ある山崩しゲームの話

米　田　信　夫（情報科学）

2人で交互に着手する型のゲームで「三山崩し」というのがある。ご存知の方も多いと思うが，これは（碁石のような）石の山を3つ作って始めるもので，許される手は：どれか1つの山から1個以上全部まで勝手な数の石を取ること；勝は：最後の可能な手（つまり，場を空にする手）を打った方，というゲームである。（最後の可能な手を打たされた方を負とする「misère」版もある。）各山の石数を2進法で表わしたとき，それらの（繰上がりを止めた）2進和が0になるような場面を作る手を打って行くことが必勝法で，その手を探すことが人間には面倒だが計算機にはお茶の子，というわけで，このゲームやそれをm山崩しに拡張したものは，計算機の手軽なデモンストレーション用に使われたものである。

三山崩し中に1つの山が空になったら，あとは二山崩しとなるわけであるが，三山崩しの変形で，中国に古くからあると伝えられる「チャヌシッツィ」（選石？）というゲームがある。これは一松信氏の好著「石とりゲームの数理」（森北出版）にも解説されているが，石の山を2つ作って始め；許される手は：いずれか一方の山から1個以上（全部まで）の石を取るか，または両方の山から（1個以上勝手に）同数の石を取ること；勝は：最後の可能な手を打った方，というゲームである。このゲームの必勝法も前掲の書に述べられているが，ここでは少し異った方向から必勝法を紹介して見たい。

自然数のある数列 $b_n = b(n)$（$n=1, 2, 3, \cdots$）で（仮称）B数列と呼ぶものを，つぎの規則で定める：

$b_1 = 1$；

$b_{n+1} = b_n +$〔nがすでにB数列に登場していれば2，そうでなければ1〕（$n=1, 2, 3, \cdots$）。

具体的に作って見ると，つぎのような具合になる。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	…
b_n	1	3	4	6	8	9	11	12	…

自然数の中でB数列に出て来るものをB数，そうでないものをC数と呼び，C数にも小さい方から順に c_1，c_2，…と番号をつけて，C数列ということにしよう。C数は，nがB数列をたどって行くとき，b_n と $b_{n+1} = b_n + 2$ との間の落ちこぼれの $b_n + 1$ として，1つずつ生ずるのだから，$c_n = b(b_n) + 1$。また，B数列の作り方から

◎ $b(m) = m +$〔mより小さいB数の個数〕

となるが，〔b_n より小さいB数の個数〕$= n - 1$ であるから，上の2つの式と合わせて

$c_n = b_n + n$

という関係が得られる。

さて，B数列とC数列の作り方から，すべての自然数は b_n あるいは c_n として一意的に表わされるので，チャヌシッツィの場面は，2つの山の石の個数の組合せによって，つぎのように分類できる。

Ⅰ：0と0

Ⅱ：0とnあるいはnとn（$n \geqq 1$）

Ⅲ：b_n と c_n（$n \geqq 1$）

Ⅳ：b_m と c_n（$m \neq n$）

Ⅴ：b_m と b_n（$m < n$）

Ⅵ：c_m と c_n（$m < n$）

ここで，Ⅰは勝を決めた場面であり，Ⅱからは，しかもⅡからだけ，ここに1手で行ける。また，Ⅲの場面で，一方の山だけから石を取れば当然，Ⅲの外に出るが，両方の山から同数個取る手では，差が不変なため，b_n と c_n の間の前記の関係によって，やはりⅢの外に出ることになる。そこで，Ⅳ～Ⅵの場面からは，いつでも1手でⅢに移れることを確かめよう。それがわかれば，一般にⅢの場面を作るような手を選び，Ⅱの場面が来たらⅠへ，というのが必勝法であることになる。最初がⅢの場面であれば，後手がヘマをしない限り，先手の負となる。

Ⅳ〔b_m と c_n（$m \neq n$）〕から：$m > n$ ならば b_m を b_n に減らして，b_n と c_n の場面を作る。$m < n$ ならば，c_n の方を c_m に減らして，b_m と

c_m にすればよい。

Ⅴ〔 b_m と b_n （ $m<n$ ）〕から： $b_n > c_m$ ならば， b_n を c_m に減らして， b_m と c_m の場面を作る。 $b_n < c_m$ の場合には，現在の差を r と置くと， $r = b_n - b_m < c_m - b_m = m$ なので，両方の山から同数（ $b_m - b_r$ ）個取って， b_r と $b_n - (b_m - b_r) = r + b_r = c_r$ の場面にすることができる。

Ⅵ〔 c_m と c_n （ $m<n$ ）〕から： c_n を b_m に減らして， b_m と c_m の場面を作る。

以上の中で，Ⅳで $m<n$ の場面とⅤの場面からの手は，他に選択の余地がないけれども，Ⅳで $m>n$ の場面やⅥの場面の中には，別の手でⅢに行けるものもある。まず，Ⅵで $b_n < c_m < c_n$ となる場合があり，そのときは c_m の方を b_m に減らしてもよい。両方の山から取る手をなるべく敬遠して，Ⅲの片割れになり得るものをなるべく生かす，という方針内での変化はそれだけであるが，逆に両方の山から取る手を優先的に考慮して見ると，つぎのようなことになり，その中にⅣやⅥからの手の変化が含まれる。

一般に2つの山の石数の組合せ m と n （ $m \leqq n$ ）という場面を考えよう。 $m=0$ や $m=n$ の場合の結末はついているので $1 \leqq m < n$ とし， $n-m=r$ と置く。 $m - b_r = n - c_r$ となっていることに注意しよう。 $m = b_r$ ならば，これはⅢの場面で，必勝手はない。 $m > b_r$ の場合には，両方の山から同数（ $m - b_r$ ）個個取ることにより， b_r と c_r の場面が得られる。 $m < b_r$ の場合には，同数取ってⅢに行くことは不可能であるが，ここでもしmがB数であれば，それを b_s として， $b_s = m < b_r$ 。したがって $s<r$ で， $c_s < c_r < n$ となり，nを c_s に減らして， b_s と c_s の場面ができる。他方，mがC数であれば，それを c_s として， $b_s < c_s < n$ となり，nを b_s に減らすことによってⅢの場面が得られる。

最初からどの場面かできっちり分類し，なおその中で更に場合分けがある，という前記Ⅳ〜Ⅵの方針に対比して，後の方針は

if 条件1 then 手1
else if 条件2 then 手2
else……

という“順応型”になっており，具体的な手間の点では，後者の方が合理的といえるかも知れない。

ところで，いずれの方針でやるにしても，実際の対局において必勝法を追って行くためには，つぎのような副手順が入用になる：

RB： rから b_r を求める；

BCS： mから，それがB数かC数かを判別し，その番号 s を求める。

もちろん，B数列・C数列の立派な表を作っておいて，それを参照してもよいが，それでは扱う石の個数の上限に比例した大きさの表が要る。かといっていつでも元の定義に戻って再帰的に計算するのでは手間が大変である。そこで，RB とBCS の簡便法を紹介しておこう。

整数への切捨てを $\lfloor\ \rfloor$ で表わし， $x^2 = x + 1$ の正根（ $1 + \sqrt{5}$ ）／ $2 = 1.61803\cdots$ を α としたとき，RB には，つぎの公式が利用できる。

$$b_r = \lfloor r\,\alpha \rfloor$$

B数列は，無理数の世界から見れば，かくも単純なものだったのである。この公式は，逆にそれによってB数列を規定したとき，前掲◎の関係が成立することによって験証される。この公式によるBCS の方は省略。なお，この方式は計算誤差に要注意。

前記の副手順としては， $a_1 = 1$， $a_2 = 2$ から始まって順次 $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$ （ $k = 2, 3, \cdots$ ）で定められる“フィボナッチ数列”を利用する方式もある。この数列に現れる自然数 $m = a_k$ を仮にF数と呼び，kをそのF番号と名づけよう。

任意の自然数mから始めて，m以下のF数で最大のものをmから引き去る，という操作を続けて行くと，いつかは結果が0になる。それまでに登場したF数のF番号の全体をKとすれば，KにF番号が入っているようなF数の合計が，初めのmとなる。すなわち， $m = \sum_{k \in K} a_k$ 。これをmのF和表現と呼ぼう。 $m=0$ に対しては，Kは空と了解する。

RB： $r-1$ のF和表現を $\sum_{k \in K} a_k$ としたとき

$$b_r = 1 + \sum_{k \in K} a_{k+1}$$

BCS：$m-1$ のF和表現を $\sum_{k \in L} a_k$ としたとき，Lに1が入っていなければ，mはB数で， $s = 1 + \sum_{k \in L} a_{k-1}$ ；Lに1が入っていれ

ば，mはC数で，Lから1を除いたものをL′　　　　として，$s=1+\sum_{k\in L'} a_{k-2}$