事前・事後テストの真の得点間のベイズ回帰

東京大学教育情報科学研究室　渡　部　　洋

"Bayesian regression between true scores for pretest and posttest analysis"

Hiroshi WATANABE, The University of Tokyo

The problem under consideration is to fit a straight line between true scores where, given n pairs of observed test scores, each pair of observed scores is assumend to be the sum of a pair of true scores and a pair of error scores. This problem may tipically occur in the situation of pretest and posttest analysis. In order to facilitate the analysis, the split-halves technique is employed. Linearity between the split true scores is assumed as well as linearity between the true scores of the two tests. Based on these and other familiar assumptions, Bayesian estimates of the parameters, true scores, and realibility coefficients are derived.

Key Words : measurement error, true score, classical test thory, structural regression, Bayesian multivariate linear model, *t*-ratio distribution, reliability coefficient

I．はじめに

教育研究においては，種々の処理の効果や発達の効果を調べるために，同一被験者にまず事前テストを実施し，その上で処理をほどこしたりある一定期間置いた後に事後テストを実施し，結果として得られた事前テストの得点と事後テストの得点との間の関係を調べるということがしばしば行なわれる。このような場合に，データ解析のために用いられる極めて一般的な統計的技法は，事前テストの得点を予測変数X，事後テストの得点を基準変数Yとした回帰分析であるが，得られた得点には測定誤差が踏まれていると考えるのが自然であり，その測定誤差が統計的分析の結果に大きく影響する可能性は否定できない。たとえば，古典的テスト理論とよばれるテスト理論においては，観測得点を真の得点と測定誤差の和と考えて種々の議論が展開されているが，それによれば2つのテストから得られた観測得点間の相関係数はそれら2つのテストの真の得点間の相関係数よりも小さく，観測得点間の相関係数はテストに伴なう測定誤差によって稀薄化されることが示されている。また，そのために，観測得点間の相関係数を各テストの信頼性係数の積の平方根で除することによって，真の得点間の相関係数を推定するための公式も提案されている[7]。しかし，そのことは回帰分析においても，観測得点に最小二乗法を適用して解析を行なう限り，結果として得られる回帰係数の値が相関係数の値と密接な関係にあるために，それら回帰係数の値も測定誤差によって稀薄化されてしまっている可能性が高い。従って，2つのテスト得点間の関係を回帰分析によって探索しようとする場合には，観測得点間にではなく真の得点間に回帰直線をあてはめることを考えるべきであろう。そこで，以下ではこの問題を古典的テストモデルにのっとって以下のように考える。

モデル式として，観測された対のテスト得点(X, Y)を

$$X = T_X + E_X \qquad (1,\ 1)$$

および，

$$Y = T_Y + E_Y \qquad (1,\ 2)$$

と書く。ただし，XとYは同一被験者より得られたそれぞれ事前テストの得点と事後テストの得点を示すものとする。T_XとT_Yはそれぞれのテストの真の得点であり，E_XとE_Yは測定誤差を示している。測定誤差の平均は0，真の得点と測定誤差とは無相関，ということが仮定されている。また，測定誤差間も無相関ということが仮定されている。このようなモデルは，よく知られている古典的テストモデル[3)7)10)14)]を二変量の場合に単純に一般化することによって容易に得られるものである。

真の得点間の回帰が直線的であると仮定できるならば，その真の得点間の関係は

$$T_Y = \alpha + \beta T_X \qquad (1,\ 3)$$

と書くことができるであろう。ただし，α は回帰直線の切片，β は傾きを示している。(1，3)式を(1，1)式と(1，2)式に代入することによって

$$X = T_X + E_X \qquad (1,\ 4)$$

および，

$$Y = \alpha + \beta T_X + E_Y \qquad (1,\ 5)$$

と書くことができる。この(1，4)式と(1，5)式から，真の得点 T_Xの平均を μ とすると，X の平均と Y の平均は

$$\overline{X} = \mu \qquad (1,\ 6)$$

および，

$$\overline{Y} = \alpha + \beta\mu \qquad (1,\ 7)$$

となることがわかる。X と Y の分散については，

$$Var(X) = \tau + \phi_X \qquad (1,\ 8)$$

$$Var(Y) = \beta^2\tau + \phi_Y \qquad (1,\ 9)$$

と書くことができ，X と Y の間の共分散については

$$Cov(X,\ Y) = \beta\tau \qquad (1,\ 10)$$

と書くことができる。ただし，τ は T_Xの分散を ϕ_Xと ϕ_Y はそれぞれ E_Xと E_Yの分散を示すものとする。しかし，これら6つの未知量(μ，α，β，τ，ϕ_X，ϕ_Y)を1次と2次の積率を用いて推定するためには，(1，6)式から(1，10)式の5つの式だけでは不十分であることは明らかである。

数理統計学の立場からは，この問題は基準変数と予測変数の双方に測定誤差が伴なういわゆる構造的回帰モデルにかかわるものとして論じられてきた[6)16)]。構造的回帰モデルのもとでは，n 個の対の観測値，$(X_i,\ Y_i)$，i＝1，2，…，n，が

$$X_i = \theta_i + e_{xi} \qquad (1,\ 11)$$

および，

$$Y_i = \alpha + \beta\theta_i + e_{yi} \qquad (1,\ 12)$$

と書かれる。ただし，θ_iはそれぞれ独立に平均 μ 分散 τ の正規分布に従い，かつ θ_iは e_{xi}や e_{yi}とは独立である。また，$(e_{xi},\ e_{yi})$は$(e_{xj},\ e_{yj})$，$1 \neq j$，とは独立に正規分布に従い，

$$E(e_{xi}) = 0 \qquad (1,\ 13)$$

$$E(e_{yi}) = 0 \qquad (1,\ 14)$$

$$Var(e_{xi}) = \phi_X \qquad (1,\ 15)$$

$$Var(e_{yi}) = \phi_Y \qquad (1,\ 16)$$

および，

$$Cov(e_{xi},\ e_{yi}) = 0 \qquad (1,\ 17)$$

であることが仮定されている。ただし，(1，13)式および(1，14)式は，その期待値が0であることを意味している。このようなモデル仮定のもとで，繰り返し測定が無い場合には，モデル自体が識別可能性に欠けるために，α と β の一致推定量が存在しないことが知られている[8)13)]。

II．折半法によるモデル

この問題に関して，Watanabe は古典的テスト理論の立場からの解法を提案した[15)]。彼は，事前テストを折半し，モデル式を

$$X = X_1 + X_2 \qquad (2,\ 1)$$

$$T_X = T_1 + T_2 \qquad (2,\ 2)$$

および，

$$E_X = E_1 + E_2 \qquad (2,\ 3)$$

と書いた。ただし，添字の1と2はそれぞれ事前テストを折半することによって得られたサブテストを示している。彼はまた，T_1と T_2との間の線型関係を仮定し，その関係を

$$T_2=\alpha_0+\beta_0 T_1 \qquad (2,\ 4)$$

と書いた。このような基本モデル式を用いて，彼のモデルは

$$X_1=T_1+E_1 \qquad (2,\ 5)$$

$$X_2=T_2+E_2 \qquad (2,\ 6)$$

および，

$$Y=\alpha+\alpha_0\beta+\beta(1+\beta_0)T_1+E_y \qquad (2,\ 7)$$

と書き直すこともできる。この他に前節で用いた仮定と同様のモデル仮定を設定することによって，以下のような未知母数の積率推定量が得られた。すなわち，

$$\hat{\mu}_1=\bar{x}_1 \qquad (2,\ 8)$$

$$\hat{\alpha}_0=\bar{x}_2-\hat{\beta}_0\bar{x}_1 \qquad (2,\ 9)$$

$$\hat{\beta}_0=s_{2y}/s_{1y} \qquad (2,\ 10)$$

$$\hat{\tau}_1=s_{12}s_{1y}/s_{2y} \qquad (2,\ 11)$$

$$\hat{\phi}_1=s_{11}-\hat{\tau}_1 \qquad (2,\ 12)$$

$$\hat{\phi}_2=s_{22}-s_{12}s_{2y}/s_{1y} \qquad (2,\ 13)$$

$$\hat{\phi}_y=s_{yy}-s_{1y}s_{2y}/s_{12} \qquad (2,\ 14)$$

$$\hat{\alpha}=\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x} \qquad (2,\ 15)$$

$$\hat{\beta}=s_{1y}s_{2y}/\ [s_{12}(s_{1y}+s_{2y})] \qquad (2,\ 16)$$

および，

$$\mu=\alpha_0+(1+\hat{\beta}_0)\hat{\mu}_1 \qquad (2,\ 17)$$

$$\hat{\tau}=(1+\hat{\beta}_0)^2\hat{\tau}_1 \qquad (2,\ 18)$$

$$\hat{\phi}_X=\hat{\phi}_1+\hat{\phi}_2 \qquad (2,\ 19)$$

である。ただし，ここでμ_1はX_1の平均を，τ_1，ϕ_1，およびϕ_2はX_1, E_1およびE_2の分散を，それぞれ示している。また，$\bar{x}$, $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$，および$\bar{y}$は，標本平均を示し，s_{11}，s_{22}，s_{yy}，s_{12}，s_{1y}，s_{2y}は標本分散，共分散を示し，

$$\bar{x}=\bar{x}_1+\bar{x}_2 \qquad (2,\ 20)$$

$$s_{xx}=s_{11}+2\ s_{12}+s_{22} \qquad (2,\ 21)$$

および，

$$s_{xy}=s_{1y}+s_{2y} \qquad (2,\ 22)$$

という関係が成り立つ(後の展開のために，今後は大文字のX_1，X_2および Y の代りに小文字の$\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$，$\bar{y}$が用いられる)。さらに，従来よく用いられる最小二乗法による回帰分析で得られる傾きの母数の推定値，いいかえれば傾きの母数の最小二乗推定量は，事前テストの信頼性係数の推定値$\hat{\rho}_{XX}'$と$\hat{\beta}$の積で与えられること，およびテストの信頼性係数の推定値を$\hat{\rho}_{XY}'$, X と Y との間の相関係数をr_{XY}とすると

$$\rho_{XX}'\rho_{YY}'=r_{XY} \qquad (2,\ 23)$$

という関係が成り立つことも示されている[15]。なお，Haebara は，モデル式において，$\alpha=0$を仮定することによって，より簡便にしかも実際には事前テストを折半する必要なしに母数の推定値が得られることを示した[4]。

III. 最尤推定量

古典的テスト理論においては，測定誤差については配慮されているが標本誤差は議論の対象となっていない。そこで，ここでは標本誤差をも考慮するために前節で述べた折半法によるモデルを

$$x_{1i}=\theta_{1i}+e_{1i} \qquad (3,\ 1)$$

$$x_{2i}=\alpha_0+\beta_0\theta_{1i}+e_{2i} \qquad (3,\ 2)$$

および，

$$y_i=\alpha+\alpha_0\beta+\beta(1+\beta_0)\theta_{1i}+e_{yi} \qquad (3,\ 3)$$

と書くことにする。ただし，θ_{1i}, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$はe_{1i}, e_{2i}およびe_{yi}とは独立に平均μ_1と分散τ_1の同一の正規

分布に従うことが仮定されている。また，(e_{1i}, e_{2i}, e_{yi}) は (e_{1j}, e_{2j}, e_{yj})，$i \neq j$，とは独立に正規分布に従い，

$$E(e_{1i}) = 0 \qquad (3, 4)$$

$$E(e_{2i}) = 0 \qquad (3, 5)$$

$$E(e_{yi}) = 0 \qquad (3, 6)$$

$$Var(e_{1i}) = \phi_1 \qquad (3, 7)$$

$$Var(e_{2i}) = \phi_1 \qquad (3, 8)$$

および，

$$Var(e_{yi}) = \phi_y \qquad (3, 9)$$

であることが仮定されており，これら e_{1i} や e_{2i} や e_{yi} もまた相互に正規分布に従うとされている。多変量正規分布の母数の推定量としての積率推定量は最尤推定量であること，およびそれら母数に１対１変換を行なって新たな母数としたときの新母数の最尤推定量は旧母数の最尤推定量を同じ１対１変換をして得られるというよく知られた事実[1]によって，前節の(２，８)式から(２，16)式によって示された積率推定量は最尤推定量でもあるということが容易に導かれる。しかしながら，実際的状況においてはこれらの最尤推定量を受けいれることができない状況も発生する。すなわち，真の得点の分散 τ_1，誤差分散 ϕ_1，ϕ_2，および ϕ_y の推定値が負になる可能性があるという問題である。このことは，(２，11)式，(２，12)式，(２，13)式および(２，14)式を書きかえて，

$$\hat{\tau}_1 = s_{11} r_{12} r_{1y} / r_{2y} \qquad (3, 10)$$

$$\hat{\phi}_1 = s_{11}(1 - r_{12} r_{2y} / r_{2y}) \qquad (3, 11)$$

$$\hat{\phi}_2 = s_{22}(1 - r_{12} r_{2y} / r_{1y}) \qquad (3, 12)$$

および，

$$\hat{\phi}_y = s_{yy}(1 - r_{1y} r_{2y} / r_{12}) \qquad (3, 13)$$

とすることによって容易にみてとることができる。これらの式から，折半されたテスト間の相関 r_{12} が正であるという条件に加えて，

$$r_{1y} r_{2y} > 0 \qquad (3, 14)$$

$$r_{2y} > r_{12} r_{1y} \qquad (3, 15)$$

$$r_{1y} > r_{12} r_{2y} \qquad (3, 16)$$

および，

$$r_{12} > r_{1y} r_{2y} \qquad (3, 17)$$

の４つの不等式が正の推定値を得るためには満たされなければならないことがわかる。また，これらの不等式から，少くとも等式

$$r_{1y} = r_{2y} \qquad (3, 18)$$

および不等式

$$r_{12} > r^2_{1y} \qquad (3, 19)$$

が満たされるならば，正の推定値が得られることがわかる。もしデータが母集団規模のものであるならば折半された事前テスト間の母集団相関係数 ρ_{12} は正でなければならない。さもなければ，事前テストの不適切さは明らかである。さらに，不等式 $\rho_{12} > \rho^2_{1y}$ もまた母集団においては成り立つはずである。何故ならば，折半された事前テストを１つの独立したテストと見なすとき，この不等式は古典的テスト理論において，信頼性係数と妥当性係適の間の関係を示すものとしてよく知られている不等式となるからである[7]。従って，事前テストを折半する際には，等式 $\rho_{1y} = \rho_{2y}$ を得ることができるように，奇偶法などを用いてできるだけ等しいサブテストが得られるように折半すべきだということになる。しかし，これらの条件がたとえ母集団において満たされていたとしても，標本変動のために，標本データから得られた推定値が正になるとは限らない。その意味において，以下で提示されるベイズ解は，適切な事前分布が用いられる限り負の推定値の問題が生じないという意味において，実際上の利点がある。

ベイズ解には，もう１つの実際的な利点がある。計量経済学における同時方程式モデルの研究に関して，Zellner は，小標本を用いてのモンテ・カルロ実験によって，ばく然とした事前分布のもとに得られた母数の事後分布のモード値の変動を探求した[16]。彼はまた，この事後モードの分布を，共分散の比として示される標本理論による

推定値の頻度分布と比較した。その研究において，Zellner はベイズ解としての事後モードは真の値の近辺に密集するのに対して，標本理論による推定値の分布はほとんど一様分布であって数多くの外れ値が発生することを示した。この論文で議論されているモデルも，Zellner が研究した同時方程式と似た側面をもってるがために，とくに n が小さいとき，標本理論的な解よりもベイズ解が実際上有益な推測のための手段を提供するであろうことが期待される。

IV．線型モデルと変換

$(x_{1i},\ x_{2i},\ y_i)$ の周辺平均値ベクトルを $\underset{\sim}{\beta}'$，その分散共分散行列を $\underset{\sim}{\Lambda}$ とおくと，(3，1)式から(3，9)式までを用いて，

$$\underset{\sim}{\beta}=\begin{bmatrix}\mu_1\\ \alpha_0+\beta_0\mu_1\\ \alpha+\alpha_0\beta+\beta(1+\beta_0)\mu_1\end{bmatrix} \qquad (4,\ 1)$$

および，

$$\underset{\sim}{\Lambda}=\begin{bmatrix}\tau_1+\phi_1 & \beta_0\tau_1 & \beta(1+\beta_0)\tau_1\\ \beta_0\tau_1 & \beta^2{}_0\tau_1+\phi_2 & \beta_0\beta(1+\beta_0)\tau_1\\ \beta(1+\beta_0)\tau_1 & \beta_0\beta(1+\beta_0)\tau_1 & \beta^2(1+\beta_0)^2\tau_1+\phi_y\end{bmatrix} \qquad (4,\ 2)$$

と書くことができる。(4，1)式と(4，2)式から，β_0 と β が共に $\underset{\sim}{\beta}$ と $\underset{\sim}{\Lambda}$ の双方に含まれていることがわかるが，このことによって母数の周辺事後分布を直接見出すことが困難であることがわかる。そこで，以下では，関心下の分布を見出すために，まずベイズ流の一般多変量線型モデル[2)10)16)]から出発して変換によって目的を達成することを考える。

まず，多変量線型モデルを

$$\underset{\sim}{Y}=\underset{\sim}{1}_n\underset{\sim}{\eta}'+\underset{\sim}{U} \qquad (4,\ 3)$$

と書く。ただし，$\underset{\sim}{Y}$ はその i 番目の行の要素が

$$\underset{\sim}{Y}=\{x_{1i},\ x_{2i},\ y_i\} \qquad (4,\ 4)$$

で示される n× 3 のデータ行列であり，$\underset{\sim}{1}_n$ は n 個の 1 からなるベクトルであり，$\underset{\sim}{\eta}'$ はその要素が

$$\underset{\sim}{\eta}'=[\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3] \qquad (4,\ 5)$$

で示される 1 × 3 の母数ベクトルである。$\underset{\sim}{U}$ は n× 3 の誤差行列で，$\underset{\sim}{U}$ の各行は独立な同一の 3 次元正規分布 $N_3(\underset{\sim}{O}',\ \underset{\sim}{\Sigma})$ に従うことが仮定されている。ただし，

$$\underset{\sim}{\Sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{bmatrix} \qquad (4,\ 6)$$

である，$(\underset{\sim}{\eta},\ \underset{\sim}{\Sigma})$ に対する同時事前分布として

$$p(\underset{\sim}{\eta},\ \underset{\sim}{\Sigma})\propto|\Sigma|^{-(\nu/2+3)}\exp\left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{S}_0\right)$$

をここでは考える。ただし，$\propto$ は比例すること，すなわち定数が省略されていることを意味し，$\underset{\sim}{S}_0$ は我々が事前に定めなければならない 3 × 3 の実数行列である。いいかえれば，$\underset{\sim}{\eta}$ に対する事前分布はばく然としたものであり，$\underset{\sim}{\Sigma}$ に対する事前分布は自由度 ν の逆ウィッシャート分布 $W_3^{-1}(\underset{\sim}{S}_0,\ \nu)$ であって，$\underset{\sim}{\eta}$ と $\underset{\sim}{\Sigma}$ に対する事前分布は独立であるということになる（このような分布に対する表記法は Box と Tiao[2)] にのっとったものである）。このとき，$\underset{\sim}{\Sigma}$ に対する周辺事後分布が $W_3^{-1}(\underset{\sim}{S}^*,\ n+\nu-3)$ となること，および $\underset{\sim}{\eta}$ に対する事後分布が 3 次元ティ分布 $t_3[\hat{\underset{\sim}{\eta}},\ n^{-1}(n+\nu-3)^{-1}\underset{\sim}{S}^*,\ n+\nu-3]$ となることを示すのは容易である。ただし，$\underset{\sim}{S}^*$ は 3 × 3 の対称行列で

$$S^*=\begin{bmatrix}ns^*_{11} & ns^*_{12} & ns^*_{13}\\ ns^*_{21} & ns^*_{22} & ns^*_{23}\\ ns^*_{31} & ns^*_{32} & ns^*_{33}\end{bmatrix} \qquad (4,\ 7)$$
$$=\underset{\sim}{Y}'\,[\underset{\sim}{I}_n-n^{-1}\underset{\sim}{1}_n\underset{\sim}{1}'_n]\,\underset{\sim}{Y}+\underset{\sim}{S}_0$$

と書くことができ，$\hat{\underset{\sim}{\eta}}$ は 3 × 1 の標本平均値のベクトルで

$$\hat{\underset{\sim}{\eta}}'=[\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \bar{y}] \qquad (4,\ 8)$$

と書くことができる。

以下の分析では，次の逆ウィッシャート分布の性質が繰り返し利用される。すなわち，$\underset{\sim}{\gamma}_1$ を，

$$\underset{\sim}{\gamma}_1=\begin{bmatrix}\gamma_{11}\\ \gamma_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_{21}/\sigma_{11}\\ \sigma_{31}/\sigma_{11}\end{bmatrix} \qquad (4,\ 9)$$

$\underset{\sim}{\chi}_2$を，

$$\underset{\sim}{\chi}_2=\begin{bmatrix}\gamma_{21}\\ \gamma_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_{31}/\sigma_{33}\\ \sigma_{32}/\sigma_{33}\end{bmatrix} \qquad (4,\ 10)$$

で示されるそれぞれ 2 × 1 のベクトルとすると$\underset{\sim}{\chi}_1$と$\underset{\sim}{\chi}_2$の周辺事後分布は，それぞれ t_3 [$\hat{\underset{\sim}{\chi}}_1$, $n^{-1}(n+\nu-2)^{-1}s^{*-1}_{11}$ $s^*_{22.1}$, $n+\nu-2$] と t_2 [$\hat{\underset{\sim}{\chi}}_2$, $n^{-1}(n+\nu-2)^{-1}s^{*-1}_{33}$ $s^*_{11.2}$, $n+\nu-2$] となることが知られている[2)]。ただし，

$$\hat{\underset{\sim}{\chi}}_1=\begin{bmatrix}s^*_{21}/s^*_{11}\\ s^*_{31}/s^*_{11}\end{bmatrix} \qquad (4,\ 11)$$

$$\hat{\underset{\sim}{\chi}}_2=\begin{bmatrix}s^*_{31}/s^*_{33}\\ s^*_{32}/s^*_{33}\end{bmatrix} \qquad (4,\ 12)$$

$$\underset{\sim}{S}^*_{22.1}=\begin{bmatrix}ns^*_{22} & ns^*_{23}\\ ns^*_{23} & ns^*_{33}\end{bmatrix}-(ns^*_{11})^{-1}\begin{bmatrix}ns^*_{21}\\ ns^*_{31}\end{bmatrix}\ [ns^*_{21}\ \ ns^*_{31}] \qquad (4,\ 13)$$

であって，かつ

$$\underset{\sim}{S}^*_{11.2}=\begin{bmatrix}ns^*_{11} & ns^*_{12}\\ ns^*_{21} & ns^*_{22}\end{bmatrix}-(ns^*_{33})^{-1}\begin{bmatrix}ns^*_{13}\\ ns^*_{23}\end{bmatrix}\ [ns^*_{13}\ \ ns^*_{23}] \qquad (4,\ 14)$$

であるものとする。さらに，行列$\underset{\sim}{\Sigma}$をベクトル[σ_{11}, σ_{21}, σ_{22}, σ_{31}, σ_{32}, σ_{33}] に引き延ばすと，n が大きいとき，このベクトルの事後分布は近似的に

$$E(\sigma_{kl})=s^*_{kl},\ k=1,\ 2,\ 3\quad l=1,\ 2,\ 3 \qquad (4,\ 15)$$

$$\mathrm{Var}(\sigma_{kk})=2\ s^{*2}_{kk}/n \qquad (4,\ 16)$$

$$\mathrm{Var}(\sigma_{kl})=(s^*_{kk}s^*_{ll}+s^{*2}_{kl})/n,\ \text{for}\ \ k\neq l \qquad (4,\ 17)$$

でかつ，

$$\mathrm{Cov}(\sigma_{kl},\ \sigma_{k'l'})=(2\ s^*_{kl}s^*_{k'l'}+ns^*_{kk'}s^*_{ll'}+ns^*_{kl'}s^*_{kl'})/n^2 \qquad (4,\ 18)$$

である多変量正規分布に従うことが知られている[5)]。

さて，関心下の母数は$\underset{\sim}{\eta}$と$\underset{\sim}{\Sigma}$ではなく，$\underset{\sim}{\beta}$と$\underset{\sim}{\Lambda}$に含まれる 9 つの母数であるが，(4, 2)と(4, 6)式から，

$$\beta_0=\sigma_{32}/\sigma_{31} \qquad (4,\ 19)$$

$$\tau_1=\sigma_{21}/\beta_0 \qquad (4,\ 20)$$

$$\beta=(\sigma_{31}/\sigma_{21})\ [\beta_0/(1+\beta_0)] \qquad (4,\ 21)$$

$$\phi_1=\sigma_{11}-\sigma_{21}/\beta_0 \qquad (4,\ 22)$$

$$\phi_2=\sigma_{22}-\sigma_{21}/\beta_0 \qquad (4,\ 23)$$

$$\phi_y=\sigma_{33}-\beta^2(1+\beta_0)^2\tau_1 \qquad (4,\ 24)$$

であること，および(4, 1)式と(4, 5)式から，

$$\mu_1=\eta_1 \qquad (4,\ 25)$$

$$\alpha_0=\eta_2-\beta_0\eta_1 \qquad (4,\ 26)$$

$$\alpha=\eta_3-\beta(\eta_1+\eta_2) \qquad (4,\ 27)$$

であることがわかる。また，

$$\tau=\sigma_{21}\ [(1+\beta_0)/\beta_0] \qquad (4,\ 28)$$

であって，かつ，

$$\begin{aligned}\phi_X&=\phi_1+\phi_2\\ &=\sigma_{11}+\sigma_{22}-\sigma_{21}\ [(1+\beta_0^2)/\beta_0]\end{aligned} \qquad (4,\ 29)$$

であることも容易に見出せる。

V. 事後分布

まず最初にβ_0の周辺事後分布をもとめる。(4, 10)式と(4, 19)式を用いて

$$\beta_0=\gamma_{22}/\gamma_{21} \qquad (5,\ 1)$$

と書くことができるので，β_0の周辺事後分布は 2 つの独立 t 変量 γ_{21} と γ_{22}，の比の分布であることがわかる。その確立密度関数は

$$p(\beta_0\,|\,Y)\propto\frac{b_0^{-q/2}}{b_1^{1/2}}\left\{b_2\ [1-2\ F(d)]-2\left(\frac{b_0}{qb_1}\right)F_1(d)\right\}$$

で与えられる。ただし，

$$q = n + \nu - 1$$

$$F(d) = \int_{-\infty}^{d} p(t)\,dt$$

$$F_1(d) = \int_{-\infty}^{d} tp(t)\,dt$$

$$d = -(qb_1/b_0)^{1/2} b_2$$

$$b_1 = a_{11} + 2\beta_0 a_{12} + \beta_0^2 a_{22}$$

$$b_2 = [\hat{\gamma}_{21} a_{11} + (\hat{\gamma}_{22} + \hat{\gamma}_{21}\beta_0) a_{12} + \beta_0 \hat{\gamma}_{22} a_{22}]/b_1$$

$$b_0 = 1 + 2\hat{\gamma}_{21}^2 a_{11} + 2\hat{\gamma}_{22}\hat{\gamma}_{21} a_{12} + \hat{\gamma}_{22}^2 a_{22} - b_1 b_2^2$$

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = n(n + \nu - 3) s_{33}^{*} s_{11.2}^{*-1}$$

であり，$p(t)$は自由度 q のステューデントの t 確率密度関数である。この分布は，t 比分布と呼ばれ，積率をもたないことが知られているが，電算機によるグラフやパーセント点およびモードのための等式などはすでに Press によって提示されている[11]。従って，β_0に関する確率計算は Press による結果や，また場合によっては通常の数値積分によって行なうことができる。

さらにこの t 比分布は正に Zellner[16]がモンテカルロ実験によってその性質を探索した分布であり，小標本においては標本理論的な接近法よりもベイズ流の接近法がより有益であると結論した分布でもある。

しかしながら，大標本の場合には最尤推定値 β_0 も正当化されるということに注意すべきであろう。このことを見るために，大標本のもとで$\underset{\sim}{\gamma_2}$の分布を二変量正規分布 $N_2(\hat{\underset{\sim}{\gamma_2}}, n^{-2} s_{33}^{*-1} s_{11.2}^{*})$で近似をさせてみよう。このとき，$\beta_0$の分布は２つの独立な正規変数の比の分布となり，正規近似を行なう方法が知られている[9]。すなわち，

$$\frac{\sqrt{a_{22}}\,(\hat{\gamma}_{21}\beta_0 - \hat{\gamma}_{22})}{\sqrt{1 + (a_{22}|\underset{\sim}{A}|^{-1/2}\beta_0 + a_{12}|\underset{\sim}{A}|^{-1/2})^2}}$$

の分布を標準正規分布で近似できることが知られている。従って，β_0の事後推定値は近似的に

$$\tilde{\beta}_0 = \hat{\gamma}_{22}/\hat{\gamma}_{21} = s_{32}^{*}/s_{31}^{*} \qquad (5,\ 2)$$

と書けることになり，$\tilde{\beta}_0$には事前情報が組み込まれているという点を除けば，(2，10)式で与えられる β_0の最尤推定値と $\tilde{\beta}_0$とが等しくなるということがわかる。いいかえれば，$(\underset{\sim}{\eta}, \underset{\sim}{\Sigma})$に対してばく然とした事前分布を仮定するならば，事後推定値 $\tilde{\beta}_0$は最尤推定値 $\hat{\beta}_0$に等しいということになる。

(4，15)式および(4，17)式を用いて σ_{21}の周辺事後分布は，正規分布 $N\{s_{21}^{*}, (s_{11}^{*} s_{22}^{*} + s_{221}^{*})^2/n\}$によって近似できるので，$\beta_0 = \tilde{\beta}_0$が与えられたときの τ の条件付事後分布は(4，20)式を用いて正規分布 $n\{s_{21}^{*}/\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_0^{-2}(s_{11}^{*} s_{22}^{*} + s_{221}^{*})^2/n\}$ によって近似できることになる。従って，τ の周辺事後分布は $p(\tau|\underset{\sim}{Y}, \beta_0)$に $p(\beta_0|\underset{\sim}{Y})$をかけ，$(\tau, \beta_0)$の同時分布から β_0を積分消去することによって得ることができる。

(4，19)式と(4，21)式から，

$$\beta = (\gamma_{12}/\gamma_{11})\,[\beta_0/(1 + \beta_0)] = \xi\,[\beta_0/(1 + \beta_0)] \qquad (5,\ 3)$$

と書くことができる。ただし，ξ は

$$\xi = \gamma_{12}/\gamma_{11} = \sigma_{31}/\sigma_{21} \qquad (5,\ 4)$$

と書ける t 比変量である。よって，$\beta_0 = \tilde{\beta}_0$と条件づけられたならば，$\beta$ は t 比変量 ξ と定数 $[\tilde{\beta}_0/(1 + \tilde{\beta}_0)]$ の積となり，その結果，$\beta_0 = \tilde{\beta}_0$という条件のもとで

$$\frac{\sqrt{c_{22}}\,[\hat{\gamma}_{11}\tilde{\beta}_0^{-1}(1 + \tilde{\beta}_0)\beta - \hat{\gamma}_{12}]}{\sqrt{1 + [c_{22}|\underset{\sim}{C}|^{-1/2}\tilde{\beta}_0^{-1}(1 + \tilde{\beta}_0)\beta + c_{12}|\underset{\sim}{C}|^{-1/2}]^2}}$$

の事後分布は標準正規分布で近似できる。ただし，

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = n^2 s_{11}^{*} s_{22.1}^{*-1}$$

である。β の周辺事後分析は，２つの t 比分布の確率密度関数 $p(\beta|\underset{\sim}{\gamma}, \beta_0)$と $p(\beta_0|\underset{\sim}{Y})$の積である$(\beta_0, \beta)$の同時分布から β_0を積分消去することによって得ることができる。

(4，24)式および(5，4)式から，

$$\phi_y = \sigma_{33} - \sigma_{32}\xi \qquad (5,\ 5)$$

と書くことができ，このことと(4，15)式(4，16)式から $\xi = \tilde{\xi}$ が与えられたときの ϕ_yの条件付事後分布は $N\{s_{33}^{*} - s_{32}^{*} s_{31}^{*}/s_{21}^{*}, 2 s_{33}^{*2}/n + \tilde{\xi}^2(s_{22}^{*} s_{33}^{*} + s_{32}^{*2})/n - 4 s_{33}^{*} s_{32}^{*}\tilde{\xi}/n\}$ ただし，

$$\tilde{\xi}=\hat{\gamma}_{12}/\hat{\gamma}_{11}=s^*_{31}/s^*_{21} \qquad (5,\ 6)$$

によって近似できることになる。ϕ_yの周辺事後分布は，正規分布の密度関数と t 比分布の密度関数の積で表される$(\xi,\ \phi_y)$の同時事後分布から ξ を積分消去することによって得ることができる。

(4，22)式と(4，33)式から，$\beta_0=\tilde{\beta}_0$が与えられたときの ϕ_1と ϕ_2の条件付事後分布は，それぞれ近似的に

$$\mathrm{N}\ \{s^*_{11}-s^*_{21}/\tilde{\beta}_0,\ \ 2\ s^{*2}_{11}/n+\tilde{\beta}_0^{-2}$$
$$(s^*_{11}s^*_{22}+s^{*2}_{21})/n-4\ \tilde{\beta}_0^{-1}s^*_{11}s^*_{21}/n\}$$

および

$$\mathrm{N}\ \{s^*_{22}-s^*_{21}\tilde{\beta}_0,\ \ 2\ s^{*2}_{22}/n+\tilde{\beta}_0^{-2}$$
$$(s^*_{11}s^*_{22}+s^{*2}_{21})/n-4\ \tilde{\beta}_0 s^*_{22}s^*_{21}/n\}$$

に従うことがわかる。さらに，(4，29)式にもとづいて $\beta_0=\widetilde{\beta}_0$が与えられたときの ϕ_xの条件付事後分布は

$$E(\phi_x\,|\,\beta_0=\tilde{\beta}_0)=s^*_{11}+s^*_{22}-s^*_{21}\ [(1+\tilde{\beta}_0^2)/\tilde{\beta}_0]$$

および

$$\begin{aligned}Var(\phi_x\,|\,\beta_0=\tilde{\beta}_0)=\ &2\ (s^{*2}_{11}+s^{*2}_{22})/n+\\ &s^{*2}_{21}(1+\tilde{\beta}_0^2)^2/\tilde{\beta}_0^2\\ &+s^*_{11}s^*_{22}\ [(1+\tilde{\beta}_0^2)^2/\tilde{\beta}_0^2+4/n^2\\ &-4\ s^*_{21}(s^*_{11}+s^*_{22})/n]\end{aligned}$$

である正規分布に従うことを示すのは容易である。ϕ_1，ϕ_2，および ϕ_xのそれぞれの周辺事後密度は，$(\phi_1,\ \beta_0)$，$(\phi_2,\ \beta_0)$，および$(\phi_x,\ \beta_0)$の同時密度から β_0を積分消去することによって得ることができる。

$\underset{\sim}{\eta}$の事後分布は多変量 t 分布であるから，

$$\begin{bmatrix}\mu\\ \alpha_0\\ \alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -\tilde{\beta} & 1 & 0\\ -\tilde{\beta} & -\tilde{\beta} & 1\end{bmatrix}\underset{\sim}{\eta} \qquad (5,\ 7)$$

でかつ，

$$\widetilde{\beta}=s^*_{31}s^*_{21}\ [\hat{\beta}_0/(1+\hat{\beta}_0)]$$

である線型変換を用いて，$\beta_0=\widetilde{\beta}_0$および $\beta=\widetilde{\beta}$が与えられたときの$(\mu,\ \alpha_0,\ \alpha)$の条件付事後分布を見出すことは容易である。その結果として

$$\frac{\mu-\bar{x}_1}{\sqrt{s^*_{11}/(n+\nu-3)}}$$

の周辺事後分布は，自由度$(n+\nu-3)$の t 分布であること，および，

$$\frac{\alpha_0-(\bar{x}_2-\tilde{\beta}_0\bar{x}_1)}{\sqrt{(\tilde{\beta}_0^2 s^*_{11}-2\ \tilde{\beta}_0 s^*_{12}+s^*_{22})/(n+\nu-3)}}$$

の $\beta_0=\tilde{\beta}_0$が与えられたときの条件付事後分布は，自由度$(n+\nu-3)$の t 分布であることを得る。α_0の周辺事後分布は，t 分布の確率密度と t 比分布の確率密度の積である$(\alpha_0,\ \beta_0)$の同時密度から β_0を積分消去することによって得ることができる。さらに，

$$\frac{\alpha-\ [\bar{y}-\tilde{\beta}\bar{x}]}{\sqrt{[\tilde{\beta}^2(s^*_{11}+2\ s^*_{12}+s^*_{22})-2\ \tilde{\beta}(s^*_{31}+s^*_{32})+s^*_{32}]/(n+\nu-3)}}$$

の $\beta_0=\widetilde{\beta}_0$が与えられたときの条件付事後分布は，自由度$(n+\nu-3)$の t 分布であることもわかる。α の周辺事後分布は，$(\alpha_0,\ \beta_0)$の同時事後分布から算出可能である。

VI. 真の得点と信頼性係数の条件付推定値

同時事後分布の密度関数に，母数のベイズ推定値を代入することによって，i 番目の受験者の真の得点の条件付事後分布が

$$\begin{aligned}&E(\theta_1\,|\,\mathrm{estimates})\\ &=\tilde{\theta}_1\\ &=\ \{x_{1i}/\tilde{\phi}_1+(\tilde{\beta}_0^2/\phi_2)(x_{2i}-\tilde{\alpha}_0)/\tilde{\beta}_0\\ &+\ [\tilde{\beta}_0^2(1+\tilde{\beta}_0)^2/\phi_y]\ [y_i-\tilde{\alpha}-\tilde{\alpha}_0\tilde{\beta}_0]/\tilde{\beta}(1+\tilde{\beta}_0)+\tilde{\mu}/\tilde{\tau}\}\\ &\{1/\tilde{\phi}_1+\tilde{\beta}_0^2/\tilde{\phi}_2+\tilde{\beta}^2(1+\tilde{\beta}_0)^2/\tilde{\phi}_y+1/\tilde{\tau}\}^{-1} \qquad (6,\ 1)\end{aligned}$$

および，

$$\begin{aligned}Var(\theta_i\,|\,\mathrm{estimates})=\ &1/\tilde{\phi}_1+\tilde{\beta}_0^2/\tilde{\phi}_2+\\ &\tilde{\beta}_0^2(1+\tilde{\beta}_0)^2/\tilde{\phi}_y+1/\tilde{\tau} \qquad (6,\ 2)\end{aligned}$$

をもつ正規な分布に従い，かつ θ_iと θ_j, $i \neq j$, はそれらの推定値が与えられたとき相互に独立であることがわかる。θ_iの事後平均については，(3，1)式から(3，3)式を

$$x_{1i}=\theta_i+e_{1i} \qquad (6,\ 3)$$

$$(x_{2i}-\alpha_0)/\beta_0=\theta_i+e_{2i} \qquad (6,\ 4)$$

および,

$$(y_i-\alpha-\alpha_0\beta)/\beta(1+\beta_0)=\theta_i+e_{yi} \qquad (6,\ 5)$$

と書き直すことによって，より理解を深めることができる。すなわち，θ_iはx_{1i}，$(x_{2i}-\tilde{\alpha}_0)/\tilde{\beta}_0$，$[y_i-\tilde{\alpha}-\widetilde{\alpha_0\beta_0}]/\tilde{\beta}(1+\beta_0)$，および$\mu$の重みづけ平均となっている。さらに，(6，9)式と(6，2)式から，もしτの事後推定値が0に近いならばθ_iをμで近似できることがわかる。また，$\tilde{\beta}_0$が0ならばx_{2i}の値はθ_iにとって無関係であり，同様に，$\tilde{\beta}$が0ならばy_iの値はθ_iにとって無関係であることもわかる。

さて，事前テストの信頼性係数ρ_{xx}'は

$$\begin{aligned}\rho_{xx}'&=(1+\beta_0)^2\tau/\ [\phi_x+(1+\beta_0)^2\tau]\\&=(1+\beta_0)^2/\ [\beta_0(\delta+2)]\end{aligned} \qquad (6,\ 6)$$

ただし,

$$\delta=(\sigma_{11}+\sigma_{22})/\sigma_{21} \qquad (6,\ 7)$$

と書くことができる。$(\sigma_{11}+\sigma_{22},\sigma_{23})$の同時事後分布に対して正規近似を用い，かつ$\delta$に対してMarsagliaの正規近似を用いることによって,

$$\frac{\delta s^*_{21}/\sqrt{k_{11}}-(s^*_{11}+s^*_{22})/\sqrt{k_{11}}}{\sqrt{1+(\delta|\underset{\sim}{K}|^{1/2}/k_{11}-k_{12}/k_{11})^2}}$$

の事後分布は標準正規分布で近似できることになる。ただし，$\tilde{K}$は$(\sigma_{11}+\sigma_{22},\ \sigma_{23})$の分散共分散行列であり,

$$\underset{\sim}{K}=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix} \qquad (6,\ 8)$$

$$k_{11}=2(s^{*2}_{11}+s^{*2}_{22})/n+4(s^*_{11}s^*_{22}+ns^{*2}_{22})/n^2 \qquad (6,\ 9)$$

$$\begin{aligned}k_{12}&=k_{21}\\&=2s^*_{21}(s^*_{11}+s^*_{22})\end{aligned} \qquad (6,\ 10)$$

および,

$$k_{22}=(s^*_{11}s^*_{22}+s^{*2}_{21})/n \qquad (6,\ 11)$$

で与えられる。従って，$\beta_0=\tilde{\beta}_0$が与えられたとき

$$\frac{\dfrac{s^*_{21}}{\sqrt{k_{11}}}\left[\dfrac{(1+\tilde{\beta}_0)^2}{\tilde{\beta}_0\rho_{xx}'}-2\right]-\dfrac{(s^*_{11}+s^*_{22})}{\sqrt{k_{11}}}}{\sqrt{1+\left\{\dfrac{|\underset{\sim}{H}|^{1/2}}{k_{11}}\left[\dfrac{(1+\tilde{\beta}_0)^2}{\tilde{\beta}_0\rho_{xx}'}+2-\dfrac{k_{12}}{k_{11}}\right]\right\}^2}}$$

の条件付事後分布は標準正規分布である。いいかえれば，$\beta_0=\tilde{\beta}_0$が与えられたときのρ_{xx}'の条件付事後推定値は,

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_{xx}'&=\frac{(1+\tilde{\beta}_0)^2s^*_{21}}{\tilde{\beta}_0(s^*_{11}+2s^*_{12}+s^*_{22})}\\&=s^*_{xy}/(\tilde{\beta}s^*_{xx})\end{aligned} \qquad (6,\ 12)$$

で与えられる。ただし,

$$s^*_{xx}=s^*_{11}+2s^*_{12}+s^*_{22} \qquad (6,\ 13)$$

および,

$$s^*_{xy}=s^*_{13}+s^*_{23} \qquad (6,\ 14)$$

である，ρ_{YY}'に関しては,

$$\begin{aligned}\rho_{yy}'&=\beta^2(1+\beta_0)^2\tau/\sigma_{33}\\&=(\sigma_{32}/\sigma_{33})(\sigma_{31}/\sigma_{21})\\&=\gamma_{22}\xi\end{aligned} \qquad (6,\ 15)$$

と書き直すことができ，ρ_{YY}'がt変量とt比変量の積であることがわかる。よって，$\xi=\tilde{\xi}$が与えられたとき,

$$\frac{\rho_{yy}'-\tilde{\rho}_{yy}'}{\sqrt{(n+\nu-2)^{-1}s^{*-1}_{33}(s^*_{22}-s^{*-1}_{33}s^{*2}_{32})}}$$

の条件付事後分布は，自由度$(n+\nu-3)$のt分布となる。ただし,

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_{yy}'&=s^*_{32}s^*_{31}/(s^*_{33}s^*_{21})\\&=\tilde{\beta}s^*_{xy}/s^*_{yy}\end{aligned} \qquad (6,\ 16)$$

であり,

$$s^*_{yy}=s^*_{33}$$

である。

Ⅶ．まとめと討議

まず最初に，前の 2 節で得られた結果を要約しよう。大標本のもとで，母数の周辺または条件付の事後推定値は，以下の通りである。すなわち，

$$\tilde{\beta}_0 = s^*_{2y}/s^*_{1y}$$
$$\tilde{\beta} = s^*_{1y}s^*_{2y}/(s^*_{12}s^*_{xy}),\ \text{given}\tilde{\beta}_0$$
$$\tilde{\tau} = s^*_{12}s^*_{1y}/s^*_{2y},\ \text{given}\tilde{\beta}_0$$
$$\tilde{\phi}_x = s^*_{11} + s^*_{22} - s^*_{12}(s^*_{1y}/s^*_{2y} + s^*_{2y}/s^*_{1y}),\ \text{given}\tilde{\beta}_0$$
$$\tilde{\phi}_y = s^*_{yy} - s^*_{1y}s^*_{2y}/s^*_{12},\ \text{given}\tilde{\xi},\ \text{ただし}\ \xi = \sigma_{1y}/\sigma_{12}$$
$$\tilde{\mu} = \bar{x}_1$$
$$\tilde{\alpha}_0 = \bar{x}_2 - \tilde{\beta}_0\bar{x}_1,\ \text{given}\tilde{\beta}_0$$

および，

$$\tilde{\alpha} = \bar{y} - \tilde{\rho}\bar{x},\ \text{given}\tilde{\beta}$$

ただし，

$$\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$$

（2， 8）式から（2，16）式で与えられている最尤推定値とこれらのベイズ推定値との類似性に気がつく。いいかえれば，ばく然とした事前分布を仮定したときには，得られるベイズ推定値は最尤推定値に全く等しい。上記のベイズ推定値が全て与えられたときには，i 番目の受験者の真の得点の条件付ベイズ推定値は，

$$\tilde{\theta}_i = \frac{\dfrac{x_{1i}}{\tilde{\phi}_1} + \dfrac{\tilde{\beta}_0^2}{\tilde{\phi}_1}\left[\dfrac{x_{2i} - \tilde{\alpha}_0}{\tilde{\beta}_0}\right] + \dfrac{\hat{\beta}^2(1+\beta_0)^2}{\tilde{\phi}_y}\left[\dfrac{y_i - (\tilde{\alpha} + \tilde{\alpha}_0\tilde{\beta}_0)}{\tilde{\beta}(1+\tilde{\beta}_0)}\right] + \dfrac{\tilde{u}_1}{\tilde{\tau}_1}}{\dfrac{1}{\phi_1} + \dfrac{\tilde{\beta}_0^2}{\tilde{\phi}_2} + \dfrac{\hat{\beta}^2(1+\beta_0)^2}{\tilde{\phi}_y} + \dfrac{1}{\tilde{\tau}}}$$

で与えられる。さらに，信頼性係数の条件付ベイズ推定値は

$$\tilde{\rho}_{XX'} = s^*_{xy}/(\hat{\beta}s^*_{xx}),\ \text{given}\tilde{\beta}_0$$

および，

$$\tilde{\rho}_{YY'} = \hat{\beta}s^*_{xy}/s^*_{yy},\ \text{given}\tilde{\xi}$$

で与えられる。これらの結果は，基本的には逆ウィッシャート分布に対する正規近似と正規分布の比に対する Marsaglia の正規近似に依存している。しかしながら，母数に対する正確な事後分布は，とくに t 比分布における数値積分によって得ることが可能であり，その労力は Zellner[16]が示したように，小標本のときにはとくに，十分報いられるはずである。

引用文献

1) Anderson,T.W. (1984). An introduction to Multivariate statistical andlysis, aecond ed., New York : Wiley.
2) Box,G.E.P. and Tiao,G.C. (1973). Bayesian inference in statistical analysis. Reading, Mass. : Addison-Wesley.
3) Gulliksen, H. (1950). Theory of Mental tests. New York : Wiley.
4) Haebara,T. (1985). On "Regression between true scores", short report, Japanese Psychological Research, 27. 173-175.
5) Kaufman,G.M. (1967). Some Bayesian moment formulae. Report No. 6710. Heverlee, Belgium : Center for Operations Research and Econometrics, Vatholic University of Louvain.
6) Kendall,M.G. and Stuart, A. (1979). The advanced theory of statistics, Vol. 2. London : Charles Griffin.
7) Lord,F.M. and Novick,M.R. (1968). Statistical theories of mental test scores. Reading, Mass. : Addison-Wesley.
8) Madansky,A. (1959). The fitting of straight lines when both variables are subject to error. Journal of the American Statistical Association, 54, 173-205.
9) Marsaglia,G. (1965). Ratios of normal variables and ratios of sums of uniform variables. Journal of the American Statistical Association, 60, 193-204.
10) Nunnaly,J.C. (1978). Psychometric theory. New York : McGraw-Hill.
11) Press,S.J. (1969). The t-ratio distribution. Journal of the American Statistical Association, 64, 242-252.
12) Press,S.J. (1972). Applied multivariate analysis. New York : Holt, Rinehart and Winston.
13) Reiersol,O. (1950). Identifiability of a linear relation between variables which are subject to error. Econometrika, 18, 375-389.
14) Thorndike,R.L. (1982). Applied psychometrics. Boston : Houghton Mifflin.
15) Wantanabe,H. (1984). Regression between true scores. Japanese Psychological Research, 26, 154-158.
16) Zellner,A. (1971). An introduction to Bayesian inference in econometrics. New York : John Wiley.