

双生児の知能偏差値間の相関係数のベイズ研究

東京大学教育情報科学研究室 李 建 華

東京大学教育情報科学研究室 渡 部 洋

A Bayesian Study of the Correlation between IQ Standard Scores of Twins

Jian-Hua LI/Hiroshi WATANABE

This paper examines a Bayesian study of estimating the difference of intraclass correlation coefficients between IQ standard scores of MZ (monozygotic) twins as opposed to DZ (dizygotic) twins. A numerical example shows that IQ standard scores is possibly constrained by genetic factors.

目 次

- I. はじめに
- II. 理 論
- III. 数値例と結果
- IV. 討 議

I. はじめに

遺伝学、教育学、心理学などの領域において、双生児の研究がしばしば行なわれる。これらの研究には、級内相関係数 ρ が重要な役割を果たしている。特に、双生児の知能 (IQ) の遺伝的な要因を探ろうとする場合、双生児間の知能の類似性の指標としてしばしば級内相関係数が用いられる。特に、一卵性 (MZ) と二卵性 (DZ) 双生児間の比較を行なうことにおいて、知能の遺伝性を推定するのに、級内相関係数が重要な役割をなうことが多い (Newman, Freeman & Holzinger, 1937; Shields, 1962; Burt, 1966; Jensen, 1972; Loehlin and Nichols, 1976; 伊藤ほか, 1981; 天羽, 1988)。

多くの社会学者たちが、例えば、人類学者、社会学者及び社会心理学者など、バートの双生児の IQ 値とその級内相関係数の数値に疑いを表明したが、逆にそのことは IQ の級内相関係数の値に対して多くの研究者が非常に神経質になっているということを示すものである。

一般に、級内相関係数の推定方法は、主として最尤推定法と最小二乗法による場合が多いが、これらの方法は、級内相関係数の推定量の分布が未知であるという意味において、今日でも不十分な推定方法といわなければならない。

本研究では、ベイズ統計学による方法を用い、ばく然とした事前分布のもとで、級内相関係数 ρ の厳密な周辺事後分布を導出し、大標本の場合の近似分布を求め、MZ と DZ の双生児の知能偏差値間の級内相関係数を、我が国における実際のデータに基づいて算出する。

II. 理 論

個体数 n のテスト得点または測定値の標本を $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ と書く。ただし、ベクトル $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$, $i = 1, 2, \dots, n$, は i 番目の個体の測定値とする。ここで、大きさ n の標本の測定値 X_i が互いに独立に p 次元多変量正規分布 $N_p(\mu, \Sigma)$ に従うことを仮定する。ただし、 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$ は、母集団の平均ベクトルで、 Σ は母集団の分散共分散行列であり、しかも級内相関のパターンを満たす。すなわち、

$$\Sigma = \sigma^2(1 - \rho)I_p + \sigma^2\rho\mathbf{1}_p\mathbf{1}_p'$$

ただし、 $\mathbf{1}_p$ は全ての要素が 1 の p 次元ベクトルである。また、 \bar{X} を標本平均ベクトルと定義し、 V を標本分散共分散行列を n 倍したものと定義する。すなわち、

$$\bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i, \quad V = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})'$$

である。従って、 X' の尤度関数は (X で表す)、独立な X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, の同時分布として、

$$L(\mathbf{X}|\boldsymbol{\mu}, \sigma^2, \rho) \propto \frac{1}{|\boldsymbol{\Sigma}|^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} [V + n(\bar{X} - \boldsymbol{\mu})(\bar{X} - \boldsymbol{\mu})']\right\}$$

で与えられる。ただし、 α は比例することを示す。

今、 $\boldsymbol{\mu}$ 、 σ と ρ の事前同時確率分布として、

$$p(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2, \rho) = p(\boldsymbol{\mu})p(\sigma^2)p(\rho) \propto \frac{\rho^{\frac{1}{2}}(1-\rho)^{\frac{1}{2}}}{\sigma^2}$$

を考える。これは、いわゆる、ばく然とした事前分布である。事前情報が希薄な場合に各母数の事前分布が独立であると仮定することに対する説得力は、Box と Tiao (1973) によって、与えられる。また、特に ρ の事前分布として上記のものをとる理由は Novick et al. (1971) によっている。Novick らは各種の ρ のばく然とした事前分布を比較し、我々の領域においては、上記のものが最適であるという議論を展開している。

このとき同時事後分布は

$$p(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2, \rho | \mathbf{X}) \propto \frac{\rho^{\frac{1}{2}}(1-\rho)^{\frac{1}{2}}}{\sigma^2} \frac{1}{|\boldsymbol{\Sigma}|^{n/2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} [V + n(\bar{X} - \boldsymbol{\mu})(\bar{X} - \boldsymbol{\mu})']\right\} \quad (1)$$

となる。

$\boldsymbol{\Sigma}$ が与えられたときの $\boldsymbol{\mu}$ の条件付き事後分布が p 変量の正規分布に従うことを利用して積分すると、 σ^2 と ρ の周辺同時事後分布が得られる。すなわち、

$$p(\sigma^2, \rho | \mathbf{X}) \propto \frac{p(\rho)}{(1-\rho)^{(n-1)(p-1)/2} [1+(p-1)\rho]^{(n-1)/2}} \frac{1}{(\sigma^2)^{(n-1)p/2+1}} \times \exp\left\{-\frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{2(1-\rho)} \text{tr} \left[I_p - \frac{\rho}{1+(p-1)\rho} \mathbf{1}_p \mathbf{1}'_p \right] V \right\} \quad (2)$$

となる。

また、 σ^2 の周辺事後分布が逆 gamma 分布 (Raiffa, 1961) に従うことを利用して、式(2)の σ^2 に関する積分をすると ρ の周辺事後分布が得られる。すなわち、

$$p(\rho | \mathbf{X}) \propto p(\rho) \frac{(1-\rho)^{(n-1)/2} [1+(p-1)\rho]^{(n-1)(p-1)/2}}{(1+\{[(p-1) \text{tr} V - \mathbf{1}'_p \mathbf{V} \mathbf{1}_p] / \text{tr} V\} \rho)^{(n-1)p/2}} \quad (3)$$

となる。ここで、

$$\bar{r} = \frac{\mathbf{1}'_p \mathbf{V} \mathbf{1}_p - \text{tr} V}{(p-1) \text{tr} V} \quad (4)$$

である。Srivastava と Carter (1983, p.260) により、この \bar{r} は ρ の最尤推定量であることが知られている。従って、

$$[(p-1) \text{tr} V - \mathbf{1}'_p \mathbf{V} \mathbf{1}_p] / \text{tr} V = (p-1)(1-\bar{r}) - 1 \quad (5)$$

と書くことができる。最後に、式(3)と式(5)から、 ρ の周辺事後分布が

$$p(\rho | \mathbf{X}) \propto p(\rho) L(\mathbf{X} | \rho) \propto \rho^{\frac{1}{2}}(1-\rho)^{\frac{1}{2}} \frac{(1-\rho)^{(n-1)/2} [1+(p-1)\rho]^{(n-1)(p-1)/2}}{\{1+[(p-1)(1-\bar{r})-1]\rho\}^{(n-1)p/2}} \quad (6)$$

と表現できる。

$L(\rho | \mathbf{X})$ の対数を取り ρ について微分すると、式(6)における \bar{r} のところに単一なモードがあることがわかる。

Zellner (1971, pp.31-34) が示した方法を利用して、大標本の場合の ρ の近似事後分布は、

$$p(\rho | \mathbf{X}) \propto p(\rho) L(\mathbf{X} | \rho) \propto p(\rho) \exp\{g(\rho)\} \approx \left(\frac{|g''(\bar{r})|}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\rho - \bar{r})^2 |g''(\bar{r})|\right\} \quad (7)$$

と表現できる。ただし、 $g(\rho) = \log L(\mathbf{X} | \rho)$ である。従って、式(7)は正規分布となり、事後平均は ρ の最尤推定量 \bar{r} で、事後分散は

$$\text{var}(\rho | \mathbf{X}) \approx [-g''(\bar{r})]^{-1} = \left[-\frac{d^2 \log L(\mathbf{X} | \rho)}{d\rho^2}\right]_{\rho=\bar{r}}^{-1} = \frac{2}{n-1} \frac{(1-\bar{r})^2 [1+(p-1)\bar{r}]^2}{p(p-1)} \quad (8)$$

となる。

III. 数値例と結果

数十年来、社会学者や心理学者に注目されている話題として、一卵性双生児間の知能の類似度と二卵性双生児間の知能の類似度の差異の問題がある。この節では、前述の分布理論を用いて数値的な検討を行なう。分析する

データは東大付属中学校の1978年から1992年まで128対の一卵性 (MZ) 双生児と33対の二卵性 (DZ) 双生児から得られた知能偏差値である。用いられたテストは東京大学A-S知能テストで、中学校に入った直後にテストが行なわれた。知能偏差値は、

知能偏差値

$$= \frac{10 \times (\text{個々の得点} - \text{基準集団における平均点})}{\text{基準集団における標準偏差}} + 50$$

によって算出され、その結果知能偏差値の平均は50、標準偏差は10に標準化されている。

Table 1 には、各年の一卵性 (MZ) 双生児の知能偏差値の統計値を示した。

Table 1 Statistics on IQ standard scores of 128 MZ twin pairs

test	year	n(pairs)	Mean A	Mean B	SD A	SD B
1	1978	14	63.571	61.357	11.897	9.240
2	1979	15	65.267	67.933	7.425	8.290
3	1981	12	64.667	63.583	6.155	6.689
4	1982	12	66.417	68.333	4.681	6.625
5	1983	14	67.786	66.286	9.041	10.606
6	1985	11	58.091	59.727	4.033	8.497
7	1986	11	62.364	61.000	4.558	6.281
8	1987	12	58.333	59.500	9.330	7.444
9	1989	10	58.500	60.700	6.561	4.605
10	1991	10	62.900	62.400	7.463	9.340
11	1992	7	62.000	60.286	11.326	12.360
all twins		128	63.000	63.156	8.535	8.938

Table 1 において、A、Bとあるのは、Aが兄 (姉) で、Bが弟 (妹) であることを示しているがこのような分類は全く習慣的なものである。

Table 1 に示された各年の双生児集団の標本平均が同一でないことに注意しなければならない。これゆえ、各集団のデータが同一母集団から抽出されたかどうかという統計的仮説を吟味すべきであろう。多変量分散分析 (MANOVA) における期待値に関する統計的仮説の吟味のためには、最大固有値基準を用いるベイズの同時確信区間を利用することが提案されている (Press, 1982, pp.277-281)。

本研究には、2変量の11個の標本集団があり、各集団の人数は n_k で示される。いま、各集団の変数は独立に平均 μ_k 、分散共分散行列 Σ をもつ多変量正規分布に従うものとする。すなわち、

$$X_k(t) \sim i.i.d. N(\mu_k, \Sigma) \quad k=1, \dots, 11; t=1, \dots, n_k$$

とする。

この前提のもとで、統計的仮説

$$H : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{11}$$

をとるべきか、もつ1つの統計的仮説

$$H' : \mu_k \text{'s are not all equal}$$

をとるべきか決めなければならないということになる。MANOVA 一要因配置のベイズ同時確信区間を求めることによって、統計的仮説「各集団の平均は等しい」を採択することとした。この過程はすでに知られている方法を用いるだけであるので、この過程を省略するが、結果そのものは非ベイズの尤度比検定と同じである。従って、11個の一卵性 (MZ) 双生児の標本集団を同一母集団から抽出したものとみなすこととなった。

Table 2 には、各年度ごとの二卵性 (DZ) 双生児の知能偏差値の統計値を示した。

Table 2 Statistics on IQ standard scores of 33 DZ twin pairs

	n(pairs)	Mean A	Mean B	SD A	SD B
all twins	33	63.212	63.333	7.450	6.887

それぞれの128対の一卵性 (MZ) 双生児と33対の二卵性 (DZ) 双生児の知能偏差値の分散共分散行列を n 倍したものは

$$V_M = \begin{pmatrix} 9324.000 & 6236.000 \\ 6236.000 & 10224.875 \end{pmatrix}$$

及び

$$V_D = \begin{pmatrix} 1831.515 & 847.667 \\ 847.667 & 1565.333 \end{pmatrix}$$

である。

ここでの母集団の分散共分散行列 Σ は 2×2 の級内相関行列であるから、 ρ の周辺事後分布 (式(6)) は、

$$p(\rho | X) \propto \rho^{\frac{1}{2}} (1-\rho)^{\frac{1}{2}} \frac{(1-\rho^2)^{(n-1)/2}}{(1-\bar{r}\rho)^{n-1}}$$

と書ける。

式(4)から、それぞれの一卵性 (MZ) 双生児と二卵性 (DZ) 双生児の知能偏差値の級内相関係数の最尤推定値が得られる。すなわち、

$$\bar{r}_M = \frac{\mathbf{1}'_p \mathbf{V}_M \mathbf{1}_p - \text{tr } \mathbf{V}_M}{(p-1) \text{tr } \mathbf{V}_M} = 0.638$$

及び

$$\bar{r}_D = \frac{\mathbf{1}'_p \mathbf{V}_D \mathbf{1}_p - \text{tr } \mathbf{V}_D}{(p-1) \text{tr } \mathbf{V}_D} = 0.499$$

である。なお、ここで \bar{r}_M は一卵性 (MZ) 双生児のものを指し、 \bar{r}_D は二卵性 (DZ) 双生児のものを指している。

MZ の ρ の周辺事後分布は

$$p(\rho | X_M) \propto \rho^{\frac{1}{2}} (1-\rho)^{\frac{1}{2}} \frac{(1-\rho^2)^{63.5}}{(1-0.638\rho)^{127}}$$

となり、近似事後分布も式(4)、(7)と(8)から、

$$p(\rho | X_M) \approx \left(\frac{1}{2\pi \times 0.002769} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{(\rho - 0.638)^2}{2 \times 0.002769} \right\}$$

と書ける。

Fig. 1 には、MZ データによる ρ の厳密な周辺密度関数曲線 (実線) と近似分布密度関数曲線 (破線) を示した。図から見られるように、2つの分布がかなり一致していることが分かる。

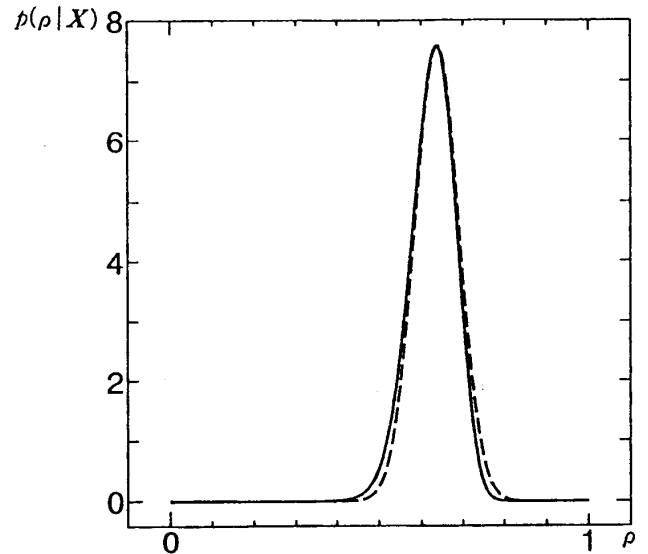


Fig. 1 MZ データによる ρ の厳密な周辺密度関数曲線 (実線) と近似分布密度関数曲線 (破線)

同様にして、DZ の ρ の厳密な周辺事後分布と近似事後分布も得られる。これらは

$$p(\rho | X_D) \propto \rho^{\frac{1}{2}} (1-\rho)^{\frac{1}{2}} \frac{(1-\rho^2)^{16}}{(1-0.499\rho)^{32}}$$

と

$$p(\rho | X_D) \approx \left(\frac{1}{2\pi \times 0.017621} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{(\rho - 0.499)^2}{2 \times 0.017621} \right\}$$

と書ける。

DZ データによる ρ の厳密な周辺密度関数曲線 (実線) と近似分布密度関数曲線 (破線) を描くと、Fig. 2 のとおりとなる。近似分布の曲線が厳密な事後分布のそれよりやや右へずれて、分散も近似のほうがやや大きい。この原因の1つはDZ データの数が少ないためと考えられる。

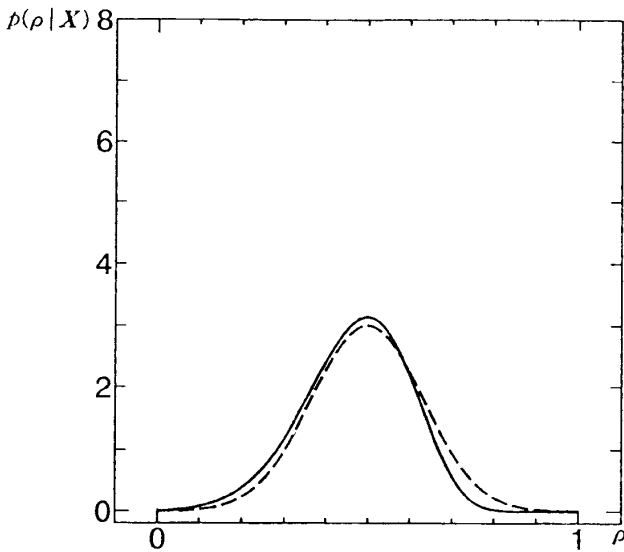


Fig. 2 DZ データによる ρ の厳密な周辺密度関数曲線 (実線) と近似分布密度関数曲線 (破線)

ベイズ推測の結果は Table 3 と 4 の通りにまとめられる。

Table 3 Results for IQ standard scores of 128 MZ twin pairs

	mode	mean	variance
Exact posterior	0.636	0.628	0.002847
Approximate posterior	0.638	0.638	0.002769

Table 4 Results for IQ standard scores of 33 DZ twin pairs

	mode	mean	variance
Exact posterior	0.499	0.472	0.015975
Approximate posterior	0.499	0.499	0.017621

MZ と DZ の級内相関係数の差についての厳密な確率は、

$$\begin{aligned}
 &Pr(\rho_M > \rho_D) \\
 &= Pr(\rho_M - \rho_D > 0) \\
 &= \int_{y>0} \left\{ \int_0^1 p(\rho_M | X_M) p(\rho_M - y | X_D) d\rho_M \right\} dy \\
 &= 0.865
 \end{aligned}$$

となった。ただし、 $y = \rho_M - \rho_D$ である。すなわち、MZ の ρ のほうが DZ の ρ より大きい事後確率は 0.865 であり、かなり高い確信度をもって、一卵性双生児間の級内相関が二卵性のそれよりも高いということがいえる。

同時に、MZ と DZ の級内相関係数の差の近似事後分布は

$$\rho_M - \rho_D \sim N(0.139, 0.0204)$$

となり、MZ の ρ のほうが DZ の ρ より大きい近似確率は

$$Pr(\rho_M > \rho_D) \approx 0.834$$

となった。

Fig. 3 の斜線部の面積は、MZ の級内相関係数のほうが DZ のそれよりも大きいという確率の近似値を示している。

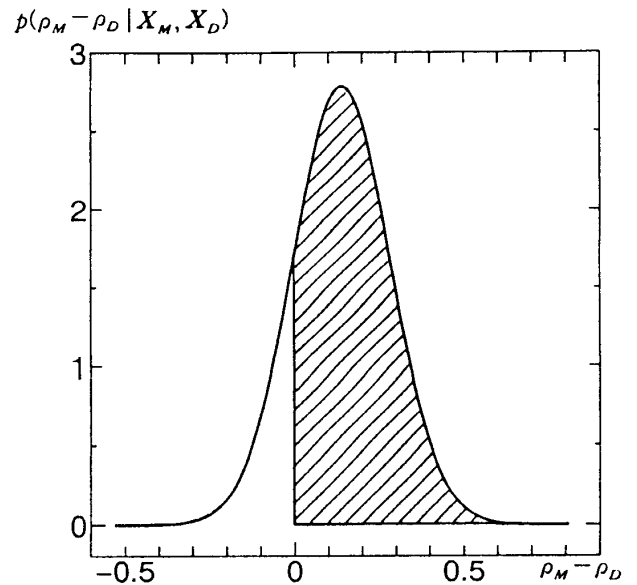


Fig. 3 MZ と DZ の級内相関係数の差の近似事後分布及び MZ の級内相関係数のほうが DZ のそれよりも大きいという確率の近似値 (斜線部の面積)

IV. 討 議

以上の分析から、以下のような 4 つの結論が得られた。まず、本研究の目的の 1 つは級内相関係数の標本理論による点推定とベイズ推定の方法を比較検討することであった。Table 3, 4 から、ベイズ推定の結果は点推定の

結果とほとんど一致することを示している。この理由は、周辺尤度関数 $L(X|\rho)$ を用いて求めた ρ の周辺最尤推定値が、 $L(X|\mu, \sigma^2, \rho)$ を用いて、求めた ρ の最尤推定値と完全に一致していることによるものである。

次に、Fig. 1, 2 によって、それぞれの厳密な事後分布 (実線) と近似正規分布 (破線) のグラフの比較を行なった。これについても、2つの分布がかなり一致していることが示された。求められた級内相関係数の事後分散 (式 (8)) が n に依存するので、 n が大きくなると、 $p(\rho|X)$ が τ の周りに集中して、事後分散が小さくなる。近似式 (7) には次数 $1/n^{1/2}$ の誤差が含まれるが、Table 3, 4 にもみられるように、實際上、大標本の場合には、式(8)に与えられる ρ の事後分散の近似式はかなり正確である。

さらに、前節に行なった「各集団の平均は等しい」という統計的仮説の吟味の結果が各年の集団は同じ分散共分散行列をもつかどうか依存していることにも注意する必要がある。しかし、Table 1 からは、各標本集団の分散が必ずしも同一とは限らないことが示唆されるので、級内相関モデルに対する分散共分散行列の多重比較のベイズ流アプローチを考える必要があるということになろう。これは、今後の課題としたい。

最後に、一卵性双生児の級内相関係数は、二卵性双生児のそれより大きく、知能を決定する上に遺伝が働いていることは多くの研究からも示唆されているところであり、我々のデータもそれを否定しないことが示された。

謝 辞

本研究に用いられたデータは東大教育学部附属中学の蛭田かほり先生から提供して頂いたものです。感謝してここに記します。

参考文献

- [1] 天羽幸子 (1988) ふたごの世界—双生児の二十五年間の追跡研究 プレーン出版
- [2] Box, G. E. P. and Tiao, G. C. (1973) *Bayesian Inference in Statistical Analysis*. Reading, MA : Addison-Wesley.
- [3] Burt, C. (1966) The Genetic Determination of Differences in Intelligence : A Study of Monozygotic Twins Reared Together and Apart. *British Journal of Psychology* 57, 137-153
- [4] Donner, A. and Bull, S. (1983) Inferences concerning an intraclass correlation coefficient. *Biometrics* 39, 771-775
- [5] 伊藤隆二・苧阪良二・東洋・岡本夏木・板倉聖宣・麻生誠 (1981) 知能と創造性 現代の心理学講座第 4 巻 小学館出版
- [6] Jensen, A. R. (1972) *Genetics and Education*. London, Methuen & Co Ltd.
- [7] Loehlin, J. C. and Nichols, R. C. (1976) *Heredity, Environment and Personality : A Study of 850 Sets of Twins*. Austin, TX : University of Texas Press.
- [8] Newman, H. H., Freeman, F. N. and Holzinger, k. J. (1937) *Twins : A Study of Heredity and Environment*. Chicago, University of Chicago Press.
- [9] Novick, M. R., Jackson, P. H. and Thayer, D. T. (1971) Bayesian inference and the classical test theory model : reliability and true scores. *Psychometrika* 36, 261-288
- [10] Press, S. J. (1982) *Applied Multivariate Analysis : Using Bayesian and Frequentist Methods of Inference*. 2nd edn. Melbourne, FL : Krieger.
- [11] Raiffa, H. and Schlaifer, R. (1961) *Applied Statistical Decision Theory*. Graduate School of Business Administration. Boston, MA : Harvard University.
- [12] Shields, J. (1962) *Monozygotic Twins Brought up Apart and Brought up Together*. London, Oxford University Press.
- [13] Srivastava, M. S. and Carter, E. M. (1983) *An Introduction to Applied Multivariate Statistics*. New York : North-Holland.
- [14] Zellner, A. (1971) *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*. New York : Wiley.