



「偏微分方程式の初期値問題」

下村 明洋 (数理科学研究科 准教授)

偏微分方程式とは、独立変数が2つ以上の微分方程式のことである。(独立変数が1つの微分方程式は、常微分方程式とよばれる。) 微分方程式は自然現象を記述するための手段のひとつとして重要な役割を果たしている。偏微分方程式の例として、量子力学の基礎方程式であるシュレディンガー方程式や、流体力学におけるナビエ・ストークス方程式などが挙げられる。以下では、偏微分方程式について、関数解析的な問題設定と考え方を紹介する。

偏微分方程式論での基本的な問題のひとつとして、まず、偏微分方程式の解の存在について考える。(自然現象を記述する偏微分方程式に対して、現象を記述するのは方程式そのものではなくその解であることに注意する。) 偏微分方程式において、方程式が比較的単純な場合や特殊な構造をもつ場合には解を具体的に表示できることがあるが、一般には解を具体的に表示することは期待できない。

また、偏微分方程式の解の存在は、一般には必ずしも自明なことではない。そこで、より多くの偏微分方程式を扱えるようにするための方法のひとつとして、まず適当な関数空間を設定し、その枠組みで解の存在について考える。もう少し詳しく言うと、非線型クライン・ゴルドン方程式のような時間発展を記述する偏微分方程式においては、「適当なクラスの(与えられた)初期値に対して方程式の解が適当な関数空間に唯ひとつ存在するか」という問題設定を考えるのが標準的である。この関数空間は方程式との数学的・物理的な相性や必然性によって適切に選択し、関数空間の枠を広くするか狭くするかによってこの問題に対する答は変わる。ここで用いられる関数空間は、ほとんどの場合、無限次元のバナッハ空間(ノルムを備えた線型空間でそのノルムで完備になる空間)である。解の存在と一意性は、無限次元の関数空間において、不動点定理を利用して(あるいは、

逐次近似によって)示されることが多い。このような問題を解決するために、おもに、関数解析やフーリエ解析などの解析学がしばしば用いられる。

数理科学研究科には、専門分野が「関数解析的方法による偏微分方程式の研究」と関係の深い教員が在任している。筆者にわかる範囲で紹介すると、片岡清臣教授(佐藤超関数を用いた偏微分方程式の研究など)、儀我美一教授(ナビエ・ストークス方程式など)、中村周教授(シュレディンガー方程式など)、俣野博教授(非線型楕円型および放物型方程式など)、山本昌宏教授(微分方程式の逆問題など)、北田均准教授(散乱理論など)、齊藤宣一准教授(偏微分方程式の数値解析など)、鹿島洋平特任助教(非線型拡散方程式など)、および、筆者(非線型シュレディンガー方程式など)が、上記分野に関係する研究を行っている。



「テクスチャ合成」

五十嵐 健夫 (情報理工学系研究科コンピュータ科学専攻 教授)

テクスチャ合成とは、コンピュータグラフィックスの技術のひとつであり、岩肌や木目などの一定の質感をもつ画像(テクスチャ)をサンプルとして受け取り、サンプルと同じような見栄えをもつより大きな画像を自動的に生成する技術である。

初期のころには、サンプル画像内のピクセルの色の分布を統計情報として取り出して、乱数を用いて同じような統計的性質をもつ画像を合成する手法が試みられていた。しかしこの方法は適用範囲がひじょうに狭く実用的なものにはなっていなかった。

その後、2000年前後にマルコフモデルに基づく手法が複数同時期に提案され、大きな成功を収めた。これらの手法は、合成画像のピクセルの色を決めていくときに、その周囲のピクセルの色のパターンを取り出し、そのパターンにもつ

とも近いものをサンプル画像の中から検索して利用する、というものである。ひじょうに単純なアルゴリズムでありながら、高品質な画像が得られるということで反響が大きく、数々の高速化手法や、応用が提案されてきている。

テクスチャ合成技術のひとつの応用として、イメージアナロジーとよばれる、画像のペアから画像フィルターを自動的に計算して、他の画像に適用するというものが提案されている。たとえば、写真と油絵風の画像をペアで与えると、「写真を油絵に変換する画像フィルター」が自動生成され、それを別の写真に適用すると、自動的に油絵風の画像が生成される。

また別の手法としては、ピクセル毎に計算するのではなく、ある程度の領域をパッチとして切り出して、それらを境目が目立たないようにモザイクのように組

み合わせていく、といったものも提案されている。

われわれのグループでは、このようなテクスチャ合成を、立体モデルの内部表現の生成に応用する研究を行ってきた。たとえば、果物などの任意の断面を表示するときに、あらかじめ撮っておいた断面のサンプル写真をもとに、任意の断面の画像を自動生成するといったことを行っている。

近年では、市販の画像編集ソフトウェアにもテクスチャ合成機能が搭載されるようになってきている。これにより、これまで手作業で膨大な時間をかけて行っていた作業を、一瞬に行うことが可能となってきており、今後のさらなる普及が期待されている。



「超対称性」

濱口 幸一（物理学専攻 准教授）

超対称性とは、フェルミオンとボゾンを入れ替える対称性のことであり、素粒子の標準模型を超える理論的枠組みの最有力候補のひとつである。フェルミオンとは整数+ $\frac{1}{2}$ のスピンをもち、パウリの排他律に従う粒子のことであり、ボゾンとは整数スピンをもち、同じ量子状態に複数の粒子が入れる粒子のことであり、例えば電子やクォーク（陽子などの構成体）はフェルミオン、光子はボゾンである。

1960～70年代に確立した素粒子の標準模型（クォークや電子などの素粒子とその間の相互作用を記述する理論）は素晴らしい成功を収めており、現在知られている高エネルギー実験のほとんどを矛盾なく説明することができている。標準模型の素粒子の中で唯一未発見であったヒッグス粒子（第6回物理学のキーワードを参照）についても、ヨーロッパで稼働中のLHC実験で興味深い兆候が見えつつある。しかし標準模型には理論的に不自然な点、不完全に見える点があり、

素粒子物理を記述する究極の理論であるとは考えにくい。とくに、自然界の基本的なスケールがひじょうに高いエネルギースケール（たとえばプランクスケール $\sim 10^{19}$ GeV）にあるであろうことを考えると、ヒッグス粒子の質量^{注)}がそれに比べてなぜ何桁も小さいのかが謎のままである（階層性問題）。また宇宙の暗黒物質も標準模型では説明できない。

標準模型に超対称性を導入すると、たとえばフェルミオンである電子やクォークの相棒として、ボゾンの「スカラー電子」や「スクォーク」、ボゾンである光子の相棒としては、フェルミオンである「フォティーノ」など、いずれも未発見の新粒子が導入される。こうして拡張された超対称標準模型は、(1) フェルミオンとボゾンの絶妙なバランスにより、上記のヒッグス質量に対する階層性の問題を改善する、(2) 超対称性粒子のうちの一つが、暗黒物質の候補となる、(3) 標準模型ではバラバラだった3つ

の相互作用（電磁気力、弱い力、強い力）の強さが高エネルギーでひとつに統一され「大統一理論」の予言を再現する、といった魅力的な特長をもっている。さらに重力も含めた究極の統一理論の最有力候補である「超弦理論」も超対称性を必要としている。

実は超対称標準模型にも課題は多くある。またLHCでも超対称性の予言する新粒子の直接探索が精力的に行われているのだが、いまだその兆候は報告されていない。しかし今のところ超対称性理論が「標準模型を超える素粒子理論」の候補の中で頭ひとつ抜けていると言ってよいだろう。本研究科では素粒子論研究室をはじめ多くの研究室が理論・実験のさまざまな角度から研究を行っている。

注) 最新のLHCの結果によると、ヒッグス粒子が存在するならばその質量は115 GeV～130 GeV。興味深い事象超過が見えているのは125 GeV付近。



「r-過程」

櫻井 博儀（物理学専攻 教授）

宇宙開闢以来、われわれの身の回りの元素は宇宙・天体内で合成されており、なかでも「r-過程」は、超新星爆発などの爆発的な天体現象で生じる元素合成過程で、鉄からウランにいたる元素を創りだす。たとえば、貴金属の「プラチナ」や「金」はr-過程で創りだされた元素である。「r」は「rapid」の略であり、数秒で元素合成過程が終了する。

鉄よりも重い元素はどのように創られるのか？ 鍵は中性子捕獲とベータ崩壊である。中性子は電荷がないため、クーロン障壁がなく、原子核に捕獲されやすい。原子核が中性子を次々と捕獲すると質量数が増え、半減期の短い中性子過剰な不安定核となる。不安定核がベータ崩壊すると核内の中性子が陽子になり、元素番号がひとつ増える。このように、中

性子捕獲とベータ崩壊を繰り返して重い中性子過剰な不安定核が生成される。r-過程が終了すると不安定核はベータ崩壊を繰り返し、やがて安定な原子核となる。時間を巻き戻すと「金」のご先祖はr-過程でできた短寿命の不安定核ということになる。

r-過程は1957年にウィリアム・ファウラー（William Fowler）らによって提唱され、これ以来、天文学・物理学、理論・観測・実験と多岐にわたる学際的な研究が進められている。r-過程が起こる天体現象としては、大量の中性子が発生する重力崩壊型超新星爆発のほか、中性子星マージャーが提案されているが、実際どこでr-過程が起こり、どう終焉するのかわかっていない。爆発ダイナミクス、反応素過程、未知の原子核の質量・半減

期に関する理論研究が進められ、これらの情報を組み合わせた数値計算により、観測で得られた金属欠乏星の重元素存在比、超新星残骸の元素分布、太陽系元素の質量比分布などを説明する試みが進められている。本研究科、天文学専攻・梅田研究室では星の形成と進化との関連でr-過程の議論が行われている。最近になってr-過程で創られる中性子過剰核を理化学研究所「RIビームファクトリー」施設で人工製造することが可能となった。筆者らの研究で、中性子過剰なZrやNbの半減期が理論値にくらべ約2～3分の1も短いことがわかり、従来よりも速くr-過程が進む可能性がでてきた。今後のデータ蓄積で宇宙での「錬金術」のありように一歩でも近づければと考えている。

「ガスハイドレート」

松本 良 (地球惑星科学専攻 教授)

ガスハイドレートとはその名の通りガスが水和 (=ハイドレート化) したもので、水分子が作る 12 面体や 16 面体あるいは 20 面体のケージ中に、二酸化炭素や硫化水素あるいはさまざまな炭化水素ガスがゲスト分子として取り込まれた氷状の固体物質である。新しいエネルギー資源として話題に上がるものはゲスト分子がメタンから成り、メタンハイドレートとよばれることもある。メタンハイドレートは低温・高圧 (0℃では 26 気圧以上) 条件下でメタンガスと水が十分に存在すれば生成することが実験的に確かめられており、地球上では深海堆積物や永久凍土域に広く分布することが分かっている。彗星のコマの氷や火星の水の起源はハイドレートではないかとの指摘もある。海底の堆積物中には海洋生物の遺骸や陸上植物に由

来する有機物が、数%から時には 10% 以上含まれている。これら有機物は浅部ではおもに微生物により、埋没深度数 100 m 以深ではおもに熱によって分解してメタンやエタンを生成する。メタンやエタンの水への溶解度は小さく、地層中ではしばしば気泡として存在し、断層や浸透性の良い地層を通過して浅部に移動、海底下数メートル~数 100 メートルにメタンを主成分とするガスが集積する。これが深海堆積物中のガスハイドレートの起源である。水深 1000 m の海底で水温を 3.0℃、堆積物中の地温勾配を太平洋側の平均値 3℃/100 m とすると、メタンを主成分とするガスハイドレートが安定に存在できるのは海底から深度 400 m 程度までである。つまり深部から移動してきたガスは 400 m 以浅でガスハイドレートとして固定され、

ガスハイドレートによって“凍結”した硬い堆積層が形成される。また日本海の一部のように深部からのガス供給がきわめて強い場合、海底下にガス移動通路として直径数 100 m のチムニー状構造が発達する。ここを通る大量のガスは海底にまで達し、海底直下から数 10 m までの表層堆積物中に塊状のガスハイドレート鉱床を形成する。これら海洋ガスハイドレートの資源化を目指して、日本をはじめ各国で資源探査プロジェクトが展開されている。いっぽう、ガスハイドレートの大量分解が温暖化を促進し、劇的気候変動を引き起こしたとする地質記録がある。筆者の研究室ではガスハイドレートの起源、分布、集積・分解の支配要因、環境インパクトと資源ポテンシャルの解明をテーマとした研究を進めている。
参考: 地学雑誌 118 巻 1 号 7-42 頁 (2009)

「向背軸の極性」

鳥羽 大陽 (生物科学専攻 特任助教)

植物の葉は表と裏で明瞭な違いが区別できる。この違いをつくる上で必要となるのが、向背軸の極性である。葉は、未分化細胞からなるメリステムというドーム状構造の周縁部から発生する。向背軸とは、メリステム側とその反対側を結ぶ軸であり、メリステムに近い側を向軸面、その反対側を背軸面とよぶ。いわゆる葉の表は向軸面、裏は背軸面に相当する。葉の発生では、ごく初期に向背軸に沿った極性が確立し、この極性に基づいてさまざまな細胞が分化する。表裏の表面構造の違いも、柵状組織や海綿状組織のような内部構造の違いも、この向背軸の極性に依存している。

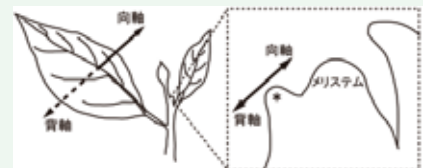
向背軸の極性が失われた葉は、どのような形になってしまうのだろうか。突然変異によってこの極性が失われた、奇妙な形の葉をもつ変異体の研究が、数多く行われてきた。それらの研究から、葉は極性を喪失すると形が棒状となることが

判明している。興味深いことに、棒状となった葉は、その特徴がすべて向軸面のものとなるか、あるいは背軸面のものになる。正常な表裏ができるためには、向軸面と背軸面の性質がいっぽうに偏らないようにバランスをとることが必要とされる。

向背軸の極性が確立し、向背軸のバランスが決まると、その境界が成立する。R. ウェイツ (Richard Waites) と A. ハドソン (Andrew Hudson) は、向軸側と背軸側の性質をもつ細胞が境界部分で並列することが、葉が平たい形になるための必要条件であるという仮説を提唱している。この仮説に基づくと、上述の向背軸の極性を失った葉は、その境界が成立しないために、棒状になると説明できる。向背軸の極性は、葉の表裏の違いだけでなく、扁平な形を作る上でも重要といえよう。

さて、自然界ではネギのように、そも

そも棒状もしくは筒状の葉をもつ植物が存在する。このような葉は、裏側しかないため、単面葉とよばれている。また、花の雄しべは葉が変形したもの (理学部ニュース 2007 年 11 月号「理学のキーワード第 10 回」参照) であり、その発生過程では向背軸の極性方向が大きく転換するため、扁平とはならず棒状の形態をもっている。本研究科生物科学専攻の塚谷研究室では単面葉の形成機構と進化について、平野研究室では雄しべにおける極性転換メカニズムについて、向背軸の極性に注目した研究が行われている。



メリステムと葉に分化する細胞群 (図中*で示す) の模式図。両矢印は向背軸の極性方向を示す。