトリックスの上下界を求めている。ただし、1.3.1項でも述べたが剛性平均法などの平均法は一様応力あるいは一様ひずみ状態を仮定するものであり強度予測に必要な応力を算出することができない。

上述の梁連結モデルによる解析および剛性平均法による解析では、織物複合材料内部の応力状態などを評価することはできない問題点がある。そこで、Zhao and Hoa[54]はスーパー要素を用いて三軸織物複合材料の力学的特性に関する有限要素解析を実施した。この手法では、当材料を構成する繊維束まで要素（小要素）に分割するが、一周期領域についてその内部の小要素を集めて1つの要素（スーパー要素）とし、実際の解析対象となる領域をこのスーパー要素を用いてモデル化し有限要素解析を実施する。解析コストを削減しながら、詳細な応力解析も可能であるという点でこの手法は魅力的である。Zhao and Hoa[54]はこの手法を用いて、0度方向および90度方向の引張挙動の解析を実施し引張剛性を算出した。その結果90度方向の引張剛性が0度方向の剛性に比べて低くなることを示した。またZhao and Hoa[54]では、解析領域の寸法が（見かけの）引張剛性に及ぼす影響に注目して、矩形型の解析領域の縦横の寸法を変化させて解析を実施している。さらにZhao and Hoa[55]は幾何学的非線形を考慮したスーパー要素を定式化して、これに詳細な応力解析も可能である利点を生かして損傷進展を考慮に入れ、一軸引張における非線形挙動の解析も実施している。

これらの解析では、実験に使用した試験片の挙動を模擬することを目的としており、スーパー要素が数百個程度含まれる解析領域の挙動を対象としているが、実際の構造物の挙動を対象とした場合、解析領域の代表寸法とスーパー要素の寸法の差が大きくなるため、スーパー要素を用いても解析コストが厩大になる問題が発生する[56]。

上記のように三軸織物複合材料の力学的特性に関する解析的研究として、これまでに面内の力学的特性について重点的に研究が実施されてきている。しかし面内の剛性が等方性を有するか否かについては未だ明確にされていない状況にある。また面外の特性（曲げ剛性）に注目した解析的な研究は筆者の知る限り報告されていない。

また三軸織物複合材料の熱変形挙動についてはZhao and Hoa[57]は前述のスーパー要素を用いて熱変形挙動の解析を実施している。そこでは一様な温度変化に対して曲げ変形が生ずる結果が示されているが、当材料の対称性を考慮すると曲げ変形を生ずることは無いと考えられ、その結果については検討の余地がある。

なお、1.3.1項で述べたように織物複合材料の力学的特性を解析する手法として均質化法が注目され二軸織物複合材料に適用した研究が報告されているが([36-41])、均質化法を三軸織物複合材料に適用した研究は報告されていない。均質化法では周期性を厳密に取り扱うことが可能であり、本項で述べた解析法の問題点を克服する可能性がある。

1.3.3 三軸織物複合材料に関する実験的研究

三軸織物複合材料の力学的特性に関する実験的な研究においても、面内の特性（引張特性）についての研究が多い。また面内に等方性を有する性質を検証するため、面内に負荷方向を変化させて特性評価した研究例が多い。

Fujita et al.[2]は三軸織物複合材料の積層板を用いて引張試験を実施した。ただし、

Fujita et al.[2]が対象としたのは三軸織物複合材料を配向角を等しくして積層した積層複合材料であり、繊維束間の六角形の穴も樹脂で埋めた材料である。この積層三軸織物複合材料について0度および90度方向に一軸引張試験を実施し、その結果、90度方向の剛性が0度方向に比べて低くなることが示されている。なお、Fujita et al.[2]はこの試験結果を有意な差とは捉えず、三軸織物複合材料は剛性に関して等方性を有していると述べている。

本研究で対象とするメッシュ状の三軸織物複合材料に関しては、まずDano et al.[49]が、炭素繊維とエポキシ樹脂からなる三軸織物複合材料について0度方向および90度方向に一軸引張試験を実施した。その結果90度方向の剛性が0度方向の剛性に比べて低くなることを報告している。Dano et al.はこの結果から三軸織物複合材料は等方性を有していないと結論付けている。なお、Dano et al.[49]はひずみの計測にひずみゲージを用いている。その際織物の六角形の空隙部を接着材で埋めひずみゲージを貼付しているが、織り構造などを反映した局所的なひずみを計測してしまう可能性があり、また接着剤の塗布に起因する補強効果の影響が懸念されるなど、ひずみ計測の精度につき疑問が残る。また結果として示された荷重-ひずみ曲線は非線形の挙動を示しているが、この非線形挙動に関しての検討はされていない。

D'amato[58]は0度方向および90度方向に一軸引張試験を実施し、引張剛性と強度を評価した。ここでも引張剛性は90度方向の剛性値が0度方向に比べて低くなることを報告している。また0度方向の引張荷重-ひずみ曲線が非線形挙動を示すことを報告している。なお、引張強度評価に関しては、従来の試験法では実験結果がバラつく結果となることを示し、これを抑える方法の一つとして試験片のつかみ部（タブ部）を工夫する方法を提案している点が興味深い。

またZhao et al.[60]は、炭素繊維とエポキシ樹脂からなる三軸織物複合材料について0度方向および90度方向の一軸引張試験を実施した。その結果Dano et al.[49]の実験結果と同様、荷重ひずみ曲線が非線形挙動を示すことを示した。（ただし、90度方向の荷重-ひずみ曲線は示されていない）。また試験結果において荷重レベルの低い領域で初期剛性を算出すると、90度方向の剛性が0度方向の剛性に比べて低くなることを示した。なお、Zhao et al.[60]は引張試験中の試験片の変形（ひずみ）を計測する方法として、レーザー伸び形を用いて非接触で計測する方法を提案しており、ひずみゲージを用いた計測法の問題点を克服している。

Kueh et al.[61]は炭素繊維とエポキシ樹脂からなる三軸織物複合材料について0度方向および90度方向の一軸引張試験を実施した。その際二台のレーザー伸び計を用いて負荷方向とそれに垂直な方向の二方向の伸びを計測し、引張剛性およびポアソン比を算出した。ただし引張試験は剛性評価を目的として破断までは実施しておらず、材料内に損傷が生じていないと想定されるひずみレベル（0.6%ひずみ）までとしているため、Zhao et al.[60]によって報告された荷重-ひずみ曲線が非線形挙動を示す様子は明らかに

されていない。また、負荷方向ひずみとそれに垂直な方向のひずみの関係については非線形の挙動を示しその非線形挙動が 0 度方向と 90 度方向で異なる結果が報告されている。なお、Dano et al.[49]、Zhao et al.[60]の実験結果と同様、引張試験より算出された引張剛性は 90 度方向の剛性が 0 度方向の剛性に比べて低い結果となっている。

上述の通り、三軸織物複合材料の力学的特性に関する実験的な研究は面内の引張特性に関する研究が多く、負荷方向により異なる非線形挙動を示すこと、および荷重レベルの低い領域での剛性（初期剛性）も負荷方向により異なる値となることが報告されている。

なお Kueh et al.[61]は面内特性のみならず面外特性（曲げ特性）さらには熱膨張係数に関する実験的研究を実施した。曲げ特性については独自に開発した純曲げ負荷装置を用いて、0 度方向および 90 度方向の二方向に純曲げ試験を実施し曲げ剛性を評価した。そして 90 度方向の剛性が 0 度方向の剛性に比べて低い結果になることを示した。また 0 度方向および 90 度方向につき熱膨張係数を計測した。その結果 90 度方向の熱膨張係数が 0 度方向の熱膨張係数に比べて低くなることを報告している。

1.4 本研究の目的と本論文の構成

1.3 節で示したように三軸織物複合材料の基本的な力学的特性に関する研究が国内外で進められているが、面内の引張特性に関して重点的に研究され、特に当材料の繊維束の配置から予想される面内特性が等方性を有する性質を明らかにすべく解析的、実験的な研究が実施されてきた。しかしこの点についても未だ明らかにされていないのが現状である。

本研究では三軸織物複合材料を宇宙用展開構造に適用することを想定し、当材料の基本的な力学的特性を明らかにすることを目的とする。

この目的のため本論文は以下の構成でまとめられている。

第 2 章では、対象とする織物複合材料をこれと等価な均質体と見なした場合の力学的特性の解析法を示す。その際、構造材料として最優先に要求される面内特性のみならず、展開構造物に適用する際に要求される収納性の評価などに用いるべく、面外の特性も解析可能な手法を示す。解析に際し、対象とする材料が不均質ではあるがその面内に周期的な構造を有することを利用して均質化法を適用し、単位周期領域のみを解析対象として、これに周期境界条件を考慮して当材料と等価な力学的特性を解析する手法を示す。またこの章では上記の単位周期領域を数値的に解析する方法として有限要素法を用いその定式化を示す。さらにこの定式化に基づき、単位周期領域において幾何学的非線形性を考慮した解析を実施する方法を示す。また、当材料のような不均質な材料をこれと等価な均質体とした場合の剛性を評価する簡易な手法として用いられている剛性平均

法と比較し、剛性平均法による剛性評価の問題点を明らかにする。

第3章では、当材料の力学的特性を評価するための簡易な解析モデルとして、当材料を構成する繊維束を梁(**beam**)でモデル化し繊維束の交点部においてこれを連結した解析モデルを提案する。この解析モデルを本研究では梁連結モデルと呼ぶ。この解析モデルに第2章で示す均質化法を適用する方法を示し、その定式化を示す。また梁連結モデルについて幾何学的非線形性を考慮した解析に適用する方法を示す。

第4章では、第2章、第3章に示した解析方法を、三軸織物複合材料に適用して解析した結果を示す。その際解析モデルを作成する詳細な方法についても述べ、三次元有限要素解析モデルとの整合性の観点から第3章に示した梁連結モデルを改良する方法についても述べる。解析結果として、まずは当材料と等価な平板の剛性を算出した結果を示す。またこの剛性を複合材料積層板の剛性と比較することにより、当材料の特徴的な性質を明らかにする。次に、当材料の力学的特性を実験的に評価する場合を想定して、当材料から有限な寸法を有するサンプル取り出しこれに一軸の引張および曲げを負荷した場合の解析を実施し、サンプルの寸法あるいは自由端が存在する場合の影響について評価する。次に、当材料を構成する繊維束単体の引張挙動に関し幾何学的非線形性を考慮した解析を実施し、特に負荷に伴う繊維束の面外方向うねり形状の変化が引張挙動に及ぼす影響を明らかにする。次に、当材料を構成する繊維束の面外方向うねり形状の変化が当材料の引張挙動に及ぼす影響を評価するため、幾何学的非線形性を考慮した織物複合材料の引張挙動の解析を実施する。その際負荷方法により引張挙動に変化が生ずることを示し、織物複合材料を構成する繊維束の面外方向うねり形状の変化がその挙動に及ぼす影響について検討する。なお、上記の解析において三次元有限要素解析モデルと梁連結モデルおよびこれを改良した改良梁連結モデルによる解析結果を比較し、簡易な解析モデルである梁連結モデルおよび改良梁連結モデルの有用性と適用限界についても検討する。

第5章では、第4章で解析的に予測される当材料の力学的特性を実験的に評価する。まずは当材料の引張剛性を評価するためさらには引張負荷下での変形挙動を把握するため、一軸引張試験を実施した。また当材料の曲げ剛性を評価するため三点曲げ試験および純曲げ試験を実施する。また曲げ破断が生ずる際の最大曲率を評価する試験も実施する。なお、上記評価試験においては力学的挙動の負荷方向依存性を評価するため、負荷方向を変化させて試験を実施する。また一軸引張試験では、試験片の自由端の影響を評価するため試験片の幅方向寸法を変化させた試験も実施する。上記の評価試験結果と第4章で得られた解析結果を比較し、有限な寸法を有する試験片を用いた剛性評価試験の問題点を明らかにし、また非線形の引張挙動が発現するメカニズムについて考察する。また曲げ破断曲率評価試験の結果より、本材料が曲げ破断にいたるまでの変形能を評価する。

第6章に、三軸織物複合材料の基本的な力学的特性についての結論を示しまとめとす

る.

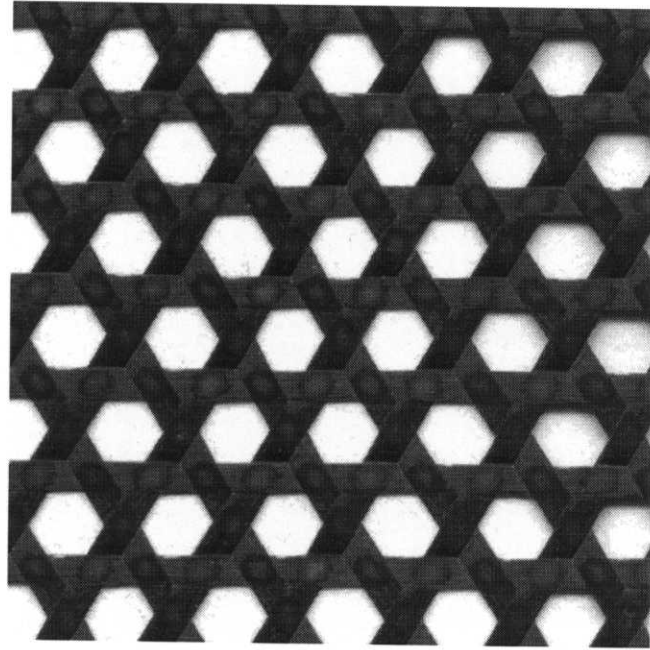


図 1.1 三軸織物複合材料

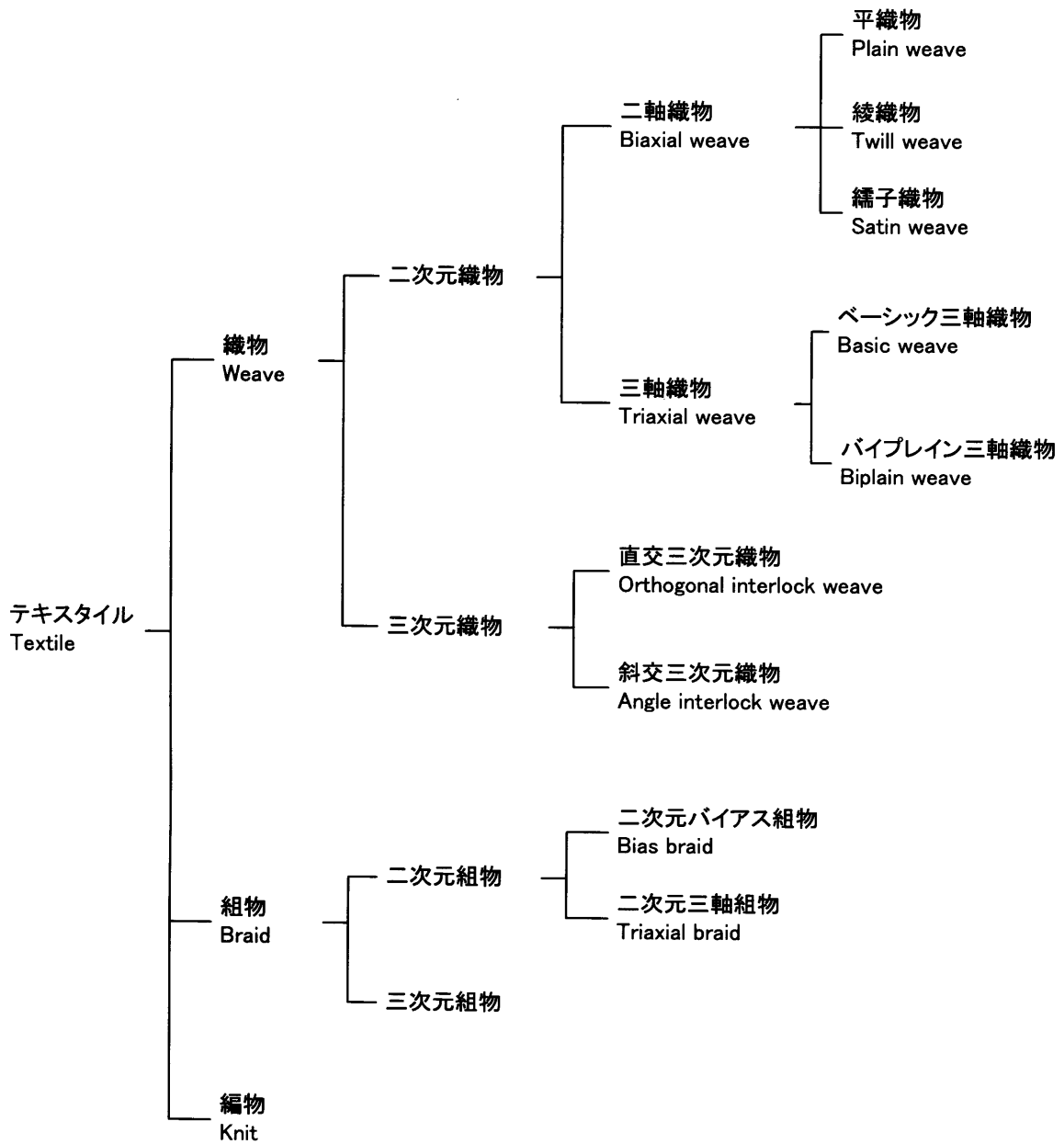
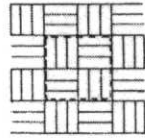
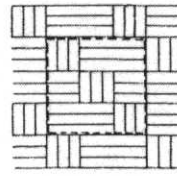


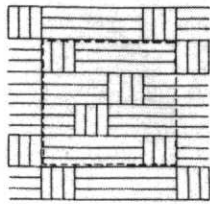
図 1.2 テキスタイルの分類



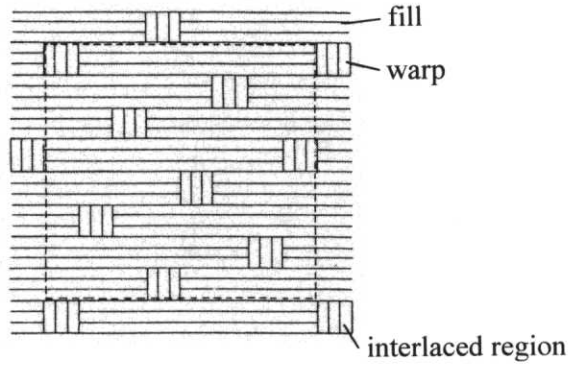
(a) 平織物(Plain weave)($n_g=2$)



(b) 綾織物(Twill weave)($n_g=3$)

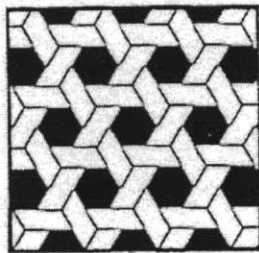


(c) (4枚) 縐子織物(Satin weave)($n_g=4$)

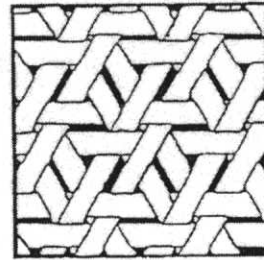


(d) (8枚) 縐子織物(Satin weave)($n_g=8$)

図 1.3 二軸織物(ref. [1])

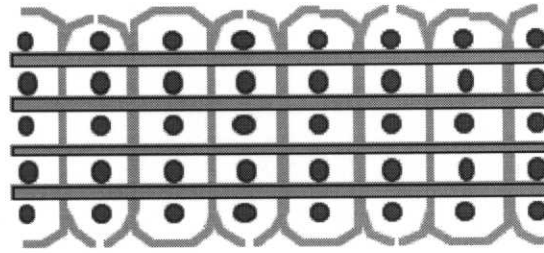


(a) ベーシック三軸織物(Basic weave)

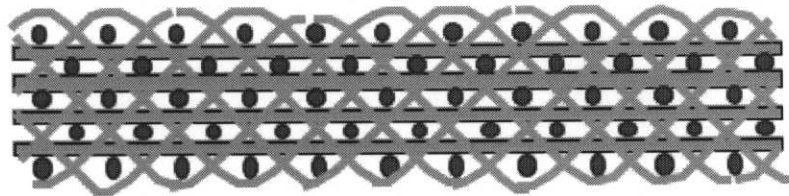


(b) バイプレーン三軸織物 (Biplain weave)

図 1.4 三軸織物(ref. [3])

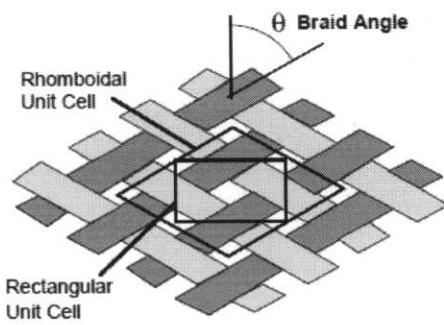


(a) 直交三次元織物 (Orthogonal interlock weave)

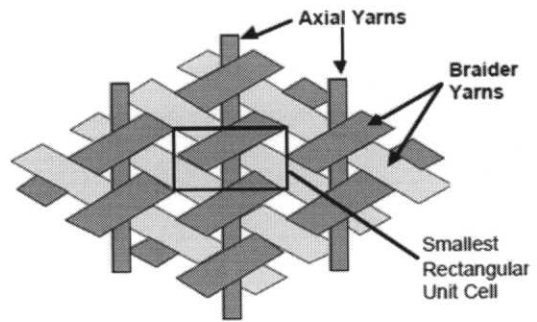


(b) 斜交三次元織物 (Angle interlock weave)

図 1.5 三次元織物(ref. [4])



(a) 二次元バイアス組物 (2D bias braid)



(b) 二次元三軸組物 (2D triaxial braid)

図 1.6 二次元組物(ref. [4])

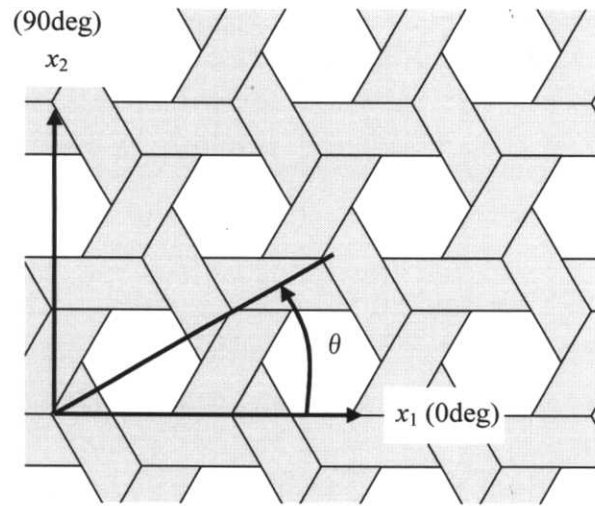


図 1.7 三軸織物複合材料中の角度 θ の定義

第2章 三次元有限要素法による解析

2.1 緒言

この章では、まず本研究の対象である面内三軸織物複合材料をこれと等価な均質平板と見なした場合の平板の剛性を算出する方法を示す。その際、当材料が面内に周期的な構造を有することを利用して均質化法を適用し、ユニットセルと呼ばれる一周領域に周期境界条件を考慮することにより平板の剛性を算出する方法を示す。この方法によれば、当材料の面内の特性のみならず面外の特性まで評価することができる。なお、この方法では三次元の弾性問題を解く必要があり、一般にはその解析解を得ることは不可能である。そこで本章では三次元有限要素解析により近似解を求めることとし、その定式化を示す。またその定式化を見直すことにより、ユニットセルの境界における条件のみから等価な剛性を算出する方法を示す。なお、上記の方法は線形弾性論に基づく手法であるが、織物複合材料を構成する繊維束の負荷に伴う形状変化に起因する非線形挙動の解析も可能となるよう、これを幾何学的非線形性を考慮した解析に適用する方法を示す。

2.2 均質化法

三軸織物複合材料を繊維束が相互に織り込まれている構造を観察するレベル(マイクロレベル)で捉えた場合、当材料は不均質な構造物である。一方、当材料を構造物の構成材料として使用する際には一般に、構造物全体の寸法に比べて当材料の不均質性を特徴付ける寸法ならびにその面外の寸法(板厚)は小さい。このような構造物全体(マクロレベル)の挙動を追う解析をする場合、マイクロレベルの情報を全て含めた手法を採るのは現実的ではない。例えば、有限要素法によりマクロレベルの挙動を追う解析をする際に、マイクロレベルにおいてその不均質性を全て考慮した要素分割をすることになるが、マクロレベルの代表寸法に対して、マイクロレベルの代表寸法が小さいため、その全体挙動を解析するには膨大な計算機資源を消費することが容易に予想される。そこで一般にはマクロレベルの挙動の解析においてはマイクロレベルの不均質性を平均化し等価な均質体に置き換える手法が採られる。この等価な均質体の特性は当然マイクロレベルの不均質性を反映したものになるが、不均質体の特性から等価な均質体の特性を導出する手法として様々な方法が提案されている。また、構造物の全体の挙動に加えマイクロレベルでの挙動の詳細(例えば応力やひずみの分布など)が必要になる場合がある。本研究で対

象とする三軸織物複合材料のようにマイクロレベルの構造が周期的に配置された構造を有している場合, 上記のマクロレベルの挙動とその挙動に伴うマイクロレベルの挙動を追う手法として均質化法[22-33]を用いることができる. そこで本節では均質化法[22-33]を用いて, 三軸織物複合材料と等価な均質平板の剛性を算出する方法を示す.

本研究で対象とする三軸織物複合材料は面内に周期的な構造を有しかつ板厚が面内寸法に比べて小さい面内周期的板状構造物 (図 2.1) である. なお, 図 2.1 に示すように面内に x_1, x_2 座標を取り, 板厚方向に x_3 座標を取ることにする. 板の上面 Γ^+ , 下面 Γ^- に荷重 g_i^+, g_i^- が作用し, 板の側面は固定されている場合の支配方程式は次式で与えられる.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} = 0 \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = C_{ijkl}^\varepsilon \varepsilon_{kl}^\varepsilon \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_{ij}^\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \quad (2.3)$$

が対象とする領域 V^ε で成立し, その境界における境界条件として

$$\sigma_{i3}^\varepsilon n_3 = g_i^{\varepsilon\pm} \quad \text{on } \Gamma^{\varepsilon+} \text{ and } \Gamma^{\varepsilon-} \quad (2.4)$$

$$u_i^\varepsilon = 0 \quad \text{on } \Omega^\varepsilon \quad (2.5)$$

が与えられる. なお, 本論文の表記では Latin index (i, j, k 等) は 1, 2, 3 の値, Greek index (α, β 等) は 1, 2 の値を取るものとし, 総和規約を用いている.

次に, 図 2.1 に示す構造物において, 板厚および面内の周期的変化を測る微小パラメータを ε とする. そして, 面内では,

$$z_\alpha = x_\alpha, \quad y_\alpha = \frac{x_\alpha}{\varepsilon} \quad (\alpha = 1, 2) \quad (2.6)$$

なる二変数を導入する. また板厚方向には, ε で除した変数

$$y_3 = \frac{x_3}{\varepsilon} \quad (2.7)$$

を用いる. 周期的構造物において $x_1 - x_2$ 面内の単位周期領域をユニットセル (unit cell) と呼ぶ (なおユニットセルに関する諸事項を 0 にまとめた). 上記の変数 $y_i (i=1, 2, 3)$ はユニットセル内の非均質性を含めた微視構造を反映する挙動を追う変数である. 一方変数 $z_\alpha (\alpha=1, 2)$ は, 周期的構造物全体をこれと等価な均質体とみなした場合の全体領域の挙動を追う変数である. Γ^+, Γ^- における表面力については次の仮定をする.

$$(g_1^{\varepsilon\pm}, g_2^{\varepsilon\pm}, g_3^{\varepsilon\pm}) = (\varepsilon^2 g_1^\pm, \varepsilon^2 g_2^\pm, \varepsilon^3 g_3^\pm) \quad (2.8)$$

また剛性テンソル $C_{ijkl}^\varepsilon(x)$ については

$$C_{ijkl}^\varepsilon(x) = C_{ijkl}(y_1, y_2, y_3) \quad (2.9)$$

とする。そして次式の漸近展開形により(2.1)~(2.5)式の解 \mathbf{u}^ε を求める。

$$\mathbf{u}^\varepsilon(x) = \mathbf{u}^{(0)}(z_1, z_2) + \varepsilon \mathbf{u}^{(1)}(z_1, z_2, y_1, y_2, y_3) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^{(2)}(z_1, z_2, y_1, y_2, y_3) + \dots \quad (2.10)$$

ただし、ユニットセル領域 V_y を $y_3 = 0$ 面へ投影した二次元領域を S_y として、関数 $\mathbf{u}^{(i)}(z_1, z_2, y_1, y_2, y_3)$ は変数 y_1, y_2 につき S_y で周期的であるとする。(2.10)式を支配方程式(2.1)~(2.5)式に代入する。その際、

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial z_\alpha} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_3} \quad (2.12)$$

となることに注意する。すると、 $\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{u}^{(1)}$ について次式が得られる[22]。

$$u_1^{(0)}(z_1, z_2) = u_2^{(0)}(z_1, z_2) = 0 \quad (2.13)$$

$$u_\alpha^{(1)} = -y_3 \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial z_\alpha} + \tilde{u}_\alpha^{(1)}(z_1, z_2) \quad (2.14)$$

$$u_3^{(1)} = \tilde{u}_3^{(1)}(z_1, z_2) \quad (2.15)$$

そして $\mathbf{u}^{(2)}$ を求める問題として次のマイクロ問題が得られる。

[マイクロ問題]

まず、変数 $y_i (i=1,2,3)$ に依らず、変数 $z_\alpha (\alpha=1,2)$ のみに依存する量として次式で定義される量を導入する。

$$E_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_\alpha^{(1)}}{\partial z_\beta} + \frac{\partial \tilde{u}_\beta^{(1)}}{\partial z_\alpha} \right) \quad (2.16)$$

$$K_{\alpha\beta} \equiv -\frac{\partial^2 u_3^{(0)}}{\partial z_\beta \partial z_\alpha} \quad (2.17)$$

$E_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}$ はそれぞれ均質平板における面内ひずみ、曲率を表す量であることが後に示される。するとユニットセル内で定義される次のマイクロ問題が得られる。

次式を満たす y_1, y_2 につき S_y で周期的な $\mathbf{u}^{(2)}$ を求める

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_j} = 0 \quad (2.18)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.19)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta} + y_3 K_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta}^{(per)} \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_{i3} = \varepsilon_{i3}^{(per)} \quad (2.21)$$

$$\varepsilon_{ij}^{(per)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial y_i} \right) \quad (2.22)$$

$$\sigma_{ij} n_j = 0 \quad \text{on } \Gamma^+ \text{ and } \Gamma^- \quad (2.23)$$

$$\sigma_{ij} n_j \text{ antiperiodic on } \Omega \quad (2.24)$$

ただし, $\Gamma^+, \Gamma^-, \Omega$ は図 2.2 に示すようにそれぞれユニットセルの上面, 下面および側面を表す. また $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ はそれぞれユニットセル内の応力, ひずみを表し, $\varepsilon_{ij}^{(per)}$ は y_1, y_2 につき S_y で周期的な擾乱変位 $\mathbf{u}^{(2)}$ に起因するユニットセル内のひずみを表す. (2.20)式よりユニットセル内のひずみはユニットセルで定数として扱われる $E_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}$ に起因するひずみと, 周期的な $\mathbf{u}^{(2)}$ に起因する擾乱ひずみ $\varepsilon_{ij}^{(per)}$ の和として与えられる. なお(2.24)式の意味はユニットセルの側面において周期性を考慮する際に対応する二点において, $\sigma_{ij} n_j$ が絶対値が等しく符号が異なる値となる条件を示している. なおこの条件はユニットセルの側面の点での釣り合い条件を表すものである.

そこで, 上記のマイクロ問題を $\mathbf{u}^{(2)}$ について記述する. まず(2.20),(2.21)式を(2.19)式に代入して, 次式を得る.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(per)} + C_{ij\alpha\beta} (E_{\alpha\beta} + y_3 K_{\alpha\beta}) \quad (2.25)$$

(2.25)の $\varepsilon_{kl}^{(per)}$ に(2.22)式を用いると, 次式のように $\mathbf{u}^{(2)}$ で表した σ_{ij} が得られる.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial y_l} + C_{ij\alpha\beta} (E_{\alpha\beta} + y_3 K_{\alpha\beta}) \quad (2.26)$$

(2.26)を(2.18),(2.23)に代入すると,

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial y_l} + C_{ij\alpha\beta} (E_{\alpha\beta} + y_3 K_{\alpha\beta}) \right\} = 0 \quad \text{in } V_y \quad (2.27)$$

$$\left\{ C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial y_l} + C_{ij\alpha\beta} (E_{\alpha\beta} + y_3 K_{\alpha\beta}) \right\} n_j = 0 \quad \text{on } \Gamma^+ \text{ and } \Gamma^- \quad (2.28)$$

となり, (2.27),(2.28)式が $\mathbf{u}^{(2)}$ で表したマイクロ問題である.

(2.27), (2.28)式から問題の線形性より $E_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}$ をパラメータとして $\mathbf{u}^{(2)}$ は次式のように求められる。

$$u_i^{(2)} = \chi_i^{\alpha\beta}(y) E_{\alpha\beta} + \lambda_i^{\alpha\beta}(y) K_{\alpha\beta} \quad (2.29)$$

ただし $\chi_i^{\alpha\beta}, \lambda_i^{\alpha\beta}$ は特性関数と呼ばれる。すなわち特性関数 $\chi_i^{\alpha\beta}$ とはパラメータ $E_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) につき、パラメータ $E_{\gamma\delta}$ のみに単位量 $E_{\gamma\delta} = 1$ を与えその他のパラメータを 0 とした時に求められる変位 $u_i^{(2)}$ であり、また同様に $\lambda_i^{\alpha\beta}$ は $K_{\gamma\delta} = 1$ としその他のパラメータを 0 とした時の変位 $u_i^{(2)}$ である。

(2.29)式を(2.19)~(2.22)式に代入して特性関数を用いてユニットセル内の応力は次式のように表される。

$$\sigma_{ij} = \left(C_{ijkl} \frac{\partial \chi_k^{\alpha\beta}}{\partial y_l} + C_{ij\alpha\beta} \right) E_{\alpha\beta} + \left(C_{ijkl} \frac{\partial \lambda_k^{\alpha\beta}}{\partial y_l} + y_3 C_{ij\alpha\beta} \right) K_{\alpha\beta} \quad (2.30)$$

なお $E_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}$ は次のマクロ問題から得られる。

[マクロ問題]

まず、ユニットセル内の平均量を求める作用素を定義する。

$$[\![\bullet]\!] \equiv (1/|S_y|) \int_{S_y} \bullet dy_1 dy_2 dy_3 \quad (2.31)$$

ただし $|S_y|$ はユニットセルの二次元領域 S_y の面積を表す。そこでユニットセル内の応力 σ_{ij} に関する平均量として次式に示す量を定義する。

$$N_{ij} \equiv [\![\sigma_{ij}]\!] \quad (2.32)$$

$$M_{ij} \equiv [\![y_3 \sigma_{ij}]\!] \quad (2.33)$$

これらの平均量について次式が成り立つことが示される。

$$\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial z_\beta} + p_\alpha^+ + p_\alpha^- = 0 \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} + \frac{\partial m_\alpha^+}{\partial z_\alpha} + \frac{\partial m_\alpha^-}{\partial z_\alpha} + p_3^+ + p_3^- = 0 \quad (2.35)$$

ただし

$$p_i^+ = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^+} g_i^+ dY \quad (2.36)$$

$$m_i^+ = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^+} y_3 g_i^+ dY \quad (2.37)$$

である。(2.30)式を(2.32), (2.33)式に用いて次式を得る。

$$N_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{11} E_{\gamma\delta} + L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{12} K_{\gamma\delta} \quad (2.38)$$

$$M_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{21} E_{\gamma\delta} + L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{22} K_{\gamma\delta} \quad (2.39)$$

ここで $L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu}$ は次のように与えられる.

$$L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{11} = \left[\left[C_{\alpha\beta hl} \frac{\partial \chi_h^{\gamma\delta}}{\partial y_l} + C_{\alpha\beta\gamma\delta} \right] \right] \quad (2.40)$$

$$L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{12} = \left[\left[C_{\alpha\beta hl} \frac{\partial \lambda_h^{\gamma\delta}}{\partial y_l} + y_3 C_{\alpha\beta\gamma\delta} \right] \right] \quad (2.41)$$

$$L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{21} = \left[\left[y_3 \left(C_{\alpha\beta hl} \frac{\partial \chi_h^{\gamma\delta}}{\partial y_l} + C_{\alpha\beta\gamma\delta} \right) \right] \right] \quad (2.42)$$

$$L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{22} = \left[\left[y_3 \left(C_{\alpha\beta hl} \frac{\partial \lambda_h^{\gamma\delta}}{\partial y_l} + y_3 C_{\alpha\beta\gamma\delta} \right) \right] \right] \quad (2.43)$$

また Γ^{ε^0} での変位境界条件として(2.5), (2.13)~(2.15)式より次式が得られる.

$$\mathbf{u}_3^{(0)} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}_3^{(0)}}{\partial z_\alpha} = \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{(1)} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma^{\varepsilon^0} \quad (2.44)$$

(2.16), (2.17), (2.34)~(2.44)式を満たす $\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{(1)}, \mathbf{u}_3^{(0)}$ を求める問題がマクロ問題である. マクロ問題は, Kirchhoff 平板の支配方程式を構成している. (2.38), (2.39)式における $L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu}$ は平板の剛性であり, ミクロ問題において $E_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}$ をパラメータとして $\mathbf{u}^{(2)}$ (あるいは特性関数 $\chi_i^{\alpha\beta}, \lambda_i^{\alpha\beta}$) が求められれば, (2.40)~(2.43)式のように求めることができる.

なおユニットセルでのひずみエネルギーの平均量については次式が成立する.

$$\begin{aligned} \left[\left[\frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \right] \right] &= \frac{1}{2} (N_{\alpha\beta} E_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}) \\ &= \frac{1}{2} (L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{11} E_{\alpha\beta} E_{\gamma\delta} + 2 L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{12} E_{\alpha\beta} K_{\gamma\delta} + L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{22} K_{\alpha\beta} K_{\gamma\delta}) \end{aligned} \quad (2.45)$$

ここで平板の構成式を表す(2.38), (2.39)式はマトリクス形式で次式のように表すことができる.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B'] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{K} \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

ただし

$$[A] = \begin{bmatrix} L_{1111}^{11} & L_{1122}^{11} & L_{1112}^{11} \\ L_{2211}^{11} & L_{2222}^{11} & L_{2212}^{11} \\ L_{1211}^{11} & L_{1222}^{11} & L_{1212}^{11} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} L_{1111}^{12} & L_{1122}^{12} & L_{1112}^{12} \\ L_{2211}^{12} & L_{2222}^{12} & L_{2212}^{12} \\ L_{1211}^{12} & L_{1222}^{12} & L_{1212}^{12} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$$[B'] = \begin{bmatrix} L_{1111}^{21} & L_{1122}^{21} & L_{1112}^{21} \\ L_{2211}^{21} & L_{2222}^{21} & L_{2212}^{21} \\ L_{1211}^{21} & L_{1222}^{21} & L_{1212}^{21} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} L_{1111}^{22} & L_{1122}^{22} & L_{1112}^{22} \\ L_{2211}^{22} & L_{2222}^{22} & L_{2212}^{22} \\ L_{1211}^{22} & L_{1222}^{22} & L_{1212}^{22} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.51)$$

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.52)$$

$$\mathbf{E} = \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.53)$$

$$\mathbf{K} = \begin{Bmatrix} K_{11} \\ K_{22} \\ 2K_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

である。いま Appendix B より

$$L_{\alpha\beta\delta\gamma}^{\mu\nu} = L_{\delta\gamma\alpha\beta}^{\nu\mu} \quad (2.55)$$

が成り立つから、

$$[A] = [A]^T, [D] = [D]^T, [B'] = [B]^T \quad (2.56)$$

が成り立つ。すなわち平板の剛性マトリクスが対称である。
ここで

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\chi}^{\alpha\beta}) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}(\boldsymbol{\chi}^{\alpha\beta}) \\ \varepsilon_{22}(\boldsymbol{\chi}^{\alpha\beta}) \\ \varepsilon_{33}(\boldsymbol{\chi}^{\alpha\beta}) \\ 2\varepsilon_{23}(\boldsymbol{\chi}^{\alpha\beta}) \\ 2\varepsilon_{31}(\boldsymbol{\chi}^{\alpha\beta}) \\ 2\varepsilon_{12}(\boldsymbol{\chi}^{\alpha\beta}) \end{Bmatrix} \quad (2.57)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}^{\alpha\beta}) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}(\boldsymbol{\lambda}^{\alpha\beta}) \\ \varepsilon_{22}(\boldsymbol{\lambda}^{\alpha\beta}) \\ \varepsilon_{33}(\boldsymbol{\lambda}^{\alpha\beta}) \\ 2\varepsilon_{23}(\boldsymbol{\lambda}^{\alpha\beta}) \\ 2\varepsilon_{31}(\boldsymbol{\lambda}^{\alpha\beta}) \\ 2\varepsilon_{12}(\boldsymbol{\lambda}^{\alpha\beta}) \end{Bmatrix} \quad (2.58)$$

$$[\mathbf{C}'] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2212} \\ \text{sym} & & C_{1212} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

$$[\mathbf{C}''] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

を導入すると,

$$[A] = \left[[C'] + [C''] \left[\begin{array}{ccc} \{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\chi}^{11})\} & \{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\chi}^{22})\} & \{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\chi}^{12})\} \end{array} \right] \right] \quad (2.61)$$

$$[B] = \left[y_3 [C'] + [C''] \left[\begin{array}{ccc} \{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}^{11})\} & \{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}^{22})\} & \{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}^{12})\} \end{array} \right] \right] \quad (2.62)$$

$$[B'] = \left[y_3 \left([C'] + [C''] \left[\begin{array}{ccc} \{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\chi}^{11})\} & \{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\chi}^{22})\} & \{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\chi}^{12})\} \end{array} \right] \right) \right] \quad (2.63)$$

$$[D] = \left[y_3 \left(y_3 [C'] + [C''] \left[\begin{array}{ccc} \{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}^{11})\} & \{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}^{22})\} & \{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}^{12})\} \end{array} \right] \right) \right] \quad (2.64)$$

と表される.

なお, (2.40)~(2.43)式において $\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\lambda}$ が含まれる項を無視した場合の平板の剛性を $\hat{L}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{11}$ 等と「 $\hat{}$ 」を付けて表記すると,

$$\hat{L}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{11} = \left[[C_{\alpha\beta\gamma\delta}] \right] \quad (2.65)$$

$$\hat{L}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{12} = \hat{L}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{21} = \left[\left[y_3 C_{\alpha\beta\gamma\delta} \right] \right] \quad (2.66)$$

$$\hat{L}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{22} = \left[\left[(y_3)^2 C_{\alpha\beta\gamma\delta} \right] \right] \quad (2.67)$$

となる．あるいは $\hat{L}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{11}$ に関するマトリクスを(2.47)～(2.50)と同様にして例えば，

$$\left[\hat{A} \right] = \begin{bmatrix} \hat{L}_{1111}^{11} & \hat{L}_{1122}^{11} & \hat{L}_{1112}^{11} \\ \hat{L}_{2211}^{11} & \hat{L}_{2222}^{11} & \hat{L}_{2212}^{11} \\ \hat{L}_{1211}^{11} & \hat{L}_{1222}^{11} & \hat{L}_{1212}^{11} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

のように定義し，(2.65)～(2.67)式をマトリクスで表記すると，(2.61)～(2.64)式より

$$\left[\hat{A} \right] = \left[\left[C' \right] \right] \quad (2.69)$$

$$\left[\hat{B} \right] = \left[\hat{B}' \right] = \left[\left[y_3 [C'] \right] \right] \quad (2.70)$$

$$\left[\hat{D} \right] = \left[\left[(y_3)^2 [C'] \right] \right] \quad (2.71)$$

となる．このように剛性 C_{ijkl} ，あるいは剛性と面外方向の座標値 $y_3, (y_3)^2$ の積を取った値のユニットセルにおける平均値を用いて平板の剛性を評価する方法を，剛性平均法と呼ぶ．Appendix Cに示すように(2.65)～(2.67)式を用いて評価した剛性値は，ユニットセル内のひずみが ε_{ij} 一様面内ひずみ $E_{\alpha\beta}$ と一様曲率 $K_{\alpha\beta}$ により，

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}^{(mac)} = E_{\alpha\beta} + y_3 K_{\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{i3} = \varepsilon_{i3}^{(mac)} = 0 \quad (2.72)$$

なる状態にある場合に，応力の平均量と一様面内ひずみ $E_{\alpha\beta}$ と一様曲率 $K_{\alpha\beta}$ の関係から得られる平板の剛性である．一般にはユニットセル内において $\varepsilon_{ij}^{(mac)}$ で与えられるひずみ状態にあるとは限らないため均質化法により得られた剛性とは異なる値となり，剛性平均法により得られた剛性値は均質化法により得られた剛性値に対して上界を与えることが証明される．(Appendix C 参照)

Hoa et al.[53]は三軸織物複合材料と等価な連続体の剛性値を剛性平均法を用いて評価している（ただしHoa et al.[53]は当材料と等価な三次元連続体の剛性を算出しているため，面外の剛性（曲げ剛性および面内－面外カップリング剛性）は算出していない）．簡易な剛性評価法として剛性平均法は注目には値するが，剛性の定量的評価においてはあくまで上界を与えるものであることに留意する必要がある．また後述するように場合によっては，力学的挙動を把握する上で重要な剛性値を定性的にも評価できない場合があることに注意する必要がある．

なお，一方向に繊維で強化された複合材料（一方向材）を積層した積層複合材料平板の剛性を評価する方法として古典積層理論[78]が広く用いられている．積層複合材料も

面内に周期的な構造を有する板状構造物であり、本節で示した均質化法によりその等価剛性を評価することができるが、その場合に評価される剛性は古典積層理論により評価される剛性と一致することを示すことができる (Appendix D 参照)。

また、均質化法[22-33]は、面内周期的板状構造物一般の剛性解析に用いることができ、サンドイッチ平板の剛性解析に用いた研究例[62,63]も報告されているので参照されたい。

2.3 擾乱変位に基づく有限要素法定式化

一般に2.2節で示したマイクロ問題を解くには、何らかの数値解析法に頼らざるを得ず、ここでは有限要素法を用いる方法を示す。マイクロ問題の変分的定式化は、

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{(per)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i^{(2)}}{\partial y_j} + \frac{\partial \delta u_j^{(2)}}{\partial y_i} \right) \quad (2.73)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha\beta}^{(mac)} = E_{\alpha\beta} + \gamma_3 K_{\alpha\beta} \quad (2.74)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(mac)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{3i}^{(mac)} = 0 \quad (2.75)$$

および(2.16)式を用いて次のようになる。

$E_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}$ が与えられた時、任意の y_1, y_2 につき S_y で周期的な $\delta \mathbf{u}^{(2)}$ について

$$\int_{S_y} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{(per)} C_{ijkl} \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^{(per)} + \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^{(mac)} \right) dy_1 dy_2 dy_3 = 0 \quad (2.76)$$

を満たす y_1, y_2 につき S_y で周期的な $\mathbf{u}^{(2)}$ を求める。

(2.76)式を行列形式で次式のように表しておく。

$$\int_{S_y} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(per)T} \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^{(per)} dy_1 dy_2 dy_3 = - \int_{S_y} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(per)T} \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^{(mac)} dy_1 dy_2 dy_3 \quad (2.77)$$

ただし

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(per)} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varepsilon}_{11}^{(per)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{22}^{(per)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{33}^{(per)} \\ 2\boldsymbol{\varepsilon}_{23}^{(per)} \\ 2\boldsymbol{\varepsilon}_{31}^{(per)} \\ 2\boldsymbol{\varepsilon}_{12}^{(per)} \end{array} \right\} \quad (2.78)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(mac)} = \begin{Bmatrix} E_{11} + y_3 K_{11} \\ E_{22} + y_3 K_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2(E_{11} + y_3 K_{12}) \end{Bmatrix} \quad (2.79)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ & & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ & & & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ & \text{sym} & & & C_{3131} & C_{3112} \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

である。

そこで $\mathbf{u}^{(2)}$ を節点変位を $\mathbf{d}^{(per)}$ を用いて次のように離散化する。

$$\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{N} \mathbf{d}^{(per)} \quad (2.81)$$

$$\delta \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{N} \delta \mathbf{d}^{(per)} \quad (2.82)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(per)} = \mathbf{B} \mathbf{d}^{(per)} \quad (2.83)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(per)} = \mathbf{B} \delta \mathbf{d}^{(per)} \quad (2.84)$$

(2.81)~(2.84)式を(2.77)式に代入して次式を得る。

$$\delta \mathbf{d}^{(per)T} \mathbf{K} \mathbf{d}^{(per)} = -\delta \mathbf{d}^{(per)T} \mathbf{F} \quad (2.85)$$

ただし

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dy_1 dy_2 dy_3 \quad (2.86)$$

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^{(mac)} dy_1 dy_2 dy_3 \quad (2.87)$$

である。 $\delta \mathbf{d}^{(per)}, \mathbf{d}^{(per)}$ に周期的境界条件を考慮して

$$\delta \mathbf{d}^{(per)T} \mathbf{K}' \mathbf{d}^{(per)} = -\delta \mathbf{d}^{(per)T} \mathbf{F}' \quad (2.88)$$

が得られ、任意 $\delta \mathbf{d}_i^{(per)}$ について上式が成立することから次式の剛性方程式を得る。

$$\mathbf{K}' \mathbf{d}^{(per)} = -\mathbf{F}' \quad (2.89)$$

$E_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}$ が与えられると、(2.74), (2.75)式および(2.87)式より \mathbf{F} が与えられ、(2.89)より $\mathbf{d}^{(per)}$ が求められる。(2.29)式で示す特性関数 $\chi_i^{\alpha\beta}(\lambda_i^{\alpha\beta})$ を求める場合には $E_{\alpha\beta} = 1 (K_{\alpha\beta} = 1)$ としその他のパラメータ $E_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta} (\alpha, \beta = 1, 2)$ を 0 とし上式より $\mathbf{d}^{(per)}$ を求める)

平板の剛性を求めるには、まず節点変位として得られた特性関数 $\chi_i^{\alpha\beta}(\lambda_i^{\alpha\beta})$ を $\boldsymbol{\chi}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{\lambda}^{\alpha\beta})$ と表すと、

$$\left[\left\{ \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\chi}^{11}) \right\} \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\chi}^{22}) \right\} \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\chi}^{12}) \right\} \right] = [\mathbf{B}] \left[\left\{ \boldsymbol{\chi}^{11} \right\} \left\{ \boldsymbol{\chi}^{22} \right\} \left\{ \boldsymbol{\chi}^{12} \right\} \right] \quad (2.90)$$

$$\left[\left\{ \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}^{11}) \right\} \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}^{22}) \right\} \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}^{12}) \right\} \right] = [\mathbf{B}] \left[\left\{ \boldsymbol{\lambda}^{11} \right\} \left\{ \boldsymbol{\lambda}^{22} \right\} \left\{ \boldsymbol{\lambda}^{12} \right\} \right] \quad (2.91)$$

と表される.

そこで

$$[\mathbf{X}^1] = \left[\left\{ \boldsymbol{\chi}^{11} \right\} \left\{ \boldsymbol{\chi}^{22} \right\} \left\{ \boldsymbol{\chi}^{12} \right\} \right] \quad (2.92)$$

$$[\mathbf{X}^2] = \left[\left\{ \boldsymbol{\lambda}^{11} \right\} \left\{ \boldsymbol{\lambda}^{22} \right\} \left\{ \boldsymbol{\lambda}^{12} \right\} \right] \quad (2.93)$$

と置くと(2.61)~(2.64)より,

$$[A] = \left[[C'] + [C''] [B] [X^1] \right] \quad (2.94)$$

$$[B] = \left[y_3 [C'] + [C''] [B] [X^2] \right] \quad (2.95)$$

$$[B'] = \left[y_3 \left([C'] + [C''] [B] [X^1] \right) \right] \quad (2.96)$$

$$[D] = \left[y_3 \left(y_3 [C'] + [C''] [B] [X^2] \right) \right] \quad (2.97)$$

のように求められる.

2.4 擾乱変位に基づく有限要素法定式化における周期的境界条件の取扱い

(2.85)式から(2.89)式の剛性方程式を得る際に周期的境界条件を考慮する必要がある. その具体的な方法を以下に示す.

まず未知節点自由度を $\mathbf{d}^{(per)}$ を

$$\mathbf{d}^{(per)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1^{(per)} \\ \mathbf{d}_2^{(per)} \\ \mathbf{d}_3^{(per)} \end{Bmatrix} \quad (2.98)$$

のように $\mathbf{d}_1^{(per)}$, $\mathbf{d}_2^{(per)}$, $\mathbf{d}_3^{(per)}$ に分ける. ここで $\mathbf{d}_3^{(per)}$ はユニットセルの内部 (境界を除く領域) における節点の自由度であり, $\mathbf{d}_1^{(per)}$, $\mathbf{d}_2^{(per)}$ はユニットセルの境界上の節点の自由度であり, 周期的境界条件として

$$\mathbf{d}_1^{(per)} = \mathbf{d}_2^{(per)} \quad (2.99)$$

が課されているとする. 離散化された剛性方程式を得る際に導出された(2.85)式は,

$\delta \mathbf{d}^{(per)}$ についても上記と同様に分けて次のように表される.

$$\delta \mathbf{d}_1^{(per)} = \delta \mathbf{d}_2^{(per)} \quad (2.100)$$

を満たす任意の $\delta \mathbf{d}_1^{(per)T}, \delta \mathbf{d}_2^{(per)T}, \delta \mathbf{d}_3^{(per)T}$ につき

$$\left\{ \delta \mathbf{d}_1^{(per)T}, \delta \mathbf{d}_2^{(per)T}, \delta \mathbf{d}_3^{(per)T} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{13}^T & \mathbf{K}_{23}^T & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1^{(per)} \\ \mathbf{d}_2^{(per)} \\ \mathbf{d}_3^{(per)} \end{Bmatrix} = - \left\{ \delta \mathbf{d}_1^{(per)T}, \delta \mathbf{d}_2^{(per)T}, \delta \mathbf{d}_3^{(per)T} \right\} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{Bmatrix} \quad (2.101)$$

を満たす $\mathbf{d}^{(per)}$ を求める.

そこで(2.99), (2.100)式を用いて(2.101)式から $\mathbf{d}_2^{(per)}, \delta \mathbf{d}_2^{(per)}$ を消去すると

$$\left\{ \delta \mathbf{d}_1^{(per)T}, \delta \mathbf{d}_3^{(per)T} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_a & \mathbf{K}_{13} + \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{13}^T + \mathbf{K}_{23}^T & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1^{(per)} \\ \mathbf{d}_2^{(per)} \end{Bmatrix} = - \left\{ \delta \mathbf{d}_1^{(per)T}, \delta \mathbf{d}_3^{(per)T} \right\} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{Bmatrix} \quad (2.102)$$

が得られる. ただし,

$$\mathbf{K}_a = \mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{12}^T + \mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{22} \quad (2.103)$$

である. 独立な任意の $\delta \mathbf{d}_1^{(per)}, \delta \mathbf{d}_3^{(per)}$ につき上式が成立することから次式の縮約された剛性方程式が得られる.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_a & \mathbf{K}_{13} + \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{13}^T + \mathbf{K}_{23}^T & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1^{(per)} \\ \mathbf{d}_2^{(per)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{Bmatrix} \quad (2.104)$$

なお $\mathbf{d}^{(per)}, \delta \mathbf{d}^{(per)}, \mathbf{f}', \mathbf{K}'$ を次のように定義すると,

$$\mathbf{d}^{(per)} \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1^{(per)} \\ \mathbf{d}_2^{(per)} \end{Bmatrix} \quad (2.105)$$

$$\delta \mathbf{d}^{(per)} \equiv \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{d}_1^{(per)} \\ \delta \mathbf{d}_3^{(per)} \end{Bmatrix} \quad (2.106)$$

$$\mathbf{f}' \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{Bmatrix} \quad (2.107)$$

$$\mathbf{K}' \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{K}_a & \mathbf{K}_{13} + \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{13}^T + \mathbf{K}_{23}^T & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

(2.102), (2.104)式はそれぞれ

$$\delta \mathbf{d}^{(per)T} \mathbf{K}' \mathbf{d}^{(per)} = - \delta \mathbf{d}^{(per)T} \mathbf{f}' \quad (2.109)$$

および

$$\mathbf{K}' \mathbf{d}^{(per)} = - \mathbf{f}' \quad (2.110)$$

と表され(2.109), (2.110)式がそれぞれ(2.88),(2.89)に対応する. なお, 縮約された剛性方程式(2.110)式においては剛体変形を拘束しておらず, 縮約された剛性マトリックス \mathbf{K}'

は特異マトリックスである．よって縮約された剛性方程式を解く際にはさらに $\mathbf{u}^{(per)}$ に剛体変形を拘束する条件を課す必要があることを付言しておく．

2.5 全変位に基づく有限要素法定式化

2.3 節では，周期的な擾乱変位を節点変位として離散化する有限要素定式化を示しこれに周期境界条件を考慮して解く方法を示した．その際(2.74),(2.75)式の $\boldsymbol{\varepsilon}^{(mac)}$ に起因する荷重ベクトルを(2.87)式により作成する必要があることを示した．ここでは 2.3 節の有限要素定式化を見直し，周期条件および(2.74),(2.75)式の $\boldsymbol{\varepsilon}^{(mac)}$ に起因する量をユニットセルの境界条件のみで処理する方法について示す．

まず変位について，均質平板と見なした場合の面内ひずみ $E_{\alpha\beta}$ と曲率 $K_{\alpha\beta}$ に起因するマクロな変位 $\mathbf{u}^{(mac)}$ と周期的な擾乱変位 $\mathbf{u}^{(per)}$ を合計した変位(全変位)として $\mathbf{u}^{(tot)}$ を次式のように定義する．

$$\mathbf{u}_i^{(tot)} = \mathbf{u}_i^{(mac)} + \mathbf{u}_i^{(per)} \quad (2.111)$$

ここで， $\mathbf{u}^{(mac)}$ は $E_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}$ を定数として，

$$\mathbf{u}_1^{(mac)} = (E_{11}y_1 + E_{12}y_2) + y_3(K_{11}y_1 + K_{12}y_2) \quad (2.112)$$

$$\mathbf{u}_2^{(mac)} = (E_{22}y_2 + E_{12}y_1) + y_3(K_{22}y_2 + K_{12}y_1) \quad (2.113)$$

$$\mathbf{u}_3^{(mac)} = -\frac{1}{2}K_{11}(y_1)^2 - \frac{1}{2}K_{22}(y_2)^2 - K_{12}y_1y_2 \quad (2.114)$$

で与えられる．なお， $\mathbf{u}^{(tot)}$ によるひずみ，

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_i^{(tot)}}{\partial y_j} + \frac{\partial \mathbf{u}_j^{(tot)}}{\partial y_i} \right) \quad (2.115)$$

は

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta} + y_3 K_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta}^{(per)} \quad (2.116)$$

$$\varepsilon_{i3} = \varepsilon_{i3}^{(per)} \quad (2.117)$$

で与えられる．よって(2.76)式に対応する変分原理は

$$\int_V \delta \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} dy_1 dy_2 dy_3 = 0 \quad (2.118)$$

と表される．ただし， $E_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}$ が定数であるから，

$$\delta \mathbf{u}_i^{(tot)} = \delta \mathbf{u}_i^{(per)} \quad (2.119)$$

であり，したがって，

$$\delta \varepsilon_{ij}^{(tot)} = \delta \varepsilon_{ij}^{(per)} \quad (2.120)$$

である。(2.118)式をマトリクス形式で表示すると次式となる。

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} dy_1 dy_2 dy_3 = 0 \quad (2.121)$$

そこで、全変位 $\mathbf{u}^{(tot)}$ およびその変分量 $\delta \mathbf{u}^{(tot)}$ をそれぞれ節点変位 $\mathbf{d}^{(tot)}$, $\delta \mathbf{d}^{(tot)}$ を用いて次のように離散化する。

$$\mathbf{u}^{(tot)} = \mathbf{N} \mathbf{d}^{(tot)} \quad (2.122)$$

$$\delta \mathbf{u}^{(tot)} = \mathbf{N} \delta \mathbf{d}^{(tot)} \quad (2.123)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d}^{(tot)} \quad (2.124)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(tot)} = \mathbf{B} \delta \mathbf{d}^{(tot)} \quad (2.125)$$

(2.122)~(2.125)式を(2.121)式に代入して次式を得る。

$$\delta \mathbf{d}^{(tot)T} \mathbf{K} \mathbf{d}^{(tot)} = 0 \quad (2.126)$$

ただし

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dy_1 dy_2 dy_3 \quad (2.127)$$

である。

2.6 全変位に基づく有限要素法定式化における周期境界条件

件の取扱い

ここでは2.5節で得られた、(2.126)式において周期的境界条件を課す方法について述べる。まず節点変位 $\mathbf{d}^{(tot)}$ を

$$\mathbf{d}^{(tot)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1^{(tot)} \\ \mathbf{d}_2^{(tot)} \\ \mathbf{d}_3^{(tot)} \end{Bmatrix} \quad (2.128)$$

のように $\mathbf{d}_1^{(tot)}$, $\mathbf{d}_2^{(tot)}$, $\mathbf{d}_3^{(tot)}$ に分ける。ここで $\mathbf{d}_3^{(tot)}$ はユニットセルの内部（境界を除く領域）における節点の自由度であり、 $\mathbf{d}_1^{(tot)}$, $\mathbf{d}_2^{(tot)}$ はユニットセルの境界上の節点の自由度である。すると(2.126)式は次式のように表される。

$$\left\{ \delta \mathbf{d}_1^{(tot)T}, \delta \mathbf{d}_2^{(tot)T}, \delta \mathbf{d}_3^{(tot)T} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{13}^T & \mathbf{K}_{23}^T & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1^{(tot)} \\ \mathbf{d}_2^{(tot)} \\ \mathbf{d}_3^{(tot)} \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.129)$$

ここで $\mathbf{d}^{(tot)}$, $\delta \mathbf{d}^{(tot)}$ に周期境界条件を考慮すると、

$$\mathbf{d}_2^{(tot)} - \mathbf{d}_1^{(tot)} = \mathbf{w} \quad (2.130)$$

$$\delta \mathbf{d}_2^{(tot)} - \delta \mathbf{d}_1^{(tot)} = \mathbf{0} \quad (2.131)$$

となる。ただし、(2.130)式の \mathbf{w} は(2.112)～(2.114)式の $\mathbf{u}^{(mac)}$ により定められる量でありその詳細は後述する。(2.131)式を(2.129)式に代入すると

$$\left\{ \delta \mathbf{d}_1^{(tot)T}, \delta \mathbf{d}_3^{(tot)T} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{13} + \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{13}^T & \mathbf{K}_{23}^T & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1^{(tot)} \\ \mathbf{d}_2^{(tot)} \\ \mathbf{d}_3^{(tot)} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.132)$$

となり、(2.130)を(2.132)代入して

$$\left\{ \delta \mathbf{d}_1^{(tot)T}, \delta \mathbf{d}_3^{(tot)T} \right\} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_a & \mathbf{K}_{13} + \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{13}^T + \mathbf{K}_{23}^T & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1^{(tot)} \\ \mathbf{d}_3^{(tot)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (\mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{22})\mathbf{w} \\ \mathbf{K}_{23}^T \mathbf{w} \end{Bmatrix} \right\} = \mathbf{0} \quad (2.133)$$

を得る。ただし

$$\mathbf{K}_a = \mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{12}^T + \mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{22} \quad (2.134)$$

である。上式が任意の独立な $\delta \mathbf{d}_1^{(tot)}, \delta \mathbf{d}_3^{(tot)}$ について成立するから、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_a & \mathbf{K}_{13} + \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{13}^T + \mathbf{K}_{23}^T & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1^{(tot)} \\ \mathbf{d}_3^{(tot)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} (\mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{22})\mathbf{w} \\ \mathbf{K}_{23}^T \mathbf{w} \end{Bmatrix} \quad (2.135)$$

が得られ、これより $\mathbf{d}_1^{(tot)}, \mathbf{d}_3^{(tot)}$ が求められる。

ところで、上記の方法により等価な平板の剛性を解析する場合、図 2.3 に示すような $y_1 - y_2$ 面内で $2a \times 2b$ の長方形領域をユニットセルとしてとると周期条件の導入が容易となる。まず、上記の方法ではユニットセルの境界において(2.130)式で表される条件を課す必要があるが、その条件は、(2.112)～(2.114)式より、

$$\mathbf{u}_1^{(tot)y_1^+} - \mathbf{u}_1^{(tot)y_1^-} = (E_{11} + y_3 K_{11})(2a) \quad (2.136)$$

$$\mathbf{u}_2^{(tot)y_1^+} - \mathbf{u}_2^{(tot)y_1^-} = (E_{12} + y_3 K_{12})(2a) \quad (2.137)$$

$$\mathbf{u}_3^{(tot)y_1^+} - \mathbf{u}_3^{(tot)y_1^-} = -K_{12} y_2 (2a) \quad (2.138)$$

$$\mathbf{u}_1^{(tot)y_2^+} - \mathbf{u}_1^{(tot)y_2^-} = (E_{12} + y_3 K_{12})(2b) \quad (2.139)$$

$$\mathbf{u}_2^{(tot)y_2^+} - \mathbf{u}_2^{(tot)y_2^-} = (E_{22} + y_3 K_{22})(2b) \quad (2.140)$$

$$\mathbf{u}_3^{(tot)y_2^+} - \mathbf{u}_3^{(tot)y_2^-} = -K_{12} y_1 (2b) \quad (2.141)$$

となる。なお、(2.136)～(2.141)式において上添字 y_α^+, y_α^- ($\alpha=1,2$) はそれぞれ図 2.3 に示すユニットセルの境界 $\Omega^{y_\alpha^+}, \Omega^{y_\alpha^-}$ ($\alpha=1,2$) における量を示す。したがって例えば $E_{11} = \bar{E}_{11}$ としてその他のパラメータをゼロとした解析をする場合、境界条件として

$$\mathbf{u}_1^{(tot)y_1^+} - \mathbf{u}_1^{(tot)y_1^-} = \bar{E}_{11} \times (2a) \quad (2.142)$$

$$u_i^{(tot)y_1^+} - u_i^{(tot)y_1^-} = 0 \quad (i=2,3) \quad (2.143)$$

$$u_i^{(tot)y_2^+} - u_i^{(tot)y_2^-} = 0 \quad (i=1,2,3) \quad (2.144)$$

を指定することになる。また全変位 $\mathbf{u}^{(tot)}$ により得られるひずみは、(2.115)~(2.117)式に示す通りとなり、ユニットセル内の応力は(2.19)式により得られるので、 $\mathbf{d}^{(tot)}$ が求められると、標準的な有限要素法の手順に従い求められる応力がユニットセル内の応力となる。さらにユニットセルを図 2.3 に示す領域にとる場合、ユニットセル内の平均応力(2.32), (2.33)を評価する際、Appendix E (e.50)~(e.57)に示す方法により境界での表面力のみから評価することができ、たとえば N_{11}, M_{11} は、

$$N_{11} = \frac{1}{2b} \int_{\Omega^{y_1^+}} t_1^{y_1^+} dS \quad (2.145)$$

$$M_{11} = \frac{1}{2b} \int_{\Omega^{y_1^+}} t_1^{y_1^+} y_3^{y_1^+} dS \quad (2.146)$$

のように容易に評価できることになる。

また上記の方法を発展させ、例えば $K_{\alpha\beta}=0$ の場合の一軸引張 $N_{11} = \bar{N}_{11}$, $N_{22} = N_{12} = 0$ の解析をする場合は、 $N_{11} = \bar{N}_{11}$, $N_{22} = N_{12} = 0$ となるように境界条件(2.136)~(2.141)式において $E_{\alpha\beta}$ ($K_{\alpha\beta}=0$) を与えることにより実現することができる。またユニットセル内の幾何学的非線形性を考慮した解析においても上記の方法が適用できる。すなわち、ユニットセルの境界において $E_{\alpha\beta}$ ($K_{\alpha\beta}=0$) をパラメータとして与えて幾何学的非線形解析を実施し、ユニットセル境界での表面力から(2.145)式などにより $N_{\alpha\beta}$ を求め、所定の荷重状態 $N_{11} = \bar{N}_{11}$, $N_{22} = N_{12} = 0$ を得るまでこれを繰り返すことにより、ユニットセル内の幾何学的非線形性を考慮した一軸引張解析が実施できる。

2.7 結言

この章では、本研究の対象である面内三軸織物複合材料をこれと等価な均質平板と見なした場合の平板の剛性を算出する方法を示した。その際、当材料が面内に周期的な構造を有することを利用して、均質化法を適用し、ユニットセルと呼ばれる1周期領域に周期境界条件を考慮することにより平板の剛性を算出する方法を示した。この方法によれば、当材料の面内の特性のみならず面外の特性まで評価することができる。

なお、当材料と等価な平板の剛性を算出する簡易な方法として、剛性平均法についても触れ、その剛性値が均質化法により得られる剛性値に対して上界を与えることを述べた。

また、均質化法では三次元の弾性問題を解く必要があり、一般にはその解析解を得ることは不可能である。そこで本章では三次元有限要素解析により近似解を求めることとし、その定式化を示した。またその定式化を見直すことにより、ユニットセルでの境界における条件のみから等価な剛性を算出する方法を示した。

上記の方法は線形弾性論に基づく手法であるが、本研究で対象としている織物複合材料においては、これを構成する繊維束の負荷に伴う形状変化に起因して非線形力学的挙動を示すことが予想される。そこで上記の解析法を幾何学的非線形性を考慮した場合に適用する方法についても示した。

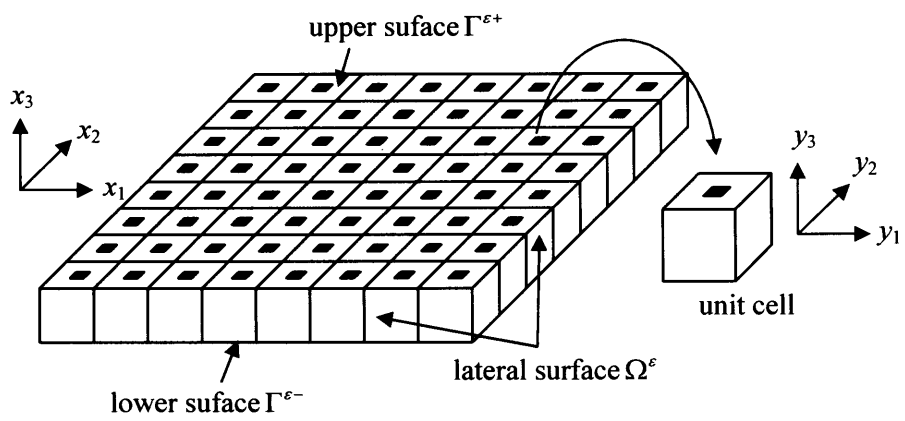


図 2.1 面内周期的板状構造物

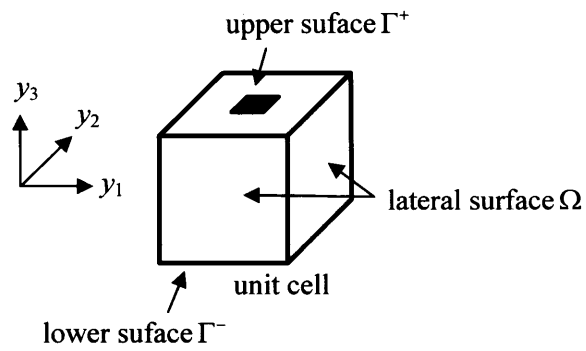


図 2.2 ユニットセル領域

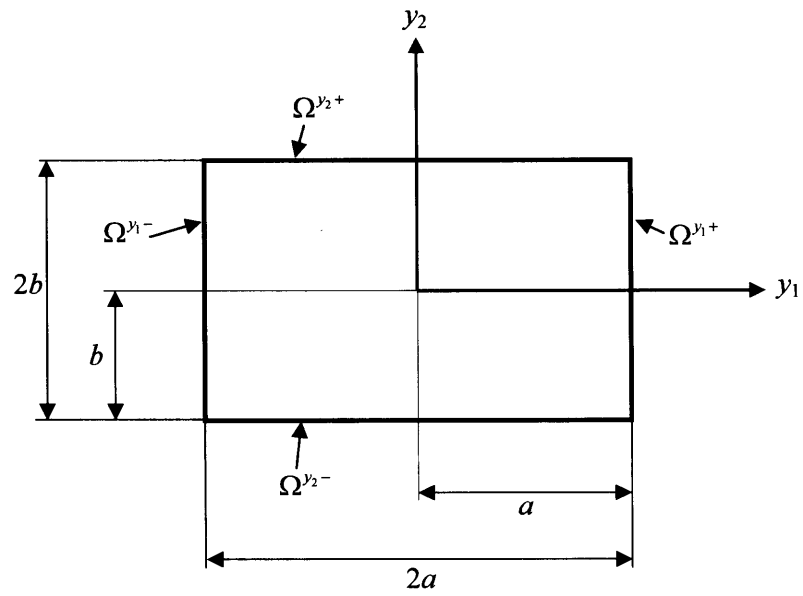


図 2.3 $2a \times 2b$ の長方形ユニットセル

第3章 梁連結モデルによる解析

3.1 緒言

第2章では、三次元有限要素解析により三軸織物複合材料の力学的特性を解析的に評価する方法を示した。その際、対象とする材料が周期的構造を有することを利用して均質化法を用い、一周期のみを解析領域としてこれに周期境界条件を考慮して解析する方法を示した。ただし三次元有限要素解析は解析コストが高いため、当材料を、その本質的な力学的特性を損なうことなくより簡便な解析モデルでモデル化できれば解析効率が向上する。また、実際の構造物では周期性を仮定できない領域が存在するため、その挙動を詳細に解析するには上述の解析法を直接用いることができず、構造物全体を解析領域とする必要がある場合も生ずる。その場合にもより簡便な解析モデルがあれば解析コストを抑えることができる。

本章では当材料を、これを構成する各繊維束を梁(**beam**)でモデル化し繊維束の交点部においてこれらの梁を連結した簡易な解析モデルを提案する。この解析モデルを本研究では梁連結モデルと呼ぶ。この梁連結モデルに均質化法を適用する方法を示し、また幾何学的非線形性を考慮した解析への適用法についても触れる。

3.2 梁連結モデル

ここでは三軸織物複合材料を、これを構成する各繊維束を梁でモデル化し繊維束の交差部においてこれらの梁を連結した「梁連結モデル」でモデル化する方法を示す。

まず繊維束を梁でモデル化する方法について述べる。織物複合材料(図 3.1 (a))を構成する繊維束は図 3.1 (b)に示すように無負荷の状態でも面外方向に屈曲した形状を有している。そこでこれを図 3.1 (c)のように面外方向に屈曲した梁でモデル化する。なお梁の断面形状は繊維束の幅寸法 B 、および繊維束の厚み H (複合材料の厚み $2H$ の $1/2$) を基に決定することにする(図 3.1 (d))。

次に各繊維束を梁でモデル化した後、繊維束交差部において梁同士を連結する。その方法を図 3.2 に示す。図 3.2(a)および図 3.2(b)で示す x_1-x_2 面内の六角形の領域をユニットセルに取った時のユニットセルにおける梁連結モデルの様子を図 3.2(c)および図 3.2 (d)に示す。図 3.2(c)および図 3.2(d)に示すように、各繊維束を上述の方法により梁でモデル化する。そして二本の繊維束の交差部(図 3.2(d)の「yarn cross section」)においては、図 3.2(e)に示すように交差部に存在する二節点(図 3.2(e)で node (a) および

node(b)で示す)の変位間(自由度間)に拘束条件を付与する. Fujita et al.[3]および Dano et al.[49]はこの二節点間においても梁要素を用いて繊維束間の接着をモデル化しているが, 梁の特性の決定法に関して物理的な根拠が希薄であるという問題がある. (実際 Dano et al.[49]はその特性を解析パラメータとして取り扱っている.)本研究ではこの二節点の自由度間を剛体で連結することとする. 線形解析においてその連結方法を具体的に示すと, 交差部に存在する二節点の自由度間に次式で示す拘束を加えることになる.

$$u_1^{(b)} = u_1^{(a)} + H\theta_2^{(a)} \quad (3.1)$$

$$u_2^{(b)} = u_2^{(a)} - H\theta_1^{(a)} \quad (3.2)$$

$$u_3^{(b)} = u_3^{(a)} \quad (3.3)$$

$$\theta_1^{(b)} = \theta_1^{(a)} \quad (3.4)$$

$$\theta_2^{(b)} = \theta_2^{(a)} \quad (3.5)$$

$$\theta_3^{(b)} = \theta_3^{(a)} \quad (3.6)$$

3.3 梁連結モデルへの均質化法の適用 (擾乱変位に基づく方法)

ここでは2.2節で示した均質化法を梁連結モデルに適用し, これと等価な平板の剛性を求める方法を示す. 梁連結モデルに2.2節で示した均質化法を適用するには, まず(2.76)式に基づき, ユニットセルで定義されるマイクロ問題は次のように設定する.

任意の $\delta \mathbf{d}^{(per)}$ につき

$$\delta \mathbf{d}^{(per)T} \mathbf{K}(\mathbf{d}^{(mac)} + \mathbf{d}^{(per)}) = 0 \quad (3.7)$$

を満たす $\mathbf{d}^{(per)}$ を求める.

ただし \mathbf{K} は, ユニットセル内の各梁要素の全体座標系で表した要素剛性マトリックス (Appendix F 参照) をユニットセル内の全ての要素について標準的な方法により重ね合わせて得られる剛性マトリックスであり, シンボリックに次式で表される.

$$\mathbf{K} = \sum_{\text{all elements in unit cell}} \mathbf{k}_e \quad (3.8)$$

また $\mathbf{d}^{(mac)}$ は, ユニットセル内では定数パラメータとして取り扱われる, 巨視的な面内ひずみ $E_{\alpha\beta}$ および曲率 $K_{\alpha\beta}$ に起因する節点自由度ベクトルであり, $E_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}$ を用いて次式で与えられる.

$$u_1^{(mac)} = (E_{11}y_1 + E_{12}y_2) + y_3(K_{11}y_1 + K_{12}y_2) \quad (3.9)$$

$$u_2^{(mac)} = (E_{22}y_2 + E_{12}y_1) + y_3(K_{22}y_2 + K_{12}y_1) \quad (3.10)$$

$$u_3^{(mac)} = -\frac{1}{2}K_{11}y_1^2 - \frac{1}{2}K_{22}y_2^2 - K_{12}y_1y_2 \quad (3.11)$$

$$\theta_1^{(mac)} = -K_{22}y_2 - K_{12}y_1 \quad (3.12)$$

$$\theta_2^{(mac)} = K_{11}y_1 + K_{12}y_2 \quad (3.13)$$

ただし, θ_1, θ_2 は y_1, y_2 軸周りの回転自由度を表す. また, $\mathbf{d}^{(per)}$ は y_1, y_2 に関し S_y で周期的な節点自由度ベクトルである. (3.7)式に $\mathbf{d}^{(per)}, \delta\mathbf{d}^{(per)}$ に関する周期性を考慮して,

$$\delta\mathbf{d}^{(per)T} \mathbf{K}'' \mathbf{d}^{(per)} = -\delta\mathbf{d}^{(per)T} \mathbf{K}' \mathbf{d}^{(mac)} \quad (3.14)$$

を得る. 任意の $\delta\mathbf{d}^{(per)}$ について(3.14)式が成立するから,

$$\mathbf{K}'' \mathbf{d}^{(per)} = -\mathbf{K}' \mathbf{d}^{(mac)} \quad (3.15)$$

が成立し, $\mathbf{d}^{(mac)}$ すなわち $E_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}$ を与えられるパラメータとして, (3.15)式より $\mathbf{d}^{(per)}$ が求められる.

等価な平板の剛性はひずみエネルギー等価性により求める. 梁連結モデルにおいてユニットセルでのひずみエネルギー平均量は次式で表すことができる.

$$\begin{aligned} E_{beam} &= \frac{1}{2} \frac{1}{|S_y|} (\mathbf{d}^{(mac)} + \mathbf{d}^{(per)})^T \mathbf{K} (\mathbf{d}^{(mac)} + \mathbf{d}^{(per)}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{|S_y|} \mathbf{d}^{(mac)T} \mathbf{K} (\mathbf{d}^{(mac)} + \mathbf{d}^{(per)}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

なお, (3.16)式の2番目の等号は(3.7)式を用いて導かれる. (3.16)式を等価な均質平板の単位面積当たりのひずみエネルギーと等値して, すなわち

$$E_{beam} = \frac{1}{2} \left(L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{11} E_{\alpha\beta} E_{\gamma\delta} + 2 L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{12} E_{\alpha\beta} K_{\gamma\delta} + L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{22} K_{\alpha\beta} K_{\gamma\delta} \right) \quad (3.17)$$

として平板の剛性 $L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu}$ が求められる.

なお, 上記手法と同様にひずみエネルギーの等価性を用いるが, ユニットセルでのひずみエネルギー平均量を評価する際に

$$E'_{beam} = \frac{1}{2} \frac{1}{|S_y|} (\mathbf{d}^{(mac)})^T \mathbf{K} \mathbf{d}^{(mac)} \quad (3.18)$$

を用いる方法がある(65~67). すなわち, (3.16)式において $\mathbf{d}^{(per)} = \mathbf{0}$ としてユニットセルでのひずみエネルギーを評価する方法である. この方法では, $\mathbf{d}^{(per)}$ を必要としないため, (3.15)を解く操作も必要がなくなり, ユニットセルでの剛性マトリックス \mathbf{K} が得られれば, 既知のパラメータ $E_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}$ から(3.9)~(3.13)式で算出される節点自由度を用いて容易に E'_{beam} さらには平板の剛性を評価できることになる. この方法は第2章で示した, 剛性平均法を梁連結モデルへ適用した方法として捉えることができる. 一般にはユニットセル内の節点自由度が, 一様な面内ひずみ, 曲率に起因する(3.9)~(3.13)式で与えられる変形状態にあるとは限らず, 従って(3.18)式を用いて平板の剛性を求めると, 第2章2.2節で述べた事項と同様の問題が生ずる可能性がある.

3.4 梁連結モデルへの均質化法の適用（全変位に基づく方法）

3.2 節では均質化法を梁連結モデルに適用し、これと等価な平板の剛性を求める方法をした。その際周期的な擾乱節点自由度を基にした定式化を示し、これに周期境界条件を考慮して剛性方程式を解く方法を示した。ここではユニットセル内の一様ひずみに起因する節点自由度 $\mathbf{d}^{(mac)}$ と周期的な擾乱節点自由度 $\mathbf{d}^{(per)}$ を合計した自由度を全節点自由度として全節点自由度に基づく定式化を示し、得られた剛性方程式を解く方法を示す。また得られた全節点自由度から等価な平板の剛性を求める方法を示す。

ユニットセル内の一様ひずみに起因する節点自由度 $\mathbf{d}^{(mac)}$ と周期的な擾乱節点自由度 $\mathbf{d}^{(per)}$ を合計した全節点自由度として $\mathbf{d}^{(tot)}$ を

$$\mathbf{d}^{(tot)} \equiv \mathbf{d}^{(mac)} + \mathbf{d}^{(per)} \quad (3.19)$$

と定義する。すると梁連結モデルにおけるマイクロ問題は次のようになる。

任意の $\delta \mathbf{d}^{(tot)}$ につき

$$\delta \mathbf{d}^{(tot)T} \mathbf{K} \mathbf{d}^{(tot)} = 0 \quad (3.20)$$

を満たす $\mathbf{d}^{(tot)}$ を求める。

ここで、三次元有限要素法と同様の方法により、(3.20)式を

$$\left\{ \delta \mathbf{d}_1^{(tot)T}, \delta \mathbf{d}_2^{(tot)T}, \delta \mathbf{d}_3^{(tot)T} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{13}^T & \mathbf{K}_{23}^T & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1^{(tot)} \\ \mathbf{d}_2^{(tot)} \\ \mathbf{d}_3^{(tot)} \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.21)$$

と表す。ただし節点自由度 $\mathbf{d}^{(tot)}$, $\delta \mathbf{d}^{(tot)}$ の下添え字 1 と 2 はユニットセルの境界上に存在し、周期条件を考慮する節点の組を表す。また下添え字 3 は非境界の節点である。ここで、 $\mathbf{d}^{(tot)}$, $\delta \mathbf{d}^{(tot)}$ に周期境界条件として、

$$\mathbf{d}_2^{(tot)} - \mathbf{d}_1^{(tot)} = \mathbf{w} \quad (3.22)$$

$$\delta \mathbf{d}_2^{(tot)} - \delta \mathbf{d}_1^{(tot)} = \mathbf{0} \quad (3.23)$$

を与える。ただし、 \mathbf{w} は、

$$\mathbf{w} = \mathbf{d}_2^{(mac)} - \mathbf{d}_1^{(mac)} \quad (3.24)$$

と(3.9)~(3.13)式から $E_{\alpha\beta}$, $K_{\alpha\beta}$ をパラメータとして与えられる量である。(3.21)式において(3.22),(3.23)式を考慮して次式を得る。

$$\left\{ \delta \mathbf{d}_1^{(tot)T}, \delta \mathbf{d}_3^{(tot)T} \right\} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_a & \mathbf{K}_{13} + \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{13}^T + \mathbf{K}_{23}^T & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1^{(tot)} \\ \mathbf{d}_3^{(tot)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (\mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{22}) \mathbf{w} \\ \mathbf{K}_{23}^T \mathbf{w} \end{Bmatrix} \right\} = 0 \quad (3.25)$$

ただし

$$\mathbf{K}_a = \mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{12}^T + \mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{22} \quad (3.26)$$

である。(3.25)式が任意の $\delta \mathbf{d}_1^{(tot)}, \delta \mathbf{d}_3^{(tot)}$ について成立するから、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_a & \mathbf{K}_{13} + \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{13}^T + \mathbf{K}_{23}^T & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1^{(tot)} \\ \mathbf{d}_3^{(tot)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} (\mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{22}) \mathbf{w} \\ \mathbf{K}_{23}^T \mathbf{w} \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

なる剛性方程式を得る。(3.27)式を解くことにより、 $\mathbf{d}_1^{(tot)}, \mathbf{d}_3^{(tot)}$ が求められる。上記においてパラメータ $E_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}$ が(3.22)式および(3.24)式の形で(3.21)式を解く際の境界条件としてのみ導入されている点が3.3節と異なる点である。後述するようにユニットセルの幾何学的形状が単純な場合(3.22)式および(3.24)式で示される境界条件の導入が容易となる。

また等価な平板の剛性の算出については、梁連結モデルにおいてユニットセルでのひずみエネルギー平均量は、

$$E_{beam} = \frac{1}{2} \frac{1}{|S_y|} \mathbf{d}^{(tot)T} \mathbf{K} \mathbf{d}^{(tot)} \quad (3.28)$$

と表すことができるので、これを等価な均質平板の単位面積当たりのひずみエネルギーと等値して、すなわち、

$$E_{beam} = \frac{1}{2} (L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{11} E_{\alpha\beta} E_{\gamma\delta} + 2 L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{12} E_{\alpha\beta} K_{\gamma\delta} + L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{22} K_{\alpha\beta} K_{\gamma\delta}) \quad (3.29)$$

として、平板の剛性 $L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu}$ が得られる。

なお梁連結モデルにおいてユニットセル領域として、第2章 図 2.3 に示す長方形領域を取ると、(3.22)式の境界条件として、

$$u_1^{(tot)y_1^+} - u_1^{(tot)y_1^-} = (E_{11} + y_3 K_{11})(2a) \quad (3.30)$$

$$u_2^{(tot)y_1^+} - u_2^{(tot)y_1^-} = (E_{12} + y_3 K_{12})(2a) \quad (3.31)$$

$$u_3^{(tot)y_1^+} - u_3^{(tot)y_1^-} = -K_{12} y_2 (2a) \quad (3.32)$$

$$\theta_1^{(tot)y_1^+} - \theta_1^{(tot)y_1^-} = -K_{12} (2a) \quad (3.33)$$

$$\theta_2^{(tot)y_1^+} - \theta_2^{(tot)y_1^-} = K_{11} (2a) \quad (3.34)$$

$$u_1^{(tot)y_2^+} - u_1^{(tot)y_2^-} = (E_{12} + y_3 K_{12})(2b) \quad (3.35)$$

$$u_2^{(tot)y_2^+} - u_2^{(tot)y_2^-} = (E_{22} + y_3 K_{22})(2b) \quad (3.36)$$

$$u_3^{(tot)y_2^+} - u_3^{(tot)y_2^-} = -K_{12} y_1 (2b) \quad (3.37)$$

$$\theta_1^{(tot)y_2^+} - \theta_1^{(tot)y_2^-} = -K_{22}(2b) \quad (3.38)$$

$$\theta_2^{(tot)y_2^+} - \theta_2^{(tot)y_2^-} = K_{12}(2b) \quad (3.39)$$

と与えることになる。(3.33),(3.34),(3.38),(3.39)式は回転の自由度に関する条件を示している。

なお、梁連結モデルにおいて応力の体積平均量については、例えば N_{11} について、

$$N_{11} = \frac{1}{2b} \int_{\Omega^{y_1^+}} t_1^{y_1^+} dS \quad (3.40)$$

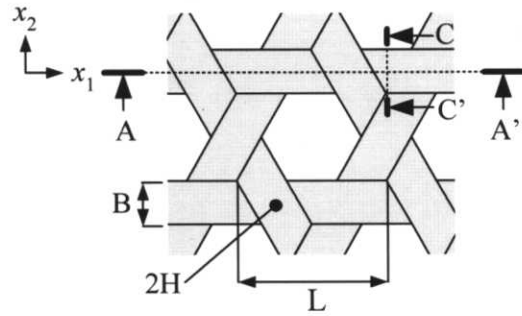
により評価できることを根拠にして、境界 $\Omega^{y_1^+}$ に存在する全ての節点の節点力の y_1 成分の和を取ることにより、

$$N_{11} = \frac{1}{2b} \sum_{\text{all nodes on } \Omega^{y_1^+}} t_1^{y_1^+} \quad (3.41)$$

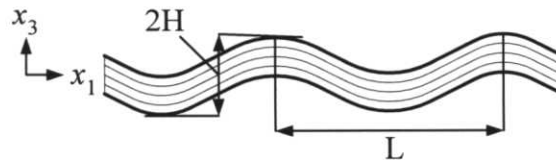
により評価する。一軸引張の場合およびユニットセル内の梁要素に幾何学的非線形性を考慮した解析法については第2章2.6節に述べた方法と同様にして解析することができる。

3.5 結言

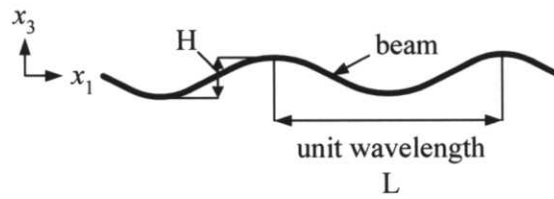
本章では当材料を、これを構成する各繊維束を梁(**beam**)でモデル化し繊維束の交点部においてこれらの梁を連結した簡易な解析モデル(梁連結モデル)を提案した。梁連結モデルを第2章で示した均質化法へ適用する方法を示し、等価な平板の剛性を算出する方法を示した。また、幾何学的非線形解析へ適用する方法についても触れた。



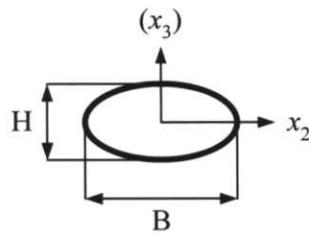
(a) 三軸織物複合材料中の繊維束



(b) 繊維束断面A-A'

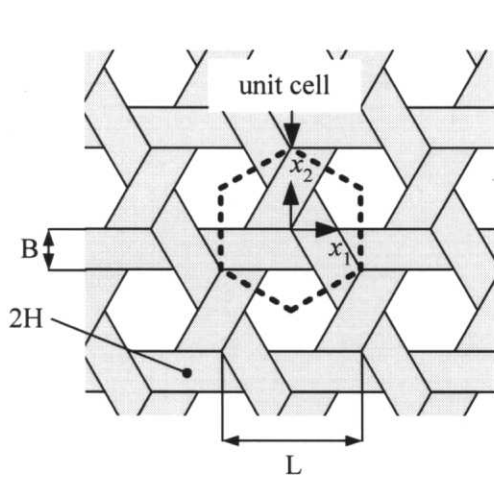


(c) 繊維束をbeamでモデル化

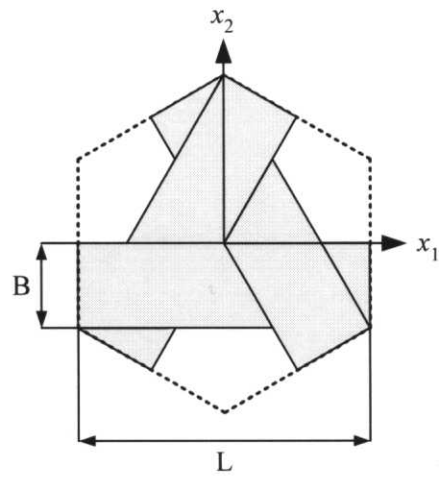


(d) 繊維束断面C-C'

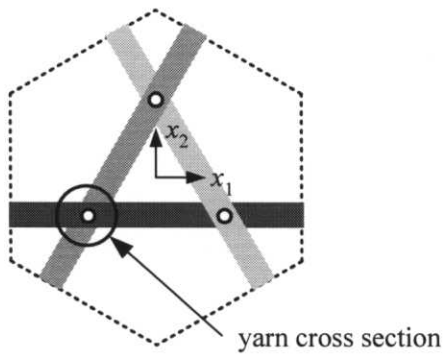
図 3.1 繊維束の梁モデル



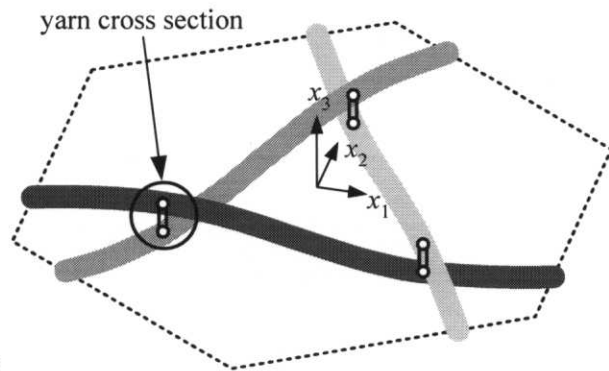
(a) 三軸織物複合材料中の
ユニットセル



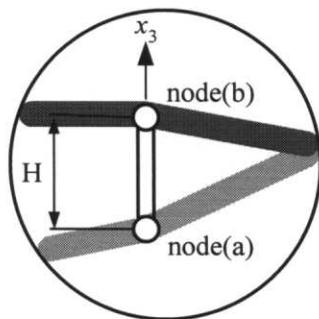
(b) ユニットセル



(c) ユニットセルの梁連結モデル
(x_1 - x_2 平面図)



(d) ユニットセルの梁連結モデル
(斜め上方から)



(e) 繊維束交点部

図 3.2 梁連結モデル