

第5章 力学的特性の実験的評価

5.1 緒言

第4章では、三軸織物複合材料は本質的に引張剛性および曲げ剛性共に面内等方性を有するが、自由端が存在する有限な寸法を有するサンプル(試験片)を用いて剛性を評価すると、当材料が本来有する剛性を正しく評価できない場合があることを解析的に示した。また、織物複合材料中の初期うねり形状を有する繊維束が負荷に伴い真直な形状に近づくことに起因する非線形挙動を考慮するため幾何学的非線形性を考慮した解析を実施した結果、負荷に伴い剛性が増加する非線形挙動を示し、またその挙動が負荷方向に依存して異なることを示した。

本章では、三軸織物複合材料の力学的特性を実験的に評価する。まずは当材料の引張剛性を評価するためさらには引張負荷下での変形挙動を把握するため、一軸引張試験を実施する。また当材料の曲げ剛性を評価するため三点曲げ試験および純曲げ試験を実施する。また曲げ破断が生ずる際の最大曲率を評価する試験も実施する。上記評価試験において力学的挙動の負荷方向依存性を評価するため、負荷方向を変化させて試験を実施する。なお、一軸引張試験では、試験片の自由端の影響を評価するため試験片の幅方向寸法を変化させた試験も実施する。

5.2 試験試料

試験試料として、サカセ・アドテック(株)製の二種類の三軸織物単層複合材料(製品番号 SK-802 および SA-8005)を用いた。両製品共に PAN 系炭素繊維から成る三軸織物にエポキシ樹脂を含浸し成形した製品であるが、炭素繊維材料およびエポキシ樹脂材料の種類が両製品で異なり、成型条件(成型温度など)も異なる。また両製品では三軸織物を構成する繊維束の幾何学的な寸法、配置が異なる。表 5.1 に両製品に使用されている繊維および樹脂材料を示す。SK-802 は繊維材料として東レ(株)製 T300-1K (1K はフィラメント数 1000 を表す)、樹脂材料として新日本石油(株)製エポキシ NM35 を用いている。成型条件はオートクレーブにて温度:180°C、圧力:0.6MPa、2.5 時間である。一方 SA-8005 は繊維材料として東邦テナックス(株)製 HTA-W05K (05K はフィラメント数 0.5K=500 を表す)、樹脂材料として新日鐵化学(株)製エポキシ TX283L を用いている。成型条件はオ

ートクレーブにて温度：150℃，圧力：0.6MPa，3時間である。なお，炭素繊維 T300-1K および HTA-W05K の諸特性のカタログ値を参考までに表 5.2 に示す。引張弾性率，引張強度は HTA の方が高い。重量，密度より繊維束の断面積を算出すると，フィラメント数に比例して T300-1K の断面積は HTA-W05K の二倍となる。また表 5.3 に SK-802 および SA-8005 両試料の幾何学的寸法および重量特性などを示す。当材料では面内に三方向に繊維束が配向しているがその1つの方向の繊維束に注目し，単位長さ当りに含まれるその繊維束の本数を織り密度(Yarn count)と定義している。表 5.3 より織り密度は SA-8005 が SK-802 の二倍となっている。よって幾何学的寸法に注目すると，SA-8005 は SK-802 と比較して繊維束の断面積が 1/2，織り密度が二倍となっている。繊維束の幅は織り密度により決まるため，SA-8005 では SK-802 の 1/2 となり，繊維束断面積が 1/2 であるから繊維束の厚みは両試料でほぼ等しくなり，成型後の複合材の厚みは両試料ほぼ等しい値となっている。また織物を構成する繊維束の面外へのうねりの度合いを表すパラメータとしてクリンプ率を図 5.1(b)に示すように，

$$\text{クリンプ率} = \frac{H}{L} \quad (5.1)$$

で定義すると，SK-802 に比べて SA-8005 では約二倍となる。なお，試験試料は約 400mm × 400mm 程度の面内寸法を持つものを入手し，ここから所定の寸法に試験片を切り出して各種評価試験に供した。試験片の切り出しはローラー式のペーパーカッターを用いて手作業にて実施した。

上述の二種類の試験試料を用いて特性評価試験を実施するが，その目的は織物複合材を構成する繊維束の幾何学的な配置が材料の力学的挙動や評価試験結果に及ぼす影響を検討するためである。よって本来ならば複合材を構成する繊維や樹脂の材料として同一の材料を用い繊維束の幾何学的な配置のみ異なる試験試料を用いて評価試験を実施するのが妥当である。しかし試料の入手が困難であったため，やむを得ず構成材料の材料が異なる上述の二種類の試料を用いている。また本章では試験試料 SK-802 について重点的にその特性評価試験を実施した。試験試料 SA-8005 については引張試験のみを実施し，繊維束の幾何学的な配置が引張負荷下の挙動に及ぼす影響を検討した。

実験に先立ち，実験に用いる試料中の繊維束の断面観察を実施し，繊維束の幾何学的形状の詳細を把握した。図 5.2(a)に示す断面 A-A'および断面 B-B'で試料を切断し，その断面を光学顕微鏡で観察した。断面 A-A'の様子を図 5.2(b)に示す。複合材料中の繊維束は相互に織り込まれており面外に曲線的なうねり形状を有していることが分かる。また断面 B-B'の様子を図 5.2(c)に示す。繊維束の断面形状が楕円形あるいは凸レンズ形であることが分かる。また，第 4 章の有限要素解析モデルでは，当材料を構成する三方向の繊維束が隣接する部分に空隙を設けたが，実験に用いる試料にも空隙が存在することを光学顕微鏡により観察した。実験試料 SK-802 の空隙部を光学顕微鏡で倍率 5 倍，10 倍にて観察した結果をそれぞれ図 5.3，図 5.4 に示す。また実験試料 SA-8005 の空隙

部を倍率 10 倍, 20 倍にて観察した結果をそれぞれ図 5.5, 図 5.6 に示す. これらの観察結果より実験試料 SK-802, SA-8005 共に三方向の繊維束が隣接する部分に空隙が存在することが確認される. なお空隙の寸法は計測する場所によりばらつきがあるが, 第 4 章図 4.4 で示した空隙の寸法 $2w_2$ が SK-802 で 0.02~0.04mm 程度, SA-8005 で 0.01~0.02mm 程度であると推量される.

5.3 引張試験方法

5.3.1 繊維束の引張試験

織物複合材料を構成する繊維束の引張特性および引張挙動を把握するため, 試験試料 SK-802 および SA-8005 について繊維束一本のみの引張試験を実施した. ただし, ここで繊維束と呼ぶものは三軸織物の基布に樹脂を含浸した後成型し複合材となった試料から, 繊維束一本を切り出したものであり, 三軸織物の基布を構成する繊維束 (SK-802 の場合炭素繊維の繊維束 T300-1K) ではないことに注意を要する.

引張試験機 AGS-1 KNG (株島津製作所) を用いて引張負荷するが, 試験片を試験機のつかみ具に装着する際つかみ具内で試験片が圧壊するのを防ぐため, および試験機への装着を容易にするため, 図 5.7 に示す台紙を用いて, 図 5.8 に示すように試験片を挟み epoxy 接着剤にて固定し, この台紙ごと試験機に装着した. なお, 試験機に装着後負荷前に試験片両隣の台紙を切り離した(図 5.8). SK-802 の繊維束引張試験片を図 5.9 に示すが, SA-8005 も同じ方法で試験片を作成した.

図 5.10 に繊維束の引張試験の様子を示す. 図 5.7 に示すように試験片のゲージ長さは 50mm であるが, 試験機のつかみ具間を 70mm とし, つかみ具間に台紙を上下 10mm ずつ残すことにより, 試験片が接着されている台紙端部において試験片を過度に拘束しないように配慮した. 試験は変位制御で試験速度 0.2mm/min (ひずみ速度で約 2800 $\mu\epsilon$ /min) で実施し, 引張荷重と負荷に伴う試験片の伸びを計測した. 試験片の伸びを計測するため図 5.10 に示すように試験片の中央部に間隔約 20mm の位置にターゲットを取り付け, ターゲット間の伸びをデジタル寸法測定器 LS-7500(株Keyence)を用いて非接触にて計測した.

5.3.2 織物複合材料の引張試験

織物複合材料の引張剛性評価および引張負荷下での挙動を把握するため試験試料 SK-802 および SA-8005 を用いて一軸引張試験を実施した. また引張挙動の負荷方向依存性を検討するため, 0 度方向および 90 度方向の二方向につき引張試験を実施した.

試験試料 SK-802 の引張試験用に 0 度方向および 90 度方向に沿って図 5.11 に示すように長さ 230mm 幅 22mm の矩形型試験片を切り出し一軸引張試験に供した. 試験片は

各方向に4本ずつ計8本作成した。試験機つかみ具で試験片が圧壊するのを防ぐため、試験片の両端に長さ40mm厚み1mmのアルミ合金製タブをepoxy接着剤にて接着した。作成した試験片の様子を図5.12に示す。0度方向試験片においてはその幅方向に0度繊維束が8本含まれ、90度方向試験片ではその幅方向に6角形の空隙が最大7個含まれる。

また試験試料SA-8005についても同様に0度方向および90度方向に沿ってそれぞれ2本、計4本の試験片を準備し試験に供した。ただし試験片幅については0度方向試験片では幅方向に0度方向繊維が16本含まれ幅寸法が22mm、90度方向試験片では幅方向に6角形の空隙が16個含まれ幅寸法25mmである。

繊維束の引張試験と同様、引張試験機AGS-1KNGを用いて負荷し、デジタル寸法測定器LS-7500を用いて負荷方向の伸びを計測した。ただし、織物複合材の伸び計測においては、試験片に特別ターゲットを取り付けることはせず、当材料がメッシュ状の構造を有していることを利用して、材料を構成する繊維束をターゲットとして間隔約20mmにある繊維束間の伸びを計測した。引張試験の様子を図5.14に示す。なお複合材の引張試験においても試験片のゲージ長さ150mmに対してつかみ具間170mmに設定し、つかみ具間にタブ部を残すことにより、タブの端部での試験片の過度の拘束を抑えるよう配慮した。なお引張試験は変位制御で試験速度0.5mm/min(ひずみ速度で約2900 $\mu\text{e}/\text{min}$)にて実施した。

なお後述するが、試験結果より、試験片の最終破断はタブ部付近で生ずることが分かった。破断強度を上記の矩形型の試験片により正確に評価するのは困難であり、試験方法に改良が必要である。試験片形状に関してはDano et al.[49]はタブ部から試験片評定部にかけて試験片の幅を減じた所謂Dog Bone型の試験片を用いて破断強度の評価を実施している。ただし、その場合でも試験片の幅が減じている途中の部分での破断が観察され、荷重が幅方向に一様と見なせる評定部の領域で強度を評価しているとは言い難い。ここでは引張剛性の評価に力点を置き、矩形型の試験片を用いることとし、破断強度値については参考値として取得することにする。

また、第4章において上記のような自由端を有する試験片を用いて剛性を評価すると、自由端部の影響により当材料の剛性が正しく評価できない場合があることを解析的に示した。そこで引張剛性について自由端の影響を評価するため、試験試料SK-802から試験片幅寸法を変化させた試験片を作成し引張試験を実施した。0度方向試験用に幅方向に図5.13に示すユニットセルを2, 3, 4および5個含む試験片を作成し(それぞれ幅寸法が約10.8, 16.2, 21.6および27.0mm)、また90度方向試験用に4, 6, 8, 10および12個含む試験片を作成し(それぞれ幅寸法が約12.5, 18.8, 25.0, 31.3および37.5mm)引張試験を実施した。ただし、試験片のゲージ長さ/幅寸法を4.5で一定とした。

5.4 曲げ試験方法

5.4.1 三点曲げ試験

織物複合材料の曲げ剛性を評価するため試験試料 SK-802 について三点曲げ試験を実施した。

試験試料 SK-802 から 0 度方向および 90 度方向に沿って図 5.16 に示すように長さ約 95mm 幅 16mm の矩形型の試験片を切り出し三点曲げ試験を実施した。各方向に 4 本計 8 本の試験片を作成し試験に供した。用いた三点曲げ試験治具の諸寸法を図 5.17 に示す。なお、上支点治具の先端形状の半径は 2mm、下支点治具のそれが 5mm であり上支点治具の先端形状の半径のほうが小さい。三点曲げ試験において上支点到作用する荷重は下支点到の荷重の二倍となることから、通常の試験治具では、上支点治具の先端形状の半径が下支点到のそれより大きくなっている。ここでは、上支点治具のみ当該試験用に新たに製作し、下支点治具は既存の治具を使用したため、下支点治具の先端形状の半径が大きくなっている。下支点到間の距離は 0 度方向および 90 度方向共に 75mm とした。

図 5.18 に試験の様子を示す。試験機(AGS-1 KNG (株島津製作所))のクロスヘッドを動作させ負荷支点到により試験片に負荷するが、その際の荷重は試験機のクロスヘッドと負荷支点到治具の間に設置した微小荷重ロードセル WBJ-02N (株昭和測器)により計測した。また負荷に伴う負荷支点到のたわみをレーザー変位計(株Keyence)を用いて計測した。その際負荷治具にターゲットとなる板を装着し、ターゲットの変位を計測した。

5.4.2 純曲げ試験

三点曲げ試験においては微小変形と見なせる荷重レベルにおける曲げ剛性を評価している。ところで宇宙展開構造の構造材料として当材料を使用する際の収縮性を評価するためには大変形下の曲げ挙動につき評価試験を実施する必要がある。そのため純曲げ試験装置を製作し当材料の曲げ挙動の評価を試みた。

図 5.19 に純曲げ試験装置の概略図を示す。なおこの装置の基本的な動作原理については紙の純曲げ試験装置[84]を参考にした。図 5.19 に示す A 点、B 点のつかみ具は半径 a の回転円板上に設置されている。またつかみ具 A と点 O はロッドで結合されており、このロッドは支点到 O 周りに回転が可能である。また A、B 点の回転円板の外周及び OA、OB に平行に沿わせた 2 本の索に等しい荷重 F を作用させることにより、試験片に純曲げ荷重として $M=F \times a$ を作用させる。

試験試料として三軸織物複合材料 SK-802 を用い、試料から長さ約 100mm、幅約 16mm の矩形型の試験片を 0 度方向及び 90 度方向に各 2 本切り出し試験に供した。ただし、つかみ具間距離は $l=60\text{mm}$ として試験を実施した。また負荷には分銅を用い図 5.19 に示す荷重 F として 0 度方向に 5, 10, 15, 20, 22gf, 90 度方向には 5, 10, 15, 18gf を負荷した。また負荷に伴う試験片の変形の様子を静止画像で取得し、画像計測より試験片の曲

率を算出した。図 5.20 に試験の様子を示す。ただし負荷に用いた分銅及び静止画像取得装置は省略している。

5.4.3 曲げ破断曲率評価試験

当材料の曲げ挙動を把握する際、上述の純曲げ試験により曲げ破断が生ずるまでの曲げ挙動を測定することが望ましいが、本研究で準備した実験材料の曲げ破断曲率半径は数 mm 程度であることが予想され、装置の限界から純曲げ試験により曲げ破断が生ずるまで測定することは困難である。

そこで簡易的にはあるが図 5.21 に示す試験法により当該材料の曲げ破断時の最小曲率半径を評価する試験を実施した。アングル材を治具として荷重試験機のつかみ具に取り付け、試験片をこの治具間にテープを用いて装着し、試験機のクロスヘッドを移動し、曲げ破断が生じた時の治具間の距離をノギスで計測し、この距離の 1/2 を最小曲率半径とした。なおこの試験においてはせん断力で曲げ負荷するため、治具で挟まれる試験片の評定部に渡り一様な曲げ荷重が負荷されないこと、また曲げ荷重が最大になると予想される試験片評定部の中心部（図 5.21(b)に c で示す部分）においては曲げ荷重と共に圧縮荷重が作用することになるなど、曲げ破断時の曲率半径を評価するには問題があるが、その概算値は取得できると考えている。

試験試料として三軸織物複合材料 SK-802 を用い、試料から長さ 60mm、幅 15mm の試験片を、0 度方向及び 90 度方向にそれぞれ 5 本切り出し試験に供した。なお負荷時のクロスヘッド移動速度は 0.5mm/s である。試験の様子を図 5.20 に示す。

5.5 引張試験結果

5.5.1 繊維束の引張試験結果

試験試料 SK-802 の繊維束一本の引張試験の結果得られた荷重 vs.ひずみ曲線を図 5.23 に示した。ただし、ここでひずみとは伸び計により計測したターゲット間の伸びを負荷前のターゲット間距離で除した量である。図中の「×」印は破断点を示す。また比較のため第 4 章で示した三次元ソリッド有限要素モデルによる解析結果も併せて示した。ここで引張試験の結果、下に凸となる荷重 vs.ひずみ曲線が得られ、荷重が増加するにつれて剛性が増加する挙動を示すことが分かる。剛性変化の様子を詳細に調べるため、試験結果から接線剛性を算出した。図 5.24 に接線剛性 vs.ひずみ曲線を示す。ただし、接線剛性はひずみ 1000 $\mu\epsilon$ 間隔で荷重 vs.ひずみデータを分割し、それぞれのひずみ範囲において最小二乗近似により剛性を算出した。また図 5.24 には第 4 章の解析結果も併せて示した。

また試験試料 SA-8005 について繊維束一本の引張試験の結果得られた荷重 vs.ひずみ

曲線を図 5.25 に、接線剛性 vs.ひずみ曲線を図 5.26 に示す。なお図 5.25, 図 5.26 には、第 4 章で述べた(1/2,1/2,1)モデルの三次元ソリッド有限要素解析結果も併せて示した。図 5.25, 図 5.26 より繊維束の引張挙動は、荷重が増加するにつれて剛性が増加してある一定値に収束する挙動をすることが分かる。ただし SK-802 の場合には図 5.24 から分かるようにひずみが約 8000 $\mu\epsilon$ に達すると剛性が一定値となるのに対して、SA-8005 では図 5.26 から剛性が一定値に収束するひずみレベルが高く約 12000 $\mu\epsilon$ 程度である。

上記結果より、複合材料を構成する繊維束の引張挙動は、荷重が増加するにつれて剛性が増加してある一定値に収束する挙動をすることが分かる。またその挙動は、第 4 章で述べた ± 60 度繊維束を含む場合の三次元ソリッド有限要素解析モデルによる解析により、非常によく模擬できることが分かる。よってこの繊維束の挙動は初期うねりを有する繊維束が引張荷重に伴い真直な形状に近づくこと起因するものであると言える。また繊維束のクリンプ率(=H/L)が SK-802 と比べて約 2 倍となる SA-8005 では SK-802 より”緩やかに”一定値に収束する傾向も実験的に確認された。

5.5.2 織物複合材料の引張試験結果

0 度方向および 90 度方向の引張挙動

試験試料 SK-802 の引張試験より得られた 0 度方向および 90 度方向の合応力 vs.ひずみ曲線を図 5.27 に示す。ただし荷重を試験片の幅寸法で除した値を合応力とし、ひずみとは伸び変位量を負荷前の長さで除した値をいう。また、図中の「×」印は破断点を示す。さて図 5.27 より引張挙動が負荷方向により著しく異なることが分かる。剛性変化の様子を詳細に調べるため、図 5.27 に示す合応力 vs.ひずみ曲線から接線剛性を算出しこれを負荷方向ひずみに対してプロットした結果を図 5.28 示す。ただし、接線剛性の算出法は、繊維束の引張試験の場合と同様であり、ひずみが 1000 $\mu\epsilon$ 間隔で合応力 vs.ひずみデータを分割し最小二乗近似により剛性を算出した。図 5.28 より 0 度方向には、負荷に伴い剛性が増加しある一定値に収束する非線形挙動を示し、一方 90 度方向には負荷に伴い剛性が減少する非線形挙動を示すことが分かる。また図 5.29 に試験の結果得られた負荷方向ひずみ vs.負荷方向に垂直な方向のひずみ曲線を示す。ここで負荷に垂直な方向のひずみとは負荷に垂直な方向の変位量を負荷前の長さで除した値である。なお 0 度方向および 90 度方向の試験片 no.3 と no.4 の計 4 本の試験片についてのみ負荷に垂直な方向のひずみを計測した。図 5.29 より 0 度方向と 90 度方向に著しく異なる挙動となることが分かる。

次に試験試料 SA-8005 の引張試験より得られた 0 度方向および 90 度方向の荷重 vs.ひずみ曲線を図 5.30 に示す。なお、0 度方向試験片 No.1 (0deg no.1) については、データを収集している PC の不調により試験中にデータ収集が止まり、破断点までのデータを取得することができなかった。(図中の赤い「○」印でデータ収集が止まった点を示す)。なお剛性変化の様子を把握するには十分のデータを取得できている。

さて図 5.30 より試験試料 SA-8005 においても引張挙動が負荷方向により著しく異なることが分かる。剛性変化の様子を詳細に調べるため、試験結果から接線剛性を算出した。得られた接線剛性 vs. ひずみ曲線を図 5.31 示す。これより 0 度方向には、負荷に伴い剛性が増加しある一定値に収束する非線形挙動を示し、一方 90 度方向には負荷に伴い剛性が減少する非線形挙動を示すことが分かる。

なお、図 5.27～図 5.31 には第 4 章で述べた三次元ソリッド有限要素モデルによる解析結果を併せて示した。ただし図 5.30, 図 5.31 には第 4 章で述べた(1/2,1/2,1)モデルの解析結果を示している。なお、厳密には試験試料 SK-802 と SA-8005 では構成材料が異なるが、解析においては両者 SK-802 の材料特性を用いている。

初期剛性

次に試験試料 SK-802 について荷重またはひずみレベルの低い領域での引張挙動を把握するため、図 5.27 においてひずみが 0~1000 μe の領域を拡大した結果を図 5.32 に示す。これよりひずみ（あるいは荷重）レベルが低い領域においても負荷方向により引張挙動が異なることが分かる。ひずみが 0~1000 μe の領域での剛性を初期剛性と定義し、各試験片につき引張剛性を算出した結果を表 5.4 にまとめた。引張剛性につき 90 度方向の剛性が 0 度方向の剛性に比べて 21%低い値となる。初期剛性も負荷方向に依り異なる値となる。

また試験試料 SA-8005 について荷重またはひずみレベルの低い領域での引張挙動を把握するため、図 5.30 においてひずみが 0~1000 μe の領域を拡大した結果を図 5.33 に示す。各試験片につき初期引張剛性を算出した結果を表 5.5 にまとめた。90 度方向と 0 度方向の剛性に比べると、90 度方向の剛性が約 4%低い値となり SK-802 の場合と比較すると、負荷方向による剛性値の差は小さくなる。

三軸織物複合材料の引張剛性の一軸引張試験による評価は Dano et al.[49], Zhao et al.[60]および Kueh et al.[61]によっても実施されているが、90 度方向の引張剛性値が 0 度方向の引張剛性値より低くなる結果が報告されている。

そこで、試験試料 SK-802 について試験片幅方向の寸法を変化させて引張試験を実施した結果を図 5.34 に示す。ただしひずみが 0~1000 μe の範囲で算出した初期剛性を引張剛性として試験片幅方向ユニット数の逆数に対してプロットしている。図 5.34 より（見掛けの）引張剛性が試験片幅方向ユニット数に依存して変化することが分かる。またその変化は 90 度方向試験においてより顕著に現れる様子が分かる。また 90 度方向には見掛けの剛性が幅方向寸法の逆数に対して線形に変化する様子が分かる（0 度方向にはデータがばらつきこの傾向が確認されなかった）そこで図 5.34 の結果から試験片幅寸法が無限大の場合（図 5.34 で横軸がゼロとなる場合）の剛性値として、90 度方向には 5 点の試験データを線形近似し外挿により求めた値、また 0 度方向には試験データ 4 点の平均値を求め、剛性値をそれぞれ上記の値で正規化した結果を図 5.35 に示す。また図

5.35には第4章で示した三次元有限要素モデルおよび梁連結モデルによる解析結果も併せて示す。これらの結果より有限な寸法を有する試験片を用いた引張試験では、自由端部の影響により見掛けの剛性が試験片幅寸法に依存することが実験的にも確認された。またこの自由端の影響により表 5.4, 表 5.5 に示す引張試験結果において0度方向と90度方向で(初期)剛性が異なる結果となったと考えられる。なお、自由端の影響が生ずる領域は絶対的な幾何学的寸法ではなく、微視構造寸法に依存して決まる。つまり試験片の全体の幾何学的寸法が等しく、内部の微視構造の寸法が異なる2種類の試験片について、荷重条件が同じ場合に自由端の影響は両者等しく生ずるわけではなく、微視構造の寸法が大きい試験片に影響がより大きく生ずる。よってSA-8005に比べてSK-802では自由端の影響がより大となり、0度方向と90度方向の初期剛性値の差が大きくなったものと考えられる。

0度方向非線形挙動

次に0度方向に非線形挙動について検討する。図 5.27, 図 5.30 より0度方向の引張挙動については実験結果と解析結果が良い一致を示すことが分かる。従って第4章の解析結果より0度方向の非線形挙動は、荷重方向に配向した0度繊維束が荷重に伴い真直な形状に近づくことに起因して発現することが分かる。ここでは少し詳細に0度方向の非線形挙動について実験結果をまとめることにする。図 5.36 に試験試料SK-802について複合材料0度方向引張試験と複合材料中の繊維束の引張試験の結果得られた荷重 vs. ひずみ曲線を比較した結果を示す。なお複合材0度方向試験においては荷重を試験片幅方向に含まれる0度繊維束の本数で除した値を算出し、これを0度繊維束一本当りの荷重としてプロットしている。また図 5.36 から接線剛性を算出した結果を図 5.37 に示す。図 5.37 から両者荷重に伴い剛性が増加しある一定値に収束する挙動を示しかつその収束値がほぼ等しいことが分かる。また収束値に達するまでの領域では当然ながら複合材0度方向試験の方が高い剛性を示す。また試験試料SA-8005について同様にして比較した結果を図 5.38, 図 5.39 に示す。図 5.39 から試験試料SK-802の場合と同様に、両者荷重に伴い剛性が増加しある一定値に収束する挙動を示しかつその収束値がほぼ等しいことが分かる。また収束値に達するまでの領域では複合材0度方向試験の方が高い剛性を示すことが分かる。また試験試料SK-802の場合の結果図 5.37 と比較すると、剛性が一定値となるひずみレベルが高い(0度方向および繊維束ともに10000~12000 $\mu\epsilon$)ことが分かる。これは織物複合材料を構成する繊維束のクリンプ率の違いが0度方向引張挙動に反映されていると考えられる。なお、図 5.36~図 5.39 に三次元ソリッド有限要素モデルによる解析結果を併せて示すが、上記の挙動を模擬できていると言える。

以上の結果より、0度方向引張挙動においては、荷重方向に配向した0度繊維束の挙動が支配的であり、荷重レベルが高くなると0度繊維束のみがその剛性に寄与する挙動を示すことが分かる。

90 度方向非線形挙動

次に 90 度方向の非線形挙動について検討する。図 5.27, 図 5.30 より 90 度方向には負荷に伴い剛性が減少する非線形挙動を示し、幾何学的非線形性のみを考慮した解析結果と乖離した挙動を示すことが分かる。よって、90 度方向の引張挙動については、繊維束材料の材料非線形性、繊維束を接着している繊維束界面での樹脂の材料非線形性、あるいは材料内の損傷の蓄積、進展などの要因を考慮に入れる必要がある。そこで、90 度方向に除荷過程を含む引張試験を実施し、損傷の発生の有無を調べた。無負荷の状態から定めたひずみレベルまで負荷しその後無負荷の状態まで除荷する。これを 1 サイクルとして、ひずみレベルが $2000\mu\epsilon$, $4000\mu\epsilon$, $6000\mu\epsilon$, $8000\mu\epsilon$ および $10000\mu\epsilon$ までの 5 サイクル負荷除荷を繰返し、最後の 6 サイクル目は破断まで負荷した。図 5.40 に全サイクルの合応力 vs. ひずみ曲線を示す。また、最初の 3 サイクルのみを図 5.41 に示す。図 5.40 に示す合応力 vs. ひずみ曲線より、負荷レベルが低い場合は負荷後除荷すると負荷過程の曲線上を戻る挙動を示すが、負荷レベルが高くなると、負荷過程の曲線は上に凸の非線形挙動を示し、除荷時には負荷過程の曲線に戻らない。そして無負荷状態まで除荷してもひずみがゼロに戻らず、また無負荷状態まで除荷後再び負荷すると除荷開始時の荷重ひずみ点を通る挙動を示す。この挙動は材料中に損傷が生じ、蓄積していることを示唆している。また図 5.41 より、上記の挙動は 2 サイクル目までは残留ひずみは観察されず、3 サイクル目から明確に観察される。従って $4000\mu\epsilon\sim 6000\mu\epsilon$ において損傷の発生が示唆される。また SA-8005 の 90 度方向引張試験においても同様の試験を実施した結果を図 5.42 に示す。(ただし SA-8005 においては必ずしも無負荷の状態まで除荷をしていない。) 上述の損傷の発生、蓄積を示す挙動がより明確に観察される。また最初の 2 サイクルのみを図 5.43 に示す。 $3500\mu\epsilon\sim 5000\mu\epsilon$ において損傷の発生が示唆される。

上記の実験結果より、90 度方向引張挙動においては負荷に伴い剛性が減少する非線形挙動を示すのは、材料内の損傷の発生、蓄積に起因するものと考えられる。今後材料内の損傷の様子を詳細に観察すると共に、解析モデルにも損傷の影響を取り入れる必要がある。

まとめ

当材料の引張剛性を一軸引張試験により評価する場合、上記のように幅方向自由端の影響に起因して当材料の引張剛性を正しく評価できない場合がある。ただし、0 度方向には 90 度方向に比べて幅方向の影響が小さく、さらに微視構造（織り構造）の寸法に比べて試験片の寸法を十分に大きくすると、当材料が有する本来の剛性を許容できる範囲で評価できる可能性がある。しかしその場合でも、0 度方向の一軸引張試験においては負荷に伴い剛性が著しく増加する非線形挙動を示すため、一軸引張試験で剛性を正し

く評価するのは困難であると考えられる。なお、二軸に等方的に負荷した場合の解析結果では、0度方向と90度方向に等しい引張挙動を示し、また負荷に伴い剛性が増加し非線形挙動を示すが、一軸引張負荷の場合に比べて、負荷ひずみに伴う剛性増加率は抑えられる（急激な剛性増加とはならない）。また負荷方向に垂直な方向のひずみを拘束した場合にも0度方向と90度方向にほぼ等しい挙動を示す。したがって、当材料の引張剛性を実験的に評価する場合に二軸に等方的に負荷する試験あるいは少なくとも負荷に垂直な方向を拘束した試験により評価する方法を採るのが望ましい。

なお図 5.44 に破断後の試験片の様子を示す。両方向の試験片で破断がタブ付近で生じているため、この破断荷重が材料の強度を示すものであるかについては検討の余地がある。参考値として試験試料 SK-802, SA-8005 の破断ひずみ値、破断荷重値をそれぞれ表 5.6, 表 5.7 に示す。

5.6 曲げ試験結果

5.6.1 三点曲げ試験結果

0度方向および90度方向の三点曲げ試験の結果得られた荷重 vs.たわみ曲線を図 5.45, 図 5.46 に示す。繊維束の三点曲げ試験と同様、荷重 vs.たわみ曲線が線形挙動を示す範囲で実験を実施し得られた荷重 vs.たわみ曲線から曲げ剛性を算出した。得られた曲げ剛性値を表 5.8 にまとめた。表 5.8 に示すとおり90度方向の曲げ剛性が0度方向に比べて10%弱低い値となる。

5.6.2 純曲げ試験結果

図 5.48 に0度方向及び90度方向に純曲げ試験を実施した結果得られた曲げモーメント vs.曲率曲線を示す。ただし曲げモーメントは試験片の幅で除した単位幅当りのモーメントである。図 5.48 より0度方向及び90度方向共にモーメント vs.曲率曲線が線形の挙動を示すことが分かる。また0度方向および90度方向に負荷後除荷した場合の試験結果をそれぞれ図 5.49 図 5.50, 図に示す。両図よりモーメント vs.曲率曲線において除荷時にも負荷時の経路を辿り元に戻る挙動を示すことが分かる。これより当材料は曲率0.06(1/mm) (曲率半径17mm) まで、材料内に損傷などを生ずることなく弾性の範囲内の曲げ変形が可能であることが分かる。なお参考までに図 5.51 に0度方向試験における曲率0.066(1/mm)時の試験片の変形の様子を示す。ところで図 5.48 より0度方向と90度方向で曲げ剛性が異なることが分かる。そこで、図 5.48 より各方向の曲げ剛性を算出した結果を表 5.9 に示す。90度方向の剛性値が0度方向の剛性値に比べて約7%低い値となる。Kueh et al.[61]も独自に製作した純曲げ負荷装置により三軸織物複合材料の曲げ剛性を実験的に評価しているが、その結果90度方向の曲げ剛性が0度方向の曲

げ剛性に比べて低くなることが報告されている。

三点曲げ試験および純曲げ試験の結果剛性が負荷方向に依存して異なる値となるが、これは試験片幅方向自由端の影響によるものと考えられる。0度方向の曲げ剛性値を基準に90度方向の曲げ剛性値を正規化し、幅方向寸法を変化させた場合の見掛けの曲げ剛性解析結果と共に図 5.47 に示す。なお、解析結果については均質化法により得られる無限板の剛性値を用いて正規化している。幅方向寸法を変化させた試験片による実験的な確認が必要であるが、当材料は本質的には曲げ剛性についても等方性を有するが有限な寸法を有する試験片を用いて剛性を評価すると、自由端の影響により剛性が負荷方向に依り異なる結果となることが推察できる。

5.6.3 曲げ破断曲率評価試験結果

表 5.10 に曲げ破断曲率評価試験の結果得られた曲げ破断時の曲率半径測定結果を示す。0度方向及び90度方向でほぼ等しい値となり、曲げ破断が生ずる最小曲率半径は2~3mm（最大曲率0.3~0.5(1/mm)）程度である。なお、破断後の試験片の様子を図 5.53 に示した。0度方向試験片では図 5.54 に示すように試験片幅方向に含まれる0度繊維束がほぼ全て同時に破断するが、その際±60度繊維束の中には未破断の状態にあるものが存在する。表 5.10 に示した結果はこの時点での曲率半径を測定した結果である。0度方向試験片 no.1 のみ0度繊維束が破断した後さらに±60度繊維束が全て破断するまで負荷した。その結果曲率半径は1.25mm(曲率0.8(1/mm))となった。また表 5.10 に示す90度方向試験片の測定結果において試験片 no.2 が他の試験片と比べて曲率半径が低い（試験片 no.4 と比べて17%低い）結果となっている。そこで図 5.55 に90度方向試験片 no.2 と no.4 の破断箇所の様子を拡大して示した。試験片 no.2 では60繊維束および-60繊維束が互いに交差する所で破断しているのに対し、試験片 no.4 では60繊維束および-60繊維束が0度繊維束と交差する所で破断していることが分かる。このように破断箇所が異なることにより90度方向の試験結果にはバラツキが生じたものと考えられる。

今後破断に至るまでの材料内の損傷の蓄積の程度など詳細に検討する必要があるが、当材料は曲げ破断に至るまで高い変形能を有していることが確認された。

5.7 結言

本章では、面内三軸織物複合材料の力学的特性を一軸引張試験および三点曲げ試験により実験的に評価した。そして次のような結果を得た。

1. 成型後の三軸織物複合材料から繊維束一本を切り出しこれを試験試料として一軸引張試験を実施し、繊維束の引張挙動が負荷に伴い見かけの剛性が増加する非線

形挙動を示すことを明らかにした。

2. 0 度方向および 90 度方向に一軸引張試験を実施し、引張挙動が負荷方向により著しく異なる非線形挙動となることを示した。また初期剛性を算出した結果、90 度方向の剛性が 0 度方向の剛性に比べて低い値となることを示した。
3. 破断までの引張挙動については、0 度方向には剛性が増加する非線形挙動を、一方 90 度方向には剛性が減少する非線形挙動となることを示した。
4. 試験片の寸法が見かけの引張剛性に及ぼす影響に注目し、これを実験的に評価するため、アスペクト比（長さ/幅比）が等しく幅寸法が異なる数種類の試験片について引張試験を実施した。そして、試験片の幅寸法が増加すると見掛けの剛性値が増加する結果を得た。また試験片幅寸法が見掛けの引張剛性に及ぼす影響が負荷方向に依存して異なることを示した。
5. 0 度方向織物複合材料試験片の引張挙動を、これを構成する 0 度繊維束一本当りの引張挙動に置き直し、繊維束一本の引張挙動と直接比較すると、両者、負荷に伴い剛性が徐々に増加し一定値に収束する挙動を示し、またその収束値がほぼ同じ値となることを明らかにした。
6. 90 度方向引張負荷時の材料内の損傷の有無を調べるため、除荷過程含む引張試験を実施した。その結果材料内の損傷の発生を示唆する挙動を示すことを明らかにした。
7. 織物複合材料から 0 度方向および 90 度方向の試験試料を採取し、三点曲げ試験、純曲げ試験を実施した。そして 90 度方向の曲げ剛性が 0 度方向の剛性に比べて低い値を示すことを明らかにした。
8. 曲げ破断曲率評価試験を実施し、本材料が破断にいたるまで高い変形能を有していることを確認した。

表 5.1 試験試料の構成材料

Style No.	Yarn	Resin
SK-802	T300-1K (TORAY Industries Inc.)	NM35 (180°C cure) (Nippon Oil Corporation)
SA-8005	HTA-W0.5K (TOHO TENAX Co.,Ltd.)	TX283L (150°C cure) (Nippon Steel Chemical Co.,Ltd.)

表 5.2 炭素繊維材料特性値(ref. [81],[82])

Type	Tensile strength	Tensile modulus	Weight	Density
	Mpa	Gpa	g/1000m	g/cm ³
T300-1K	3530	230	66	1.76
HTA-W05K	3720	235	33	1.76

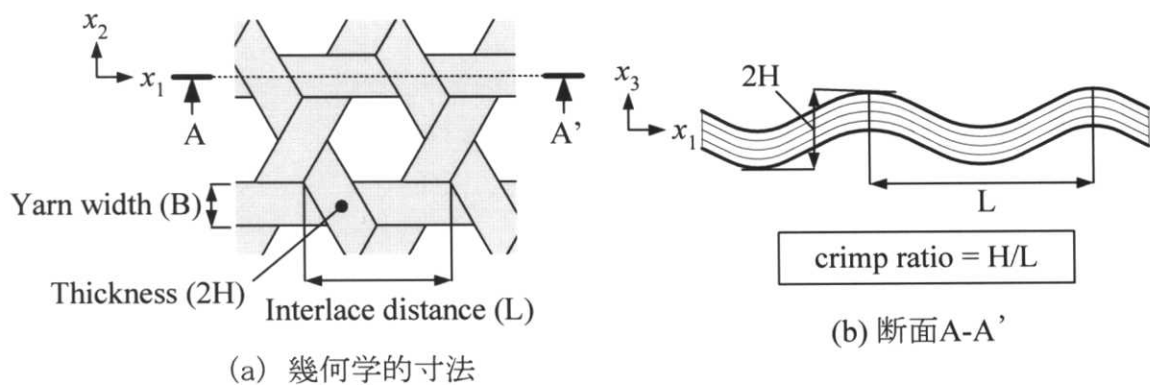
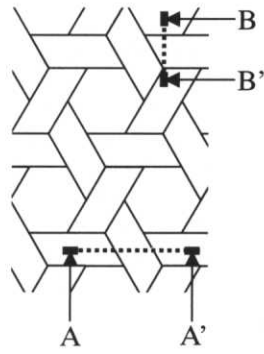


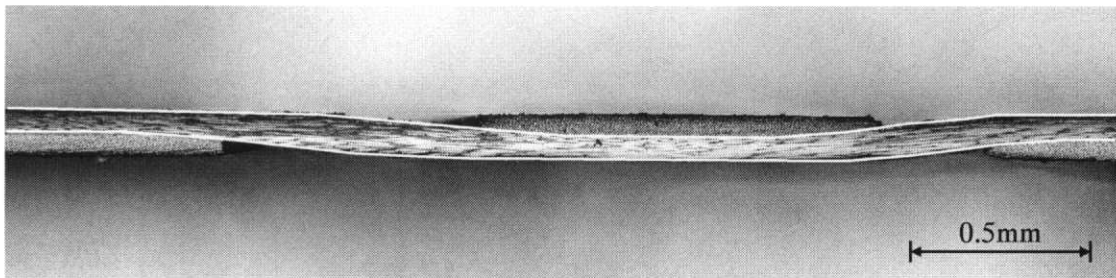
図 5.1 三軸織物複合材料の幾何学的寸法とクリンプ率

表 5.3 試験試料の幾何学的寸法および重量特性

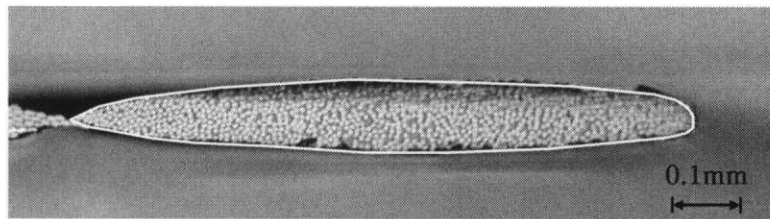
Style No.	Count	Yarn width	Interlace distance	Thickness	Dry weight /Area	Weight /Area	Resin weight content
	yarns/cm	mm	mm	mm	g/m^2	g/m^2	%
SK-802	3.70	0.90	3.12	0.140	74	105	29
SA-8005	7.39	0.45	1.56	0.135	76	105	28



(a) 観察する断面



(b) 繊維束屈曲形状 (断面 A-A')



(c) 繊維束断面形状 (断面 B-B')

図 5.2 繊維束屈曲形状および断面形状の写真

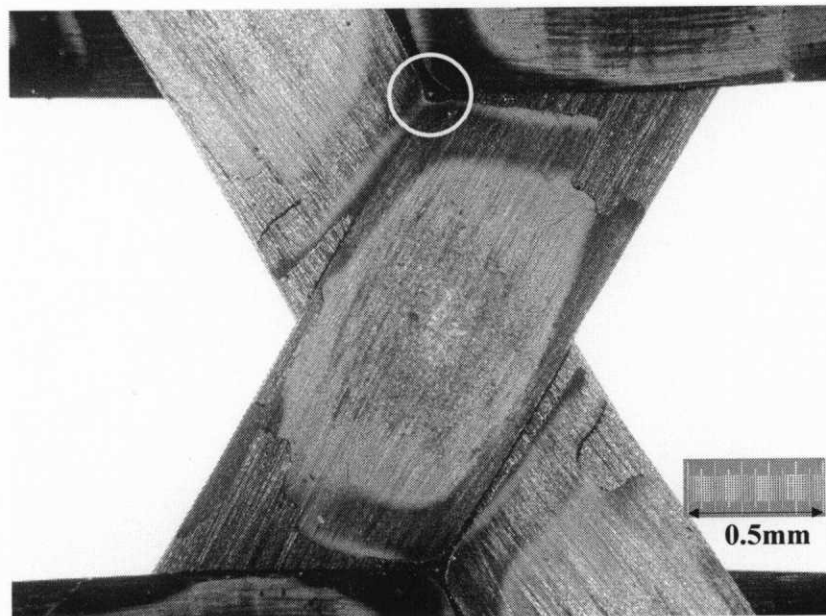


図 5.3 試験試料 SK-802 の空隙部の様子(×5)

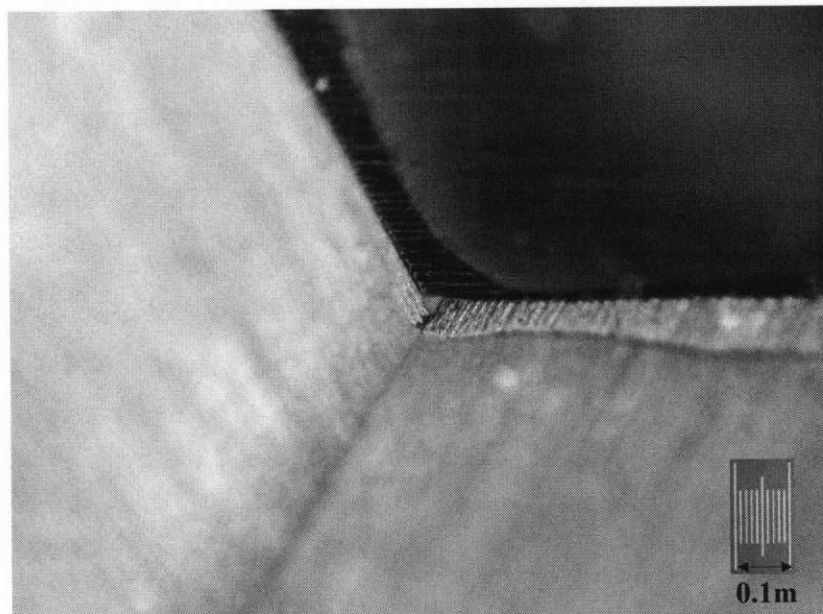


図 5.4 試験試料 SK-802 の空隙部を拡大した様子(×10)

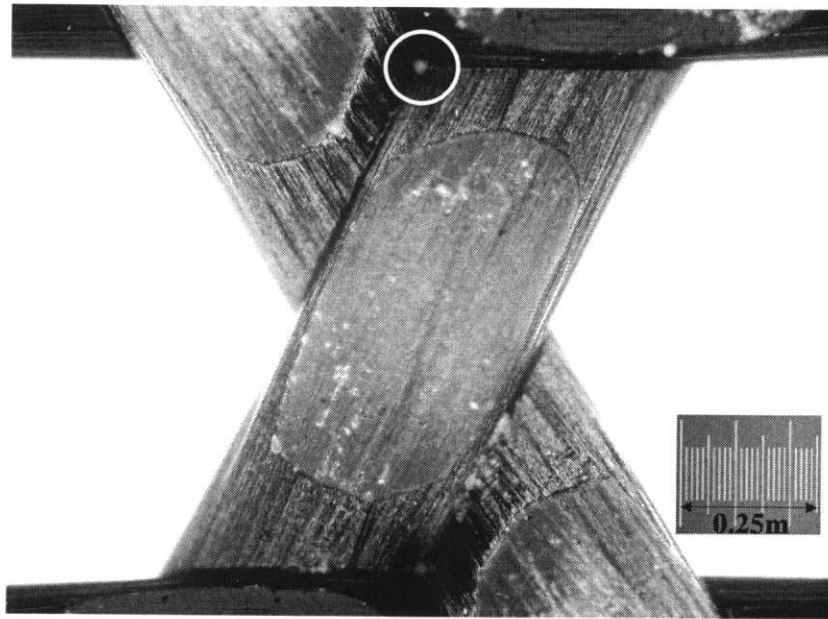


図 5.5 試験試料 SA-8005 の空隙部の様子(×10)

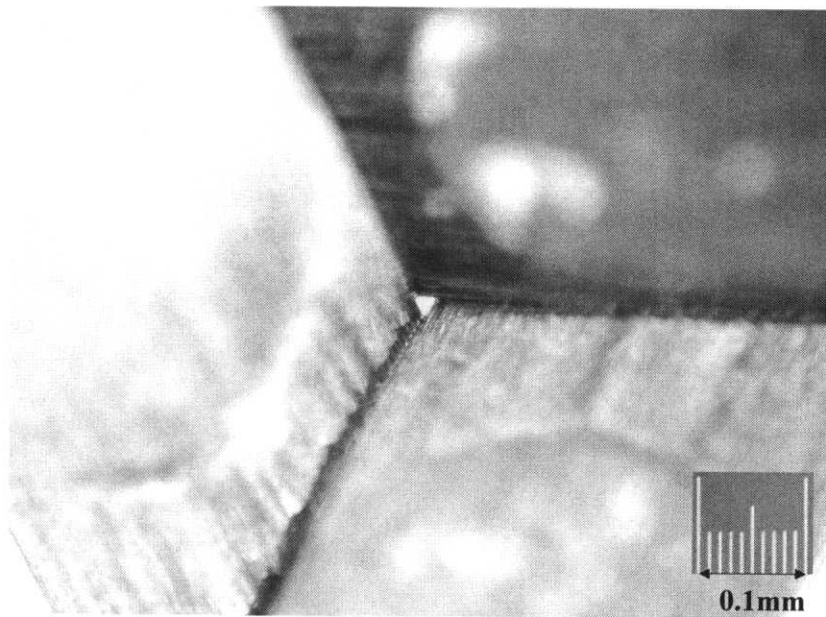


図 5.6 試験試料 SA-8005 の空隙部を拡大した様子(×20)

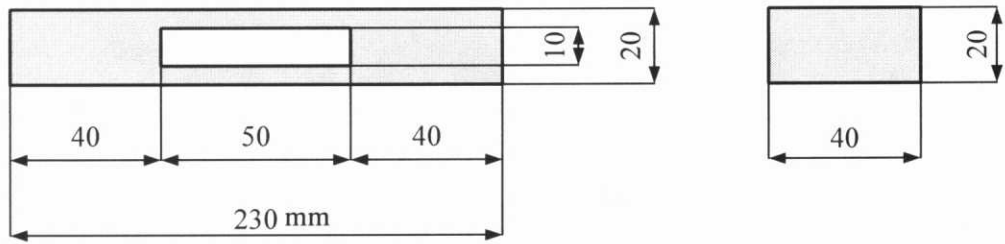


図 5.7 繊維束引張試験片固定台紙

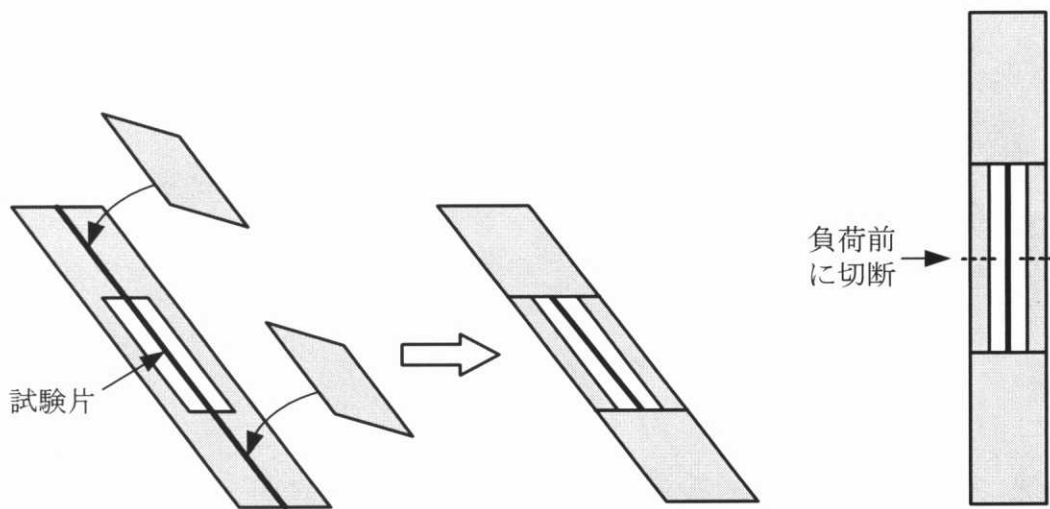


図 5.8 繊維束引張試験片作成方法

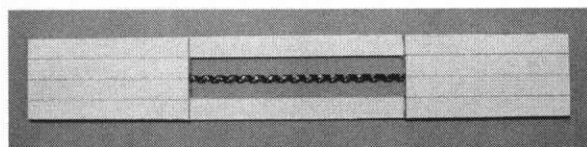


図 5.9 繊維束引張試験片(SK-802)

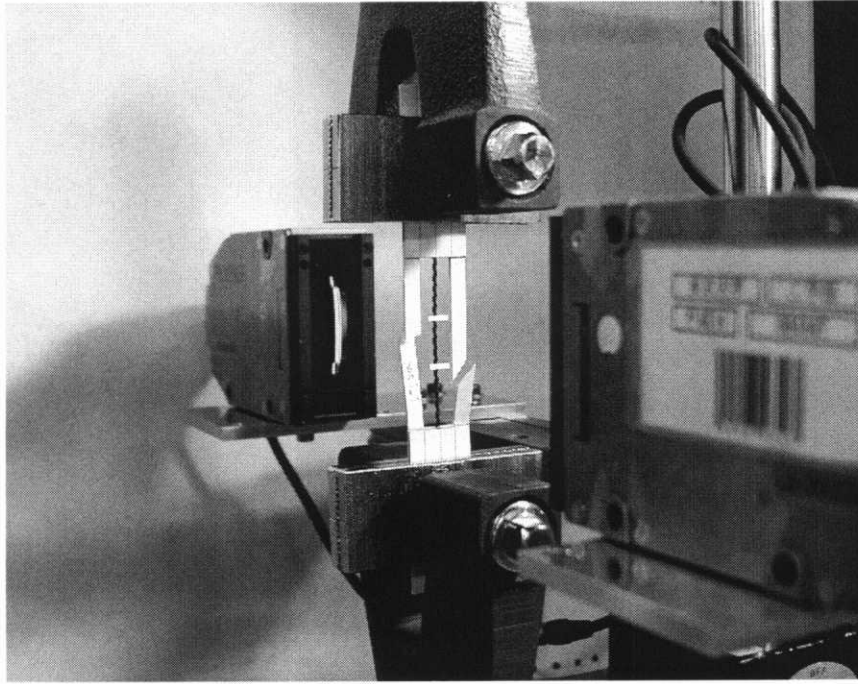


図 5.10 繊維束引張試験の様子

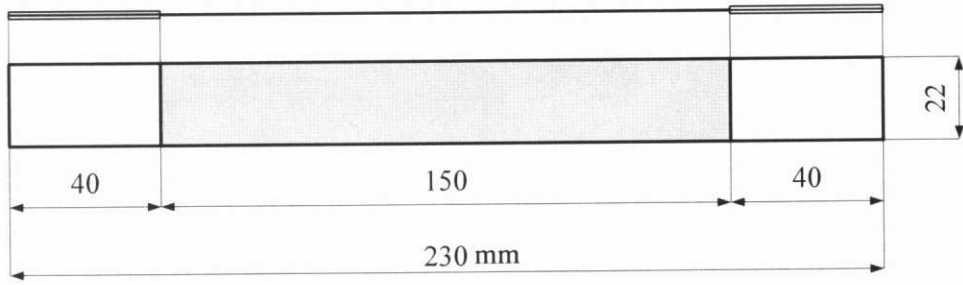
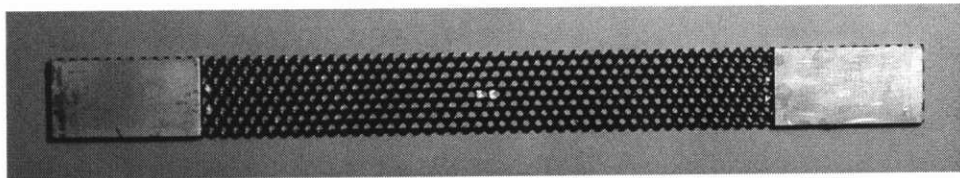
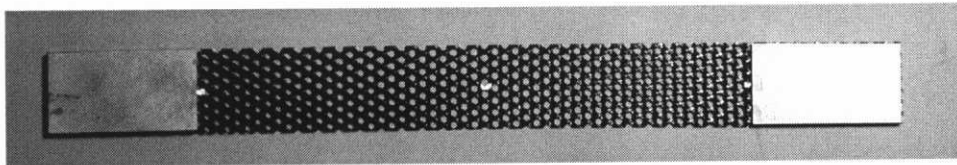


図 5.11 引張試験片寸法



(a) 0 度方向引張試験片



(b) 90 度方向引張試験片

図 5.12 引張試験片(SK-802)

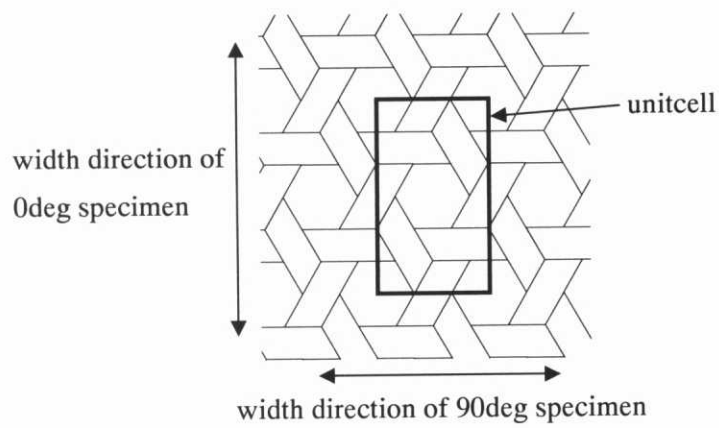


図 5.13 幅方向寸法が異なる試験片におけるユニットセル

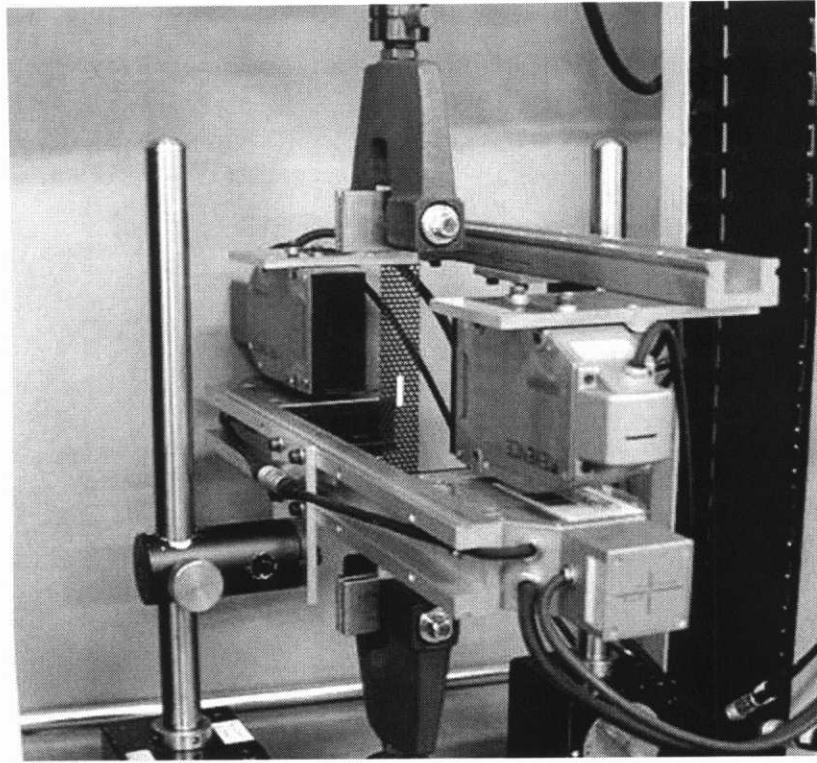


図 5.14 引張試験全景

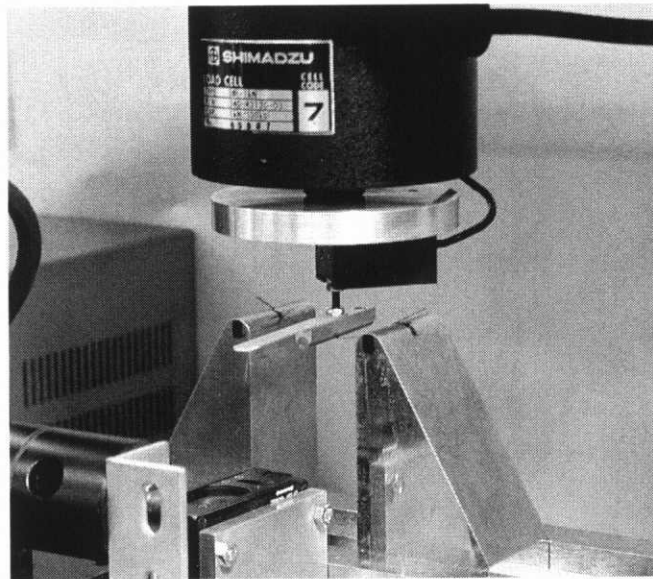


図 5.15 繊維束三点曲げ試験全景

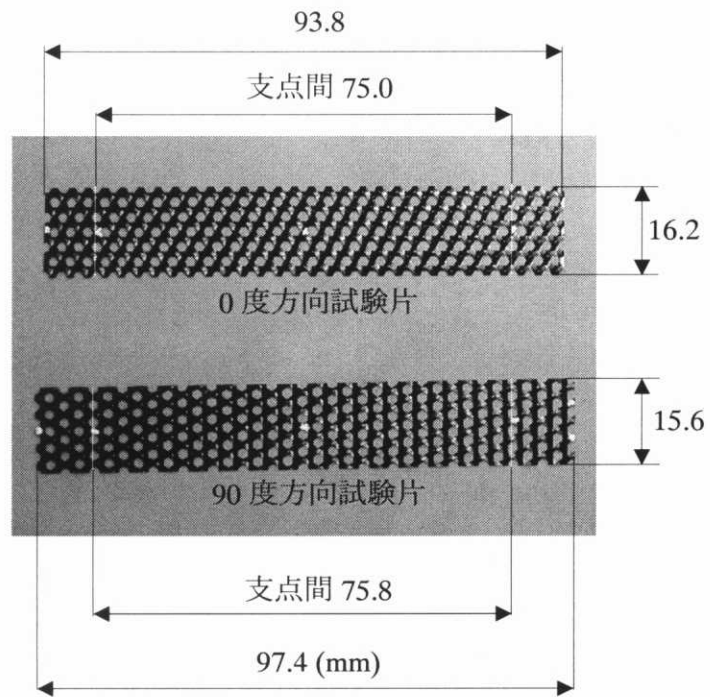


図 5.16 三点曲げ試験片(SK-802)

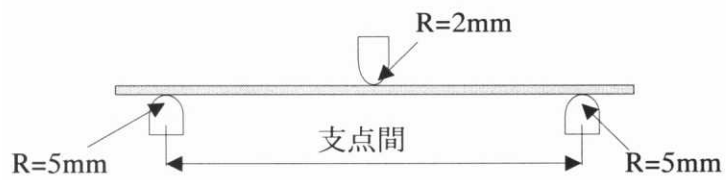
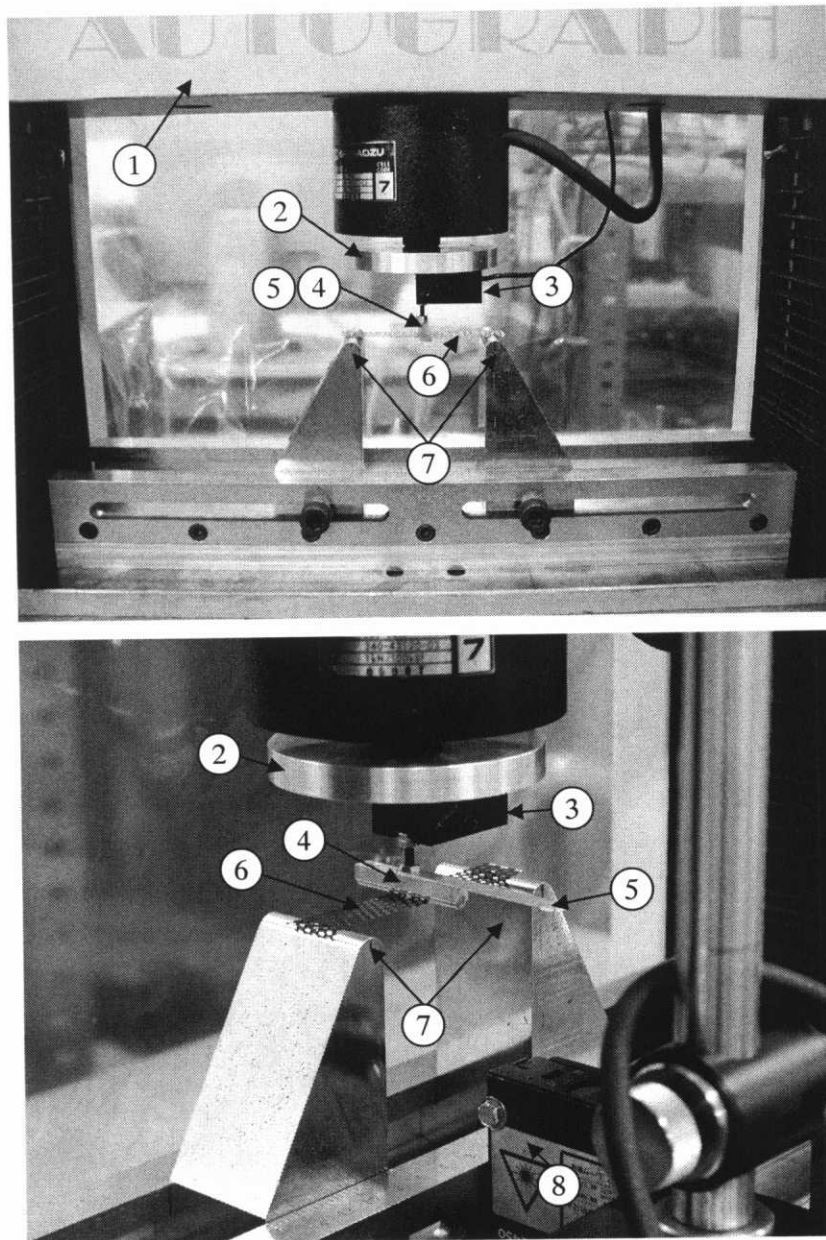
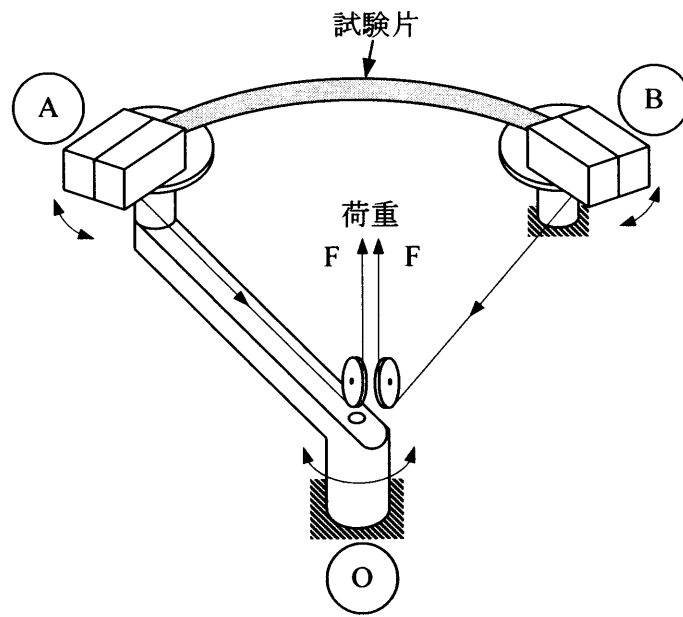


図 5.17 三点曲げ試験圧子および支点先端寸法

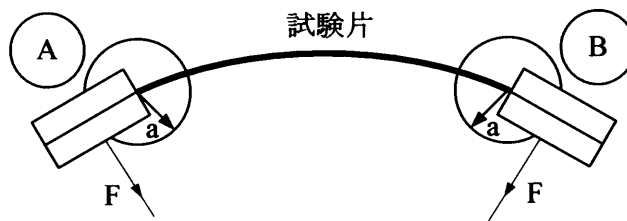


①	荷重試験機クロスヘッド
②	ロードセル固定用治具
③	ロードセル
④	圧子
⑤	圧子変位計測用ターゲット
⑥	試験片
⑦	支点
⑧	レーザー変位計

図 5.18 三点曲げ試験全景

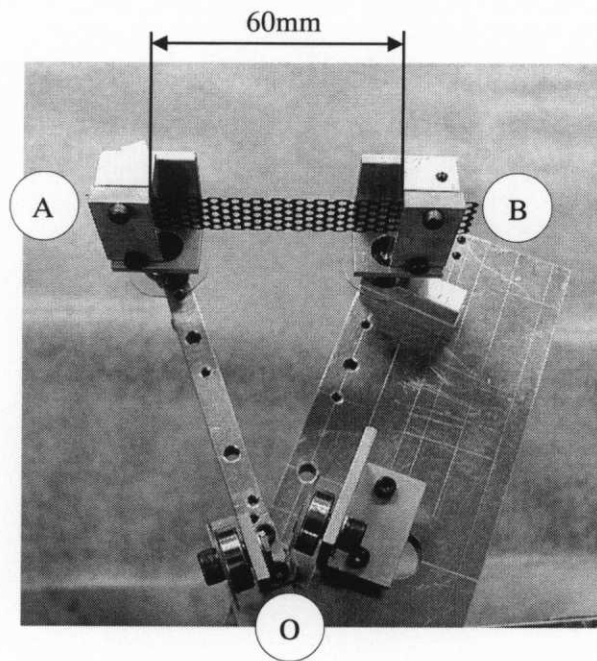


(a) 試験装置全体

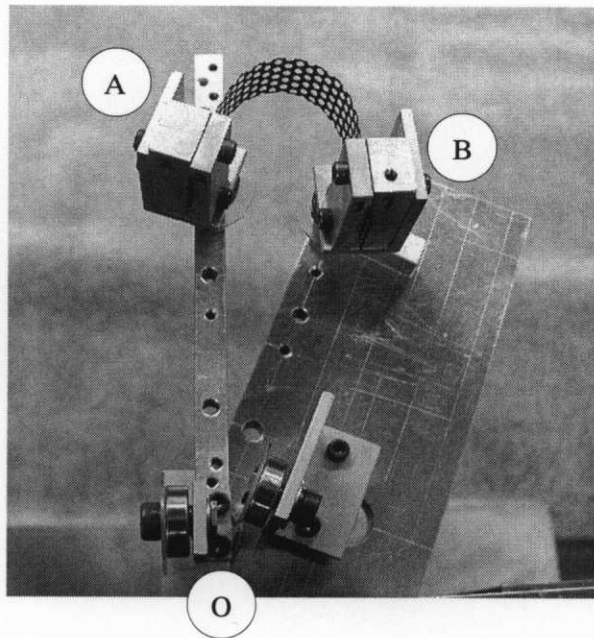


(b) 試験片つかみ部

図 5.19 純曲げ試験装置概略図



(a) 負荷前



(b) 負荷後

図 5.20 純曲げ試験の様子

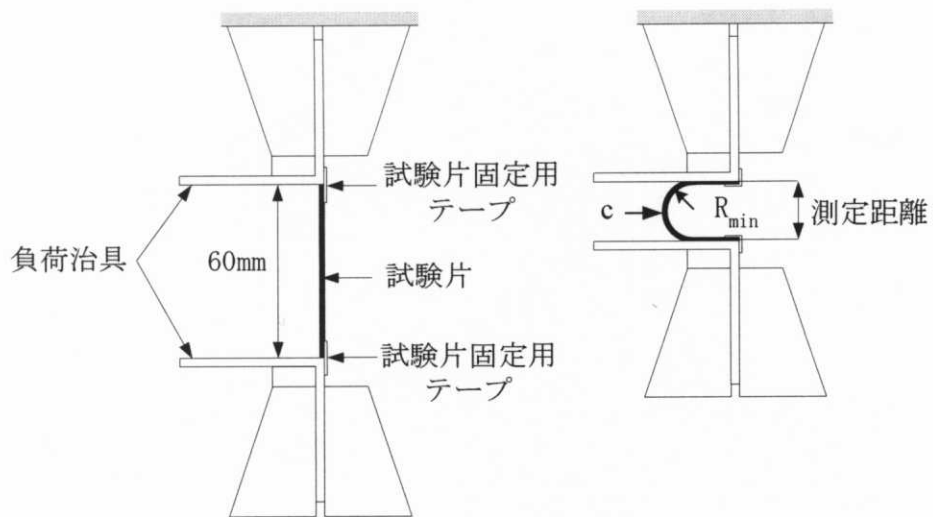
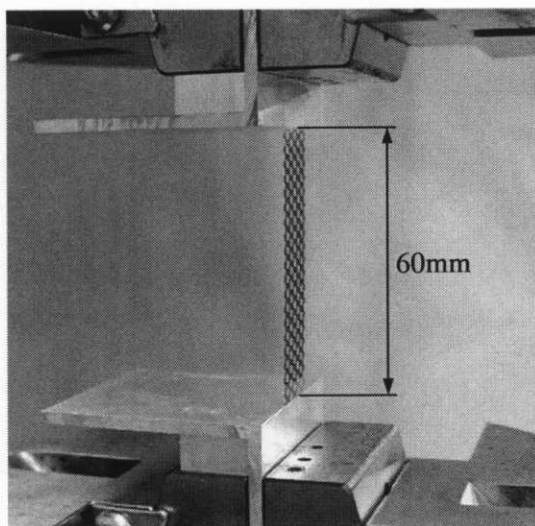
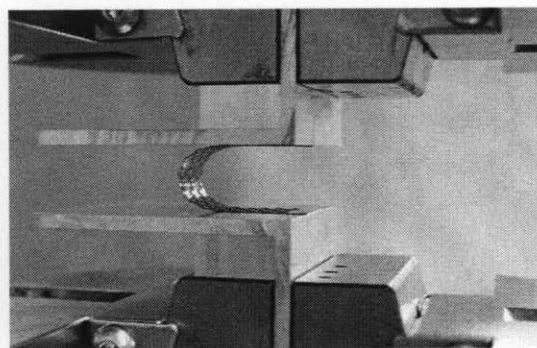


図 5.21 曲げ破断曲率評価試験法概略図



(a) 負荷前



(b) 負荷後

図 5.22 曲げ破断曲率評価試験の様子

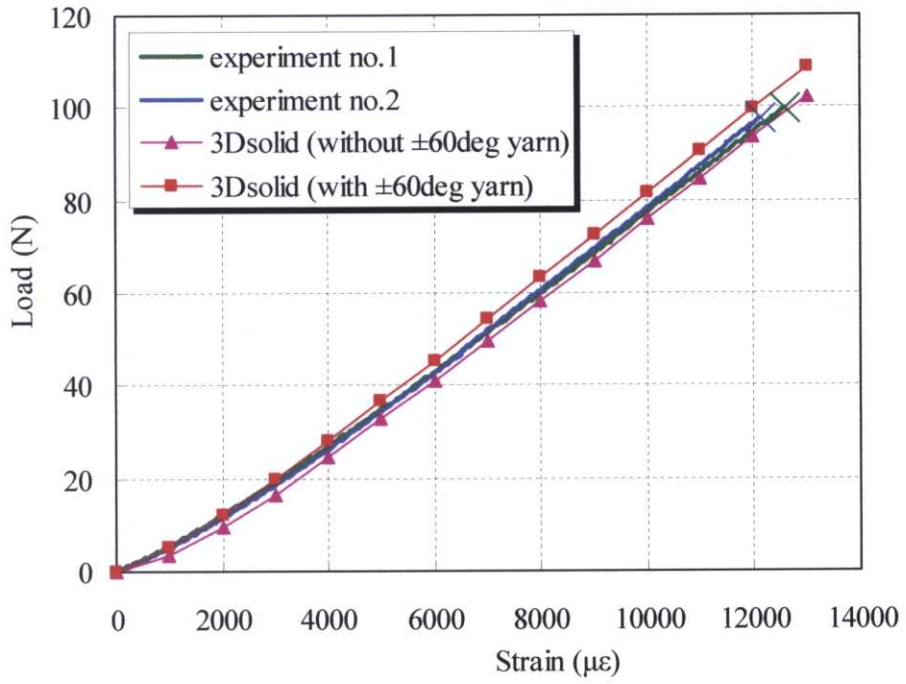


図 5.23 繊維束の引張荷重 vs.ひずみ曲線(SK-802)

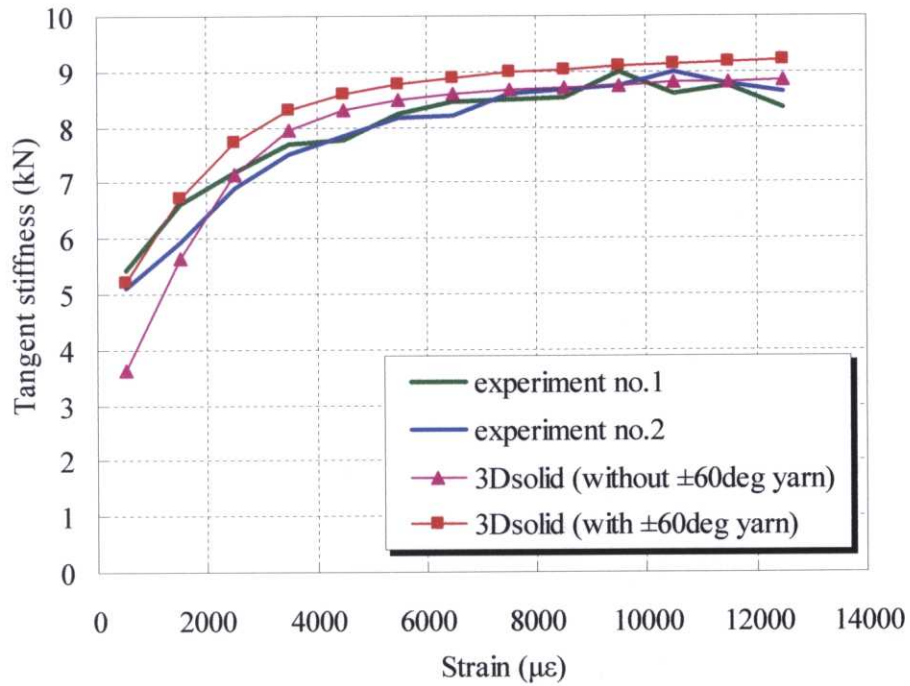


図 5.24 繊維束の接線剛性 vs.ひずみ(SK-802)

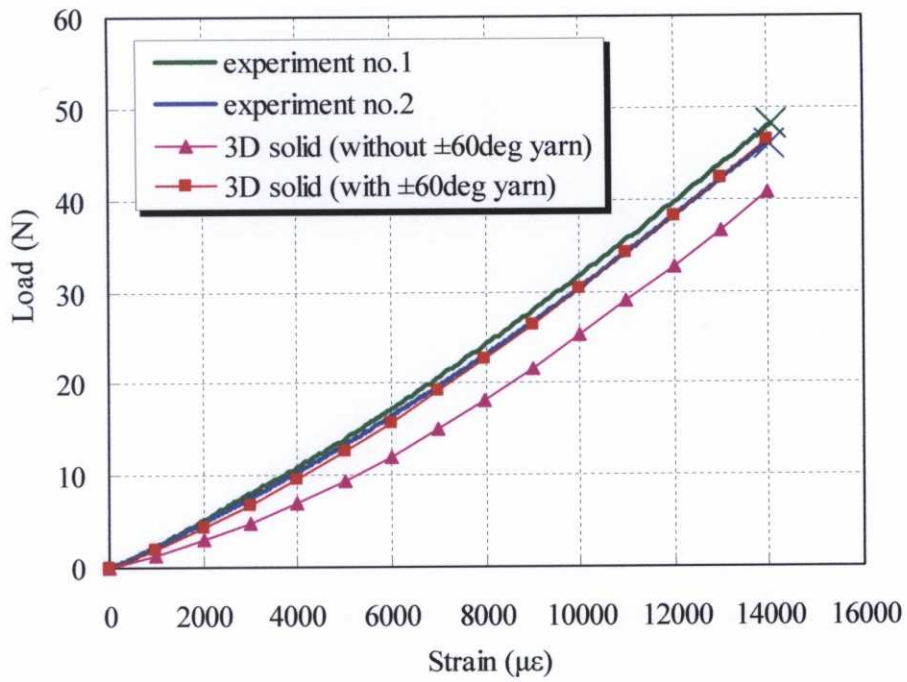


図 5.25 繊維束の引張荷重 vs.ひずみ曲線(SA-8005)

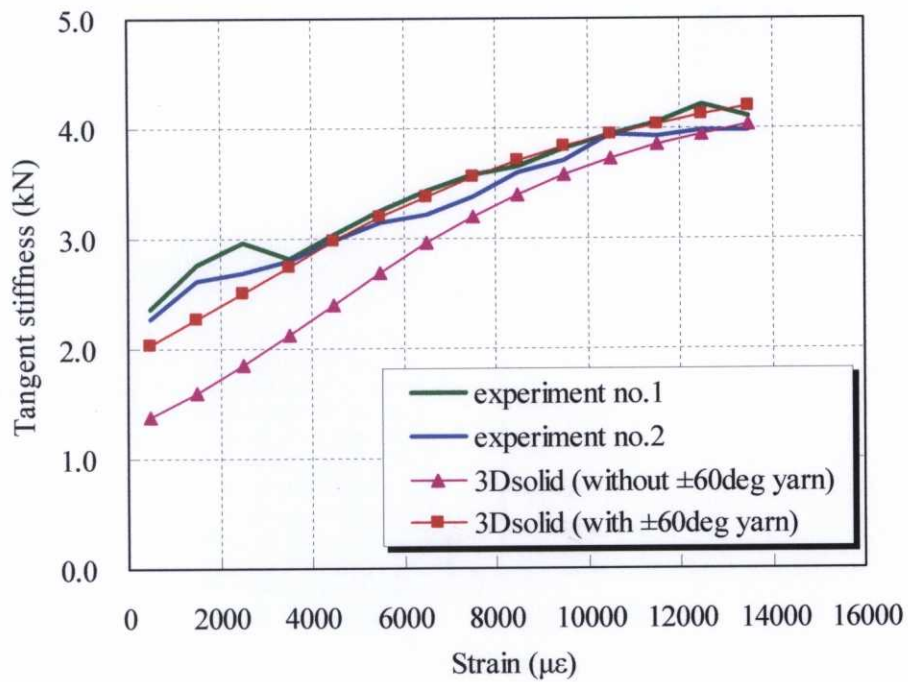


図 5.26 繊維束の接線剛性 vs.ひずみ(SA-8005)

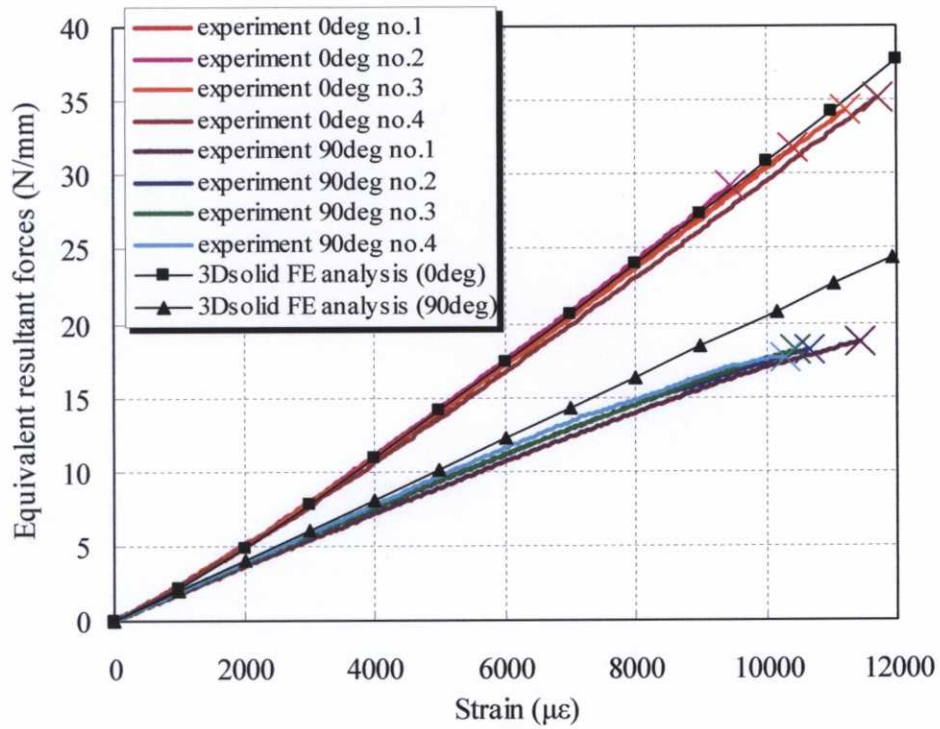


図 5.27 引張試験結果 合応力 vs. ひずみ曲線(SK-802)

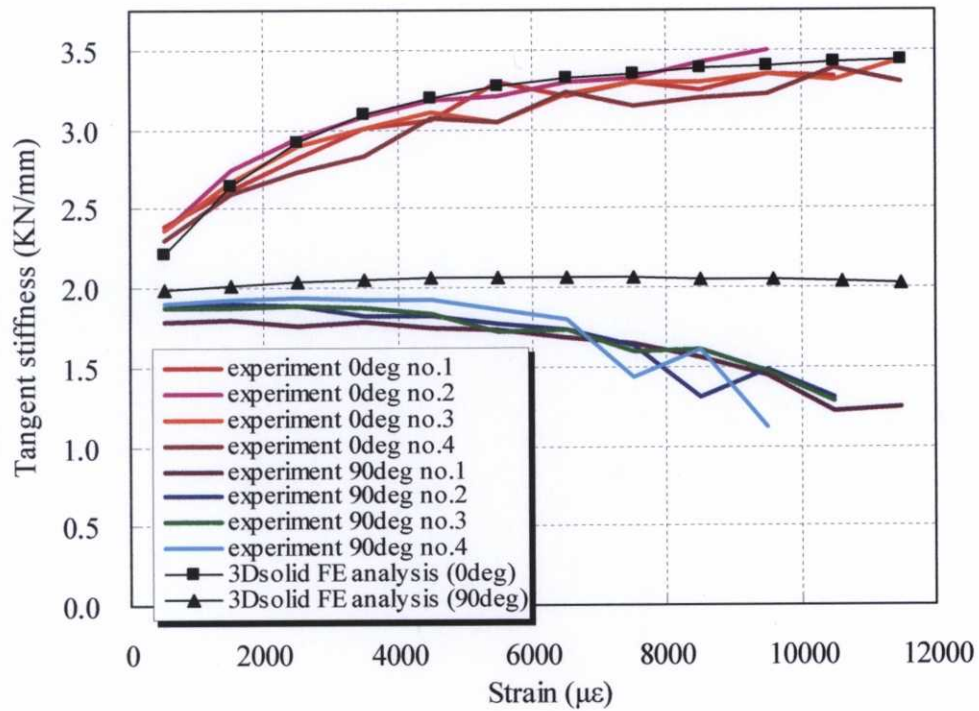


図 5.28 引張試験結果 接線剛性 vs. ひずみ曲線(SK-802)

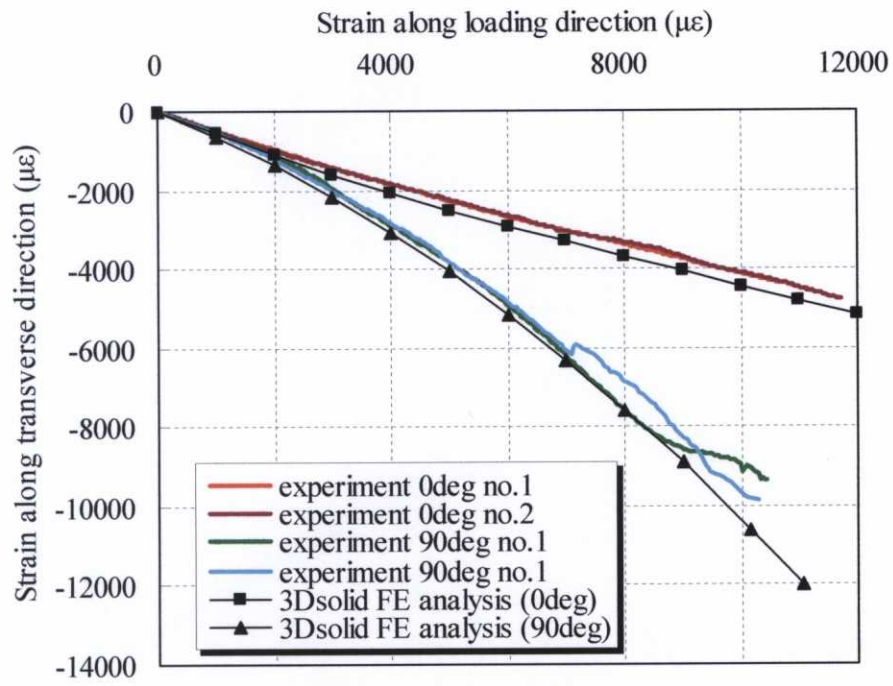


図 5.29 引張試験結果 負荷方向ひずみ vs.負荷方向に垂直な方向のひずみ(SK-802)

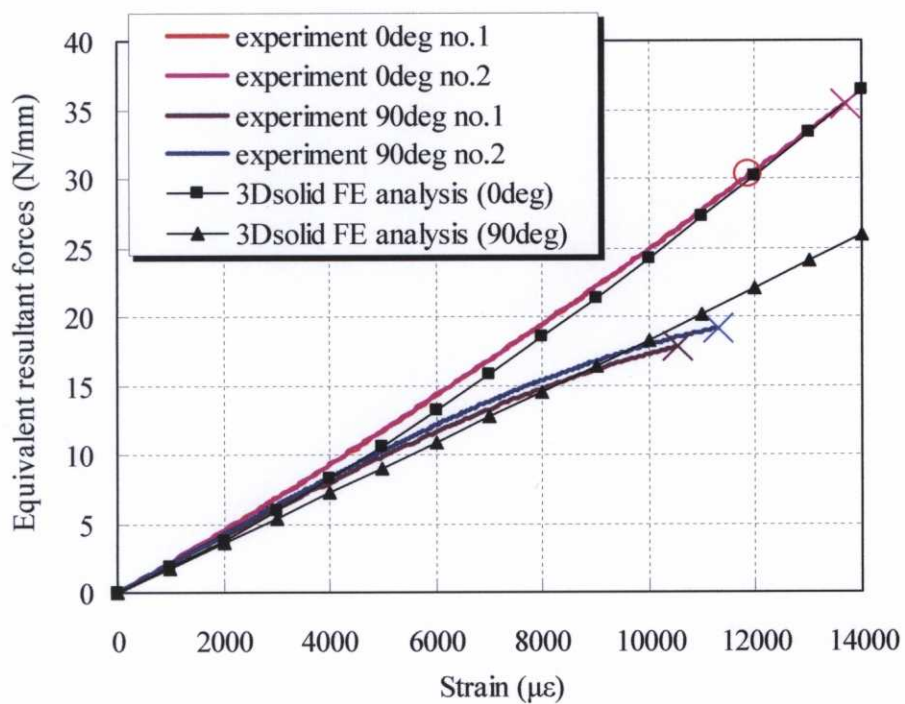


図 5.30 引張試験結果 荷重 vs.ひずみ曲線(SA-8005)

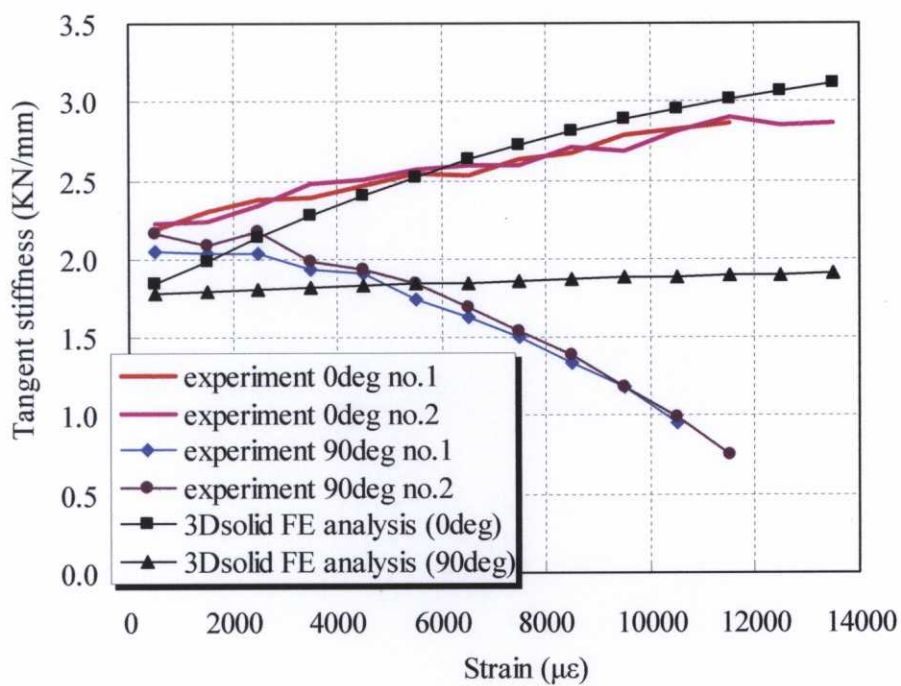


図 5.31 引張試験結果 接線剛性 vs.ひずみ曲線(SA-8005)

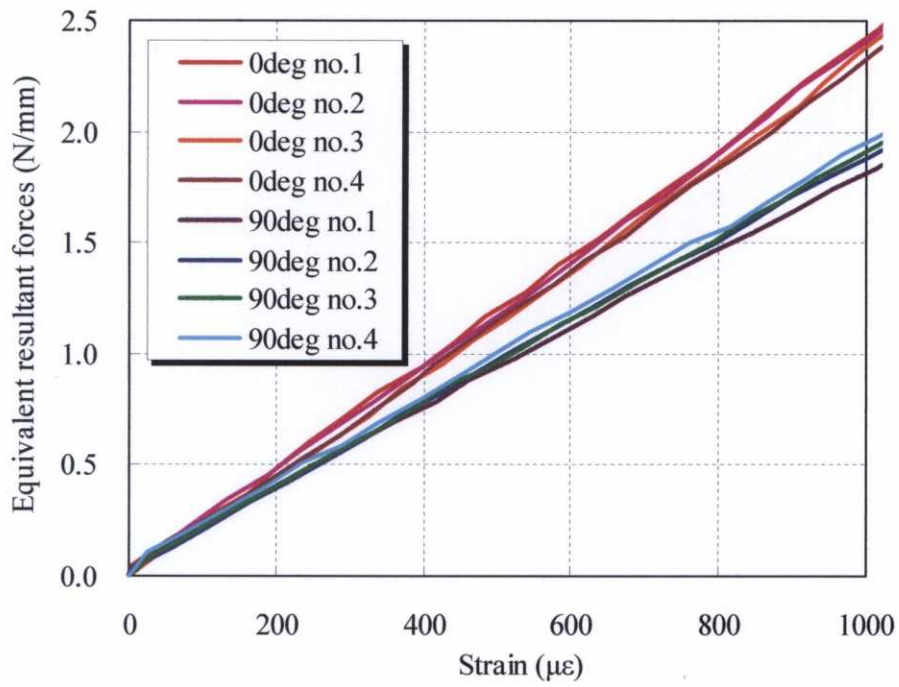


図 5.32 引張試験結果(伸びひずみ 0~1000 $\mu\epsilon$ における合応力 vs.ひずみ曲線)(SK-802)

表 5.4 初期引張剛性値(SK-802)

Specimen	Tensile stiffness (kN/mm)	
	0deg	90deg
1	2.391	1.782
2	2.371	1.873
3	2.362	1.874
4	2.308	1.895
Mean	2.358	1.856

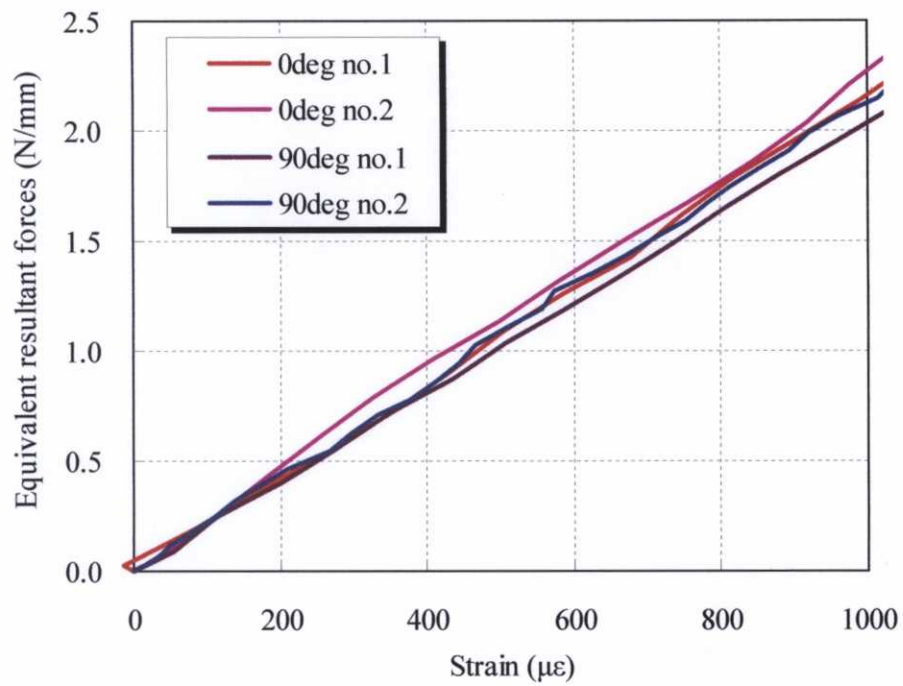


図 5.33 引張試験結果(伸びひずみ 0~1000 $\mu\epsilon$ における合応力 vs.ひずみ曲線)(SA-8005)

表 5.5 初期引張剛性値(SA-8005)

Specimen	Tensile stiffness (kN/mm)	
	0deg	90deg
1	2.150	2.043
2	2.225	2.143
Mean	2.188	2.093

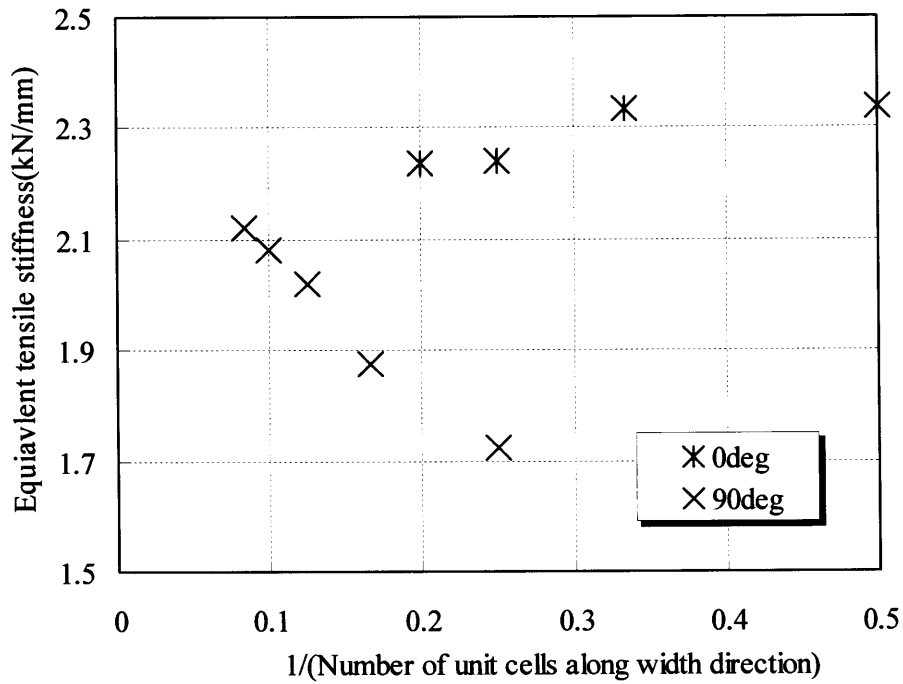


図 5.34 試験片幅方向寸法を変化させた時の引張試験結果 (SK-802)

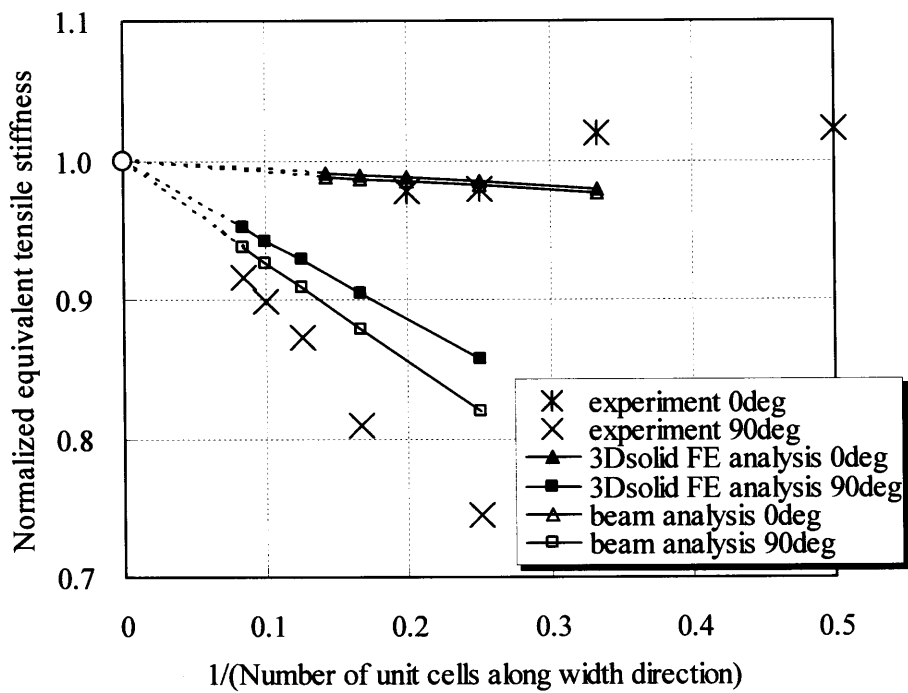


図 5.35 試験片幅方向ユニット数を変化させた時の見掛けの引張剛性の変化 (SK-802)

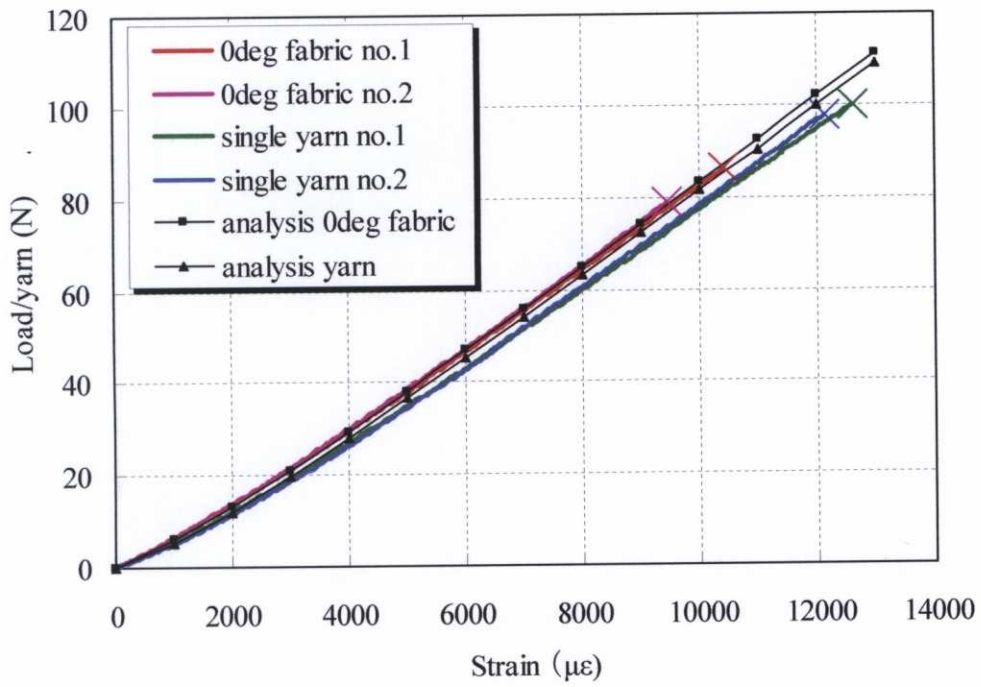


図 5.36 引張試験結果 荷重 vs.ひずみ曲線(SK-802)

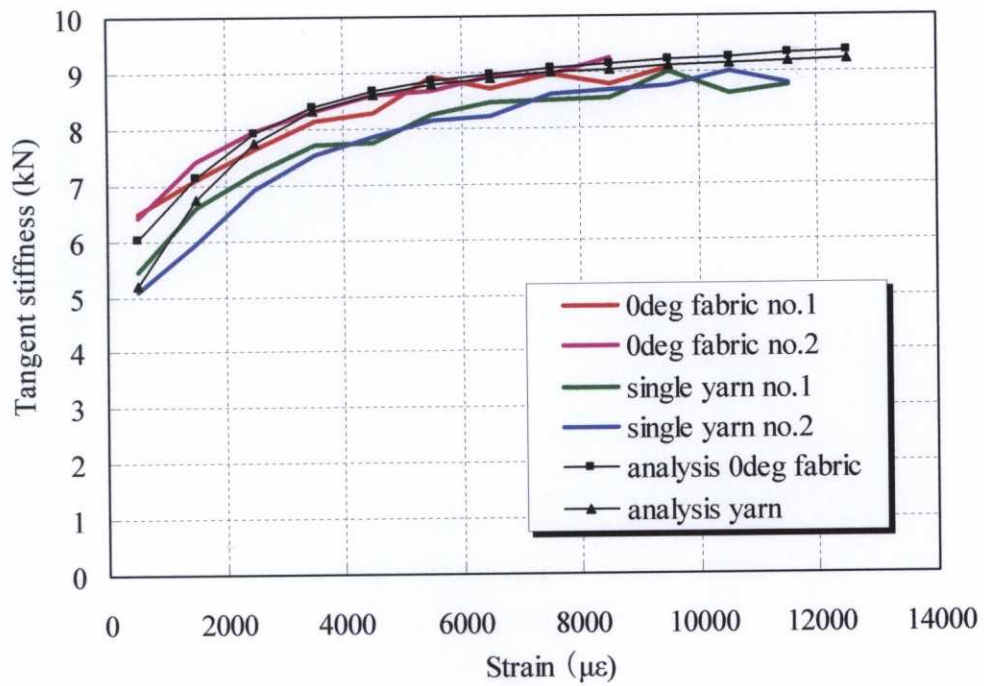


図 5.37 引張試験結果 接線剛性 vs.ひずみ曲線 (SK-802)

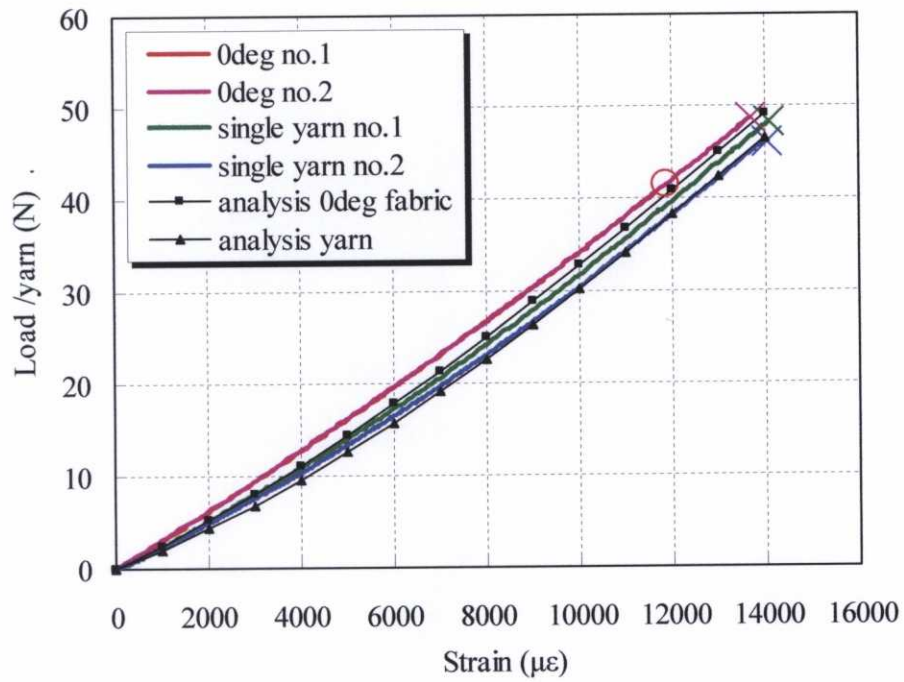


図 5.38 引張試験結果 荷重 vs.ひずみ曲線 (SA-8005)

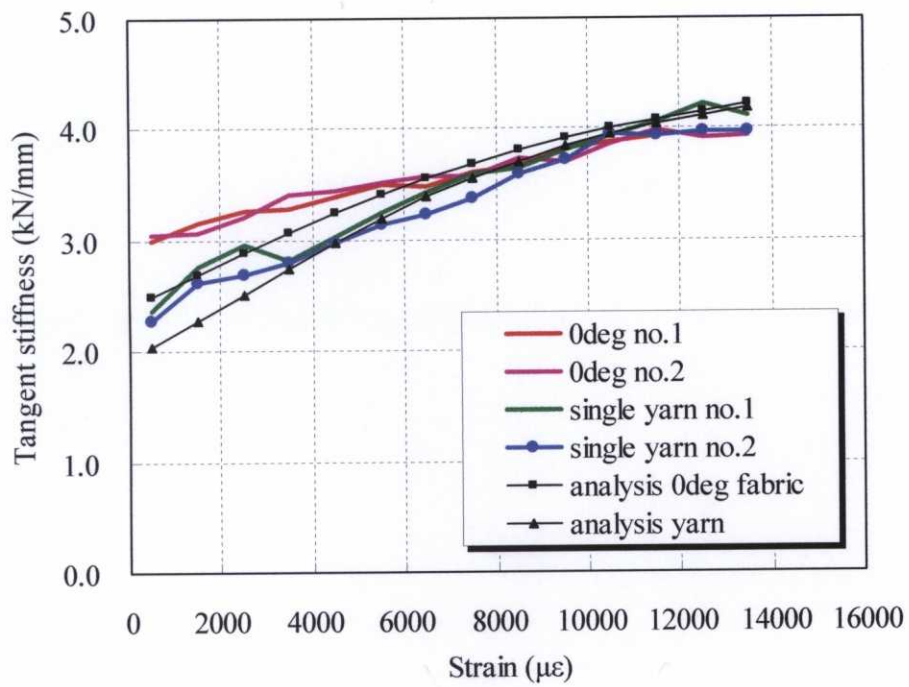


図 5.39 引張試験結果 接線剛性 vs.ひずみ曲線 (SA-8005)

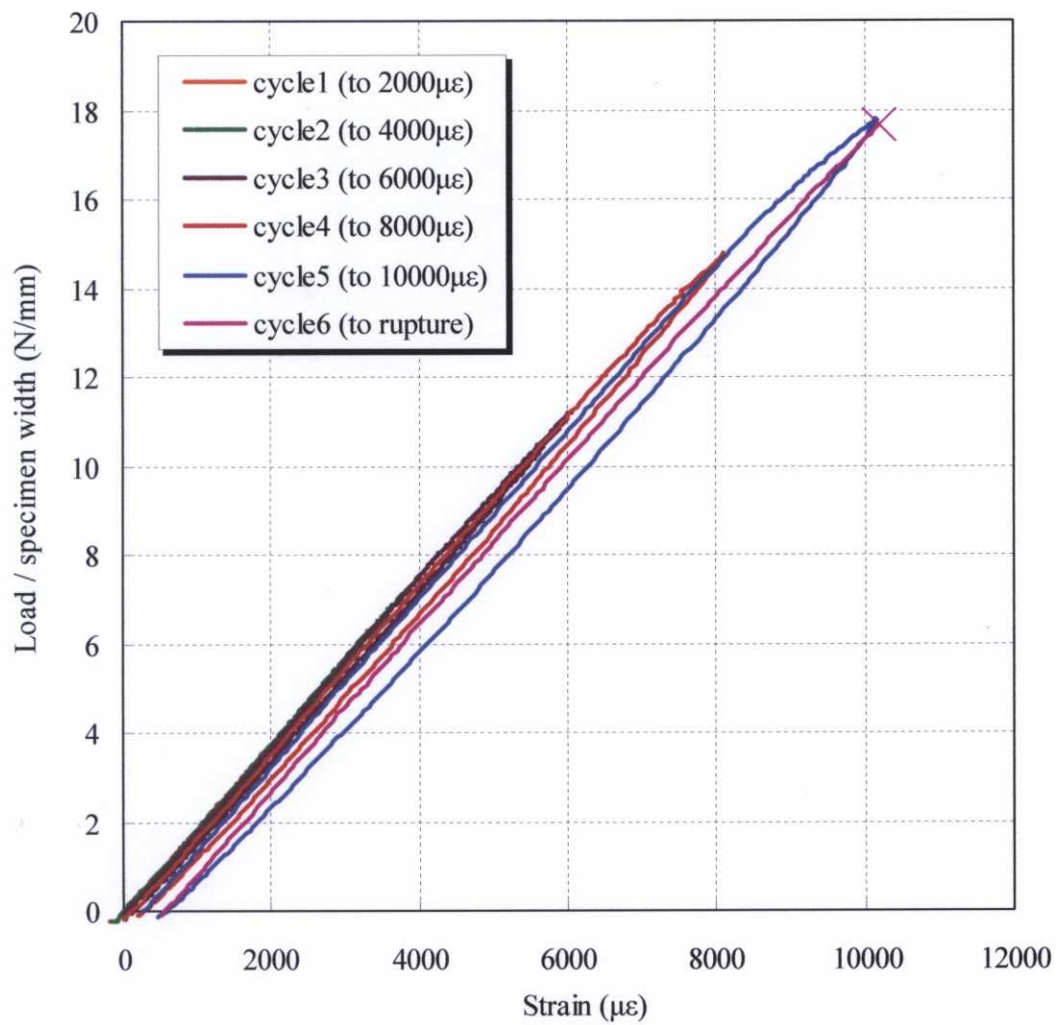


図 5.40 除荷がある場合の 90 度方向引張試験結果 (合応力 vs.ひずみ曲線, SK-802)

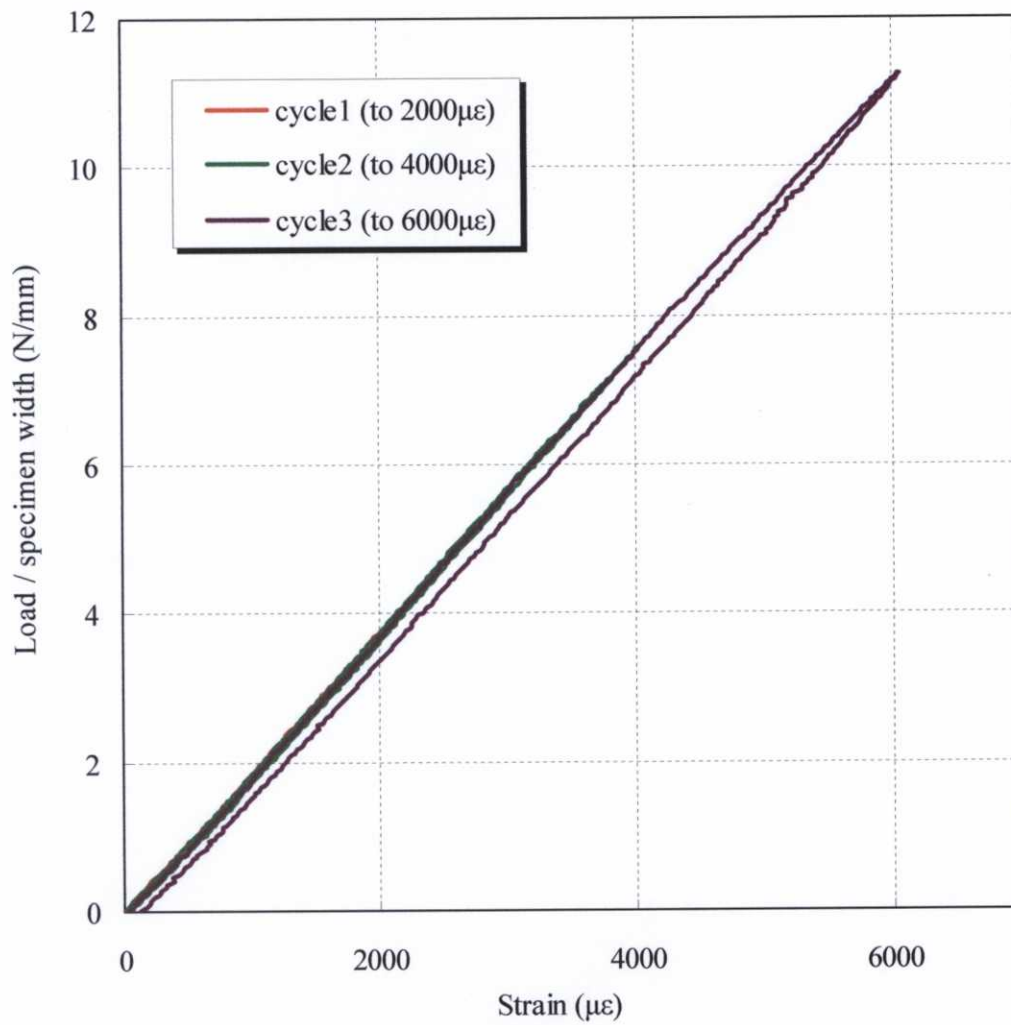


図 5.41 除荷がある場合の 90 度方向引張試験結果 (応力 vs.ひずみ曲線, 最初の 3 サイクル, SK-802)

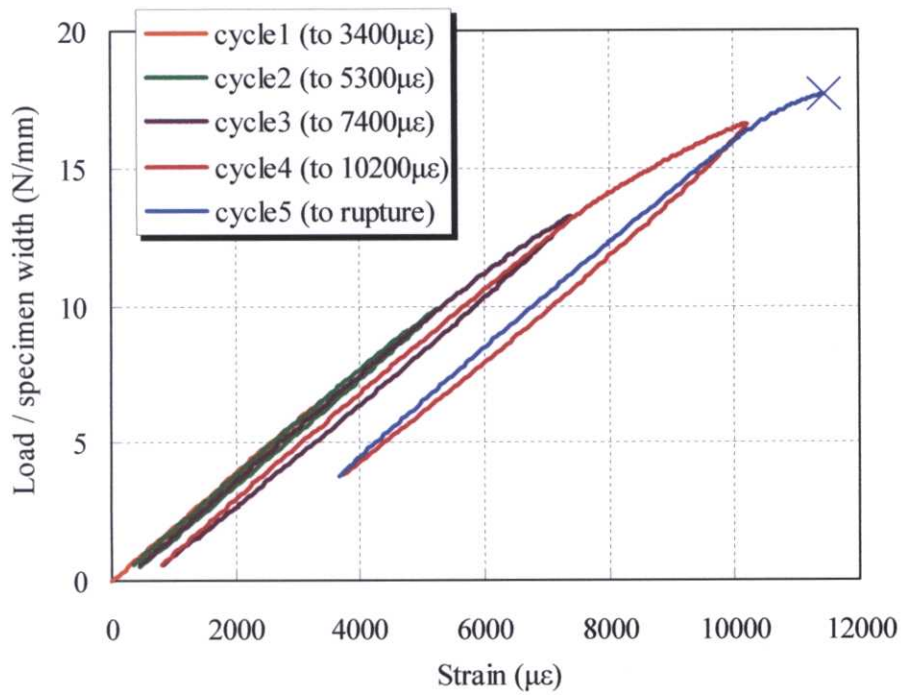


図 5.42 除荷がある場合の 90 度方向引張試験結果 (合応力 vs.ひずみ曲線, SA-8005)

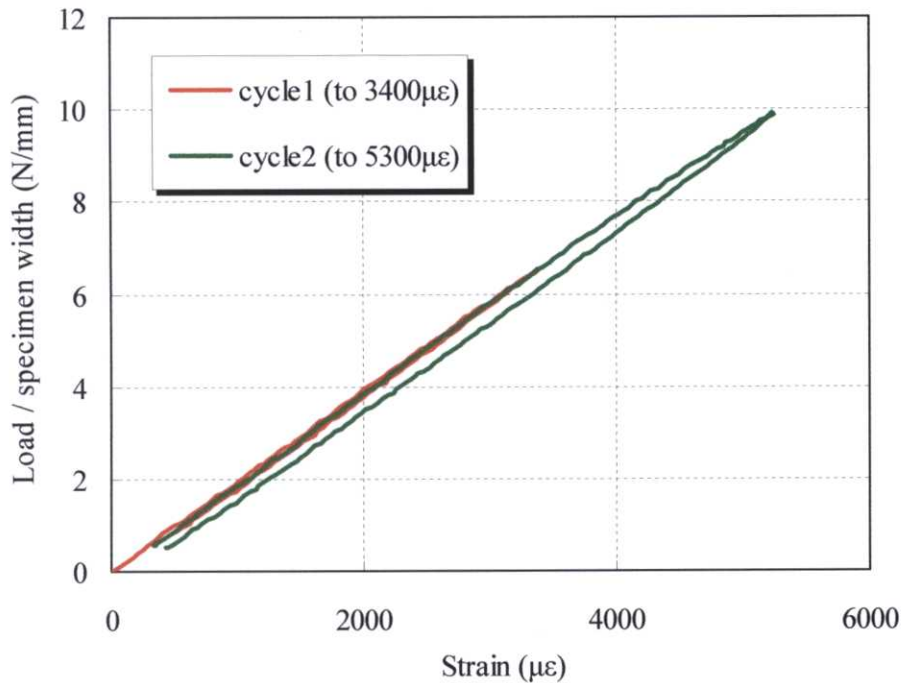
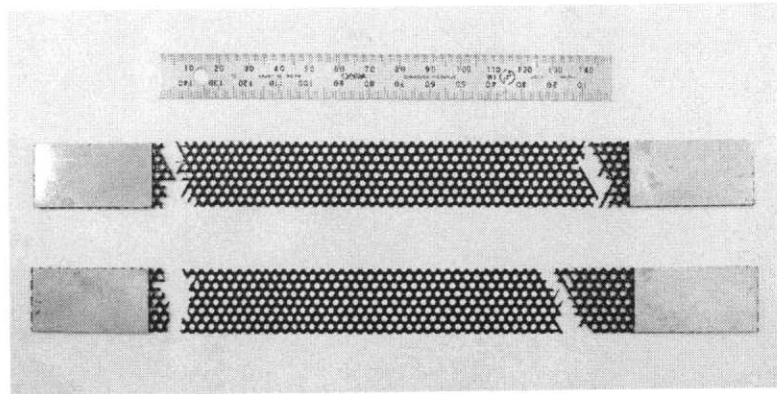
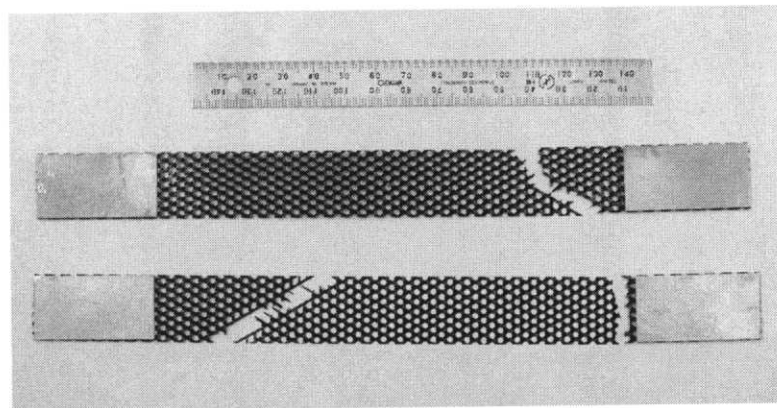


図 5.43 除荷がある場合の 90 度方向引張試験結果 (合応力 vs.ひずみ曲線, 最初の 2 サイクル, SA-8005)



(a) 0deg 方向試験片(上: no.1, 下 no.2)



(b) 90deg 方向試験片(上: no.1, 下 no.2)

図 5.44 破断後の引張試験片の様子(SK-820)

表 5.6 破断ひずみおよび破断荷重値(SK-802)

試験片名	破断ひずみ	破断荷重/試験片幅
	$\mu\epsilon$	N/mm
0deg no.1	10420	31.82
0deg no.2	9455	29.25
0deg no.3	11219	34.37
0deg no.4	11711	35.19
ave.	10701	32.66
90deg no.1	11446	18.76
90deg no.2	10654	18.14
90deg no.3	10445	18.12
90deg no.4	10283	17.63
ave.	10707	18.16

表 5.7 破断ひずみおよび破断荷重値(SA-8005)

試験片名	破断ひずみ	破断荷重/試験片幅
	$\mu\epsilon$	N/mm
0deg no.2	13688	35.39
90deg no.1	10526	17.81
90deg no.2	11296	19.12
ave.	10911	18.46

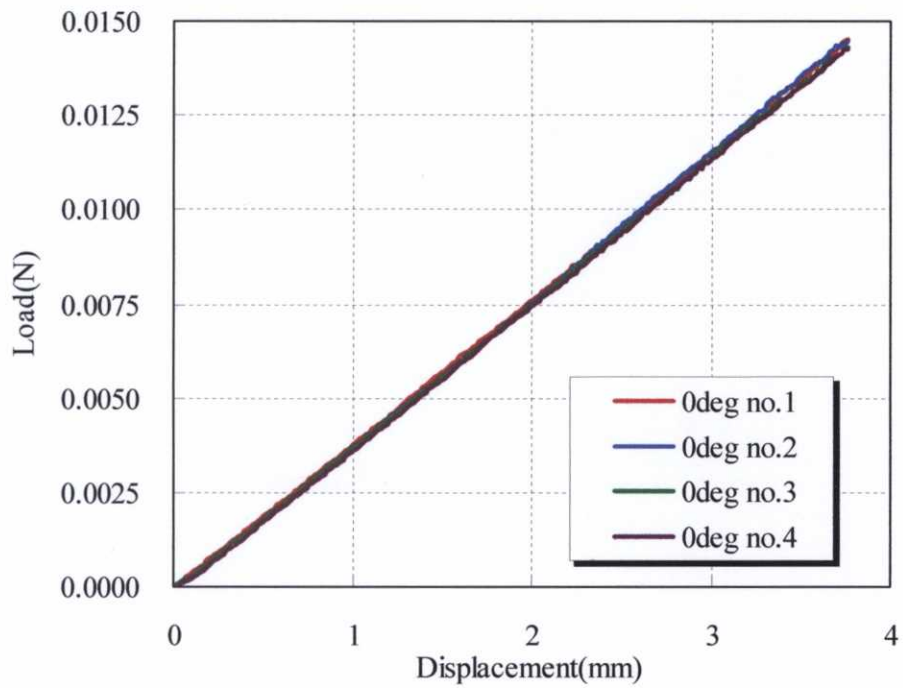


図 5.45 三点曲げ試験結果 荷重 vs.たわみ曲線 (0deg 方向試験)

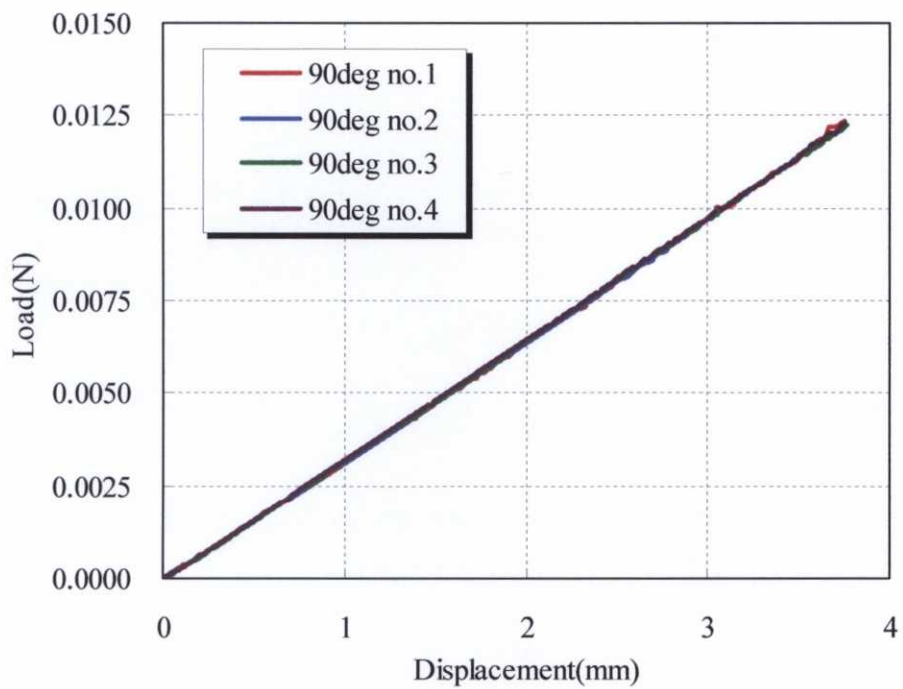


図 5.46 三点曲げ試験結果 荷重 vs.たわみ曲線 (90deg 方向試験)

表 5.8 三点曲げ試験による曲げ剛性測定値

Specimen	Bending stiffness (N·mm)	
	0deg	90deg
1	2.071	1.925
2	2.139	1.896
3	2.081	1.889
4	2.077	1.901
Mean	2.092	1.903

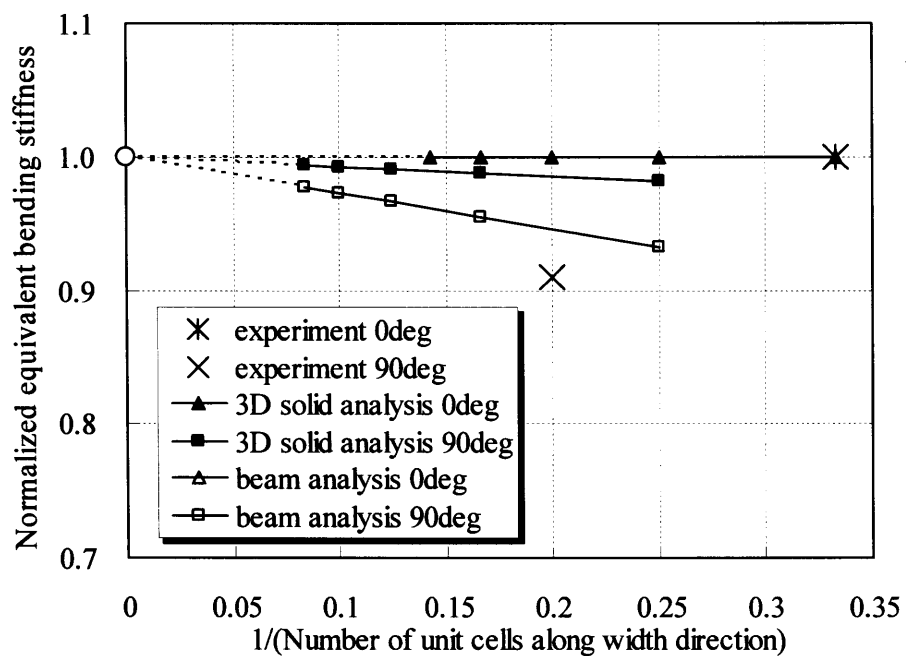


図 5.47 三点曲げ試験結果と自由端を有する場合の解析結果との比較

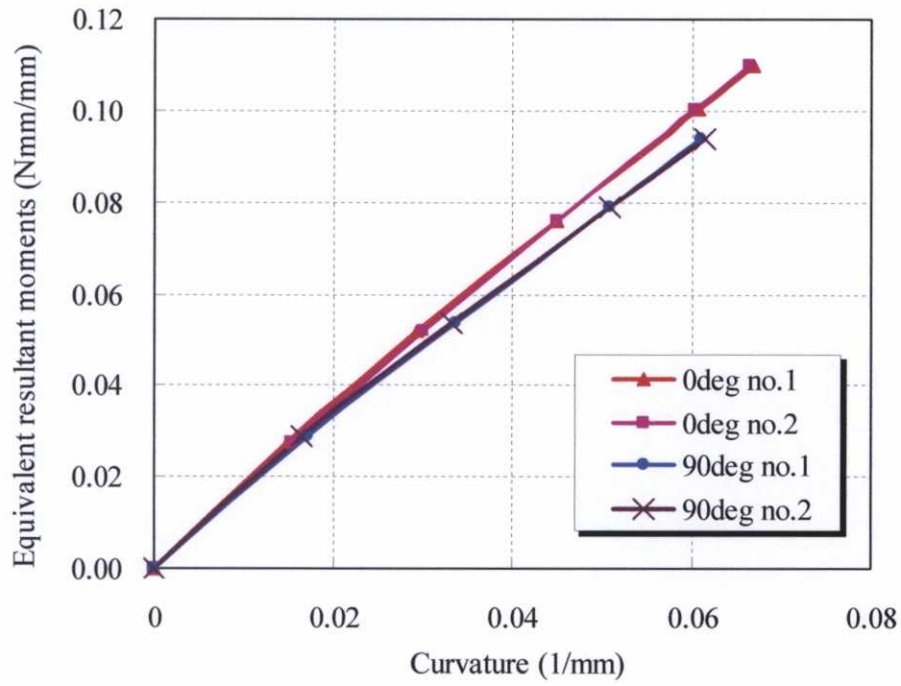


図 5.48 純曲げ試験結果 (モーメント vs.曲率曲線)

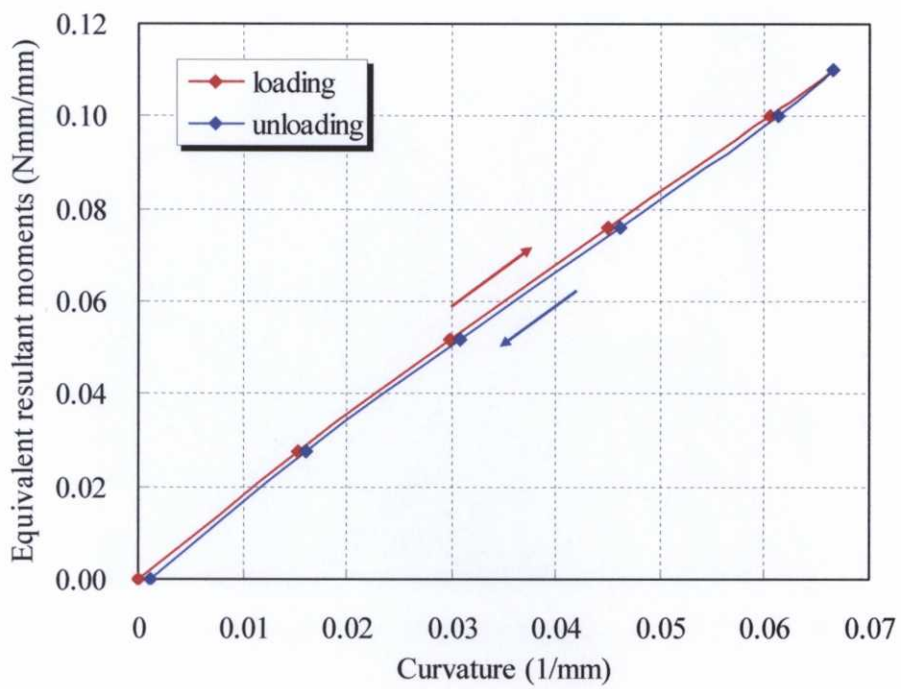


図 5.49 0度方向純曲げ試験除荷時の挙動

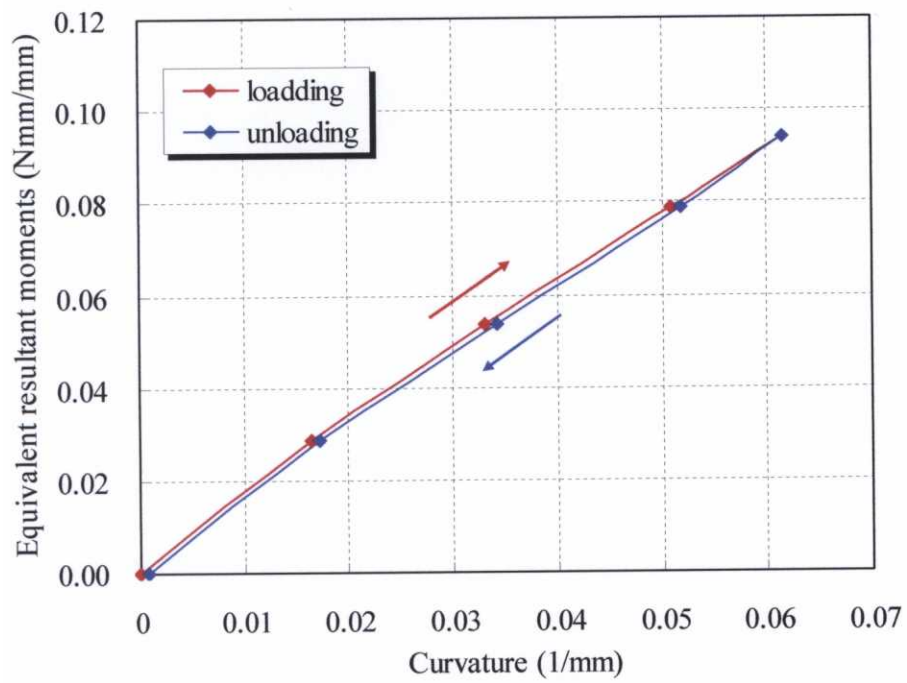


図 5.50 90 度方向純曲げ試験除荷時の挙動

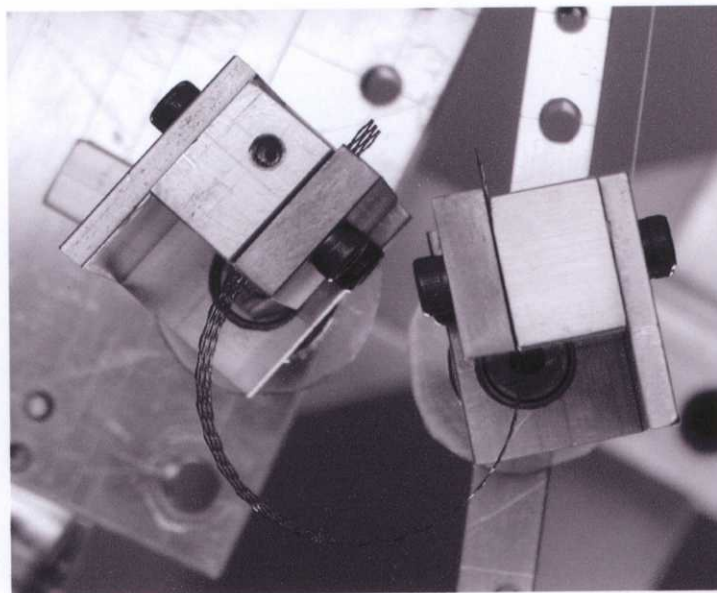


図 5.51 0 度方向純曲げ試験曲率 0.066(1/mm)時の変形の様子

表 5.9 純曲げ試験による曲げ剛性測定値

Specimen	Bending Stiffness (Nmm)	
	0deg	90deg
1	1.627	1.532
2	1.642	1.517
Mean	1.634	1.524

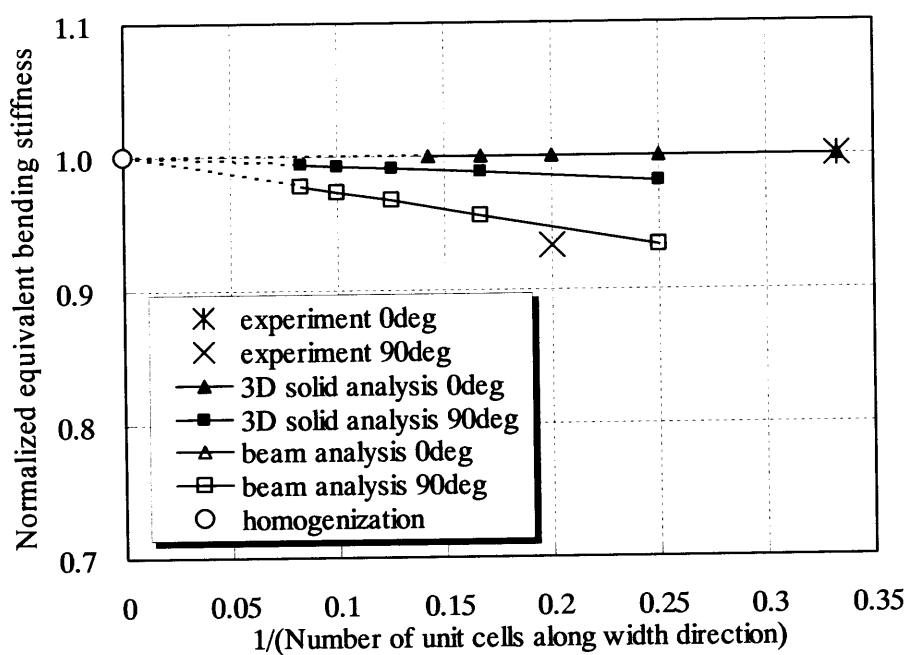
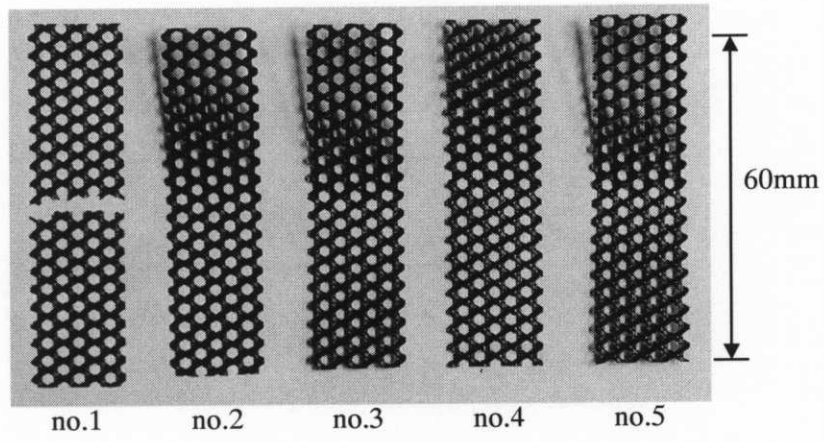


図 5.52 純曲げ試験結果と自由端を有する場合の解析結果との比較

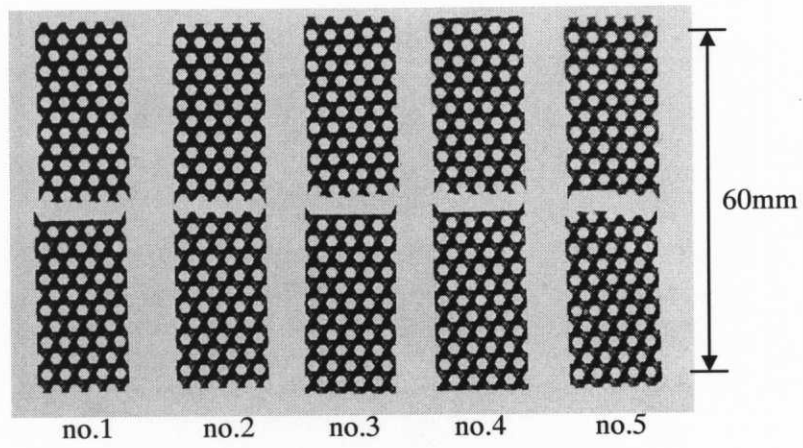
表 5.10 最小破断曲率半径测定结果

Specimen	Minimum radius R_{min} (mm)	
	0deg	90deg
1	2.40*	2.23
2	2.13	1.90
3	2.28	2.28
4	2.35	2.30
5	2.43	2.10
Mean	2.29	2.16

* 1.25(mm) at ± 60 yarn fracture



(a) 0度方向試験片



(b) 90度方向試験片の様子

図 5.53 破断後の試験片の様子

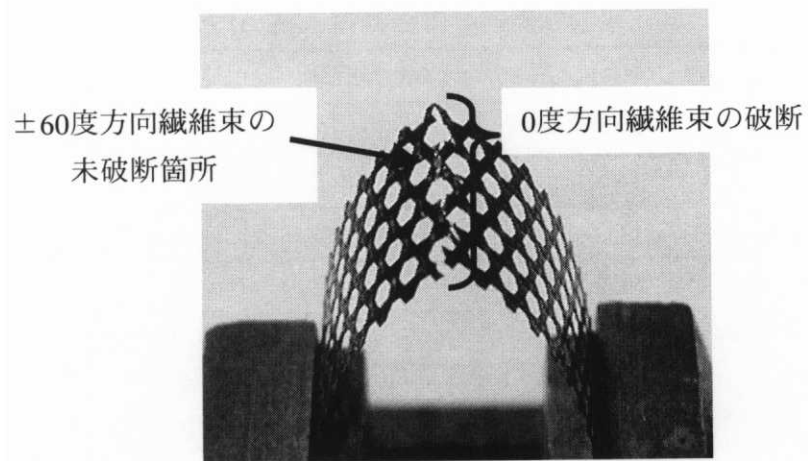


図 5.54 0度方向試験片破断後の様子

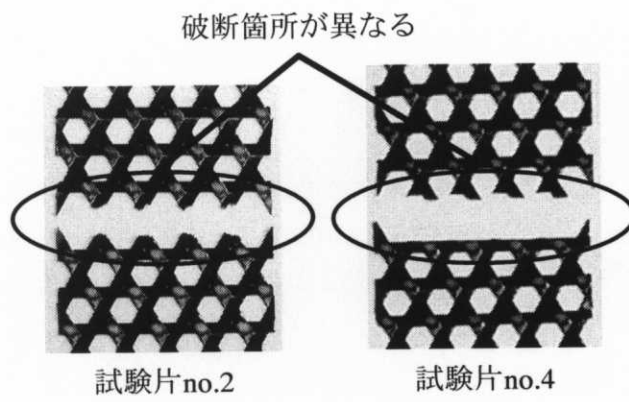


図 5.55 90度方向試験片破断後の様子

第6章 結論

本論文では三軸織物複合材料の力学的特性を明らかにすることを目的とし、次の手順に従い研究を実施した。

第1章では、三軸織物複合材料の力学的特性に関する従来の研究をまとめ、問題点を抽出した。

第2章では、対象とする織物複合材料をこれと等価な均質体と見なした場合の力学的特性の解析法を示した。その際、構造材料として最優先に要求される面内特性のみならず、展開構造物に適用する際に要求される収納性の評価などに用いるべく、面外の特性も解析可能な手法を示した。解析に際し対象とする材料が不均質ではあるがその面内に周期的な構造を有することを利用して均質化法を適用し、単位周期領域のみを解析対象として、これに周期境界条件を考慮して当材料と等価な力学的特性を解析する手法を示した。また上記の単位周期領域を数値的に解析する方法として有限要素法を用いその定式化を示した。さらにこの定式化に基づき、幾何学的非線形性を考慮した解析に適用する方法を示した。

第3章では、当材料の本質的な力学的特性を評価するための簡易なモデル化として、当材料を構成する繊維束を梁(**beam**)でモデル化し繊維束の交点部においてこれを連結した解析モデルを提案した。この解析モデルに第2章で示す均質化法を適用する方法を示し、その定式化を示した。

第4章では、第2章、第3章に示した解析方法を、三軸織物複合材料に適用して解析した結果を示した。その際解析モデルを作成する詳細な方法についても述べ、三次元有限要素解析モデルとの整合性の観点から第3章に示した梁連結モデルを改良する方法についても述べた。解析結果としてまずは当材料と等価な平板の剛性を算出した結果を示した。またこの剛性を複合材料積層板の剛性と比較することにより、当材料の特徴的な性質を明らかにした。次に、当材料の力学的特性を実験的に評価する場合を想定して、当材料から有限な寸法を有するサンプル取り出しこれに一軸の引張および曲げを負荷した場合の解析を実施し、サンプルの寸法あるいは自由端が存在する場合の影響について評価した。次に、当材料を構成する繊維束単体の引張挙動に関し幾何学的非線形性を考慮した解析を実施し、特に負荷に伴う繊維束の面外方向うねり形状の変化が引張挙動に及ぼす影響を明らかにした。次に、当材料を構成する繊維束の面外方向うねり形状の変化が当材料の引張挙動に及ぼす影響を評価するため、幾何学的非線形性を考慮した織物複合材料の引張挙動の解析を実施した。その際負荷方法により引張挙動に変化が生ずることを示し、織物複合材料を構成する繊維束の面外方向うねり形状の変化がその挙動に及ぼす影響について検討した。なお、上記の解析において三次元有限要素解析モデルと

梁連結モデルおよびこれを改良した改良梁連結モデルによる解析結果を比較し、簡易な解析モデルである梁連結モデルおよび改良梁連結モデルの有用性と適用限界についても検討した。

第5章では、第4章で解析的に予測される当材料の力学的特性を実験的に評価した。まずは当材料の引張剛性を評価するためさらには引張負荷下での変形挙動を把握するため、一軸引張試験を実施する。また当材料の曲げ剛性を評価するため三点曲げ試験および純曲げ試験を実施した。また曲げ破断が生ずる際の最大曲率を評価する試験も実施した。なお、上記評価試験においては力学的挙動の負荷方向依存性を評価するため、負荷方向を変化させて試験を実施した。また一軸引張試験では、試験片の自由端の影響を評価するため試験片の幅方向寸法を変化させた試験も実施した。上記の評価試験結果と第4章で得られた解析結果を比較し、有限な寸法を有する試験片を用いた剛性評価試験の問題点を明らかにし、また非線形の引張挙動が発現するメカニズムについて考察した。また曲げ破断曲率評価試験の結果より、本材料が曲げ破断にいたるまでの変形能を評価した。

以上より次のことを明らかにした。

1. 面内三軸織物複合材料と等価な平板の剛性は等方性を有することを解析的に明らかにした。従って当材料の引張剛性 ($[A]$ マトリックス) および曲げ剛性 ($[D]$ マトリックス) 共に等方性を有する。また引張-ねじりカップリング項 ($[B]$ マトリックスの B_{13}, B_{23} 成分) を有するがこのカップリング項も含めて平板の剛性が等方性を有する。
2. 面内三軸織物複合材料をこれと等重量の擬似等方積層板と比較した場合、面内剛性については両者等方性の性質を有しており、剛性値としては織物複合材料の方が低くなるが、面外剛性について三軸織物複合材料では等方性となるのに対し、積層板では面内および面外の剛性を共に等方性とすることは一般にできない。面内三軸織物複合材料の特長としては面内剛性および曲げ剛性共に等方性とできる点が挙げられる。面内三軸織物複合材料では繊維束が相互に織られて面外方向にも配向しているため、面内剛性は犠牲になるが、各繊維束が面外方向に均等に配置され、曲げ剛性が等方性となる。
3. 自由端を有するサンプルについて一方向に引張および曲げを負荷した結果、自由端近傍の一ユニットセル程度の領域において剛性が低下している領域が存在することを解析的に示した。また、0度方向と90度方向に負荷した場合で比較すると、自由端の影響は90度方向に負荷した場合に顕著に現れることを明らかにした。従来用いられている一軸引張試験および三点曲げ試験等により当材料の特性を評価

する際、自由端の影響について十分な配慮が必要であることを示した。

4. 面内三軸織物複合材料中の繊維束の引張挙動は、引張負荷に伴い屈曲形状が伸長し真直な状態に近づくため見掛けの引張剛性が負荷に伴い増加し、ある一定の剛性値に漸近する挙動となることを明らかにした。
5. 0度方向および90度方向に幾何学的非線形性を考慮した一軸引張挙動の解析を実施し、負荷方向に依存して著しく異なる非線形挙動を示すことを明らかにした。またこの挙動が、負荷に伴う繊維束の屈曲形状の変化に起因することを明らかにした。特に0度方向に一軸に引張負荷した場合に負荷方向に配向した繊維束の挙動を反映して負荷に伴う著しい剛性増加が生ずることを明らかにした。
6. 二軸に等方的に負荷した場合、あるいは負荷方向に垂直な方向のひずみをゼロに拘束して一方向に負荷した場合、一軸引張負荷の場合に比べて、繊維束の屈曲形状の変化が抑えられ、その結果特に0度方向の著しい非線形挙動が抑制され、0度方向と90度方向で引張挙動がほぼ等しくなることを解析的に示した。当材料を膜面材料として使用する場合一般には多軸負荷状態にあると考えられるため、一軸引張負荷状態の挙動に基づきその挙動を追うことは不適切であると考えられる。
7. 90度方向一軸引張試験の結果、材料内の損傷の発生、蓄積を示唆する挙動を示すことを明らかにした。損傷の発生、蓄積により90度方向の引張挙動については負荷に伴い剛性が減少する非線形挙動を示すことが示唆された。
8. 三軸織物複合材料の力学的特性を解析する際の簡易な解析モデルとして「梁連結モデル」およびこれを改良した「改良梁連結モデル」を提案した。三次元ソリッド有限要素モデルによる解析結果と比較して、梁連結モデルでは定性的には同じ傾向が得られるものの定量的には乖離した結果となる。一方、改良梁連結モデルでは定量的にも有限要素モデルに近い結果が得られる。従って当材料の力学的特性を解析する簡易な解析モデルとして改良梁連結モデルは有用であると考えられる。

なお本論文では三軸織物複合材料を対象を絞っているが、ここで示す解析法は一般の織物複合材料の力学的特性の解析にも適用可能な方法であることを付言しておく。

Appendix A 面内周期的構造物におけるユニットセルに関する事項

図 A.1 に示すような面内に周期的な構造物において、その周期性は、

「その力学的特性が m_1, m_2 を任意の整数として（任意の） $m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$ の並進移動により不変である」

という性質を満たす面内で線形独立な二つのベクトルの組 $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ によって特徴付けられる。このような二つのベクトルの組 $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ を「周期性ベクトル組」と呼ぶことにする。したがって、構造物の力学的および幾何学的特性は上記の並進移動により繰り返される単位領域で与えれば十分となる。このような単位領域をユニットセルと呼ぶ。上記の周期性ベクトル組 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ が与えられたとき、ユニットセルとして、これを面内に投影した形状が $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ によって形成される平行四辺形となる領域が最も自然なユニットセルとなるが（図 A.2 (a)）、その他の（投影）形状を有する領域をユニットセルに取ることも可能であり（図 A.2 (b)）、ユニットセルを面内に投影した幾何学的形状は唯一に定まるものではない。ただし、周期性ベクトル組 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ が与えられたとき、すべてのユニットセルの（投影）面積は等しく $|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|$ となる。なおユニットセルが他の隣接するユニットセルと接する境界上の任意の点は $\pm\mathbf{v}_1$ 、 $\pm\mathbf{v}_2$ あるいは $\pm(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$ のいずれかによる並進により境界上の他の点と対応付けられる。このような境界上の点同士を互いに逆の点と呼ぶことにする。また境界上の点を対応付けるベクトル $\pm\mathbf{v}_1$ 、 $\pm\mathbf{v}_2$ あるいは $\pm(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$ によってユニットセルの境界は三つあるいは二つの組に分割される。このような組をなす境界を、互いに逆の境界と呼ぶことにする。（図 A.3、図 A.4）

ところで、周期的な構造物に対して上記の周期性ベクトル組は唯一に定まるものではない。そこで周期性ベクトル組 $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ で張られる平行四辺形の面積 $|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|$ （すなわち周期性ベクトル $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ に付随するユニットセルを面内に投影したときの面積）が最小となるように定めた周期性ベクトル組 $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ を基本周期性ベクトル組と呼ぶ。また基本周期性ベクトル組に付随するユニットセルを基本ユニットセルと呼ぶ。

なお、第 2 章 2.2 節の均質化法で周期性を有する変位に対してユニットセルの境界条件として周期境界条件を考慮すると述べたが、その意味は次のとおりである。まず周期性を有する変位とは周期性ベクトル組 $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ が与えられたとき、変位が m_1, m_2 を任意の整数として（任意の） $m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$ の並進移動により不変であるということの意味してい

る。周期性ベクトル組 $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ に付随するユニットセルを定めた場合に、その境界上の任意の点はこれと互いに逆の点と $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ あるいは $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$ によって対応付けられるので、互いに逆の二点における変位を $\mathbf{u}^{(+)}$, $\mathbf{u}^{(-)}$ と表すと、境界上の任意の点において

$$\mathbf{u}^{(+)} = \mathbf{u}^{(-)} \text{ on boundary of unit cell} \quad (\text{f.1})$$

が成立する。周期性を有する変位がユニットセルの境界において満たすべき(f.1)式で表される条件を周期境界条件と呼ぶ。

上記の事項を三軸織物複合材料に適用した場合、基本周期性ベクトルは図 A.5 に示す $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ となる。なおこの基本周期性ベクトルに付随するユニットセルとしては例えば、図 A.6 (a)や図 A.6 (b)に示す領域を選ぶことができる。なお、上述の通り図 A.6 (a), 図 A.6 (b)に示すユニットセルを面内に投影した形状の面積は等しく $|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|$ となる。また図 A.6(a)のユニットセルにおいて互いに逆の点あるいは互いに逆の境界は図 A.7 に示す通りとなりまた図 A.6(a)のユニットセルにおいては前述の図 A.4 に示すとおりとなる。これらの互いの逆の点に対して周期性の条件を課すことになる。また、周期性ベクトルを、図 A.8 (a)に示す $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ とすることもできる。この場合これに付随するユニットセルとして例えば図 A.8 (b)に示す領域を選ぶことができる。

なお、有限要素法を用いてユニットセルの解析をする場合、自由度数をなるべく抑える観点から、ユニットセルとして面内に投影した時の面積が最小となる基本ユニットセルを選ぶことが望ましい。ただし、ユニットセルの境界条件の処理の都合上、周期性ベクトル組 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ が直交するように選ぶ方が望ましい場合があり、本研究でもこのような観点から図 A.8 (b)に示すような基本ユニットセル以外のユニットセルを用いて解析を実施している。

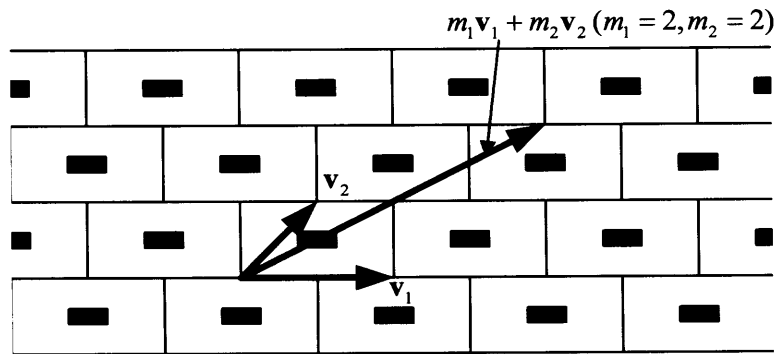


図 A.1 面内周期的構造物の周期性ベクトル組

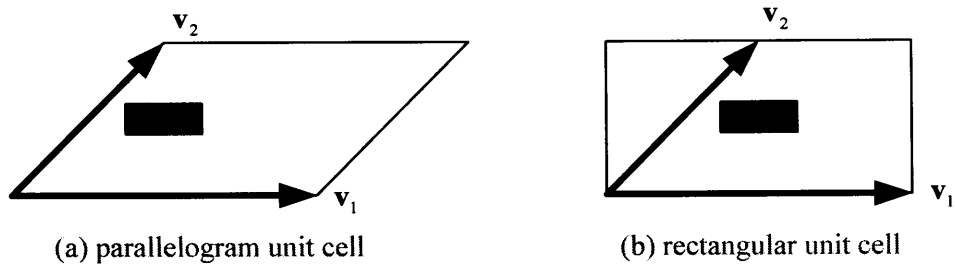


図 A.2 周期性ベクトル組 $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ に付随するユニットセル

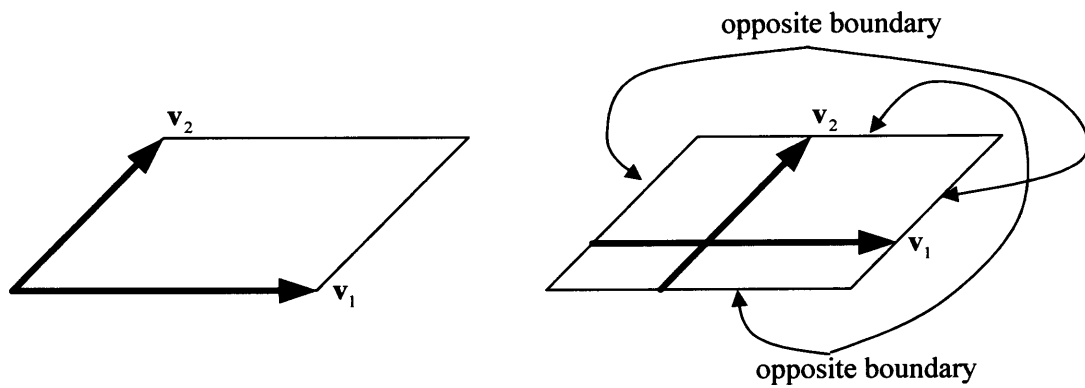


図 A.3 二組の互いに逆の境界

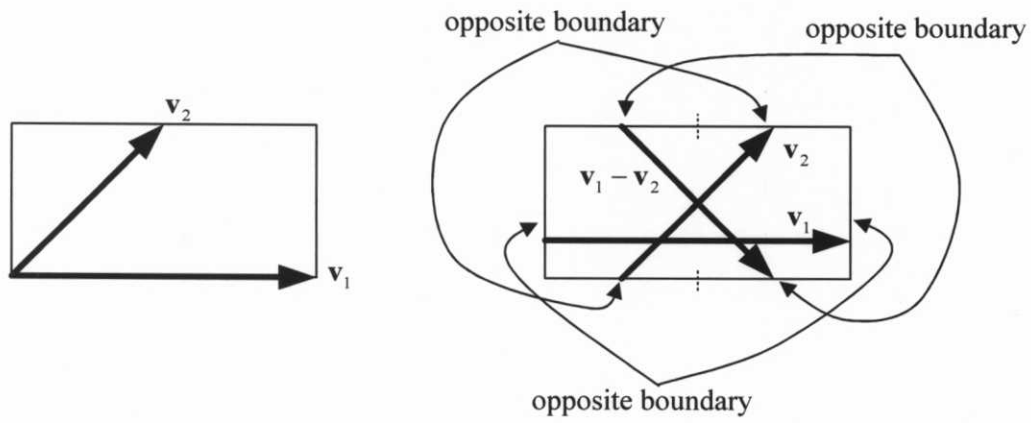


図 A.4 三組の互いに逆の境界

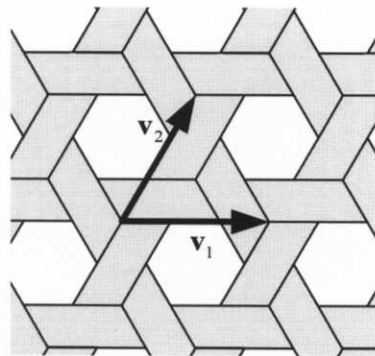


図 A.5 三軸織物における基本周期性ベクトル組

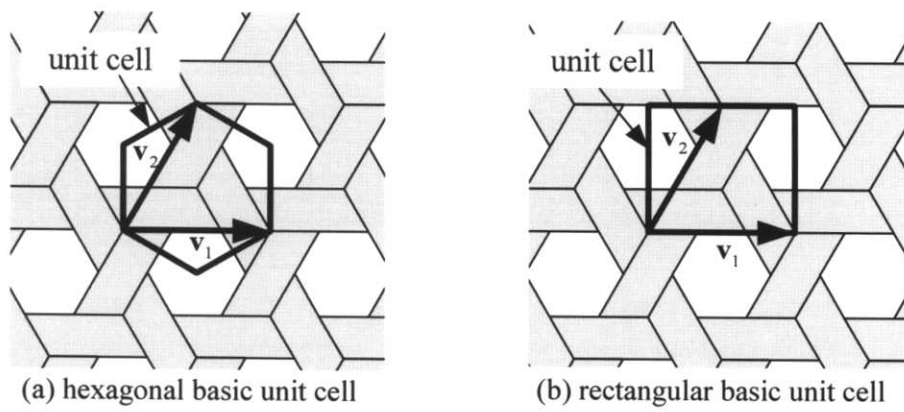


図 A.6 三軸織物における基本ユニットセル

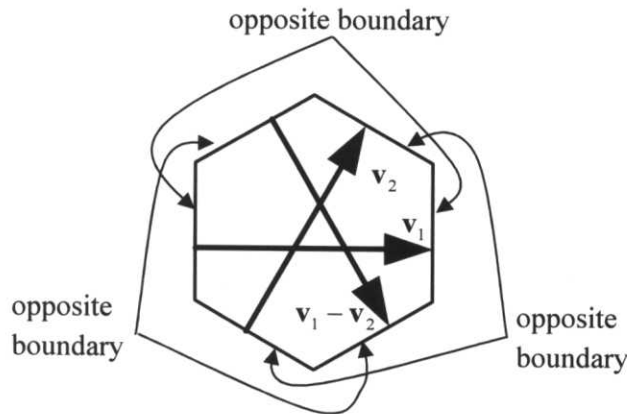


図 A.7 六角形基本ユニットセルにおける互いに逆の境界

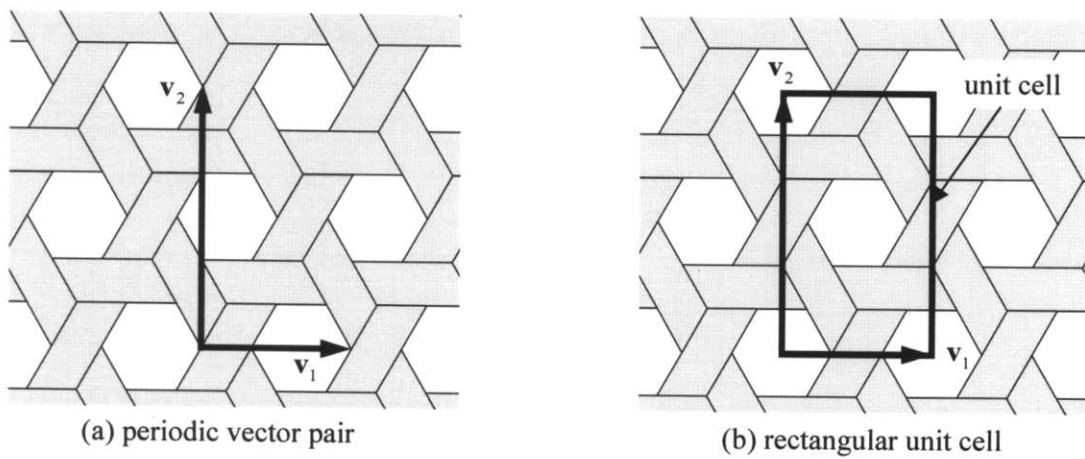


図 A.8 三軸織物における周期性ベクトル組とユニットセル

Appendix B 均質平板の剛性に関する諸性質

均質化法により得られる平板の剛性 $L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu}$ について

$$L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu} = L_{\beta\alpha\gamma\delta}^{\mu\nu} = L_{\alpha\beta\delta\gamma}^{\mu\nu} \quad (\text{b.1})$$

$$L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu} = L_{\delta\gamma\alpha\beta}^{\nu\mu} \quad (\text{b.2})$$

が成立し、また任意の $\tau_{\alpha\beta}^{\mu} = \tau_{\beta\alpha}^{\mu}$ につき

$$L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu} \tau_{\alpha\beta}^{\mu} \tau_{\gamma\delta}^{\nu} \geq 0 \quad (\text{b.3})$$

が成立し(b.3)式で等号(=0)が成立するのは $\tau_{\alpha\beta}^1 = \tau_{\alpha\beta}^2 = 0$ の時のみに限ることを示す[31].

まず第2章2.2節(2.29)式で導入した特性関数を

$$\chi_i^{\alpha\beta} = \phi_i^{\alpha\beta 1} \quad (\text{b.4})$$

$$\lambda_i^{\alpha\beta} = \phi_i^{\alpha\beta 2} \quad (\text{b.5})$$

と置く. 特性関数 $\phi_i^{\gamma\delta\nu}(\gamma, \delta, \nu=1, 2)$ はミクロ問題(2.27),(2.28)式の解であり次式を満たす.

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial \phi_k^{\gamma\delta\nu}}{\partial y_l} + y_3^{\nu-1} C_{ij\gamma\delta} \right) = 0 \text{ in } V_y \quad (\text{b.6})$$

$$\left(C_{ijkl} \frac{\partial \phi_k^{\gamma\delta\nu}}{\partial y_l} + y_3^{\nu-1} C_{ij\gamma\delta} \right) n_j = 0 \text{ on } \Gamma^{\pm} \quad (\text{b.7})$$

また平板の剛性は(2.40)~(2.43)式より,

$$L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu} = \left[\left[y_3^{\mu-1} \left(C_{\alpha\beta kl} \frac{\partial \phi_k^{\gamma\delta\nu}}{\partial y_l} + y_3^{\nu-1} C_{\alpha\beta\gamma\delta} \right) \right] \right] \quad (\text{b.8})$$

あるいは,

$$L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu} = \left[\left[y_3^{\mu-1} C_{\alpha\beta kl} \left(\frac{\partial \phi_k^{\gamma\delta\nu}}{\partial y_l} + y_3^{\nu-1} \delta_{k\gamma} \delta_{l\delta} \right) \right] \right] \quad (\text{b.9})$$

と表される. 剛性テンソル C_{ijkl} について,

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij} (= C_{ijlk}) \quad (\text{b.10})$$

が成り立つので, (b.6),(b.7)式より特性関数 $\phi_i^{\gamma\delta\nu}(\gamma, \delta, \nu=1, 2)$ について,

$$\phi_i^{\gamma\delta\nu} = \phi_i^{\delta\gamma\nu} \quad (\text{b.11})$$

が成立する。したがって、(b.8)式より、

$$L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu} = L_{\beta\alpha\gamma\delta}^{\mu\nu} = L_{\alpha\beta\delta\gamma}^{\mu\nu} \quad (\text{b.12})$$

が成り立つことが分かる。

次に、(b.6)式に $\phi_i^{\alpha\beta\mu}$ を掛けてユニットセルでの体積平均を取り、

$$\left[\left\{ \frac{\partial}{\partial y_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial \phi_k^{\gamma\delta\nu}}{\partial y_i} + y_3^{\nu-1} C_{ij\gamma\delta} \right) \right\} \phi_i^{\alpha\beta\mu} \right] = 0 \quad (\text{b.13})$$

を得る。(b.13)式の左辺について、Gaussの発散定理を用いて、

$$\begin{aligned} \text{左辺} = & - \left[\left(C_{ijkl} \frac{\partial \phi_k^{\gamma\delta\nu}}{\partial y_i} + y_3^{\nu-1} C_{ij\gamma\delta} \right) \frac{\partial \phi_i^{\alpha\beta\mu}}{\partial y_j} \right] \\ & + \frac{1}{|S_y|} \int_{\Gamma^+} \left(C_{ijkl} \frac{\partial \phi_k^{\gamma\delta\nu}}{\partial y_i} + y_3^{\nu-1} C_{ij\gamma\delta} \right) n_j \phi_i^{\alpha\beta\mu} dS \\ & + \frac{1}{|S_y|} \int_{\Omega} \left(C_{ijkl} \frac{\partial \phi_k^{\gamma\delta\nu}}{\partial y_i} + y_3^{\nu-1} C_{ij\gamma\delta} \right) n_j \phi_i^{\alpha\beta\mu} dS \end{aligned} \quad (\text{b.14})$$

となるが、(b.14)式の右辺第2項は(b.7)式よりゼロとなり、また第3項は $\phi_i^{\alpha\beta\mu}$ の周期性よりゼロとなる。従って結局(b.13)式より、

$$\left[\left(C_{ijkl} \frac{\partial \phi_k^{\gamma\delta\nu}}{\partial y_i} + y_3^{\nu-1} C_{ij\gamma\delta} \right) \frac{\partial \phi_i^{\alpha\beta\mu}}{\partial y_j} \right] = 0 \quad (\text{b.15})$$

あるいは、

$$\left[C_{ijkl} \frac{\partial \phi_i^{\alpha\beta\mu}}{\partial y_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial \phi_k^{\gamma\delta\nu}}{\partial y_i} + y_3^{\nu-1} \delta_{k\gamma} \delta_{l\delta} \right) \right] = 0 \quad (\text{b.16})$$

が成り立つ。そこで、(b.9)式と(b.16)式の和を取ると、

$$L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu} = \left[\left(C_{ijkl} \frac{\partial \phi_i^{\alpha\beta\mu}}{\partial y_j} + y_3^{\mu-1} C_{\alpha\beta kl} \right) \left(\frac{\partial \phi_k^{\gamma\delta\nu}}{\partial y_i} + y_3^{\nu-1} \delta_{k\gamma} \delta_{l\delta} \right) \right] \quad (\text{b.17})$$

となり、結局、

$$L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu} = \left[C_{ijkl} \left(\frac{\partial \phi_i^{\alpha\beta\mu}}{\partial y_j} + y_3^{\mu-1} \delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} \right) \left(\frac{\partial \phi_k^{\gamma\delta\nu}}{\partial y_i} + y_3^{\nu-1} \delta_{k\gamma} \delta_{l\delta} \right) \right] \quad (\text{b.18})$$

と表記することができる。したがって、剛性テンソル C_{ijkl} について(b.10)式が成立するこ

とを用いて,

$$L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu} = L_{\gamma\delta\alpha\beta}^{\nu\mu} \quad (\text{b.19})$$

が成立することが示される. なおここで一般的には,

$$L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu} \neq L_{\gamma\delta\alpha\beta}^{\mu\nu} \quad (\text{b.20})$$

となることに注意が必要である.

次に任意の $\tau_{\alpha\beta}^{\mu}$ ($=\tau_{\beta\alpha}^{\mu}$) について(b.18)式より,

$$\begin{aligned} L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu} \tau_{\alpha\beta}^{\mu} \tau_{\gamma\delta}^{\nu} &= \left[C_{ijkl} \tau_{\alpha\beta}^{\mu} \left(\frac{\partial \phi_i^{\alpha\beta\mu}}{\partial y_j} + y_3^{\mu-1} \delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} \right) \tau_{\gamma\delta}^{\nu} \left(\frac{\partial \phi_k^{\gamma\delta\nu}}{\partial y_l} + y_3^{\nu-1} \delta_{k\gamma} \delta_{l\delta} \right) \right] \\ &= \left[C_{ijkl} \omega_j \omega_{kl} \right] \end{aligned} \quad (\text{b.21})$$

が成り立つ. ただし,

$$\omega_j = \tau_{\alpha\beta}^{\mu} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_i^{\alpha\beta\mu}}{\partial y_j} + \frac{\partial \phi_j^{\alpha\beta\mu}}{\partial y_i} \right) + y_3^{\mu-1} \frac{1}{2} (\delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha}) \right\} \quad (\text{b.22})$$

である. 剛性テンソル C_{ijkl} は正値であるから, (b.21)式より, 任意の $\tau_{\alpha\beta}^{\mu}$ ($=\tau_{\beta\alpha}^{\mu}$) について

$$L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu} \tau_{\alpha\beta}^{\mu} \tau_{\gamma\delta}^{\nu} \geq 0 \quad (\text{b.23})$$

が成立する. また

$$L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu} \tau_{\alpha\beta}^{\mu} \tau_{\gamma\delta}^{\nu} = \left[C_{ijkl} \omega_j \omega_{kl} \right] = 0 \quad (\text{b.24})$$

ならば, ユニットセル内の至るところで $\omega_j = 0$ が成立し, よって $\omega_{\gamma\delta} = 0$ が成立する. そこで, $\omega_{\gamma\delta}$ をユニットセル内の任意の $y_3 = y_3$ 面で y_1, y_2 に関して積分してその面積 S_y で割る操作をすると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|S_y|} \int_{S_y} \omega_{\gamma\delta} dy_1 dy_2 &= \tau_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{1}{2} \frac{1}{|S_y|} \int_{S_y} \left(\frac{\partial \phi_{\gamma}^{\alpha\beta\mu}}{\partial y_{\delta}} + \frac{\partial \phi_{\delta}^{\alpha\beta\mu}}{\partial y_{\gamma}} \right) dy_1 dy_2 + y_3^{\mu-1} (\tau_{\gamma\delta}^{\mu} + \tau_{\delta\gamma}^{\mu}) \\ &= \tau_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{1}{2} \frac{1}{|S_y|} \int_{\partial S_y} (\phi_{\gamma}^{\alpha\beta\mu} n_{\delta} + \phi_{\delta}^{\alpha\beta\mu} n_{\gamma}) dC + y_3^{\mu-1} \tau_{\gamma\delta}^{\mu} \\ &= y_3^{\mu-1} \tau_{\gamma\delta}^{\mu} \end{aligned} \quad (\text{b.25})$$

となる. なお(b.25)式の導出には $\phi_i^{\alpha\beta\mu}$ の周期性を用いている. いま(b.25)式=0 であるから,

$$\tau_{\alpha\beta}^1 + y_3 \tau_{\alpha\beta}^2 = 0 \quad (\text{b.26})$$

が任意の y_3 について成り立ち, よって

$$\tau_{\alpha\beta}^1 = 0, \tau_{\alpha\beta}^2 = 0 \quad (\text{b.27})$$

を得る. すなわち $L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu} \tau_{\alpha\beta}^\mu \tau_{\gamma\delta}^\nu = 0$ が成立するのは $\tau_{\alpha\beta}^1 = \tau_{\alpha\beta}^2 = 0$ の時のみに限ることが示される.

なお, (b.1)式は平板の剛性を

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B'] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{K} \end{Bmatrix} \quad (\text{b.28})$$

ただし

$$[A] = \begin{bmatrix} L_{1111}^1 & L_{1122}^1 & L_{1112}^1 \\ L_{2211}^1 & L_{2222}^1 & L_{2212}^1 \\ L_{1211}^1 & L_{1222}^1 & L_{1212}^1 \end{bmatrix} \quad (\text{b.29})$$

$$[B] = \begin{bmatrix} L_{1111}^2 & L_{1122}^2 & L_{1112}^2 \\ L_{2211}^2 & L_{2222}^2 & L_{2212}^2 \\ L_{1211}^2 & L_{1222}^2 & L_{1212}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{b.30})$$

$$[B'] = \begin{bmatrix} L_{1111}^{21} & L_{1122}^{21} & L_{1112}^{21} \\ L_{2211}^{21} & L_{2222}^{21} & L_{2212}^{21} \\ L_{1211}^{21} & L_{1222}^{21} & L_{1212}^{21} \end{bmatrix} \quad (\text{b.31})$$

$$[D] = \begin{bmatrix} L_{1111}^{22} & L_{1122}^{22} & L_{1112}^{22} \\ L_{2211}^{22} & L_{2222}^{22} & L_{2212}^{22} \\ L_{1211}^{22} & L_{1222}^{22} & L_{1212}^{22} \end{bmatrix} \quad (\text{b.32})$$

とマトリックス表記できることを示し, (b.2)式はマトリックス表記をした平板の剛性について

$$[A] = [A]^T, [D] = [D]^T, [B'] = [B]^T \quad (\text{b.33})$$

が成立することすなわち, 平板の剛性マトリックス

$$[H] = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B'] & [D] \end{bmatrix} \quad (\text{b.34})$$

が対称マトリックス ($[H] = [H]^T$) であることを示す. なお, (b.20)式より一般には,

$$[B] \neq [B]^T, [B'] \neq [B']^T \quad (\text{b.35})$$

と成ることに注意が必要である (古典積層理論では $[B]$ マトリックスは対称になるがこれは特殊な場合である). また, (b.3)式は平板の剛性マトリックス $[H]$ が正值 (対称) マトリックスであることを示す.

Appendix C 剛性平均法

Kolpakov[64]では剛性の成分ごとの上界を算出するため、数種の汎関数を用いている。ここでは、Kolpakov[64]を参考に一般化した汎関数を用いて、均質化法で算出される平板の剛性の上界を導く。また上界の特殊な場合としての剛性平均法について述べる。

まず $E_{\alpha\beta} = E_{\beta\alpha}, K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha}$ を満たす任意の定数 $E_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}$ を用いてユニットセルで定義される次式の汎関数を考える。

$$J(\mathbf{u}) = \left\| \frac{1}{2} C_{ijkl} \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \frac{\partial u_k}{\partial y_l} + C_{ij\alpha\beta} (E_{\alpha\beta} + y_3 K_{\alpha\beta}) \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \right\| \quad (\text{c.1})$$

ただし、関数 $u_i(y_1, y_2, y_3)$ は y_1, y_2 について周期的な関数である。(c.1)式の汎関数の第一変分をとると次式を得る。

$$\begin{aligned} \delta J(\mathbf{u}) &= \left\| C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial y_l} \frac{\partial \delta u_i}{\partial y_j} + C_{ij\alpha\beta} (E_{\alpha\beta} + y_3 K_{\alpha\beta}) \frac{\partial \delta u_i}{\partial y_j} \right\| \\ &= \left\| \left\{ C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial y_l} + C_{ij\alpha\beta} (E_{\alpha\beta} + y_3 K_{\alpha\beta}) \right\} \frac{\partial \delta u_i}{\partial y_j} \right\| \end{aligned} \quad (\text{c.2})$$

(c.2)式においてガウスの発散定理を用いて、

$$\begin{aligned} \delta J(\mathbf{u}) &= - \left\| \frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial y_l} + C_{ij\alpha\beta} (E_{\alpha\beta} + y_3 K_{\alpha\beta}) \right\} \delta u_i \right\| \\ &\quad + \frac{1}{|S_y|} \int_{\pm} \left\{ C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial y_l} + C_{ij\alpha\beta} (E_{\alpha\beta} + y_3 K_{\alpha\beta}) \right\} n_j \delta u_i dS \\ &\quad + \frac{1}{|S_y|} \int_{\Omega} \left\{ C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial y_l} + C_{ij\alpha\beta} (E_{\alpha\beta} + y_3 K_{\alpha\beta}) \right\} n_j \delta u_i dS \end{aligned} \quad (\text{c.3})$$

を得る。ただし、

$$C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial y_l} + C_{ij\alpha\beta} (E_{\alpha\beta} + y_3 K_{\alpha\beta}) \quad (\text{c.4})$$

が y_1, y_2 に関して S_y で周期的であること、および u_i が y_1, y_2 に関して S_y で周期的であることから、(c.3)式の第3項すなわち、 Ω に関する表面積分の項はゼロとなる。したがって、

$$\begin{aligned} \delta J(\mathbf{u}) = & - \left\| \frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial y_l} + C_{ij\alpha\beta} (E_{\alpha\beta} + y_3 K_{\alpha\beta}) \right\} \delta u_i \right\| \\ & + \frac{1}{|S_y|} \int_{\Gamma^\pm} \left\{ C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial y_l} + C_{ij\alpha\beta} (E_{\alpha\beta} + y_3 K_{\alpha\beta}) \right\} n_j \delta u_i dS \end{aligned} \quad (\text{c.5})$$

となる。(c.1)式の汎関数のEuler方程式は,

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial y_l} + C_{ij\alpha\beta} (E_{\alpha\beta} + y_3 K_{\alpha\beta}) \right\} = 0 \quad \text{in } V_y \quad (\text{c.6})$$

$$\left\{ C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial y_l} + C_{ij\alpha\beta} (E_{\alpha\beta} + y_3 K_{\alpha\beta}) \right\} n_j = 0 \quad \text{on } \Gamma^\pm \quad (\text{c.7})$$

となり, これは第2章2.2節(2.27),(2.28)式で示したマイクロ問題と同じであることが分かる。従って, Euler方程式(c.6),(c.7)式の解 u_i は, 第2章2.2節で導入した特性関数 $\chi_i^{\alpha\beta}, \lambda_i^{\alpha\beta}$ を用いて次式で与えられる。

$$u_i = \chi_i^{\alpha\beta}(y) E_{\alpha\beta} + \lambda_i^{\alpha\beta}(y) K_{\alpha\beta} \equiv \xi_i \quad (\text{c.8})$$

なお, 上式に示すようにこの解を ξ_i と定義する。

さらにEuler方程式を満たす u_i と $u_i + \delta u_i$ における汎関数 J の差

$$\Delta J = J(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) - J(\mathbf{u}) \quad (\text{c.9})$$

については,

$$\Delta J = \delta J + \frac{1}{2} \delta^2 J \quad (\text{c.10})$$

となり, いま第一変分については $\delta J = 0$ である。また, 第二変分については

$$\delta^2 J = \left\| C_{ijkl} \frac{\partial \delta u_i}{\partial y_j} \frac{\partial \delta u_k}{\partial y_l} \right\| \quad (\text{c.11})$$

となり, $\delta u_i = 0 (i=1,2,3)$ についてはゼロでありその以外の場合では剛性テンソル C_{ijkl} の正値性より正である。したがって, (c.1)式の汎関数は Euler 方程式の解 ξ_i において最小値を取る。

そこで $\mathbf{u} = \xi$ の時の汎関数 $J(\mathbf{u})$ の値を求める。まず(c.8)式を(c.1)式に代入すると,

$$\begin{aligned} J(\xi) = & \left\| \frac{1}{2} C_{ijkl} \left(\frac{\partial \chi_i^{\alpha\beta}}{\partial y_j} E_{\alpha\beta} + \frac{\partial \lambda_i^{\alpha\beta}}{\partial y_j} K_{\alpha\beta} \right) \left(\frac{\partial \chi_k^{\gamma\delta}}{\partial y_l} E_{\gamma\delta} + \frac{\partial \lambda_k^{\gamma\delta}}{\partial y_l} K_{\gamma\delta} \right) \right. \\ & \left. + C_{ij\alpha\beta} (E_{\alpha\beta} + y_3 K_{\alpha\beta}) \left(\frac{\partial \chi_i^{\gamma\delta}}{\partial y_j} E_{\gamma\delta} + \frac{\partial \lambda_i^{\gamma\delta}}{\partial y_j} K_{\gamma\delta} \right) \right\| \end{aligned} \quad (\text{c.12})$$

を得る。(c.12)式を $E_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}$ について整理して次式を得る

$$\begin{aligned}
J(\xi) = & \frac{1}{2} E_{\alpha\beta} E_{\gamma\delta} \left[C_{ijkl} \frac{\partial \chi_i^{\alpha\beta}}{\partial y_j} \frac{\partial \chi_k^{\gamma\delta}}{\partial y_l} + 2C_{ij\alpha\beta} \frac{\partial \chi_i^{\gamma\delta}}{\partial y_j} \right] \\
& + \frac{1}{2} E_{\alpha\beta} K_{\gamma\delta} \left[C_{ijkl} \frac{\partial \chi_i^{\alpha\beta}}{\partial y_j} \frac{\partial \lambda_k^{\gamma\delta}}{\partial y_l} + 2C_{ij\alpha\beta} \frac{\partial \lambda_i^{\gamma\delta}}{\partial y_j} \right] \\
& + \frac{1}{2} E_{\gamma\delta} K_{\alpha\beta} \left[C_{ijkl} \frac{\partial \chi_k^{\alpha\beta}}{\partial y_l} \frac{\partial \lambda_i^{\gamma\delta}}{\partial y_j} + 2y_3 C_{ij\alpha\beta} \frac{\partial \chi_i^{\gamma\delta}}{\partial y_j} \right] \\
& + \frac{1}{2} K_{\alpha\beta} K_{\gamma\delta} \left[C_{ijkl} \frac{\partial \lambda_i^{\alpha\beta}}{\partial y_j} \frac{\partial \lambda_k^{\gamma\delta}}{\partial y_l} + 2y_3 C_{ij\alpha\beta} \frac{\partial \lambda_i^{\gamma\delta}}{\partial y_j} \right]
\end{aligned} \tag{c.13}$$

(c.13)式の右辺第1項～第4項についてはそれぞれ次式が成立する。

$$\begin{aligned}
\left[C_{ijkl} \frac{\partial \chi_i^{\alpha\beta}}{\partial y_j} \frac{\partial \chi_k^{\gamma\delta}}{\partial y_l} + 2C_{ij\alpha\beta} \frac{\partial \chi_i^{\gamma\delta}}{\partial y_j} \right] &= \left[\left(C_{ijkl} \frac{\partial \chi_i^{\alpha\beta}}{\partial y_j} + C_{kl\alpha\beta} \right) \frac{\partial \chi_k^{\gamma\delta}}{\partial y_l} \right] + \left[C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial \chi_i^{\gamma\delta}}{\partial y_j} \right] \\
&= \left[C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial \chi_i^{\gamma\delta}}{\partial y_j} \right] \\
&= L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{11} - \left[C_{\alpha\beta\gamma\delta} \right]
\end{aligned} \tag{c.14}$$

$$\begin{aligned}
\left[C_{ijkl} \frac{\partial \chi_i^{\alpha\beta}}{\partial y_j} \frac{\partial \lambda_k^{\gamma\delta}}{\partial y_l} + 2C_{ij\alpha\beta} \frac{\partial \lambda_i^{\gamma\delta}}{\partial y_j} \right] &= \left[\left(C_{ijkl} \frac{\partial \chi_i^{\alpha\beta}}{\partial y_j} + C_{kl\alpha\beta} \right) \frac{\partial \lambda_k^{\gamma\delta}}{\partial y_l} \right] + \left[C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial \lambda_i^{\gamma\delta}}{\partial y_j} \right] \\
&= \left[C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial \lambda_i^{\gamma\delta}}{\partial y_j} \right] \\
&= L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{12} - \left[y_3 C_{\alpha\beta\gamma\delta} \right]
\end{aligned} \tag{c.15}$$

$$\begin{aligned}
\left[C_{ijkl} \frac{\partial \chi_k^{\alpha\beta}}{\partial y_l} \frac{\partial \lambda_i^{\gamma\delta}}{\partial y_j} + 2y_3 C_{ij\alpha\beta} \frac{\partial \chi_i^{\gamma\delta}}{\partial y_j} \right] &= \left[\left(C_{ijkl} \frac{\partial \lambda_i^{\alpha\beta}}{\partial y_j} + y_3 C_{kl\alpha\beta} \right) \frac{\partial \chi_k^{\gamma\delta}}{\partial y_l} \right] + \left[y_3 C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial \chi_i^{\gamma\delta}}{\partial y_j} \right] \\
&= \left[y_3 C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial \chi_i^{\gamma\delta}}{\partial y_j} \right] \\
&= L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{21} - \left[y_3 C_{\alpha\beta\gamma\delta} \right]
\end{aligned} \tag{c.16}$$

$$\begin{aligned}
\left[C_{ijkl} \frac{\partial \lambda_i^{\alpha\beta}}{\partial y_j} \frac{\partial \lambda_k^{\gamma\delta}}{\partial y_l} + 2y_3 C_{ij\alpha\beta} \frac{\partial \lambda_i^{\gamma\delta}}{\partial y_j} \right] &= \left[\left(C_{ijkl} \frac{\partial \lambda_i^{\alpha\beta}}{\partial y_j} + y_3 C_{kl\alpha\beta} \right) \frac{\partial \lambda_k^{\gamma\delta}}{\partial y_l} \right] + \left[y_3 C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial \lambda_i^{\gamma\delta}}{\partial y_j} \right] \\
&= \left[y_3 C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial \lambda_i^{\gamma\delta}}{\partial y_j} \right] \\
&= L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{22} - \left[(y_3)^2 C_{\alpha\beta\gamma\delta} \right]
\end{aligned} \tag{c.17}$$

したがって、

$$\hat{L}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{11} = \llbracket C_{\alpha\beta\gamma\delta} \rrbracket \quad (\text{c.18})$$

$$\hat{L}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{12} = \hat{L}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{12} = \llbracket y_3 C_{\alpha\beta\gamma\delta} \rrbracket \quad (\text{c.19})$$

$$\hat{L}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{22} = \llbracket (y_3)^2 C_{\alpha\beta\gamma\delta} \rrbracket \quad (\text{c.20})$$

と置くと, $J(\mathbf{u}) \geq J(\xi)$ より, $E_{\alpha\beta} = E_{\beta\alpha}, K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha}$ を満たす任意の定数 $E_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}$ について

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(E_{\alpha\beta} E_{\gamma\delta} I_{\alpha\beta\gamma\delta}^{11} + E_{\alpha\beta} K_{\gamma\delta} I_{\alpha\beta\gamma\delta}^{12} + E_{\gamma\delta} K_{\alpha\beta} I_{\alpha\beta\gamma\delta}^{21} + K_{\alpha\beta} K_{\gamma\delta} I_{\alpha\beta\gamma\delta}^{22} \right) \\ & \leq \frac{1}{2} \left(E_{\alpha\beta} E_{\gamma\delta} \hat{L}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{11} + E_{\alpha\beta} K_{\gamma\delta} \hat{L}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{12} + E_{\gamma\delta} K_{\alpha\beta} \hat{L}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{21} + K_{\alpha\beta} K_{\gamma\delta} \hat{L}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{22} \right) + J(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (\text{c.21})$$

が成り立つ. (c.21)式の特別な場合として $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ の時,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(E_{\alpha\beta} E_{\gamma\delta} I_{\alpha\beta\gamma\delta}^{11} + E_{\alpha\beta} K_{\gamma\delta} I_{\alpha\beta\gamma\delta}^{12} + E_{\gamma\delta} K_{\alpha\beta} I_{\alpha\beta\gamma\delta}^{21} + K_{\alpha\beta} K_{\gamma\delta} I_{\alpha\beta\gamma\delta}^{22} \right) \\ & \leq \frac{1}{2} \left(E_{\alpha\beta} E_{\gamma\delta} \hat{L}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{11} + E_{\alpha\beta} K_{\gamma\delta} \hat{L}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{12} + E_{\gamma\delta} K_{\alpha\beta} \hat{L}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{21} + K_{\alpha\beta} K_{\gamma\delta} \hat{L}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{22} \right) \end{aligned} \quad (\text{c.22})$$

を得る. 上式を(2.47)~(2.54)式を用いてマトリクス表記すると,

$$\llbracket \mathbf{E}^T \ \mathbf{K}^T \rrbracket \llbracket \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B]^T & [D] \end{bmatrix} \rrbracket \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{K} \end{Bmatrix} \leq \llbracket \mathbf{E}^T \ \mathbf{K}^T \rrbracket \llbracket \begin{bmatrix} [\hat{A}] & [\hat{B}] \\ [\hat{B}]^T & [\hat{D}] \end{bmatrix} \rrbracket \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{K} \end{Bmatrix} \quad (\text{c.23})$$

となる. ただし $\hat{L}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu}$ に関するマトリクスには「 $\hat{\quad}$ 」を付けて記している. (c.23)式が任意の \mathbf{E}, \mathbf{K} について成立することから, (c.18)~(c.20)式で定義された平板の剛性は均質化法で得られる平板の剛性に対して上界を与えることが示される.

なお, (c.18)~(c.20)式で示す, 剛性テンソル C_{ijkl} についての体積平均を基に等価な平板の剛性を算出する方法を剛性平均法と呼ぶ. 剛性平均法による平板の剛性は, 一様ひずみに基づく Voigt 近似に相当しており, ユニットセル内部で一様な面内のひずみ $E_{\alpha\beta}$ および曲率 $K_{\alpha\beta}$ によりひずみが

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta} + y_3 K_{\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{i3} = 0 \quad (\text{c.24})$$

なる状態にあると仮定した際に応力の体積平均量と面内のひずみ $E_{\alpha\beta}$ および曲率 $K_{\alpha\beta}$ との関係式として得られる. すなわち, (c.24)より, ユニットセル内部の応力について

$$\sigma_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} (E_{\gamma\delta} + y_3 K_{\gamma\delta}) \quad (\text{c.25})$$

となるから, 応力の体積平均量を算出すると,

$$N_{\alpha\beta} = \llbracket \sigma_{\alpha\beta} \rrbracket = \llbracket C_{\alpha\beta\gamma\delta} (E_{\gamma\delta} + y_3 K_{\gamma\delta}) \rrbracket = \llbracket C_{\alpha\beta\gamma\delta} \rrbracket E_{\gamma\delta} + \llbracket y_3 C_{\alpha\beta\gamma\delta} \rrbracket K_{\gamma\delta} \quad (\text{c.26})$$

$$M_{\alpha\beta} = \llbracket y_3 \sigma_{\alpha\beta} \rrbracket = \llbracket y_3 C_{\alpha\beta\gamma\delta} (E_{\gamma\delta} + y_3 K_{\gamma\delta}) \rrbracket = \llbracket y_3 C_{\alpha\beta\gamma\delta} \rrbracket E_{\gamma\delta} + \llbracket (y_3)^2 C_{\alpha\beta\gamma\delta} \rrbracket K_{\gamma\delta} \quad (\text{c.27})$$

となり, 剛性平均法による平板の剛性が得られる.

Appendix D 均質化法と古典積層理論

繊維強化積層板の場合に均質化法で得られる平板の剛性が古典積層理論の解に一致していることを示す。

第2章2.2節(2.29)式で導入した特性関数を

$$\chi_i^{\alpha\beta} = \phi_i^{\alpha\beta 1} \quad (d.1)$$

$$\lambda_i^{\alpha\beta} = \phi_i^{\alpha\beta 2} \quad (d.2)$$

のようにおくと、特性関数は均質化法におけるマイクロ問題(2.27),(2.28)式の解であり次式を満たす。

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial \phi_k^{\alpha\beta\nu}}{\partial y_l} + y_3^{\nu-1} C_{ij\alpha\beta} \right) = 0 \quad \text{in } V_y \quad (d.3)$$

$$\left(C_{ijkl} \frac{\partial \phi_k^{\alpha\beta\nu}}{\partial y_l} + y_3^{\nu-1} C_{ij\alpha\beta} \right) n_j = 0 \quad \text{on } \Gamma^\pm \quad (d.4)$$

積層板の条件は

条件1) C_{ijkl} が y_3 のみの関数である。

条件2) Γ^\pm 面が平面であり、その法線方向は y_3 軸方向である。

条件3) C_{ijkl} に関して、 y_3 軸が2次の対象軸となっている

である。また $\phi_i^{\alpha\beta\nu}$ も y_3 のみの関数であるとする。

(d.3)式は条件1) に注意して

$$\frac{d}{dy_3} \left(C_{i3k3} \frac{d\phi_k^{\alpha\beta\nu}}{dy_3} + y_3^{\nu-1} C_{i3\alpha\beta} \right) = 0 \quad \text{in } V_y \quad (d.5)$$

となる。また、(d.4)式は条件2) より Γ^\pm 面の法線 $\mathbf{n}^\pm = (n_1^\pm, n_2^\pm, n_3^\pm)$ について $n_1^\pm = n_2^\pm = 0$ $n_3^\pm = \pm 1$ となることに注意して、

$$\left(C_{i3k3} \frac{d\phi_k^{\alpha\beta\nu}}{dy_3} + y_3^{\nu-1} C_{i3\alpha\beta} \right) n_3 = 0 \quad \text{on } \Gamma^\pm \quad (d.6)$$

となる。(d.5)式を積分して(d.6)式を考慮すると

$$C_{i3k3} \frac{d\phi_k^{\alpha\beta\nu}}{dy_3} + y_3^{\nu-1} C_{i3\alpha\beta} = 0 \quad \text{in } V_y \quad (d.7)$$

となる。ここで条件3) を考慮すると、

$$C_{\gamma 3\alpha\beta} = C_{33\gamma 3} = 0 \quad (d.8)$$

であるので、(d.7)式は、

$$C_{1313} \frac{d\phi_1^{\alpha\beta\nu}}{dy_3} + C_{1323} \frac{d\phi_2^{\alpha\beta\nu}}{dy_3} = 0 \quad (d.9)$$

$$C_{1313} \frac{d\phi_1^{\alpha\beta\nu}}{dy_3} + C_{1323} \frac{d\phi_2^{\alpha\beta\nu}}{dy_3} = 0 \quad (\text{d.10})$$

$$C_{3333} \frac{d\phi_3^{\alpha\beta\nu}}{dy_3} + y_3^{\nu-1} C_{33\alpha\beta} = 0 \quad (\text{d.11})$$

となる．(d.7)式では $d\phi_1^{\alpha\beta\nu}/dy_3, d\phi_2^{\alpha\beta\nu}/dy_3, d\phi_3^{\alpha\beta\nu}/dy_3$ がカップリングしていたが， $d\phi_1^{\alpha\beta\nu}/dy_3, d\phi_2^{\alpha\beta\nu}/dy_3$ に関する(d.9)，(d.10)式と $d\phi_3^{\alpha\beta\nu}/dy_3$ に関する(d.11)式に分離されたことになる．また $d\phi_1^{\alpha\beta\nu}/dy_3, d\phi_2^{\alpha\beta\nu}/dy_3$ は α, β, ν の値に依らない量となる．

(d.9)，(d.10)式より

$$\begin{bmatrix} C_{1313} & C_{1323} \\ C_{2313} & C_{2323} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d\phi_1^{\alpha\beta\nu}}{dy_3} \\ \frac{d\phi_2^{\alpha\beta\nu}}{dy_3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{d.12})$$

を得る．マトリックス $\begin{bmatrix} C_{1313} & C_{1323} \\ C_{2313} & C_{2323} \end{bmatrix}$ が正値マトリクスであるから，

$$\begin{Bmatrix} \frac{d\phi_1^{\alpha\beta\nu}}{dy_3} \\ \frac{d\phi_2^{\alpha\beta\nu}}{dy_3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{d.13})$$

を得る．また(d.11)式より

$$\frac{d\phi_3^{\alpha\beta\nu}}{dy_3} = -y_3^{\nu-1} \frac{C_{33\alpha\beta}}{C_{3333}} \quad (\text{d.14})$$

を得る．

(d.13)，(d.14)式を用いて(2.40)～(2.43)式より平板の剛性を算出する．その際

$$\frac{\partial \phi_k^{\alpha\beta\nu}}{\partial y_l} = \delta_{k3} \delta_{l3} \frac{d\phi_3^{\alpha\beta\nu}}{dy_3} \quad (\text{d.15})$$

であることを考慮して次式を得る．

$$\begin{aligned} L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu} &= \left[y_3^{\mu-1} \left(C_{\alpha\beta kl} \frac{\partial \phi_k^{\gamma\delta\nu}}{\partial y_l} + y_3^{\nu-1} C_{\alpha\beta\gamma\delta} \right) \right] \\ &= \left[y_3^{\mu-1} \left(C_{\alpha\beta 33} \frac{d\phi_3^{\gamma\delta\nu}}{dy_3} + y_3^{\nu-1} C_{\alpha\beta\gamma\delta} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{d.16})$$

(d.16)式に(d.14)式を代入して

$$\begin{aligned}
L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu} &= \left[(y_3)^{\mu+\nu-2} \left(C_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{C_{33\gamma\delta} C_{\alpha\beta 33}}{C_{3333}} \right) \right] \\
&= \frac{1}{|S_y|} \int \left(\iint_S dy_1 dy_2 \right) (y_3)^{\mu+\nu-2} \left(C_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{C_{33\gamma\delta} C_{\alpha\beta 33}}{C_{3333}} \right) dy_3 \\
&= \int (y_3)^{\mu+\nu-2} \left(C_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{C_{33\gamma\delta} C_{\alpha\beta 33}}{C_{3333}} \right) dy_3 \\
&= \int (y_3)^{\mu+\nu-2} \bar{Q}_{\alpha\beta\gamma\delta} dy_3
\end{aligned} \tag{d.17}$$

となる。ただし

$$\bar{Q}_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv C_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{C_{33\gamma\delta} C_{\alpha\beta 33}}{C_{3333}} \tag{d.18}$$

である。 $\bar{Q}_{\gamma\delta\alpha\beta}$ は平面応力問題 (y_1, y_2 面における) の剛性テンソルを表す。(d.17)式は古典積層理論における積層板の剛性の算出式と同一であることが分かる。こうして積層複合材料の剛性を均質化法により評価した結果は古典積層理論により評価した結果に一致することが示される。

Appendix E 体積平均応力の算出

均質化法を適用し等価な剛性を算出する際に, (2.32),(2.33)式で定義したユニットセル内部の応力の体積平均量

$$N_{ij} \equiv \llbracket \sigma_{ij} \rrbracket \quad (\text{e.1})$$

$$M_{ij} \equiv \llbracket y_3 \sigma_{ij} \rrbracket \quad (\text{e.2})$$

を求める必要がある。ただし,

$$\llbracket \bullet \rrbracket \equiv (1/|S_y|) \int_{S_y} \bullet dy_1 dy_2 dy_3 \quad (\text{e.3})$$

であり, (2.31)式で定義したユニットセル内の平均量を求める作用素である。なお $|S_y|$ はユニットセルの2次元領域 S_y の面積を表わす。

ここでは応力の体積平均量をユニットセルの境界での値のみで評価する方法を示し, ユニットセルの幾何学的形状が単純な場合には, 応力の体積平均量の評価がさらに容易になることを示す。

ユニットセルで下記の条件を満たす応力について体積平均量を考える。

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_j} = 0 \quad \text{in } V_y \quad (\text{e.4})$$

$$\sigma_{ij} n_j = 0 \quad \text{on } \Gamma^+ \text{ and } \Gamma^- \quad (\text{e.5})$$

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad \text{antiperiodic on } \Omega \quad (\text{e.6})$$

まず, 応力 σ_{ij} のユニットセルでの体積積分量について考える。

$$\frac{\partial(\sigma_{ik} y_j)}{\partial y_k} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial y_k} y_j + \sigma_{ik} \delta_{jk} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial y_k} y_j + \sigma_{ij} \quad (\text{e.7})$$

であるから, (e.4)式が成り立つ場合,

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial(\sigma_{ik} y_j)}{\partial y_k} \quad (\text{e.8})$$

が成立する。そこで応力 σ_{ij} をユニットセルで体積積分し, Gaussの発散定理を用いると,

$$\begin{aligned} \int_{V_y} \sigma_{ij} dy_1 dy_2 dy_3 &= \int_{V_y} \frac{\partial(\sigma_{ik} y_j)}{\partial y_k} dy_1 dy_2 dy_3 \\ &= \int_{\Gamma^+} \sigma_{ik} y_j n_k dS + \int_{\Omega} \sigma_{ik} y_j n_k dS \end{aligned} \quad (\text{e.9})$$

となる。ここで(e.5)式が成立している場合(e.9)式最右辺第一項が消え次式を得る。

$$\int_V \sigma_{ij} dy_1 dy_2 dy_3 = \int_{\Omega} \sigma_{ik} y_j n_k dS = \int_{\Omega} t_i y_j dS \quad (\text{e.10})$$

また, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ であるから,

$$\int_V \sigma_{ij} dy_1 dy_2 dy_3 = \int_V \sigma_{ji} dy_1 dy_2 dy_3 = \int_{\Omega} t_j y_i dS \quad (\text{e.11})$$

も成り立ち, 結局応力 σ_{ij} のユニットセルでの体積積分量は境界 Ω での値のみを用いて次式のように表される.

$$\int_V \sigma_{ij} dy_1 dy_2 dy_3 = \int_{\Omega} t_i y_j dS = \int_{\Omega} t_j y_i dS \quad (\text{e.12})$$

次に $\sigma_{ij} y_3$ のユニットセルでの体積積分量について考える.

$$\frac{\partial}{\partial y_k} (\sigma_{ik} y_j y_3) = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial y_k} y_j y_3 + \sigma_{ik} \delta_{jk} y_3 + \sigma_{ik} y_j \delta_{3k} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial y_k} y_j y_3 + \sigma_{ij} y_3 + \sigma_{i3} y_j \quad (\text{e.13})$$

$$\frac{\partial}{\partial y_k} (\sigma_{3k} y_i y_j) = \frac{\partial \sigma_{3k}}{\partial y_k} y_i y_j + \sigma_{3k} \delta_{ik} y_j + \sigma_{3k} y_i \delta_{jk} = \frac{\partial \sigma_{3k}}{\partial y_k} y_i y_j + \sigma_{3i} y_j + \sigma_{3j} y_i \quad (\text{e.14})$$

であるから, (e.4)式が成り立つ場合,

$$\frac{\partial}{\partial y_k} (\sigma_{ik} y_j y_3) = \sigma_{ij} y_3 + \sigma_{i3} y_j \quad (\text{e.15})$$

$$\frac{\partial}{\partial y_k} (\sigma_{3k} y_i y_j) = \sigma_{3i} y_j + \sigma_{3j} y_i \quad (\text{e.16})$$

が成り立つ. (e.15)式で i と j を入れ換えて, さらに $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ が成り立つことより,

$$\frac{\partial}{\partial y_k} (\sigma_{jk} y_i y_3) = \sigma_{ij} y_3 + \sigma_{j3} y_i \quad (\text{e.17})$$

を得る. したがって, (e.15), (e.16), (e.17)式より,

$$\sigma_{ij} y_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_k} \{ (\sigma_{ik} y_j y_3) + (\sigma_{jk} y_i y_3) - (\sigma_{3k} y_i y_j) \} \quad (\text{e.18})$$

が成り立つ. そこで $\sigma_{ij} y_3$ をユニットセルで体積積分し Gauss の発散定理を用いると,

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{ij} y_3 dy_1 dy_2 dy_3 &= \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial}{\partial y_k} \{ (\sigma_{ik} y_j y_3) + (\sigma_{jk} y_i y_3) - (\sigma_{3k} y_i y_j) \} dy_1 dy_2 dy_3 \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pm} (\sigma_{ik} y_j y_3 n_k + \sigma_{jk} y_i y_3 n_k - \sigma_{3k} y_i y_j n_k) dS \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ik} y_j y_3 n_k + \sigma_{jk} y_i y_3 n_k - \sigma_{3k} y_i y_j n_k) dS \end{aligned} \quad (\text{e.19})$$

が成り立つ. ここで(e.5)式が成立している場合(e.9)式最右辺第一項が消え, $\sigma_{ij} y_3$ の体積積分量が境界での値のみを用いて次式で表すことができる.

$$\int_V \sigma_{ij} y_3 dy_1 dy_2 dy_3 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (t_i y_j y_3 + t_j y_i y_3 - t_3 y_i y_j) dS \quad (\text{e.20})$$

さて、ユニットセルの $y_1 - y_2$ 面内での幾何学的形状が第 2 章 図 2.3 に示す y_1 方向に長さ $2a$, y_2 方向に長さ $2b$ の長方形の場合について考える。

σ_{11} のユニットセルでの体積積分量は、(e.12)式より、

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{11} dy_1 dy_2 dy_3 &= \int_{\Omega} t_1 y_1 dS \\ &= \int_{\Omega^{y_1^+}} \{t_1^{y_1^+}(a)\} dS + \int_{\Omega^{y_1^-}} \{t_1^{y_1^-}(-a)\} dS \\ &\quad + \int_{\Omega^{y_2^+}} (t_1^{y_2^+} y_1^{y_2^+}) dS + \int_{\Omega^{y_2^-}} (t_1^{y_2^-} y_1^{y_2^-}) dS \end{aligned} \quad (\text{e.21})$$

となる。ただし $\Omega^{y_1^+}, \Omega^{y_1^-}, \Omega^{y_2^+}, \Omega^{y_2^-}$ は第 2 章 図 2.3 に示すようにユニットセルの側面 Ω を 4 つの領域に分割したものを示す。ただしここで $t_i^{y_a^+}, t_i^{y_a^-}$ はそれぞれ $t_i = \sigma_{ij} n_j$ の $\Omega^{y_a^+}, \Omega^{y_a^-}$ での値を示す。ここで、 $\Omega^{y_1^-} (\Omega^{y_2^-})$ 上の任意の点についてその点と、これを $y_1 (y_2)$ 方向に $2a (2b)$ 移動した $\Omega^{y_1^+} (\Omega^{y_2^+})$ 上の点を $\Omega^{y_1^-}, \Omega^{y_1^+} (\Omega^{y_2^-}, \Omega^{y_2^+})$ 上の対応する点組と呼ぶことにすると、(e.6)式より $\Omega^{y_1^+}, \Omega^{y_1^-}$ および $\Omega^{y_2^+}, \Omega^{y_2^-}$ 上の対応する点組についてそれぞれ

$$t_i^{y_1^-} = -t_i^{y_1^+} \quad (i=1,2,3) \quad (\text{e.22})$$

$$t_i^{y_2^-} = -t_i^{y_2^+} \quad (i=1,2,3) \quad (\text{e.23})$$

が成り立つ。また $\Omega^{y_1^+}, \Omega^{y_1^-}$ および $\Omega^{y_2^+}, \Omega^{y_2^-}$ 上の対応する点組についてそれぞれ

$$y_i^{y_1^-} = y_i^{y_1^+} \quad (i=1,2,3) \quad (\text{e.24})$$

$$y_i^{y_2^-} = y_i^{y_2^+} \quad (i=1,2,3) \quad (\text{e.25})$$

が成り立つことは明らかである。したがって(e.21)式は、

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{11} dy_1 dy_2 dy_3 &= \int_{\Omega^{y_1^+}} \{t_1^{y_1^+}(a)\} dS + \int_{\Omega^{y_1^-}} \{-t_1^{y_1^+}(-a)\} dS \\ &\quad + \int_{\Omega^{y_2^+}} (t_1^{y_2^+} y_1^{y_2^+}) dS + \int_{\Omega^{y_2^-}} (-t_1^{y_2^+} y_1^{y_2^-}) dS \\ &= \int_{\Omega^{y_1^+}} \{t_1^{y_1^+}(a)\} dS + \int_{\Omega^{y_1^+}} \{-t_1^{y_1^+}(-a)\} dS \\ &\quad + \int_{\Omega^{y_2^+}} (t_1^{y_2^+} y_1^{y_2^+}) dS + \int_{\Omega^{y_2^+}} (-t_1^{y_2^+} y_1^{y_2^+}) dS \\ &= (2a) \int_{\Omega^{y_1^+}} t_1^{y_1^+} dS \end{aligned} \quad (\text{e.26})$$

となる。同様にして σ_{22} のユニットセルでの体積積分量は

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{22} dy_1 dy_2 dy_3 &= \int_{\Omega} t_2 y_2 dS \\ &= \int_{\Omega^{y_1^+}} (t_2^{y_1^+} y_2^{y_1^+}) dS + \int_{\Omega^{y_1^-}} (t_2^{y_1^-} y_2^{y_1^-}) dS \\ &\quad + \int_{\Omega^{y_2^+}} \{t_2^{y_2^+}(b)\} dS + \int_{\Omega^{y_2^-}} \{t_2^{y_2^-}(-b)\} dS \\ &= (2b) \int_{\Omega^{y_2^+}} t_2^{y_2^+} dS \end{aligned} \quad (\text{e.27})$$

となる。また、 σ_{12} の体積積分量は、(e.12)式の最初の等号(=)より得られる関係を用いて、

$$\begin{aligned}
\int_V \sigma_{12} dy_1 dy_2 dy_3 &= \int_{\Omega} t_1 y_2 dS \\
&= \int_{\Omega^{y_1^+}} (t_1^{y_1^+} y_2^{y_1^+}) dS + \int_{\Omega^{y_1^-}} (t_1^{y_1^-} y_2^{y_1^-}) dS \\
&\quad + \int_{\Omega^{y_2^+}} \{t_1^{y_2^+} (b)\} dS + \int_{\Omega^{y_2^-}} \{t_1^{y_2^-} (-b)\} dS \\
&= (2b) \int_{\Omega^{y_2^+}} t_1^{y_2^+} dS
\end{aligned} \tag{e.28}$$

となる。また(e.12)式の二番目の等号(=)より

$$\begin{aligned}
\int_V \sigma_{12} dy_1 dy_2 dy_3 &= \int_{\Omega} t_2 y_1 dS \\
&= \int_{\Omega^{y_1^+}} \{t_2^{y_1^+} (a)\} dS + \int_{\Omega^{y_1^-}} \{t_2^{y_1^-} (-a)\} dS \\
&\quad + \int_{\Omega^{y_2^+}} (t_2^{y_2^+} y_1^{y_2^+}) dS + \int_{\Omega^{y_2^-}} (t_2^{y_2^-} y_1^{y_2^-}) dS \\
&= (2a) \int_{\Omega^{y_1^+}} t_2^{y_1^+} dS
\end{aligned} \tag{e.29}$$

が得られる。したがって(e.28),(e.29)式より,

$$\int_V \sigma_{12} dy_1 dy_2 dy_3 = (2a) \int_{\Omega^{y_1^+}} t_2^{y_1^+} dS = (2b) \int_{\Omega^{y_2^+}} t_1^{y_2^+} dS \tag{e.30}$$

となる。なお、(e.30)式の二番目の等号で結ばれる関係はユニットセルの境界の表面力による y_3 軸周りのモーメントが釣り合っていることを示している。

σ_{13} の体積積分量については

$$\int_V \sigma_{13} dy_1 dy_2 dy_3 = \int_{\Omega} t_1 y_3 dS = 0 \tag{e.31}$$

および

$$\int_V \sigma_{13} dy_1 dy_2 dy_3 = \int_{\Omega} t_3 y_1 dS = (2a) \int_{\Omega^{y_1^+}} t_3^{y_1^+} dS \tag{e.32}$$

となるから,

$$\int_V \sigma_{13} dy_1 dy_2 dy_3 = (2a) \int_{\Omega^{y_1^+}} t_3^{y_1^+} dS = 0 \tag{e.33}$$

となる。なお(e.33)式より,

$$\int_{\Omega^{y_1^+}} t_3^{y_1^+} dS = 0 \tag{e.34}$$

が導かれる。 σ_{23} の体積積分量については,

$$\int_V \sigma_{23} dy_1 dy_2 dy_3 = (2b) \int_{\Omega^{y_2^+}} t_3^{y_2^+} dS = 0 \tag{e.35}$$

となり、(e.35)式より

$$\int_{\Omega^{y_2^+}} t_3^{y_2^+} dS = 0 \tag{e.36}$$

が導かれる。また σ_{33} の体積積分量については,

$$\int_{\mathcal{V}} \sigma_{33} dy_1 dy_2 dy_3 = \int_{\Omega} t_3 y_3 dS = 0 \quad (\text{e.37})$$

が成り立つことは明らかである。

次に $\sigma_{11}y_3$ の体積積分量については(e.20)式より,

$$\int_{\mathcal{V}} \sigma_{11}y_3 dy_1 dy_2 dy_3 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{2t_1 y_1 y_3 - t_3 (y_1)^2\} dS \quad (\text{e.38})$$

であり,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} t_1 y_1 y_3 dS &= \int_{\Omega^{y_1^+}} \{t_1^{y_1^+} (a) y_3^{y_1^+}\} dS + \int_{\Omega^{y_1^-}} \{t_1^{y_1^-} (-a) y_3^{y_1^-}\} dS \\ &+ \int_{\Omega^{y_2^+}} (t_1^{y_2^+} y_1^{y_2^+} y_3^{y_2^+}) dS + \int_{\Omega^{y_2^-}} (t_1^{y_2^-} y_1^{y_2^-} y_3^{y_2^-}) dS \\ &= (2a) \int_{\Omega^{y_1^+}} (t_1^{y_1^+} y_3^{y_1^+}) dS \end{aligned} \quad (\text{e.39})$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} t_3 (y_1)^2 dS &= \int_{\Omega^{y_1^+}} \{t_3^{y_1^+} (a)^2\} dS + \int_{\Omega^{y_1^-}} \{t_3^{y_1^-} (-a)^2\} dS \\ &+ \int_{\Omega^{y_2^+}} (t_3^{y_2^+} (y_1^{y_2^+})^2) dS + \int_{\Omega^{y_2^-}} (t_3^{y_2^-} (y_1^{y_2^-})^2) dS \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{e.40})$$

であるから, (e.39),(e.40)式を(e.38)式に代入して

$$\int_{\mathcal{V}} \sigma_{11}y_3 dy_1 dy_2 dy_3 = (2a) \int_{\Omega^{y_1^+}} (t_1^{y_1^+} y_3^{y_1^+}) dS \quad (\text{e.41})$$

を得る。同様にして $\sigma_{22}y_3$ の体積積分量は

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \sigma_{22}y_3 dy_1 dy_2 dy_3 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{2t_2 y_2 y_3 - t_3 (y_2)^2\} dS \\ &= (2b) \int_{\Omega^{y_2^+}} (t_2^{y_2^+} y_3^{y_2^+}) dS \end{aligned} \quad (\text{e.42})$$

となる。また $\sigma_{12}y_3$ の体積積分量は(e.20)式より,

$$\int_{\mathcal{V}} \sigma_{12}y_3 dy_1 dy_2 dy_3 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (t_1 y_2 y_3 + t_2 y_1 y_3 - t_3 y_1 y_2) dS \quad (\text{e.43})$$

であり,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} t_1 y_2 y_3 dS &= \int_{\Omega^{y_1^+}} (t_1^{y_1^+} y_2^{y_1^+} y_3^{y_1^+}) dS + \int_{\Omega^{y_1^-}} (t_1^{y_1^-} y_2^{y_1^-} y_3^{y_1^-}) dS \\ &+ \int_{\Omega^{y_2^+}} \{t_1^{y_2^+} (b) y_3^{y_2^+}\} dS + \int_{\Omega^{y_2^-}} \{t_1^{y_2^-} (-b) y_3^{y_2^-}\} dS \\ &= (2b) \int_{\Omega^{y_2^+}} (t_1^{y_2^+} y_3^{y_2^+}) dS \end{aligned} \quad (\text{e.44})$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} t_2 y_1 y_3 dS &= \int_{\Omega^{y_1^+}} \{t_2^{y_1^+} (a) y_3^{y_1^+}\} dS + \int_{\Omega^{y_1^-}} \{t_2^{y_1^-} (-a) y_3^{y_1^-}\} dS \\ &+ \int_{\Omega^{y_2^+}} (t_2^{y_2^+} y_1^{y_2^+} y_3^{y_2^+}) dS + \int_{\Omega^{y_2^-}} (t_2^{y_2^-} y_1^{y_2^-} y_3^{y_2^-}) dS \\ &= (2a) \int_{\Omega^{y_1^+}} (t_2^{y_1^+} y_3^{y_1^+}) dS \end{aligned} \quad (\text{e.45})$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} t_3 y_1 y_2 dS &= \int_{\Omega^{y_1^+}} \{t_3^{y_1^+} (a) y_2^{y_1^+}\} dS + \int_{\Omega^{y_1^-}} \{t_3^{y_1^-} (-a) y_2^{y_1^-}\} dS \\
&+ \int_{\Omega^{y_2^+}} \{t_3^{y_2^+} y_1^{y_2^+} (b)\} dS + \int_{\Omega^{y_2^-}} \{t_3^{y_2^-} y_1^{y_2^-} (-b)\} dS \\
&= (2a) \int_{\Omega^{y_1^+}} (t_3^{y_1^+} y_2^{y_1^+}) dS + (2b) \int_{\Omega^{y_2^+}} (t_3^{y_2^+} y_1^{y_2^+}) dS
\end{aligned} \tag{e.46}$$

であるから, (e.44),(e.45),(e.46)式を(e.43)式に代入して,

$$\begin{aligned}
\int_y \sigma_{12} y_3 dy_1 dy_2 dy_3 &= \frac{1}{2} (2b) \left\{ \int_{\Omega^{y_2^+}} (t_1^{y_2^+} y_3^{y_2^+}) dS - \int_{\Omega^{y_2^-}} (t_1^{y_2^-} y_3^{y_2^-}) dS \right\} \\
&+ \frac{1}{2} (2a) \left\{ \int_{\Omega^{y_1^+}} (t_2^{y_1^+} y_3^{y_1^+}) dS - \int_{\Omega^{y_1^-}} (t_2^{y_1^-} y_3^{y_1^-}) dS \right\}
\end{aligned} \tag{e.47}$$

を得る. なお $\sigma_{i3} y_3$ ($i=1,2,3$) の体積積分量は(e.20)式より,

$$\int_y \sigma_{i3} y_3 dy_1 dy_2 dy_3 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} t_i (y_3)^2 dS = 0 \tag{e.48}$$

となることは明らかである.

したがって, ユニットセルの $y_1 - y_2$ 面内での幾何学的形状が第 2 章 図 2.3 に示す場合, 上記の諸量を用いて(e.1),(e.2)式で定義される体積平均応力を求めると, ユニットセルの二次元領域 S_y の面積 $|S_y|$ は,

$$|S_y| = (2a) \times (2b) \tag{e.49}$$

であるから, (e.26),(e.27),(e.30),(e.33),(e.35),(e.37),(e.41),(e.42),(e.47),(e.48)式より,

$$N_{11} = \frac{1}{2b} \int_{\Omega^{y_1^+}} t_1^{y_1^+} dS \tag{e.50}$$

$$N_{22} = \frac{1}{2a} \int_{\Omega^{y_2^+}} t_2^{y_2^+} dS \tag{e.51}$$

$$N_{12} = \frac{1}{2a} \int_{\Omega^{y_2^+}} t_1^{y_2^+} dS = \frac{1}{2b} \int_{\Omega^{y_1^+}} t_2^{y_1^+} dS \tag{e.52}$$

$$N_{i3} = 0 \tag{e.53}$$

$$M_{11} = \frac{1}{2b} \int_{\Omega^{y_1^+}} t_1^{y_1^+} y_3^{y_1^+} dS \tag{e.54}$$

$$M_{22} = \frac{1}{2a} \int_{\Omega^{y_2^+}} (t_2^{y_2^+} y_3^{y_2^+}) dS \tag{e.55}$$

$$\begin{aligned}
M_{12} &= \frac{1}{2} \frac{1}{2a} \left(\int_{\Omega^{y_2^+}} (t_1^{y_2^+} y_3^{y_2^+}) dS - \int_{\Omega^{y_2^-}} (t_1^{y_2^-} y_3^{y_2^-}) dS \right) \\
&+ \frac{1}{2} \frac{1}{2b} \left(\int_{\Omega^{y_1^+}} (t_2^{y_1^+} y_3^{y_1^+}) dS - \int_{\Omega^{y_1^-}} (t_2^{y_1^-} y_3^{y_1^-}) dS \right)
\end{aligned} \tag{e.56}$$

$$M_{i3} = 0 \tag{e.57}$$

を得る. したがってユニットセルの幾何学的形状が第 2 章 図 2.3 に示す形状の場合,

(e.1),(e.2)式の応力の体積平均量はユニットセルの境界での値のみを用いて(e.50)～(e.57)式に示すように簡易な形式で表される．なお $y_1 - y_2$ 座標系の原点を長方形の中心に取った場合について(e.50)～(e.57)式が得られること示したが，上記の結果は面内での座標系の原点の位置に関わらず得られることを付言しておく．

Appendix F 梁の剛性マトリックス

二節点梁要素において図 F.1 に示すように $x^{(e)}$ 軸を梁断面の図心を通るように取り、また梁断面の主軸方向に $y^{(e)}, z^{(e)}$ 軸を取った要素座標系を定義すると、要素剛性方程式は、

$$\mathbf{f}_e^{(e)} = \mathbf{k}_e^{(e)} \mathbf{d}_e^{(e)} \quad (\text{f.1})$$

と表される。ただし、 $\mathbf{f}_e^{(e)}, \mathbf{d}_e^{(e)}$ はそれぞれ要素座標系で評価した要素節点力、要素節点変位の成分を次式のように並べたものである。

$$\mathbf{f}_e^{(e)} = \begin{Bmatrix} T_x^{(e)1} \\ T_y^{(e)1} \\ T_z^{(e)1} \\ M_x^{(e)1} \\ M_y^{(e)1} \\ M_z^{(e)1} \\ T_x^{(e)2} \\ T_y^{(e)2} \\ T_z^{(e)2} \\ M_x^{(e)2} \\ M_y^{(e)2} \\ M_z^{(e)2} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{d}_e^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_x^{(e)1} \\ u_y^{(e)1} \\ u_z^{(e)1} \\ \theta_x^{(e)1} \\ \theta_y^{(e)1} \\ \theta_z^{(e)1} \\ u_x^{(e)2} \\ u_y^{(e)2} \\ u_z^{(e)2} \\ \theta_x^{(e)2} \\ \theta_y^{(e)2} \\ \theta_z^{(e)2} \end{Bmatrix} \quad (\text{f.2})$$

ただし、上添字1,2はそれぞれ節点1, 節点2に関する量であることを示す。また要素座標系で評価した要素剛性マトリックス $\mathbf{k}_e^{(e)}$ は、

$$\mathbf{k}_e^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{e11}^{(e)} & \mathbf{k}_{e12}^{(e)} \\ \mathbf{k}_{e12}^{(e)T} & \mathbf{k}_{e22}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (\text{f.3})$$

および

$$\mathbf{k}_{e11}^{(e)} = \begin{bmatrix} E_L A / l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_y G_{LT} A / l & 0 & 0 & 0 & k_y G_{LT} A / 2 \\ & & k_z G_{LT} A / l & 0 & -k_z G_{LT} A / 2 & 0 \\ & & & G_{LT} J / l & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & E_L I_y / l + k_z G_{LT} A l / 4 & 0 \\ & & & & & E_L I_z / l + k_y G_{LT} A l / 4 \end{bmatrix} \quad (\text{f.4})$$

$$\mathbf{k}_{e12}^{(e)} = \begin{bmatrix} -E_L A/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_y G_{LT} A/l & 0 & 0 & 0 & k_y G_{LT} A/2 \\ 0 & 0 & -k_z G_{LT} A/l & 0 & -k_z G_{LT} A/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G_{LT} J/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_z G_{LT} A/2 & 0 & -E_L I_y/l + k_z G_{LT} A/4 & 0 \\ 0 & -k_y G_{LT} A/2 & 0 & 0 & 0 & -E_L I_z/l + k_y G_{LT} A/4 \end{bmatrix} \quad (\text{f.5})$$

$$\mathbf{k}_{e22}^{(e)} = \begin{bmatrix} E_L A/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_y G_{LT} A/l & 0 & 0 & 0 & -k_y G_{LT} A/2 \\ & & k_z G_{LT} A/l & 0 & k_z G_{LT} A/2 & 0 \\ & & & G_{LT} J/l & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & E_L I_y/l + k_z G_{LT} A/4 & 0 \\ & & & & & E_L I_z/l + k_y G_{LT} A/4 \end{bmatrix} \quad (\text{f.6})$$

で与えられる。ここで、 l は要素の長さ、 $E_L A$ は引張剛性、 $E_L I_y$ は要素 $y^{(e)}$ 軸に関する曲げ剛性、 $E_L I_z$ は要素 $z^{(e)}$ 軸に関する曲げ剛性、 $G_{LT} J$ は要素 $x^{(e)}$ 軸周りのねじり剛性、 $k_y G_{LT} A$ は要素 $y^{(e)}$ 軸方向有効せん断剛性、 $k_z G_{LT} A$ は要素 $z^{(e)}$ 軸方向有効せん断剛性である。なお k_y, k_z はせん断係数である。なお上添字 (e) は要素座標系で評価した量であることを示す。

ここで図 F.2 に示すように要素座標系における $x^{(e)}, y^{(e)}, z^{(e)}$ 軸の単位基底ベクトルを $\mathbf{e}_{1e}, \mathbf{e}_{2e}, \mathbf{e}_{3e}$ とし、全体座標系の x, y, z 軸の単位基底ベクトルを $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ とし、

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_{1e}) & (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_{2e}) & (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_{3e}) \\ (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_{1e}) & (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_{2e}) & (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_{3e}) \\ (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_{1e}) & (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_{2e}) & (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_{3e}) \end{bmatrix} \quad (\text{f.7})$$

なるマトリックスを用いて、

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{T}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{f.8})$$

なる座標変換マトリックス \mathbf{T} を定義する。なお、(f.7),(f.8)式の \mathbf{T}_3, \mathbf{T} は $\mathbf{T}_3^T = \mathbf{T}_3^{-1}, \mathbf{T}^T = \mathbf{T}^{-1}$ を満たす直交マトリックスである。すると(f.2)式の要素座標系で評価した要素節点力 $\mathbf{f}_e^{(e)}$ 、要素節点変位 $\mathbf{d}_e^{(e)}$ はそれぞれ \mathbf{T} を用いて次式に示すように全体座標系で評価した要素節点力 \mathbf{f}_e 、要素節点変位 \mathbf{d}_e に変換することができる。

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{T} \mathbf{f}_e^{(e)}, \quad \mathbf{d}_e = \mathbf{T} \mathbf{d}_e^{(e)} \quad (\text{f.9})$$

そして(f.1),(f.9)式より、

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{T} \mathbf{f}_e^{(e)} = \mathbf{T} \mathbf{k}_e^{(e)} \mathbf{d}_e^{(e)} = \mathbf{T} \mathbf{k}_e^{(e)} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{d}_e = \mathbf{T} \mathbf{k}_e^{(e)} \mathbf{T}^T \mathbf{d}_e \quad (\text{f.10})$$

が得られる。なお、 $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$ を用いている。全体座標系で評価した要素剛性方程式が

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e \quad (\text{f.11})$$

で表されることより、全体座標系で評価した要素剛性マトリックス \mathbf{k}_e は要素座標系で評価した要素剛性マトリックスを用いて

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{T} \mathbf{k}_e^{(e)} \mathbf{T}^T \quad (\text{f.12})$$

と表される。

なお、梁の断面形状が図 F.3 に示すような長軸 B 、短軸 H の楕円の場合、(f.4)～(f.6)式の梁の諸特性は次式を用いて得られる。

$$E_L A = E_L \pi a b \quad (\text{f.13})$$

$$E_L I_y = E_L \pi a b^3 / 4 \quad (\text{f.14})$$

$$E_L I_z = E_L \pi a^3 b / 4 \quad (\text{f.15})$$

$$k_y G_{LT} A = k_y G_{LT} \pi a b \quad (\text{f.16})$$

$$k_z G_{LT} A = k_z G_{LT} \pi a b \quad (\text{f.17})$$

$$G_{LT} J = G_{LT} \pi a^3 b^3 / (a^2 + b^2) \quad (\text{f.18})$$

ただし、せん断係数については $k_y = k_z = 9/10$ を用いることとする。

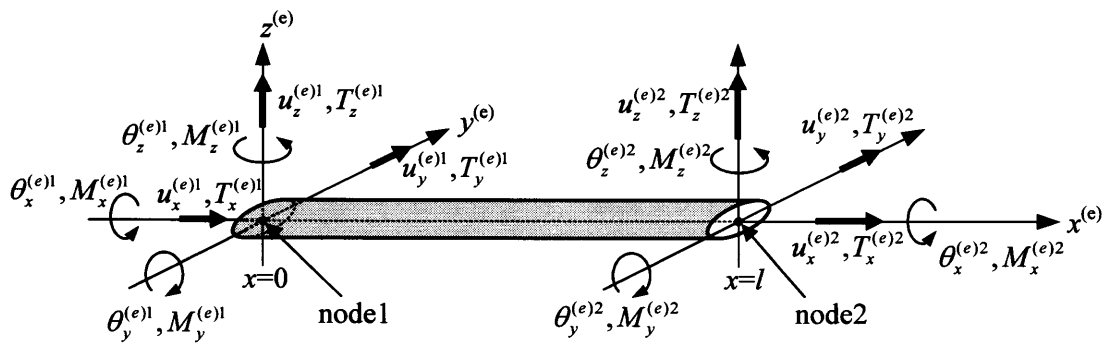


図 F.1 二節点梁要素

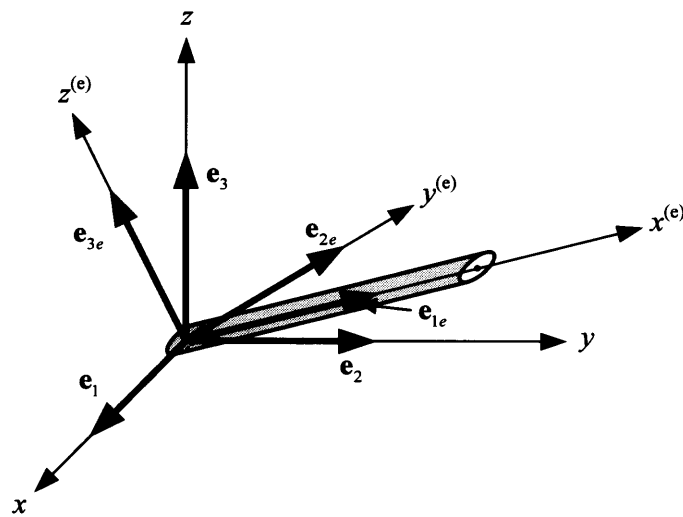


図 F.2 要素座標系と全体座標系

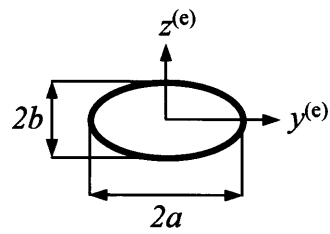


図 F.3 梁の断面形状

Appendix G 繊維束の材料定数の算出法

第4章 4.3節 4.3.1項では繊維束を横方向等方性 (transversely isotropic) を有する均質異方性体と見なし, Hashin[79]のComposite Cylinder Assemblage 法を用いて繊維束を構成する繊維および樹脂の材料定数から, 繊維束の材料定数を算出した. 詳細は Hashin[79]に譲り, ここでは材料定数の算出に用いた関係式を以下に示すにとどめる.

$$E_L = E_L^f V_f + E_L^m V_m + \frac{4(v_{LT}^f - v_{LT}^m)^2 V_m V_f}{V_m / k^f + V_f / k^m + 1 / G_{TT}^m} \quad (\text{g.1})$$

$$v_{LT} = v_{LT}^f V_f + v_{LT}^m V_m + \frac{(v_{LT}^f - v_{LT}^m)(1/k^m - 1/k^f)V_m V_f}{V_m / k^f + V_f / k^m + 1 / G_{TT}^m} \quad (\text{g.2})$$

$$G_{LT} = G_{LT}^m \frac{G_{LT}^m V_m + G_{LT}^f (1 + V_f)}{G_{LT}^m (1 + V_f) + G_{LT}^f V_m} \quad (\text{g.3})$$

$$G_{TT} = G_{LT}^m \left(1 + \frac{(1 + \beta_1) V_f}{\rho - V_f \left\{ 1 + (3\beta_1^2 V_m^2) / (\alpha V_f^3 + 1) \right\}} \right) \quad (\text{g.4})$$

$$E_T = \frac{4kG_{TT}}{k + \left\{ 1 + \frac{4k(v_{LT}^f)^2}{E_L} \right\} G_{TT}} \quad (\text{g.5})$$

ただし,

$$\frac{1}{k^f} = -\frac{1}{G_{TT}^f} - \frac{4(v_{LT}^f)^2}{E_L^f} + \frac{4}{E_T^f} \quad (\text{g.6})$$

$$\frac{1}{k^m} = -\frac{1}{G_{TT}^m} - \frac{4(v_{LT}^m)^2}{E_L^m} + \frac{4}{E_T^m} \quad (\text{g.7})$$

$$\alpha = \frac{\beta_1 - \gamma\beta_2}{1 + \gamma\beta_2}, \quad \rho = \frac{\gamma + \beta_1}{\gamma - 1} \quad (\text{g.8})$$

$$\beta_1 = \frac{k^m}{k^m + 2G_{TT}^m}, \quad \beta_2 = \frac{k^f}{k^f + 2G_{TT}^f}, \quad \gamma = \frac{G_{TT}^f}{G_{TT}^m} \quad (\text{g.9})$$

である. なお, V_f, V_m はそれぞれ繊維体積含有率, 樹脂体積含有率を表し, また繊維に関する諸量については上添字「 f 」を付して例えば E_L^f 等と表記し, 樹脂に関する諸量については上添字「 m 」を付して表記している.

Appendix H 平板の諸特性の算出法

引張剛性，ポアソン比，曲げ剛性の算出

平板の剛性が次式で与えられた場合に，これを一方向引張負荷および一方向純曲げ負荷の場合に適用して，引張剛性，ポアソン比，曲げ剛性を算出する方法を示す

$$\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B]^T & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ 2\varepsilon_{12}^0 \\ \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{h.1})$$

上式の逆関係より，次式を得る

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ 2\varepsilon_{12}^0 \\ \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [a] & [b] \\ [b]^T & [d] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{h.2})$$

ただし

$$\begin{bmatrix} [a] & [b] \\ [b]^T & [d] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B]^T & [D] \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{h.3})$$

である。

そこで x_1 方向引張負荷の場合，

$$\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{N}_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{h.4})$$

として，(h.4)式を(h.2)式に代入して，

$$\varepsilon_{11}^0 = a_{11} \bar{N}_{11} \quad (\text{h.5})$$

$$\varepsilon_{22}^0 = a_{12} \bar{N}_{11} \quad (\text{h.6})$$

を得る。そこで引張剛性を $S_1 \equiv \bar{N}_{11} / \varepsilon_{11}^0$ と定義してポアソン比を $\nu \equiv -\varepsilon_2^0 / \varepsilon_1^0$ と定義すると (h.5),(h.6)式から

$$S_i = \frac{1}{a_{11}} \quad (\text{h.7})$$

$$\nu = -\frac{a_{12}}{a_{11}} \quad (\text{h.8})$$

により引張剛性およびポアソン比が算出される。

次に x_1 方向純曲げ負荷の場合、

$$\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{M}_{11} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{h.9})$$

として、(h.9)式を(h.2)式に代入して

$$\kappa_{11} = d_{11} \bar{M}_{11} \quad (\text{h.10})$$

を得る。そこで、曲げ剛性を $S_b \equiv \bar{M}_{11} / \kappa_{11}$ と定義すると、(h.10)式から

$$S_b = \frac{1}{d_{11}} \quad (\text{h.11})$$

により曲げ剛性が算出される。

曲率を拘束した場合の引張剛性、ポアソン比の算出

次に曲率を $[\kappa_{11} \ \kappa_{22} \ 2\kappa_{12}] = [0 \ 0 \ 0]$ と拘束し、 x_1 方向引張負荷の場合について引張剛性、ポアソン比を算出する方法を示す

まず、

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix}, \{M\} = \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{Bmatrix}, \{E\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ 2\varepsilon_{12}^0 \end{Bmatrix}, \{K\} = \begin{Bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{h.12})$$

と置き、(h.1)式を次のように表記する。

$$\{N\} = [A]\{E\} + [B]\{K\} \quad (\text{h.13})$$

$$\{M\} = [B]^T \{E\} + [D]\{K\} \quad (\text{h.14})$$

(h.13)式より次式を得る。

$$\{E\} = [A]^{-1} \{N\} - [A]^{-1} [B]\{K\} \quad (\text{h.15})$$

(h.15)式を(h.14)式に代入して次式を得る。

$$\{M\} = [B]^T [A]^{-1} \{N\} + \left[[D] - [B]^T [A]^{-1} [B] \right] \{K\} \quad (\text{h.16})$$

(h.15)式, (h.16)式をまとめて表記すると

$$\begin{Bmatrix} \{E\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A]^{-1} & -[A]^{-1}[B] \\ [B]^T[A]^{-1} & [D]-[B]^T[A]^{-1}[B] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [N] \\ [K] \end{Bmatrix} \quad (\text{h.17})$$

となる. 曲率を $[\kappa_1 \ \kappa_2 \ 2\kappa_{12}] = [0 \ 0 \ 0]$ と拘束し, x_1 方向引張負荷の場合

$$\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{N}_{11} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{h.18})$$

であり, (h.18)式を(h.17)式に代入して,

$$\epsilon_{11}^0 = A^{-1}_{11} \bar{N}_{11} \quad (\text{h.19})$$

$$\epsilon_{22}^0 = A^{-1}_{12} \bar{N}_{11} \quad (\text{h.20})$$

を得るので, この場合の引張剛性 $S_i^{K=0}$, ポアソン比 $\nu^{K=0}$ は

$$S_i^{K=0} = \frac{1}{A^{-1}_{11}} \quad (\text{h.21})$$

$$\nu^{K=0} = -\frac{A^{-1}_{12}}{A^{-1}_{11}} \quad (\text{h.22})$$

となる.

Appendix I 平板の剛性が等方性となる条件

図 I.1 のように x_1, x_2 面内に存在する平板の構成方程式が (x_1, x_2, x_3) 座標系で

$$\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B]^T & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ 2\varepsilon_{12}^0 \\ \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{i.1})$$

と表記されるとする。 x_3 軸周りに角度 θ だけ回転した座標系 $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ を考え、この座標系での諸量に上付き「 \sim 」を付けて表記することにする。

応力、ひずみ、曲率はテンソル量であるため、その成分は次式の座標変換則に従う。

$$\begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{11} & \tilde{\sigma}_{12} \\ \tilde{\sigma}_{12} & \tilde{\sigma}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (\text{i.2})$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{11}^0 & \tilde{\varepsilon}_{12}^0 \\ \tilde{\varepsilon}_{12}^0 & \tilde{\varepsilon}_{22}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^0 & \varepsilon_{12}^0 \\ \varepsilon_{12}^0 & \varepsilon_{22}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (\text{i.3})$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_{11} & \tilde{\kappa}_{12} \\ \tilde{\kappa}_{12} & \tilde{\kappa}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{12} & \kappa_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (\text{i.4})$$

上式の座標変換則をマトリックス形式で次式のように表記しておく。

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}_{11} \\ \tilde{\sigma}_{22} \\ \tilde{\sigma}_{12} \end{Bmatrix} = [T(\theta)] \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{i.5})$$

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{11}^0 \\ \tilde{\varepsilon}_{22}^0 \\ \tilde{\varepsilon}_{12}^0 \end{Bmatrix} = [T(\theta)] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ \varepsilon_{12}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{i.6})$$

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\kappa}_{11} \\ \tilde{\kappa}_{22} \\ \tilde{\kappa}_{12} \end{Bmatrix} = [T(\theta)] \begin{Bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{i.7})$$

ただし、

$$[T(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (\text{i.8})$$

である。合応力，合モーメントを表す応力の平均量については，(2.31),(2.32),(2.33)式より，

$$\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|S_y|} \iiint_{V_y} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} dy_1 dy_2 dy_3, \quad \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|S_y|} \iiint_{V_y} y_3 \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} dy_1 dy_2 dy_3 \quad (\text{i.9})$$

で定義されるので，その座標変換則は(i.5)式と同様に次式のように表記される。

$$\begin{Bmatrix} \tilde{N}_{11} \\ \tilde{N}_{22} \\ \tilde{N}_{12} \end{Bmatrix} = [T(\theta)] \begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{i.10})$$

$$\begin{Bmatrix} \tilde{M}_{11} \\ \tilde{M}_{22} \\ \tilde{M}_{12} \end{Bmatrix} = [T(\theta)] \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{i.11})$$

次に，(i.6),(i.7)式の逆関係より，

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ \varepsilon_{12}^0 \end{Bmatrix} = [T(\theta)]^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{11}^0 \\ \tilde{\varepsilon}_{22}^0 \\ \tilde{\varepsilon}_{12}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{i.12})$$

$$\begin{Bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \end{Bmatrix} = [T(\theta)]^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{\kappa}_{11} \\ \tilde{\kappa}_{22} \\ \tilde{\kappa}_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{i.13})$$

となる。\$[T(\theta)]^{-1}\$ は \$[T(\theta)]\$ で \$\theta\$ を \$-\theta\$ で置き換えたものが表示式となる。

$$[T(\theta)]^{-1} = [T(-\theta)] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (\text{i.14})$$

ここで，

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad W^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{i.15})$$

なるマトリックスを導入すると,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ 2\varepsilon_{12}^0 \end{Bmatrix} = [W] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ \varepsilon_{12}^0 \end{Bmatrix} = [W][T(\theta)]^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{11}^0 \\ \tilde{\varepsilon}_{22}^0 \\ \tilde{\varepsilon}_{12}^0 \end{Bmatrix} = [W][T(\theta)]^{-1}[W]^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{11}^0 \\ \tilde{\varepsilon}_{22}^0 \\ 2\tilde{\varepsilon}_{12}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{i.16})$$

$$\begin{Bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{Bmatrix} = [W][T(\theta)]^{-1}[W]^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{\kappa}_{11} \\ \tilde{\kappa}_{22} \\ 2\tilde{\kappa}_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{i.17})$$

となるが,

$$[W][T(\theta)]^{-1}[W]^{-1} = [T(\theta)]^T \quad (\text{i.18})$$

となることが容易に確かめられるので, (i.16),(i.17)式は次式のように表記される.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ 2\varepsilon_{12}^0 \end{Bmatrix} = [T(\theta)]^T \begin{Bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{11}^0 \\ \tilde{\varepsilon}_{22}^0 \\ 2\tilde{\varepsilon}_{12}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{i.19})$$

$$\begin{Bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{Bmatrix} = [T(\theta)]^T \begin{Bmatrix} \tilde{\kappa}_{11} \\ \tilde{\kappa}_{22} \\ 2\tilde{\kappa}_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{i.20})$$

従って,

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \tilde{N}_{11} \\ \tilde{N}_{22} \\ \tilde{N}_{12} \end{Bmatrix} &= [T(\theta)] \begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix} \\ &= [T(\theta)] \left([A] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ 2\varepsilon_{12}^0 \end{Bmatrix} + [B] \begin{Bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{Bmatrix} \right) \\ &= [T(\theta)] \left([A][T(\theta)]^T \begin{Bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{11}^0 \\ \tilde{\varepsilon}_{22}^0 \\ 2\tilde{\varepsilon}_{12}^0 \end{Bmatrix} + [B][T(\theta)]^T \begin{Bmatrix} \tilde{\kappa}_{11} \\ \tilde{\kappa}_{22} \\ 2\tilde{\kappa}_{12} \end{Bmatrix} \right) \\ &= [T(\theta)][A][T(\theta)]^T \begin{Bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{11}^0 \\ \tilde{\varepsilon}_{22}^0 \\ 2\tilde{\varepsilon}_{12}^0 \end{Bmatrix} + [T(\theta)][B][T(\theta)]^T \begin{Bmatrix} \tilde{\kappa}_{11} \\ \tilde{\kappa}_{22} \\ 2\tilde{\kappa}_{12} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{i.21})$$

同様にして,

$$\begin{Bmatrix} \widetilde{M}_{11} \\ \widetilde{M}_{22} \\ \widetilde{M}_{12} \end{Bmatrix} = [T(\theta)][B]^T [T(\theta)]^T \begin{Bmatrix} \overset{\sim}{\varepsilon}_{11} \\ \overset{\sim}{\varepsilon}_{22} \\ 2\overset{\sim}{\varepsilon}_{12} \end{Bmatrix} + [T(\theta)][D][T(\theta)]^T \begin{Bmatrix} \widetilde{\kappa}_{11} \\ \widetilde{\kappa}_{22} \\ 2\widetilde{\kappa}_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{i.22})$$

と表記される. x_3 軸周りに角度 θ だけ回転した座標系 $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3)$ における, 平板の構成方程式を

$$\begin{Bmatrix} \widetilde{N}_{11} \\ \widetilde{N}_{22} \\ \widetilde{N}_{12} \\ \widetilde{M}_{11} \\ \widetilde{M}_{22} \\ \widetilde{M}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\widetilde{A}] & [\widetilde{B}] \\ [\widetilde{B}]^T & [\widetilde{D}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overset{\sim}{\varepsilon}_{11} \\ \overset{\sim}{\varepsilon}_{22} \\ 2\overset{\sim}{\varepsilon}_{12} \\ \widetilde{\kappa}_{11} \\ \widetilde{\kappa}_{22} \\ 2\widetilde{\kappa}_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{i.23})$$

と表記すると, (i.21),(i.22),(i.23)式より, 平板の剛性に関する座標変換則が次式で与えられる.

$$[\widetilde{A}] = [T(\theta)][A][T(\theta)]^T \quad (\text{i.24})$$

$$[\widetilde{B}] = [T(\theta)][B][T(\theta)]^T \quad (\text{i.25})$$

$$[\widetilde{D}] = [T(\theta)][D][T(\theta)]^T \quad (\text{i.26})$$

ここで

$$[\widetilde{A}] = [A], [\widetilde{B}] = [B], [\widetilde{D}] = [D] \quad (\text{i.27})$$

が任意の角度 θ について成立すると, 平板の剛性が $(x_1, x_2$ 面内で) 等方性を有することになる. その条件を以下に示す.

まず $[B]$ マトリックス

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{i.28})$$

について(i.27)式が成立する条件は

$$B_{11} = B_{22} \quad (\text{i.29})$$

$$B_{12} = B_{21} \quad (\text{i.30})$$

$$B_{13} = -B_{31} = B_{32} = -B_{23} \quad (\text{i.31})$$

$$B_{33} = \frac{B_{11} - B_{12}}{2} \quad (\text{i.32})$$

である。すなわち[B]マトリックスの成分が

$$[B] = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a & -c \\ -c & c & \frac{a-b}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{i.33})$$

のように表記されるのが条件である。

次に, [A],[D]マトリックスについて(i.27)式が成立する条件を示すが, [A],[D]マトリックスは対称マトリックスであるため, その条件は,

$$A_{13} = A_{31} = A_{32} = A_{23} = 0 \quad (\text{i.34})$$

$$A_{33} = \frac{A_{11} - A_{12}}{2} \quad (\text{i.35})$$

$$D_{13} = D_{31} = D_{32} = D_{23} = 0 \quad (\text{i.36})$$

$$D_{33} = \frac{D_{11} - D_{12}}{2} \quad (\text{i.37})$$

となる。すなわち

$$[A] \text{ or } [D] = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a-b}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{i.38})$$

と表記されるのが条件である。

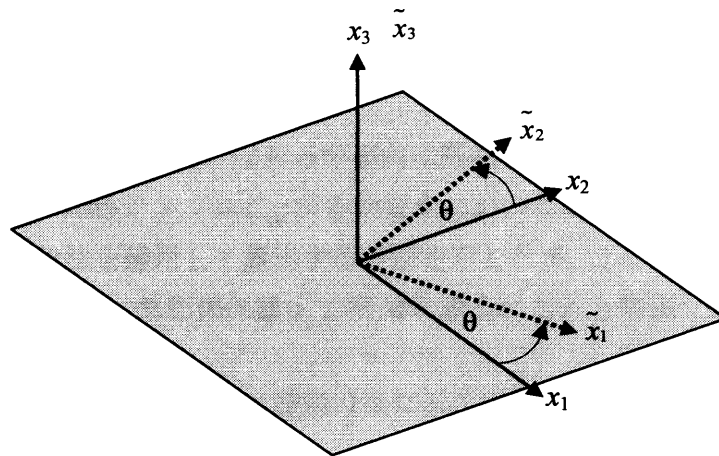


図 I.1 平板の座標系

Appendix J 熱膨張係数の解析

J.1 均質化法による等価な平板の熱膨張係数の算出法

第2章 2.2節において不均質ではあるが面内に周期的な構造を有する板状構造物についてその構成材料の剛性テンソル C_{ijkl} が各物質点において既知の場合に、これと等価な平板の剛性を均質化法を適用して算出する方法を示したが、ここでは各物質点において剛性テンソル C_{ijkl} に加え、熱膨張係数 α_{ij} が既知の場合にこれと等価な平板の熱膨張係数を算出する方法を示す。

まず第2章 2.2節に示したマイクロ問題は次に示す問題となる。

[マイクロ問題]

次式を満たす y_1, y_2 につき S_y で周期的な $\mathbf{u}^{(2)}$ を求める

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_j} = 0 \quad (\text{j.1})$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{j.2})$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta} + y_3 K_{\alpha\beta} - \alpha_{\alpha\beta} \Delta\theta + \varepsilon_{\alpha\beta}^{(per)} \quad (\text{j.3})$$

$$\varepsilon_{i3} = -\alpha_{i3} \Delta\theta + \varepsilon_{i3}^{(per)} \quad (\text{j.4})$$

$$\varepsilon_{ij}^{(per)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial y_i} \right) \quad (\text{j.5})$$

$$\sigma_{ij} n_j = 0 \quad \text{on } \Gamma^+ \text{ and } \Gamma^- \quad (\text{j.6})$$

$$\sigma_{ij} n_j \text{ antiperiodic on } \Omega \quad (\text{j.7})$$

マイクロ問題において(j.3),(j.4)式で下線を付けた項が新たに加わることになる。なお $\Delta\theta$ は参照温度からの温度変化を表し、ユニットセルの座標 $y_i (i=1,2,3)$ に依存しない定数とする。なお(j.2)~(j.5)式よりユニットセル内の応力 σ_{ij} は、

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial y_l} + C_{ij\alpha\beta} (E_{\alpha\beta} + y_3 K_{\alpha\beta}) - \beta_{ij} \Delta\theta \quad (\text{j.8})$$

と表される。ここで β_{ij} は $\beta_{ij} \equiv C_{ijkl} \alpha_{kl}$ は定義される熱弾性定数である。

マイクロ問題において(j.1)~(j.7)式から問題の線形性より $E_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}, \Delta\theta$ をパラメータとして $\mathbf{u}^{(2)}$ は次式のように求められる。

$$\mathbf{u}_i^{(2)} = \chi_i^{\alpha\beta}(y) E_{\alpha\beta} + \lambda_i^{\alpha\beta}(y) K_{\alpha\beta} + \underline{\psi_i \Delta\theta} \quad (\text{j.9})$$

ただし $E_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}$ に関する特性関数 $\chi_i^{\alpha\beta}, \lambda_i^{\alpha\beta}$ に加え, $\Delta\theta$ に関する特性関数 ψ_i を用いている。ここで特性関数 ψ_i は単位の温度変化 $\Delta\theta=1$ としてその他のパラメータを $E_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta} = 0$ ($\alpha, \beta=1,2$) とした時のマイクロ問題の解 $\mathbf{u}^{(2)}$ である。(j.9)式を(j.8)式に代入して次式を得る。

$$\sigma_{ij} = \left(C_{ijkl} \frac{\partial \chi_k^{\alpha\beta}}{\partial y_l} + C_{ij\alpha\beta} \right) E_{\alpha\beta} + \left(C_{ijkl} \frac{\partial \lambda_k^{\alpha\beta}}{\partial y_l} + y_3 C_{ij\alpha\beta} \right) K_{\alpha\beta} - \left(\beta_{ij} - C_{ijkl} \frac{\partial \psi_k}{\partial y_l} \right) \Delta\theta \quad (\text{j.10})$$

[マクロ問題]

ユニットセル内の平均量を求める作用素

$$[\cdot] \equiv (1/|S_y|) \int_y \cdot dy_1 dy_2 dy_3 \quad (\text{j.11})$$

を用いてユニットセル内の応力 σ_{ij} に関する平均量として次式に示す量を定義する。

$$N_{ij} \equiv [\sigma_{ij}], \quad M_{ij} \equiv [y_3 \sigma_{ij}] \quad (\text{j.12})$$

(j.10)式を(j.12)式に代入して次式を得る。

$$N_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{11} E_{\gamma\delta} + L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{12} K_{\gamma\delta} - \underline{N_{\alpha\beta}^\theta \Delta\theta} \quad (\text{j.13})$$

$$M_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{21} E_{\gamma\delta} + L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{22} K_{\gamma\delta} - \underline{M_{\alpha\beta}^\theta \Delta\theta} \quad (\text{j.14})$$

ここで

$$N_{\alpha\beta}^\theta = \left[\beta_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta kl} \frac{\partial \psi_k}{\partial y_l} \right] \quad (\text{j.15})$$

$$M_{\alpha\beta}^\theta = \left[y_3 \left(\beta_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta kl} \frac{\partial \psi_k}{\partial y_l} \right) \right] \quad (\text{j.16})$$

である。(j.13),(j.14)式より $N_{\alpha\beta}^\theta, M_{\alpha\beta}^\theta$ は等価な平板において面内ひずみおよび曲率を $E_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta} = 0$ ($\alpha, \beta=1,2$) と拘束し, 単位の温度変化が $\Delta\theta=1$ がある場合の合応力, 合モーメントを表す。ここで平板の構成式を表す(j.13),(j.14)式を次式のマトリクス形式で表しておく。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B^T] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{K} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{N}^\theta \\ \mathbf{M}^\theta \end{Bmatrix} \Delta\theta \quad (\text{j.17})$$

ただし,

$$\mathbf{N}^\theta = \begin{Bmatrix} N_{11}^\theta \\ N_{22}^\theta \\ N_{12}^\theta \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{M}^\theta = \begin{Bmatrix} M_{11}^\theta \\ M_{22}^\theta \\ M_{12}^\theta \end{Bmatrix} \quad (\text{j.18})$$

である. そこで, (j.17)式において平板の合応力, 合モーメント $[\mathbf{N} \ \mathbf{M}] = [\mathbf{0} \ \mathbf{0}]$ として,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{K} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B^T] & [D] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{N}^\theta \\ \mathbf{M}^\theta \end{Bmatrix} \Delta\theta \quad (\text{j.19})$$

が得られるので, 等価な平板の熱膨張係数は

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\alpha}^E \\ \boldsymbol{\alpha}^K \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B^T] & [D] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{N}^\theta \\ \mathbf{M}^\theta \end{Bmatrix} \quad (\text{j.20})$$

と与えられる. なお $\boldsymbol{\alpha}^E, \boldsymbol{\alpha}^K$ はそれぞれ力学的荷重が作用していない状態で単位の温度変化 $\Delta\theta=1$ がある場合の面内ひずみおよび曲率を表す.

J.2 有限要素法定式化

等価な平板の熱膨張係数を求めるには(j.9)式の特関数 ψ_i を求める必要がある. ここでは特関数 ψ_i を有限要素法により求める方法を示す.

マイクロ問題において特関数 ψ_i を求める際の変分的定式化は,

$$\varepsilon_{ij}^{(per)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y_i} \right) \quad (\text{j.21})$$

$$\delta \varepsilon_{ij}^{(per)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta \psi_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \delta \psi_j}{\partial y_i} \right) \quad (\text{j.22})$$

としてユニットセルで y_1, y_2 に関して周期的な任意の $\delta \psi_i$ ($i=1,2,3$) について

$$\int_{\mathcal{V}_y} \delta \varepsilon_{ij}^{(per)T} \mathbf{C} \varepsilon_{ij}^{(per)} (\varepsilon_{kl}^{(per)} - \alpha_{kl}) dy_1 dy_2 dy_3 = 0 \quad (\text{j.23})$$

を満たす y_1, y_2 に関して周期的な ψ_i ($i=1,2,3$) を求める.

となる. まず, (j.23)式をマトリックス形式で次式のように表しておく.

$$\int_{\mathcal{V}_y} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(per)T} \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^{(per)} dy_1 dy_2 dy_3 = \int_{\mathcal{V}_y} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(per)T} \boldsymbol{\beta} \Delta\theta dy_1 dy_2 dy_3 \quad (\text{j.24})$$

ただし

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \delta\varepsilon_{11}(\boldsymbol{\psi}) \\ \delta\varepsilon_{22}(\boldsymbol{\psi}) \\ \delta\varepsilon_{33}(\boldsymbol{\psi}) \\ 2\delta\varepsilon_{23}(\boldsymbol{\psi}) \\ 2\delta\varepsilon_{31}(\boldsymbol{\psi}) \\ 2\delta\varepsilon_{12}(\boldsymbol{\psi}) \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}(\boldsymbol{\psi}) \\ \varepsilon_{22}(\boldsymbol{\psi}) \\ \varepsilon_{33}(\boldsymbol{\psi}) \\ 2\varepsilon_{23}(\boldsymbol{\psi}) \\ 2\varepsilon_{31}(\boldsymbol{\psi}) \\ 2\varepsilon_{12}(\boldsymbol{\psi}) \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{Bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{22} \\ \beta_{33} \\ \beta_{23} \\ \beta_{31} \\ \beta_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{j.25})$$

である。そこで $\boldsymbol{\psi}$ を節点変位 \mathbf{d} を用いて次のように離散化する。

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{N}\mathbf{d}, \delta\boldsymbol{\psi} = \mathbf{N}\delta\mathbf{d}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(per)} = \mathbf{B}\mathbf{d}, \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(per)} = \mathbf{B}\delta\mathbf{d} \quad (\text{j.26})$$

(j.26)式を(j.24)式に代入して次式を得る。

$$\delta\mathbf{d}^T \mathbf{K}\mathbf{d} = \delta\mathbf{d}^T \mathbf{F} \quad (\text{j.27})$$

ただし

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C}\mathbf{B} dy_1 dy_2 dy_3, \mathbf{F} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\beta} dy_1 dy_2 dy_3 \quad (\text{j.28})$$

である。 $\delta\mathbf{d}, \mathbf{d}$ に周期的境界条件を考慮して(j.27)式より節点変位 \mathbf{d} が求められる。

J.3 解析結果

三軸織物複合材料 SK-802 を解析対象として、第 4 章 4.3 節に示した三次元ソリッド有限要素解析モデルを用い、上記の方法によりこれと等価な平板の熱膨張係数を算出した結果を示す。なお繊維束の材料定数として第 4 章 表 4.4 に示す諸量を用いている。また繊維束の熱膨張係数として表 J.1 に示す値を用いた。解析の結果(j.20)に示した熱膨張係数として次式が得られる。

$$\{\boldsymbol{\alpha}^E\} = \begin{Bmatrix} 1.142 \\ 1.142 \\ 0 \end{Bmatrix} (10^{-6}/\text{K}), \{\boldsymbol{\alpha}^K\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{j.29})$$

(j.29)式の結果より熱膨張係数が等方性を有することが分かる。したがって三軸織物複合材料はその剛性が等方性を有すると共に熱膨張係数も等方性を有する材料であることが解析的に示される。なお(j.29)式より $\boldsymbol{\alpha}^K = \mathbf{0}$ であるから当材料に(一様な)温度変化のみを作用させた場合、曲げやねじりの変形を生じないことが分かる。

J.4 自由端を有する場合の熱膨張係数の解析

なお、有限な面内寸法を持つ自由端を有するサンプルを用いて当材料の熱膨張係数を評価する場合に、剛性評価の場合と同様に自由端の存在により正しく評価できない可能性がある。そこで第 4 章で述べた自由端を有する場合の剛性評価と同様の方法により自

由端の存在が、評価される（見掛けの）熱膨張係数に及ぼす影響について解析的に検討した。

0度方向に有限な寸法を有し90度方向に無限長である解析対象の90度方向の見掛けの熱膨張係数を解析する場合には、図J.1に示すように0度方向（幅方向）に有限個のユニットセルを並べた解析モデルにおいて90度方向境界には一様な90度方向ひずみを許す周期的境界条件を課し、この解析モデルに（一様な）温度変化を作用させて解析を実施し、得られた90度方向ひずみより見掛けの熱膨張係数を算出する。0度方向についても同様の方法を用いる。

上記の方法により幅方向ユニットセル数を8,10,12と変化させて0度方向および90度方向の見掛けの熱膨張係数を算出した結果を図J.2に示す。また図J.2中に均質化法による熱膨張係数を「○」で示している。図J.2より有限幅寸法を有するサンプルを用いた場合に見掛けの熱膨張係数が幅方向ユニットセル数により変化することが分かる。

次にユニットセル毎の熱膨張係数を算出する。90度方向熱膨張係数については図J.3に示すように0度方向に有限個のユニットセルを並べた解析モデルにおいて90度方向の境界においてはユニットセル毎に90度方向に一定のひずみを許す境界条件を課し、このモデルに（一様な）温度変化を作用させて解析を実施し、得られたユニットセル毎の90度方向ひずみより熱膨張係数を算出した。

上記の方法により、幅方向ユニットセル数が8ユニット、12ユニットの場合の0度方向熱膨張係数を算出した結果を図J.4に示す。また90度方向の場合の結果を図J.5に示す。なお、図J.4、図J.5ではユニットセル毎に得られた熱膨張係数を均質化法により得られた無限板の熱膨張係数で正規化して示している。なおユニットセルの番号は0度方向の解析については x_2 座標が小さい順に、90度方向の解析については x_1 座標が小さい順に1から連番を振っている。図J.4、図J.5より幅方向自由端近傍の1ユニットないしは2ユニット領域において熱膨張係数が増加することが分かる。0度方向に比べ90度方向の場合に自由端部での熱膨張係数の増加が顕著であり、幅方向中央部に比べて約90%もの増加が見られる。

以上の解析結果より当材料は無限板であれば熱膨張係数についても等方性を有するが、有限な寸法を持つサンプルを用いて当材料の熱膨張係数を評価する場合、自由端の存在によりその熱膨張係数を正しく評価できない場合があることが示された。

表 J.1 解析に使用した繊維束の熱膨張係数

α_L	α_T
$10^{-6}/\text{K}$	$10^{-6}/\text{K}$
0.4	36.0

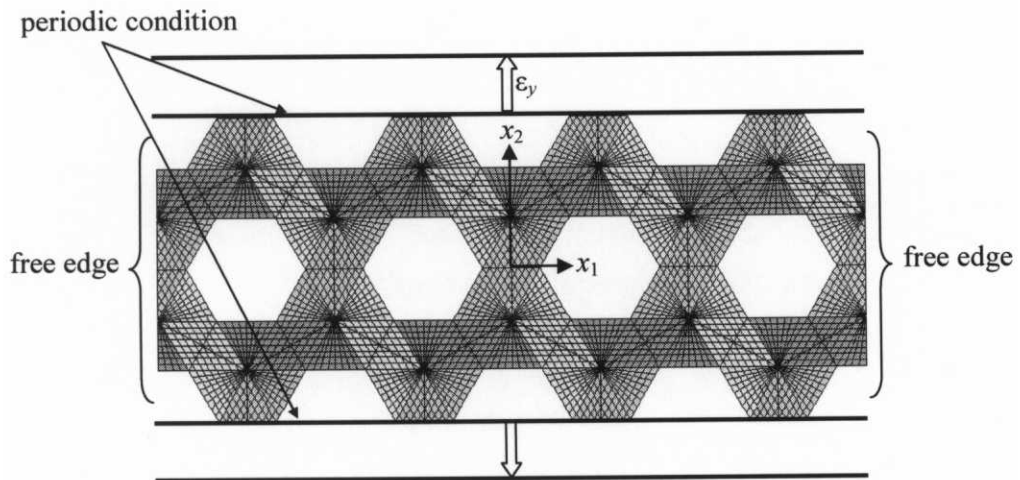


図 J.1 自由端を有する場合の熱膨張係数解析方法（幅方向 4unit モデル）

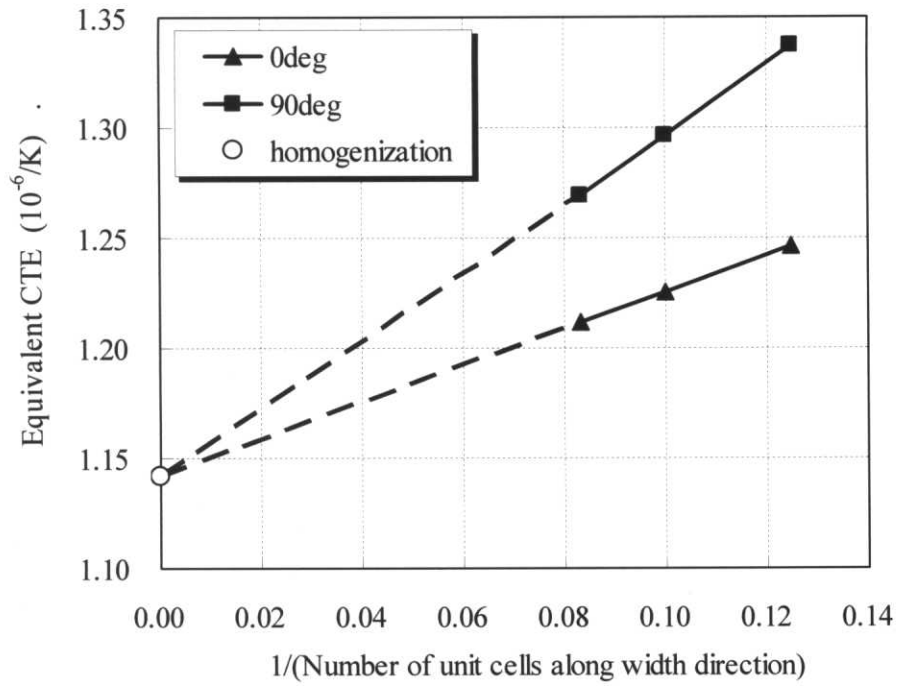


図 J.2 見掛けの熱膨張係数の幅方向ユニットセル数に対する変化

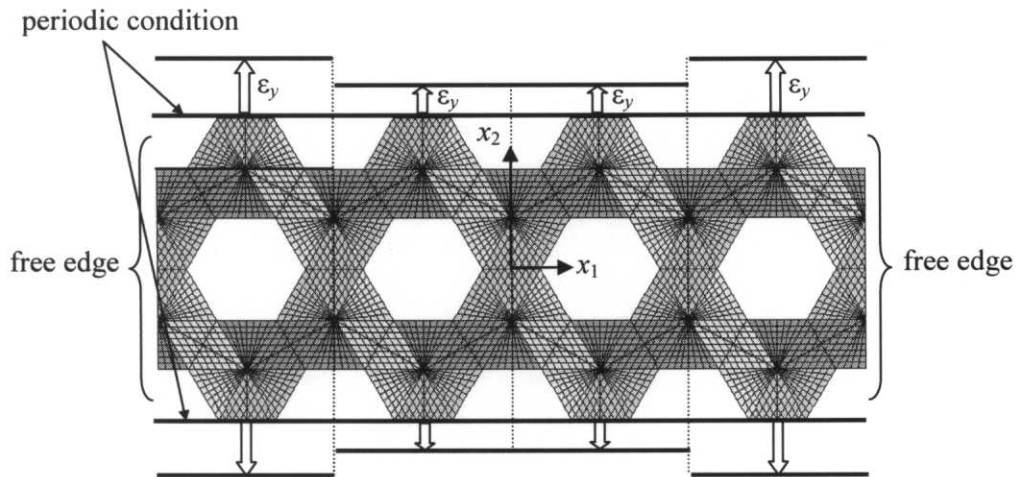


図 J.3 自由端を有する場合のユニットセル毎の熱膨張係数解析方法(幅方向 4unit モデル)

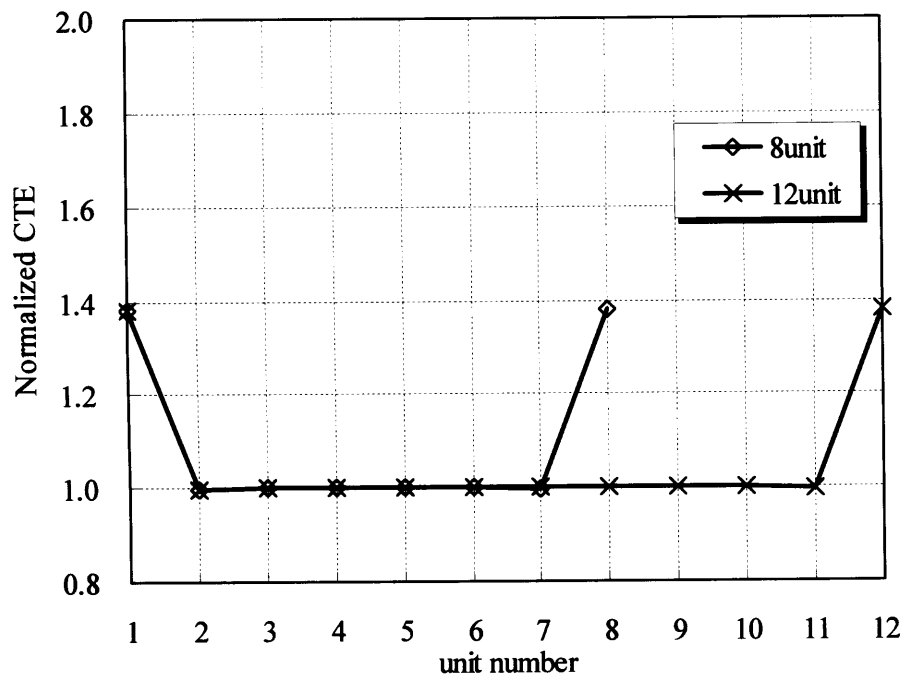


図 J.4 自由端を有する場合のユニットセル毎の 0 度方向熱膨張係数

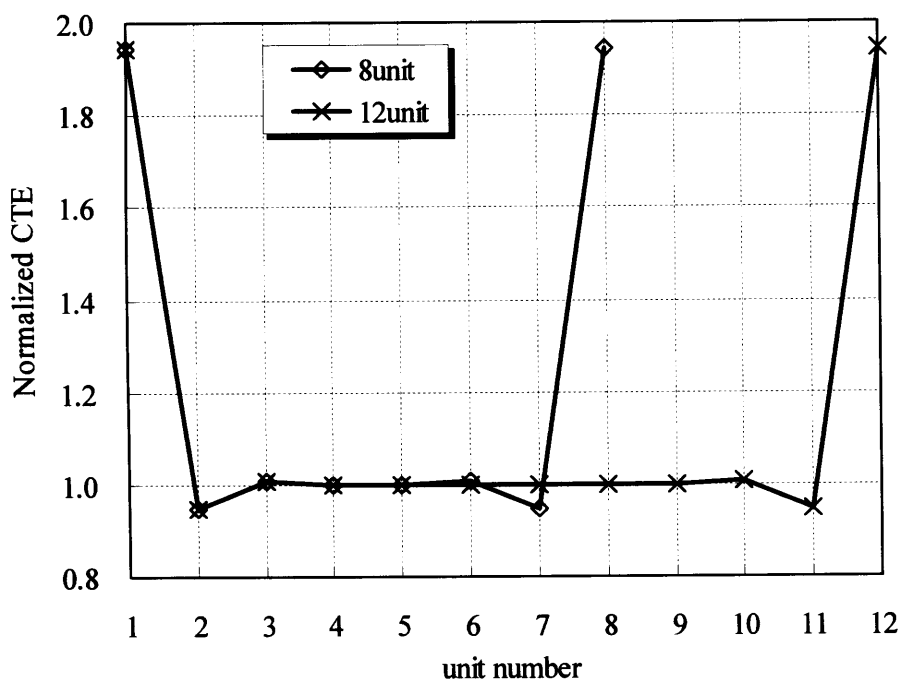


図 J.5 自由端を有する場合のユニットセル毎の 90 度方向熱膨張係数

参考文献

- [1] Ishikawa, T. and Chou, T. W., “One-dimensional micromechanical analysis of woven fabric composites”, *AIAA Journal*, vol. 21, no. 12, pp. 1714-1721, 1983.
- [2] 大石橋弘治, “三軸織物の開発と応用”, *科学と工業*, vol.66, no.7, pp.273-281, 1992.
- [3] Fujita, A., Hamada, H., and Maekawa, Z., “Tensile properties of carbon fiber triaxial woven fabric composites”, *Journal of Composite Materials*, vol. 27, no. 15, pp. 1428-42, 1993.
- [4] Cox, B.N. and Flanagan, G., “Handbook of analytical methods for textile composites”, NASA CR 4750, Langley Research Center, 1997.
- [5] Ishikawa, T., “Anti-symmetric elastic properties of composite plates of satin weave cloth”, *Fibre Science and Technology*, vol. 15, pp. 127-145, 1981
- [6] Ishikawa, T. and Chou, T. W., “Elastic behavior of woven hybrid composites”, *Journal of Composite Materials*, vol. 16, pp. 2-19, 1982
- [7] Ishikawa, T. and Chou, T. W., “Stiffness and strength behavior of woven fabric composites”, *Journal of Materials Science*, vol. 17, pp. 3211-3220, 1982.
- [8] Chou, T. W. and Ishikawa, T., “Analysis and modeling of two-dimensional fabric composites”, *Textile structural composites (chapter7)*, edited by Chou, T. W. and Ko, F. K., Elsevier, 1989.
- [9] Naik, N. K. and Shembekar, P. S., “Elastic behavior of woven fabric composites. I. Lamina analysis”, *Journal of Composite Materials*, vol. 26, no. 15, pp. 2196-225, 1992.
- [10] Naik, N. K. and Shembekar, P. S., “Elastic behavior of woven fabric composites: III-Laminate design”, *Journal of Composite Materials*, vol. 26, no. 17, pp. 2522-2541, 1992.
- [11] Shembekar, P. S. and Naik, N. K., “Elastic behavior of woven fabric composites. II. Laminate analysis”, *Journal of Composite Materials*, vol. 26, no. 15, pp. 2226-46, 1992.
- [12] Sheng, S. Z. and Hoa, S. V., “Three dimensional micro-mechanical modeling of woven fabric composites”, *Journal of Composite Materials*, vol. 35, no. 19, pp. 1701-1729, 2001.
- [13] Benssousan, A., Lions, J. L., and Papanicoulau, G., “Asymptotic Analysis for Periodic Structures”, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [14] Sanchez-Palencia, E., “Non Homogeneous Media and Vibration Theory”, In: *Lecture Notes in Physics No. 127*, Springer, Berlin, 1980.
- [15] Lions, J. L., “Some Methods in the Mathematical Analyses of Systems and their Control”, Science Press, Beijing, China and Gordon and Breach, New York, 1981.
- [16] 寺田賢二郎, 菊池昇, “均質化法入門”, 日本計算工学会編, 丸善, 2003.

- [17] Kolpakov, A. G., "Calculation of the characteristics of thin elastic rods with a periodic structure", *Journal of applied mathematics and mechanics*, vol. 55, no. 3, pp. 358-365, 1999.
- [18] Kolpakov, A. G. and Kalamkarov, A. L., "Homogenized thermoelastic model for a beam of a periodic structure", *International Journal of Engineering Science*, vol. 37, no. 5, pp. 631-42, 1999.
- [19] Klamkarov, A. L., and Kolpakov A. G., "Analysis, design and optimization of composite structures", Wiley, 1997.
- [20] Buannic, N. and Cartraud, P., "Higher-order effective modeling of periodic heterogeneous beams. I. Derivation of the proper boundary conditions for the interior asymptotic solution", *International Journal of Solids and Structures*, vol.38, pp. 7139-7161, 2001.
- [21] Buannic, N. and Cartraud, P., "Higher-order effective modeling of periodic heterogeneous beams. II. Asymptotic expansion method", *International Journal of Solids and Structures*, vol.38, pp. 7163-7180, 2001.
- [22] Caillerie, D., "Thin elastic and periodic plates", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 6, no. 2, pp. 159-191, 1984.
- [23] Kohn, R. V. and Vogelius, M., "A new model for thin plates with rapidly varying thickness", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 20, no. 4, pp. 333-50, 1984.
- [24] Kohn, R. V. and Vogelius, M., "A new model for thin plates with rapidly varying thickness. II: a convergence proof", *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 43, no. 1, pp. 1-22, 1985.
- [25] Kohn, R. V. and Vogelius, M., "A new model for thin plates with rapidly varying thickness. III. Comparison of different scalings", *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 44, no. 1, pp. 35-48, 1986.
- [26] Lewinski, T., "Effective models of composite periodic plates. I. Asymptotic solution", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 27, no. 9, pp. 1155-72, 1991.
- [27] Lewinski, T., "Effective models of composite periodic plates. II Simplifications due to symmetries", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 27, no. 9, pp. 1173-84, 1991.
- [28] Lewinski, T., "Effective models of composite periodic plates. III. Two-dimensional approaches", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 27, no. 9, pp. 1185-1203, 1991.
- [29] Lewinski, T., "Homogenizing stiffnesses of plates with periodic structure", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 29, no. 3, pp. 309-26, 1992.
- [30] Lewinski, T., "Effective stiffnesses of transversely non-homogeneous plates with unidirectional periodic structure", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 32,

no. 22, pp. 3261-87, 1995.

- [31] Lewinski, T., and Telega, J. J. “Plates, laminates and shells –Asymptotic analysis and homogenization” , World Scientific, 2000.
- [32] Kolpakov, A.G., “On the thermo-elasticity problem of non-uniform plates”, Journal of applied mathematics and mechanics, vol. 56, no. 3, pp. 402-409, 1992.
- [33] Kolpakov, A.G., “Supplement to the paper “on the thermoelasticity problem of non-uniform plates”, Journal of applied mathematics and mechanics, vol. 59, no. 5, pp. 827-828, 1995.
- [34] Guedes, J. M. and Kikuchi, N., “Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 83, no. 2,, pp. 143-198, 1990.
- [35] Michel, J.C., Moulinec, H.and Suquet, P. “Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 172, no. 1-4, pp. 109-43, 1999.
- [36] 高野直樹, 座古勝, “微視破壊を考慮した均質化法による織物複合材料の非線形解析”, 材料, vol. 44, no. 505, pp. 1231-1237, 1995.
- [37] 高野直樹, 座古勝, 坂田誠一郎, “均質化法による織物複合材料の三次元マイクロ構造設計(第 1 報, 強度に及ぼす織物積層方向位置ずれの影響)”, 日本機械学会論文集 (A 編) , vol. 61, no. 585, 1995.
- [38] 高野直樹, 座古勝, 坂田誠一郎, “均質化法による織物複合材料の三次元マイクロ構造設計(第 2 報, 曲げ負荷時のマイクロスコピックな挙動の詳細解析)”, 日本機械学会論文集 (A 編) , vol. 62, no. 595, 1996.
- [39] Sankar, B. V. and Marrey, R. V., “A unit-cell model of textile composite beams for predicting stiffness properties”, Composites Science and Technology, vol. 49, no. 1, pp 61-69, 1993.
- [40] Marrey, R. V. and Sankar, B. V., “A micromechanical model for textile composite plates”, Journal of Composite Materials, vol. 31, no. 12, pp 1187-1213, 1997.
- [41] Zhu, H., Sankar, B. V. and Marrey, R. V., “Evaluation of failure criteria for fiber composites using finite element micromechanics”, Journal of Composite Materials, vol. 32, no. 8, pp. 766-782, 1998.
- [42] Dow, N. F. and Tranfield G., “Preliminary investigation of feasibility of weaving triaxial fabrics (Doweave)”, Textile research journal, vol. 40, pp.986-998, 1970.
- [43] Skelton, J., “Triaxially woven fabrics : their structure and properties”, Textile research journal, vol. 41, pp.637-647,1971.
- [44] Scardino, F. L. and Ko F. K., “Triaxial woven fabrics Part I :Behavior under tensile, shear, and burst deformation”, Textile research journal, vol. 51, pp.80-89,1981.

- [45] Schwartz, P., "An analysis of the Mechanical Behavior of Triaxial Fabrics and the Equivalency of Conventional Fabrics", *Textile research journal*, vol. 52, pp.604-606, 1982.
- [46] Kawabata, S., Inoue, M. and Niwa, M., "Theoretical analysis of the non-linear deformation properties of a triaxial weave under biaxial stress fields", *Composites Science and Technology*, vol. 56, no. 3, pp. 261-271, 1996.
- [47] 前川善一郎, 濱田泰以, 藤田章洋, 西澤洋, 大石橋弘治 "炭素繊維三軸織物強化複合材料の引張特性", *繊維学会誌*, vol.48 no.9, pp. 454-460, 1992.
- [48] 藤田章洋, 濱田泰以, 前川善一郎, 大野悦司, 横山敦士, "テキスタイルコンポジットの力学的特性 (第2報, 織物複合材料)", *日本機械学会論文集 (A編)*, vol. 60, no. 579, pp. 2485-2491, 1994.
- [49] Dano, M. L., Gendron, G. and Picard, A., "Mechanical Behavior of Triaxial Woven Fabric Composite", *Mechanics of Composite Materials and Structures*, vol. 7, pp. 207-224, 2000.
- [50] D'Amato, E. "Finite element modeling of textile composites", *Composite Structures*, vol. 54, no. 4, pp. 467-475, 2001.
- [51] D'Amato, E., "Nonlinearities in mechanical behavior of textile composites", *Composite Structures*, vol. 71, no. 1, pp. 61-67, 2005.
- [52] D'Amato, E., "Analysis of nonlinearities in mechanical behavior of textile composites", *High Performance Structures and Materials*, vol. 4, High Performance Structures and Composites, pp. 501-510, 2002.
- [53] Hoa, S. V., Sheng, S. Z. and Ouellette, P., "Determination of elastic properties of triax composite materials", *Composites Science and Technology*, vol. 63, no. 3-4, pp. 437-443, 2003.
- [54] Zhao, Q. and Hoa, S. V., "Triaxial Woven Fabric (TWF) composites with open holes (Part I): Finite element models for analysis", *Journal of Composite Materials*, vol. 37, no. 9, pp. 763-789, 2003.
- [55] Zhao, Q., Hoa, S. V. and Ouellette, P., "Progressive failure of triaxial woven fabric (TWF) composites with open holes", *Composite Structures*, vol. 65, no. 3-4, pp. 419-431, 2004.
- [56] Zhao, Q.I. and Hoa, S. V., "Finite element modeling of a membrane sector of a satellite reflector made of triaxial composites", *Journal of Composite Materials*, vol. 39, no. 7, pp. 581-600, 2005.
- [57] Zhao, Q and Hoa, S. V., "Thermal Deformation Behavior of Triaxial Woven Fabric (TWF) Composites with Open Holes", *Journal of Composite Materials*, vol. 37, no. 18, pp. 1629-1649, 2003.
- [58] D'Amato, E., Durante, F. and Fedele, G., "Numerical and Experimental Analyses of the Structural Behaviour of Braided Composite Materials", *Key Engineering Materials*, vol.

144, pp. 293-300, 1998.

- [59] D'Amato, E., "Experiments on single layer textile composites", *Composite Structures*, vol. 55, no. 2, pp. 217-223, 2002.
- [60] Zhao, Q., Hoa, S. V. and Ouellette, P., "Triaxial woven fabric (TWF) composites with open holes (Part II): Verification of the finite element models", *Journal of Composite Materials*, vol. 37, no. 10, pp. 849-873, 2003.
- [61] Kueh, A., Soykasap, O. and Pellegrino, S., "Thermo-mechanical behaviour of single-ply triaxial weave carbon fibre reinforced plastic", *Proceedings of the European Conference on Spacecraft Structures, Materials and Mechanical Testing 2005*, pp. 1465-1474, 2005.
- [62] Buannic, N., Cartraud, P. and Quesnel, T., "Homogenization of corrugated core sandwich panels", *Composite Structures*, vol. 59, no. 3, pp. 299-312, 2003.
- [63] Bourgeois, S., Cartraud P. and Débordes O., "Homogenization of periodic sandwiches", *Mechanics of sandwich structures*, Kluwer, Dordrecht (1998), pp. 131-138.
- [64] Kolpakov, A.G., "Variational principles for stiffnesses of a nonhomogeneous plate", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 47, no. 10, pp. 2075-2092, 1999.
- [65] Lee, U., "Dynamic continuum modeling of beamlike space structures using Finite-Element Matrices" *AIAA Journal*, vol.28, no.4, pp.725-731, 1990.
- [66] Lee, U., "Dynamic continuum plate representation of large thin lattice structures", *AIAA Journal*, vol. 31, no. 9, pp. 1734-1736, 1993.
- [67] Lee, U., "Equivalent continuum models of large plate like lattice structures", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 31, no. 4, pp. 457-467, 1994.
- [68] Saiki, I., Terada, K., Ikeda, K. and Hori M., "Appropriate number of unit cells in a representative volume element for micro-structural bifurcation encountered in a multi-scale modeling", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 191, no. 23-24, pp. 2561-2585, 2002.
- [69] Ziegler, E., Accorsi, M. and Bennett, M., "Continuum plate model for lattice block material" *Mechanics of Materials*, vol. 36, no. 8, pp. 753-66, 2004.
- [70] Burgardt, B. and Cartraud, P. "Continuum modeling of beamlike lattice trusses using averaging methods", *Computers and Structures*, vol. 73, pp.267-279, 1999.
- [71] Cartraud, P., "Computational homogenization of periodic beam-like structures", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 43, no. 3-4, pp. 686-696, 2006.
- [72] Noor, A.K., "Continuum modeling for repetitive lattice structures", *Appl. Mech. Rev.* vol. 41, no. 7, pp. 285-296, 1988.
- [73] Wallach, J.C. and Gibson, L.J., "Mechanical behavior of a three-dimensional truss material", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, pp. 7181-7196, 2001.
- [74] Adachi, T., Tomita, Y. and Tanaka, M., "Computational simulation of deformation

- behavior of 2D-lattice continuum” Int. J. Mech. Sci., vol. 9, pp. 857–866, 1998.
- [75] 小林繁夫, 近藤恭平, “弾性力学”, 培風館, 1987.
- [76] 近藤恭平, “振動論”, 培風館, 1993.
- [77] 邊吾一, 石川隆司 共編著, “先進複合材料工学”, 第三章 積層板・サンドイッチおよび織物構造, 培風館, 2005.
- [78] Jones, R.M., *Mechanics of composite materials second edition*, Taylor & Francis, 1999
- [79] Hashin, Z., “Theory of fiber reinforced materials”, CR-1974, NASA, 1972.
- [80] “Engineered material handbook, vol. 1 Composites”, ASM International Handbook Committee; Theodore J. Reinhart, technical chairman, ASM International, 1987.
- [81] 東レ株式会社 高性能炭素繊維トレカ糸 商品資料
- [82] 東邦テナックス株式会社 web page (<http://www.tohotenax.com/tenax/jp/products/standard.php>)
- [83] Masters, J.E. and Portanova M.A., “Standard test methods for textile composites”, NASA CR 4751, Langley Research Center, 1996.
- [84] Fellers, C. and Carlsson, L., "Measuring the Pure Bending Properties of Paper", Tappi, vol. 62, no. 8, pp. 107-109, 1979.

謝辞

本論文の作成にあたり、大変多くの方々にお世話になりました。ここに、感謝の意を表したいと思います。

まず、博士課程の約2年間および助手として採用されてからの約4年間、懇切丁寧かつ熱心にご指導して下さった青木隆平教授に心より御礼を申し上げます。不勉強な筆者の質問にも1つ1つ分かり易く教えて下さいました。また研究が行き詰った際に適切なお助言をいただきました。また、先生の鋭い洞察力と、深い知識に裏付けされた奇抜な発想法には敬服の念でいっぱいです。長年に渡り大変お世話になり、心より感謝いたします。

御多忙にも関わらず数多くの御助言をいただきました。審査委員会の塩谷義教授、武田展雄教授、藤本浩司教授、樋口健助教授に深く感謝いたします。

東京大学名誉教授近藤恭平先生には学部、修士課程の3年間、指導教官としてご指導いただき、また本論文の作成中も折に触れ多岐にわたる御助言、御教示をいただきました。誠に有難うございました。

研究室の小林やよい技術専門職員には、研究室内での様々な作業においてご協力をいただきました。また研究室で共に過ごした皆様には、研究を進める上で多大なるご協力をいただきました。特に横関智弘様、西野峰之様には貴重なご意見をいただきました。また研究以外の面でも皆様のお陰で充実した研究室生活を送ることができました。ここに深く感謝いたします。また研究室の先輩である、宇宙航空研究開発機構構造解析研究グループの熊澤寿研究員には、学会等でお会いした際に研究活動に関する相談に乗っていただきました。本当に有難うございました。

サカセ・アドテック株式会社の酒井良次様、渡邊秋人様、堀利行様、伊藤裕明様には実験試料を製作、提供していただいたばかりでなく、実際に実験試料の製作を体験させていただきました。また、実用面での様々な技術的課題などにつき貴重な情報を提供していただきました。ここに御礼申し上げます。

多くの方々の御協力により、本論文を作成することができました。ここにあらためて感謝いたします。

最後に、これまで応援してくれた家族に感謝いたします。