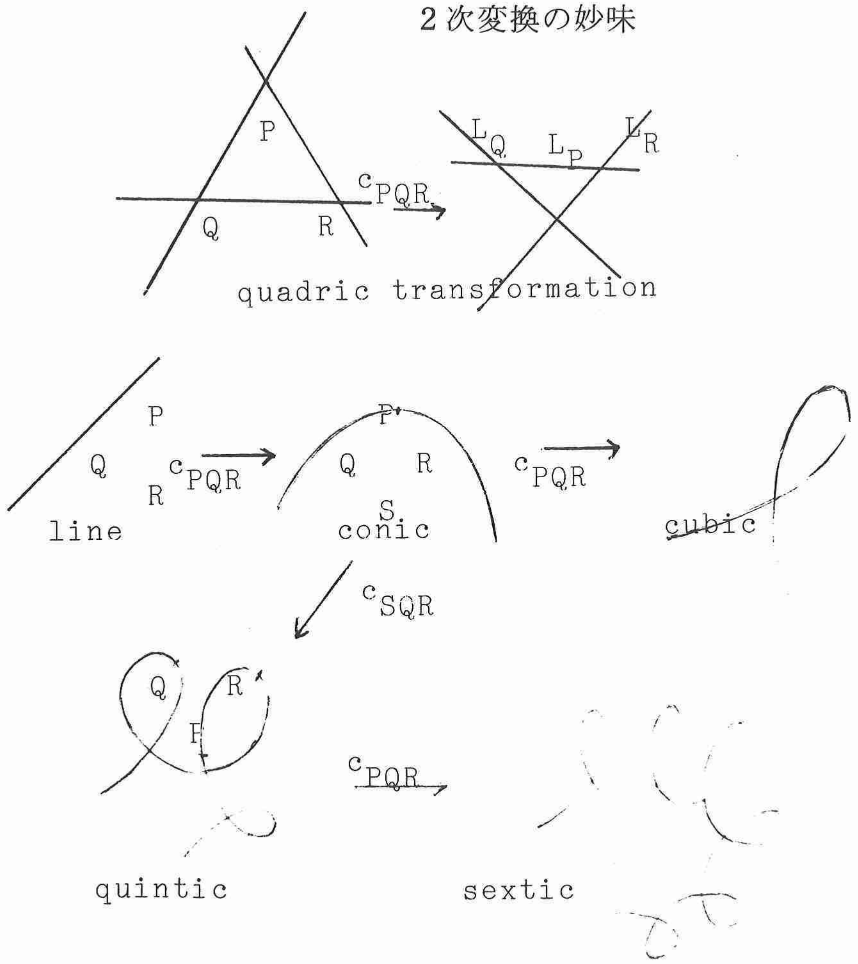
13巻 3 号　昭和56年 9 月

東京大学理学部 廣報

2次変換の妙味



目　　次

2次変換の妙味（表紙の説明）

話は極めて初等的である。射影平面上の曲線，即ち，射影平面曲線に関して少し述べてみたい。射影平面上の共線でない3点P，Q，Rをとり，P＝（1，0，0），Q＝（0，1，0），R＝（0，0，1）となるように同次座標を導入し，$X_0 = Y_1 Y_2$，$X_1 = Y_2 Y_0$，$X_2 = Y_0 Y_1$による変換を考えるとき，これをP，Q，Rの定める2次変換といい，c_{PQR}と記す。例えば，Pは$Y_1 = Y_2 = 0$で，それは，$X_0 = 0$に移るから，Pは直線L_Pにのばされる。一方，直線QRは$Y_0 = 0$と表されるから，（1，0，0）に移るとみなされる。即ち，3点P，Q，Rが3直線にひきのばされ，3直線QR，RP，PQが3点に縮んでしまう。

しかし，P，Q，Rを通らぬ直線$\lambda_0 Y_0 + \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 = 0$に対しては，$Z = Y_0 Y_1 Y_2$とおくと，$Y_0 = Z \cdot X_1 X_2$，$X_1 = Z \cdot X_2 X_0$，$Y_2 = Z \cdot X_0 X_1$をえるので，$Z(\lambda_0 X_1 X_2 + \lambda_1 X_2 X_0 + \lambda_2 X_0 X_1) = 0$となり，Zを無視することにより，2次曲線がえられる。又，2次曲線の上にない3点をとって，2次変換を行うと，3個の2重点をもつ4次曲線ができ，さらにこの上の2重点でない3点をとって，2次変換を行えば，6個の2重点をもつ5次曲線がえられる。

しかし，このような操作で，2重点のみしか持たぬ6次以上の有理曲線は構成できないことが証明される。このことは経験的には明白なのであろう，例えば，10個の2重点をもつ6次曲線は有理曲線ではあっても，2次変換の合成により，直線にひき直すことはできない。2次変変換により，曲線の見かけの形は大きく変化するが，基本的な性格はよく保存される。しかも次数の高い双有理変換に対しても2次変換は唯一つの構成要素なのである。このことは，代数多様体や複素多様体の双有理変換についても，基本的には成立している。2次変換は，不愉快な操作であるとされて，より精密な概念に置き換えられそうになったこともあるが，その重要性は近年益々明らかにされ，必要悪から，根本的に善なる存在とみなされるようになりつつある。（飯高　茂）