

成人の除算手続きの推論における数学的知識の影響

東京大学教育心理学研究室 馬 場 久 志

The Influence of Mathematical Knowledge on the Inference about Division Procedure by Adults

Hisashi BABA

Ten students were given a task to find the division procedure on a hand-operated calculator. Their acts and verbal protocols in the task were recorded on VTR.

The procedure in question is based on repeated subtractions, and is very similar to written calculation in many ways. In spite of the similarity of their procedures, there is two reasons for which the task will be hard for adult subjects to solve. 1. Students think that dividing equally is the dominant aspect as their 'division-concept', so this thinking will interfere with their finding out the procedures of repeated subtraction. 2. Students have a kind of 'belief' about the function of a calculator, and they are apt to depend on it.

Results showed difficulties for many of them. Moreover their characteristics of inferences, for example, avoidance for subtractions, and errors of columns, are consistent with two hypotheses of 'division-concepts' and 'belief' in calculators. Therefore it has revealed that the procedural learning cannot be improved even if one possesses a similar procedure, when one has opposite concepts. And it suggests the importance to consider the procedural learning in relation to the relevant concepts possessed by learners. Furthermore, it will become necessary to clarify the aspect of learning of new knowledge as the transformational process of a known concepts.

I 問題と目的

ある操作を構成する手続きの学習については、その操作に対する概念の形成との関係で、いくつかの問題が生じる。その第一は、手続きのみの機械的学習の場合である。複雑な機械装置の操作法のみを学習することや、公式を単に暗記する学習などがこれにあたり、学習した手続きを単純に適用できない場面が生じると、未学習時と同然の状態に陥る。これは概念に基づく情報を利用できないという、概念の影響という点からは消極的な意味での問題である。

これに対して第二の、より積極的な関係ゆえに問題となるのは、既有概念が、新手続き学習に対立する内容となっている場合である。教育場面の学習で特に問題となるこの場合については、これまで誤概念のために正しい手続きの学習が妨害される事例が多く研究されてきた。

誤った手続きにおける規則性に着目した一連のバグ研究は、次の課題としてバグの除去、すなわち正しい手続

きの学習研究を導いた。例えば Resnick (1981, 1983) は、筆算での減算をブロックの操作と対応づけて教える mapping instruction の技法を用いて、正しい計算手続きの定着を図った。この技法はわが国ではタイル(半具体物)を用いた教授として広く行われているものでもある。しかしブロックの操作と正手続きとの対応づけによる Resnick の試みは、必ずしも成功していない (Resnick, 1987)。その理由は、誤手続きに伴う概念を変化させるものにならなかったためであると考えられる。このことについては、一旦形成された概念は変化し難いとするいくつかの研究がある。

その一つ、Rosnick & Clement (1980) は、教授 (P) 1人に対し学生 (S) 6人という関係がしばしば $P=6S$ と表されてしまい、様々な教授プログラムを実施してもなお、この逆転誤概念は修正されなかったと報告している。また disessa (1982) は、物体の運動に対し既習であるはずの運動力学を無視した原始的な予測がしばしば生じると述べている。

このように第二の場合については主に誤概念に関して

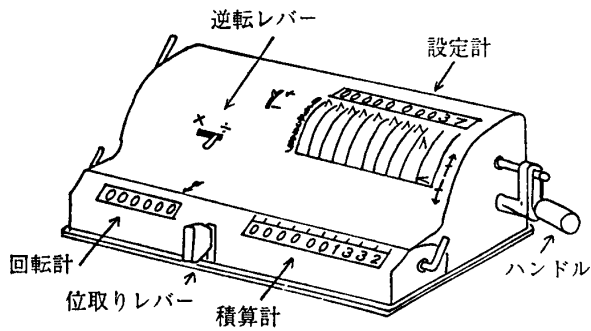


図1 手動計算機

検討されているにとどまらず、正・誤にかかわらず、既
有の概念が新しい手続きの学習に対立しながら、学習を
経て変化することを含めた学習過程を明らかにすることは、
意義が大きい。新しい概念の導入は慎重になされね
ばならないという考えから、Behrら(1983)は、有理
数概念獲得のための手がかりの導入について、①はじめ
は知覚的に混乱を与える手がかりの影響は最小にとどめ
ること、②後に、徐々に混乱を与える手がかりを導入す
る、③混乱を与える手がかりの克服が、安定した概念を
形成し、概念は内面化される、と述べ、新概念の獲得過
程を示している。この定式は示唆に富むが既有的概念と
の関係という見地からは言及されていず、知覚的な混乱
との関係にとどまる。

そこでまず本研究は、容易に獲得されるべき手続き学
習においてさえ、関連する既有的概念が対立して存在す
るときには困難が生じることを明らかにする。そのため
に、手動計算機を用い、成人に一般的と考えられる除法
概念や、計算機操作へのある「信頼」が、既有的概念と
して、除算手続き推論課題での新手続きの発見にいか
に影響するかを検討する。

この手動計算機(図1)は、右側のハンドルを前後に
回転させることによりその回転数を左下欄(以下回転
計)に、また上部に設定した数値(設定値)を右下欄
(積算計)にそれぞれ加・減する。加・減の切り替えは、
積算計に対してはハンドルを時計回りに回すと加算、逆
に回すと減算となり、回転計に対してはすぐ上にある逆
転レバー(×÷の表示がある)を×表示側にするると積算
計への加算(減算)回転数に対し正(負)に、÷表示側
にするとその逆に減算(加算)に対し正(負)に回転数
を計上する。設定計へは、各桁毎のレバーを動かすこ
とにより数値を設定できる。数値の解除・クリアーは、各
計の横にある小レバーを動かすことでできる。また、下
部は左右に動くので、加減する位を選択できる。この他
ハンドルに付随するだけの+-レバー、加算方向に
“ADD.-MULT.”、減算方向に“DIV.-SUBT.”の文字と

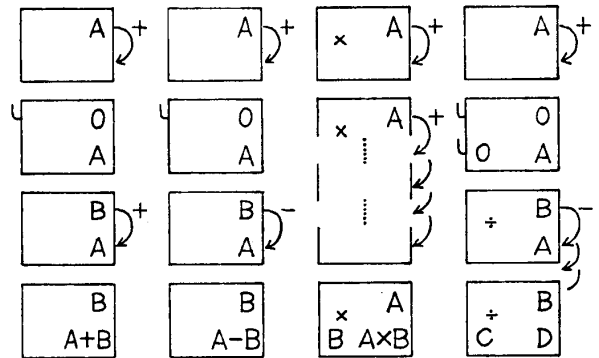


図2 四則計算手続き

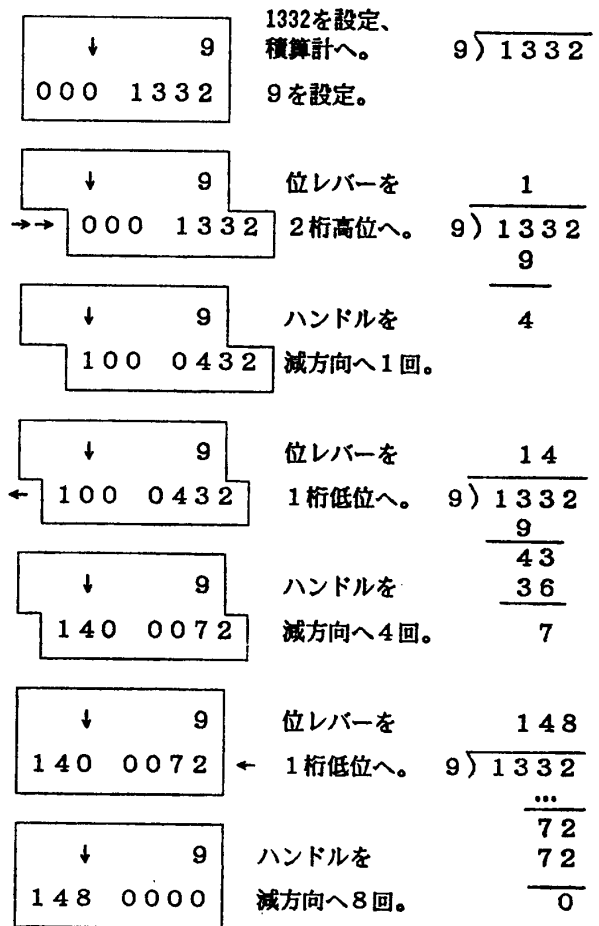


図3 計算機と筆算での1332÷9の手順

矢印が目印に表示されている。かくしてこの計算機は図
2に示すとおり四則計算が可能である。特に除算は、
減算の繰り返し回数による上、位取りを利用できるの
で、筆算とよく似た手続きをとる。(図3)

したがって、学校算数で除法を学習し、筆算による除
算に慣れている一般の成人には、この計算機を用いた除
算の手続きはごく容易に獲得できるべきである。

しかし、筆算との類似性にもかかわらず、除算の手續

きの発見を課すことは、被験者にとって相当困難を生じると予想される。何故なら、第一に除法の概念は、被除数を直接除数で「分割」「等分」するあるいは直接乗法との逆関係を利用すると考えるものが一般的で自覚されやすく、筆算のように被除数を十進法を基礎に分解しながらそこに含まれる除数を考える手順とは異質である上に、筆算は半ば自動化された手続きとして定着しているので一層想起されにくくなっていると考えられるからである。また第二に、日常用いる「電卓」等の計算手段が四則いずれも2数の入力と等号キーで求答できたり、記憶上の乗算「九九表」から直接求答できたりする経験のために、他の計算特に加減算とはまったく独立した非現実的除算機構を想定しがちであり、論理的推論を妨げることが考えられるためである。

以上より、本論では手続きの発見が困難であることを示し、さらにそこで推論上の特徴を分析することにより、困難要因としての既有概念との関連を明らかにすることを目的とする。

II 方法

被験者： 教育学部大学院生、学生 10名。

手続き： 個別面接実験。

材料： 「タイガー計算機」(図1)。これは、19世紀後期に開発された Odhner 型計算機をモデルに大本寅治郎が1923年に発表、その後電子計算機の普及までわが国で広く使われた手動式計算機である(鈴木, 1967)。

教示： 四則計算だけができる実用品であることを告げ、しばらく触れて動作部位を被験者が自ら見つけるよう誘導する。続いて改めて動作部位のすべてを確認するが、機能については数値のクリアの仕方以外は伝えない。次に加、減算の手続きを口頭で与えて実行させ、再度くり返して定着を図る。以上の後に、除算手続きの発見課題を課す。課題は $1332 \div 9$ 6名、 $1332 \div 37$ 4名。(結果のちがいは特に見られない) 約12分経過して被験者の動作が途切れたところで中断し、乗算を課す。(加減算の際には使わなかった回転計の機能の確認を確認するため) 再び除算課題を試みさせるが、短時間経過の後、被験者の申し出または動作の断絶により終了する。

事後に、各レバーの動き、より楽な手続きの予想、答の表示欄位置予測、除算についてのイメージなどを尋ねる。全体で25~30分を要した。動作及び発話プロトコルはVTRで記録された。

III 結果

A 課題の達成状況と失敗

本課題の達成状況を概観し、困難であったものに対しその特徴を抽出する。

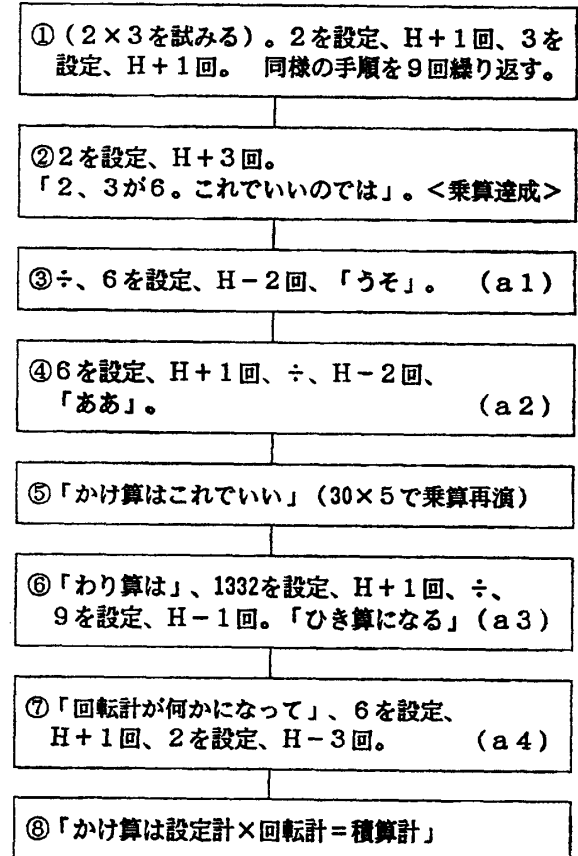
除算手続きを発見したものは3名だが、位取りレバーも使用して合理的に達成した者はそのうち2名にすぎない。他の7名のうち1名は乗算後に達成した。残りの6名は終了時までには達成しなかった。

各被験者の動作及び発話プロトコルは、動作が意図的になされているという前提に立てば、探索内容をかなり明確に示している。ただし発話プロトコル量は全般に不十分なものであった。結果の分析のために、計算機の各表示欄値も含めた表を作成し、さらに一連の操作をブロックとして探索の流れを図示した。図4は、各被験者についてさらに簡略に示したものである。

図4 各被験者の反応概略

設定：設定計へ入力、 $\times \div$ ：逆転レバーの位置
 Hを+(-)：ハンドルを加(減)算方向へ回す
 位レバー+(-)：位取りレバーを上(下)位桁へ

被験者A <未達成> ①②乗算、③④除算失敗、
 ⑤乗算確認、⑥除算失敗、⑦除算看過、
 ⑧⑨乗算で代用。



⑨9を設定、H+へ回しながら、
「これを何回回したら1332になるか」

被験者B<未達成> ①逆転レバーに着目・失敗、
②③④除算失敗、⑤位レバーに着目・失敗、
⑥除算失敗、⑦試行的回転

①÷、1332を設定、H+1回、
9を設定、H+1回。「÷レバーは関係ない」

②6を設定、H+1回、2を設定、H-1回。
「これはただのひき算」 (b1)

③×、6を設定、H+1回、÷、
3を設定、H-1回。「ひき算」 (b2)

④12、2で同様の操作。 (b3)

⑤12を設定、H+1回。位レバーを最大値に。
2を設定、H-1回。 (b4)

⑥×、12を設定、H+1回、÷、2を設定、
H-1回、「ひき算になるから」 (b5)

⑦12を設定、H-1回。

被験者C<未達成・後に達成> ①②試行的回転、
③④乗算課題、⑤除算方針、⑥逆転レバー
ミス、⑦除算達成

①1332を設定、Hを最大+6回、-3回の範囲で
+-に何度も回す。位レバーも左右。

②11、9、44、55を設定し、同様に+-に回す。

③<乗算は位レバーを用いずに達成>

④「たし算とやり方は全く変わるのか」(c1)
「何かの操作でチン!と答が出ないか」(c2)

⑤「1332の中に9がいくつあるか」
「1332から9をひきつづければいい」

⑥×のまま、9をひいて、「まちがえた」(2回)

⑦÷、1332を設定、H-1回、+2回。
回転計クリア。9を設定、「ひき算」、
Hを-へ。 <除算達成>

被験者D<未達成> ①②試行的回転、③乗算達成、
④除算失敗、⑤試行的回転、⑥乗算課題達成・
逆転レバー利用開始、⑦除算失敗

①1332、他3数値を設定、H+1回。
「ここだ。どうやって数字が出るか」

②1332、他2数値を設定、H+-1回。
位レバーを左右。(逆転レバーを動かさず)

③1332を設定、H+2回、位を+1桁、H+1回、
「あっかけ算」 <乗算達成>

④1332を設定、H-+1回。1332を設定、H+1回
9を設定、H-1回、「あれ」。H-2回(d1)

⑤9を設定、H+1回、続いて+2回。
1332を設定、位取りレバーを左右。

⑥<乗算を位レバーを利用して達成>
逆転レバーにつき教示、÷

⑦1332を設定、H-1回、「これ(積算計)は？」
1332を設定、H+1回、「何でここ(積算計)」
同様の反応が続く (d2)

被験者E<達成> ①無関係操作は1箇所のみで達成

①1332を設定、H+1回。÷。
位取りレバーを左右、+1桁。
37を設定、回転計クリア、H-3回。
位取りレバーを-1桁。37を設定、H-6回。
「36」。 <除算達成>

被験者F<未達成> ①②③除算失敗、④試行的回転、
⑤乗算課題達成、⑥除算失敗

①1332を設定、H-1回、37を設定、H+1回。
「37のわけはない」。 (f1)

②同様のことを-37として2回くり返す。
「ひき算、おかしいな」 (f2)

③1332を設定、H + 1回、37を設定、H - 1回。
中途での中断も含め3回くり返す。(f 3)

④12を設定、H - 1回、×、5を設定、H + 1回。
「うーん」。

⑤<乗算を位レバーを使わずに達成>

⑥「じゃあ逆にやればいいのかなあ」
1332を設定、Hを+-に1回、+1回。
「やっぱりわからない」(f 4)

被験者G<未達成> ①②③除算失敗、④⑤回転計に着目、⑥乗算課題達成、⑦⑧除算失敗

①1332を設定、H + 1回、÷、37を設定、H - 1回
「ひき算」、H - 1回、「だめ」。(g 1)

②「37を37回わる」「37回ひくとだめか」(g 2)

③1332を設定、H + 1回。位を+2桁。
37を設定、H - 1回、「あれ」。(g 3)

④「 $1332 = 37 \times x$ 」と筆記。
「ここ(回転計)が37としていいのでは」。

⑤1332を設定、H + 1回、10を設定、H - 1回。
「これ(設定)×これ(回転)が積算を指し
「ひくわけでしょ」。「2乗してひく?」
(g 4)

⑥<乗算を位レバーを使わずに達成>

⑦「じゃあわり算は回した回数だけ引く」。
1532(誤値)を設定、H + 1回、÷、37を設定、
H - 36回。「37回ひいても合わない」
「xを37回ひかなければ」(g 5)

⑧1332を設定、H + 1回、37を設定、H - 38回。
「37だよ」。「まさか26と読むの?」(g 6)

被験者H<位レバーは使用せず達成> ①除算達成

①1332を設定、÷、H + 1回。回転計クリア。
37を設定、H + 1回、-1回、+8回、-44回。
「うーん」。「今のは一つのやり方だと思う」
<除算達成>

被験者I<未達成> ①②③④試行的回転、⑤⑥逆算として乗算達成、⑦除算失敗、⑧乗算課題達成

①1332を設定、÷、H + 1回。
「9999、何だこれ(回転計)は」。

②位レバーを左右。Hを最大-14回、+4回の
範囲で+-に何度も回す。

③4、0、2を設定、Hを+-に何度も回す。

④1332を設定、×、1を設定、
Hを+-に何度も回す。×÷をくり返す。

⑤ $1332 \div 9 = 148$ の筆算を記す。

⑥148を設定、×、H + 4回、-5回、+1回。
位を+1桁、H + 1回。「10」
位を-1桁、H + 1回。 <乗算達成>

⑦÷、1332を設定、H - 9回。
Hを+-に回す。(i 1)

⑧<乗算を位レバーを利用して達成>

被験者J<達成> ①除算失敗、②試行的回転、③除算
回転手順達成、④⑤逆転レバーを修正し除算達成

①1332を設定、H + 1回、÷、
9を設定、H - 1回、+1回。

②×、位を+1桁。3を設定、H + 1回、-1回、
位を-1桁。÷。9を設定、H + 1回、-1回。

③位を+2桁。9を設定、H + 1回、-1回。
H - 1回、位を-1桁、H - 4回、位を-1桁、
H - 4回、「よしよし」。(半ば達成)

④改めて試みるが逆転レバー×に気づかず失敗。

⑤再試行。回転計を指し「おかしい」。÷、×、
「そうか」、÷。H - 1回、位を-1桁、
H - 4回、位を-1桁、H - 8回。 <除算達成>

まず成功者については、ここに示した被験者 D, E は達成した手続きの理由を筆算の原理を用いて説明した。また累減のみによっていた H は、筆算を課したところ、位取りレバーを用いて除算を行うことができた。このことから、筆算原理は計算機の除算手続きと類似し、学習者にとっての根拠となり得ることが示される。

ところで本課題に失敗する原因としては、計算機の動作部位間の関連知識不足が推論利用情報を限定してしまう可能性がまず検討されなければならない。事前の動作部位確認及び加・減算の経験により、設定値入力法、ハンドル回転に伴い設定値が積算に累加・減されること及びその他の動作箇所も何らかの規則性をもつことは明らかとなり得る。さらに除算達成に必要な知識は、ハンドル回転と回転計値変化の方向と値についてである。この、事前の知識及び発見されるべき知識については、課題遂行中の行為や乗算過程における利用法及び事後説明から調べられた。表 1 に示すとおりである。

その結果、3名を除く被験者が、前提となる設定計、積算計へのアプローチはもちろんのこと、回転計への必要な知識を獲得、利用している。3名中の回転計への加減を逆転する×÷レバーを動かすことのできなかつた 1 名には、途中で教示を与え使わせたが、その後も達成には至らなかった。残る 2 名は、当該知識の有無が確認できなかつたが、1名は難なく除算を達成しているので問題とはならない。一方、位取りレバーは、5名が触れてはみたものの利用し得なかつたが、これは課題の達成に不可欠なものではない。

以上より推論上必要な知識が最終的に欠落したままの可能性のすてきれない被験者はたかだか B だけであり、全体としては最後まで達成に至らなかつた推論の特徴をもつばら推論遂行上の合理性の問題として検討することができる。図 4 に示された被験者の反応から、各々の失

表 1 課題達成と各部位の利用

被験者	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
除数	÷9	÷9	÷9	÷9	÷37	÷37	÷37	÷37	÷9	÷9
除算達成	×	×	×	×	◎	×	×	◎◎	×	◎
設定計利用	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
積算計利用	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
回逆転	○	○	○	×	?	○	○	○	○	○
知転 回転数	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
積計 増・減	○	?	乗算後	×	?	○	○	○	○	○
乗算達成	○	-	○	◎	-	○	○	-	◎	-
位取レバ利用				乗算のみ ○			筆算後 乗算のみ ○			

除算・乗算達成 (位取りレバー不使用○/利用◎)
 回転計への知識 (逆転レバーを切り替えられること/ハンドル回転数が算入されること/回転方向に加・減されること)

敗箇所を次のように考えることができる。

- A 乗算との逆対応の誤認 (a1) (a2),
正手続きの中断 (a3),
正手続きの看過 (a4)
- B. 正手続きの中断 (b1) (b2) (b3) (b5),
位取りレバーへの 2 数同時入力期待 (b4)
- C. 特殊な機能の期待 (c1) (c2)
- D. 正手続きの中断 (d1),
答表示位置の誤認 (d2)
- F. 被除数の入力失敗 (f1) (f2),
正手続きの中断 (f3),
乗算との逆対応の誤認 (f4)
- G. 正手続きの中断 (g1),
除数と商との混乱 (g2) (g5) (g6),
位取りレバー使用の失敗 (g3),
誤った一般化 (g4)
- I. 乗算との逆対応の誤認 (i1)

これらより、正手続きを除法の一部とはとらえ難いこと、乗法の逆関係が推論成功に結びつかないこと、加減乗算と同様の手順が影響すること、未知機能を予想することが、推論の失敗に関係のある可能性が示唆される。そしてこれらは、冒頭で「除概念」「計算機信頼」として想定した既有概念に含まれるものである。

B 二仮説に基づく結果の整理

したがって以下の仮説に基づき、課題での失敗を中心に結果を評価する (表 2)。

(1)「累減回数」でない除法概念の存在が、発見を妨げる。(a)除法には等分除、包含除の二種があり、一般には「分割する」「一あたり量を求める」等分除の方が、「いくつ分あるかを求める」包含除 (「累減回数」手続きはこちらに近い) よりも想起されやすいとされる。(b)また乗法の逆関係という側面も、乗法や「かけ算九九表」を基礎に安定している概念である。これはさらに「累減」

表 2 課題未達成者の反応特徴

未達成者	A	B(C)	D	F	G	I
除概念	(a)①減算回避 ②除数回減		A B	D F G	G	
	(b)乗算逆誤認			D		I
信頼	(c)答位置期待 (d)単操作期待		A B C	D F G	F G	

とは異なる。

(2)「計算機信頼」は、推論上の誤った選択肢を想定させることになる。(c)計算機の基本的構造や計算原理を知ってもなお、四則に共通の単純な入出力操作を予想させ推論を妨げる。すなわち加・減算あるいは乗算と同様の入、出力形態、つまり答表示欄の配置を予測する。(d)加・減原理以外の独特な機能を根拠となる原理を具体的に想定せずに期待する。

1. (a)①減算回避

正しい除算手続きは、被除数から除数をひき続け、その累減回数を、求める商とする。したがって被除数を設定計から積算計へと入力後、除数を設定値に入力しハンドルを反時計回りに回すことは、正しい手続きの一環である。しかしここで動作を中断してしまう被験者が多い。本課題開始約9分後の被験者Bのプロトコルを例に示す。

B:「12」。12を設定、ハンドルを+1回。「マイナス」。「それでこれをわり算」、逆転レバーを÷に。
「これが12」、積算計を指す。「わり算」。
回転計、設定計をクリア、「うん」。
位取りレバーに手をやり、「…(不明)…」。
2を設定、ハンドルを-1回。
「ひき算になるから」。

この手順はほぼ正しくBが目標とした $12 \div 2$ の最初の部分になっているが、同時に $12 - 2$ も全く同じ手続きとなっている。またハンドル付近の表示も“DIV.-SUBT.”となっている。そこで表示にしたがってハンドルを回したところ、1回転後の結果はもう一方の表示である減算になってしまったということになる。Bはこうした除数の1回減—中断という動作を、以前に異なる数値で3回くり返している。

同様のプロトコルは他の最終的な未達成者5名中4名にも見られた。

A:「ひき算になっちゃう、これじゃ」。

D:1332を設定、ハンドルを+1回。9を設定、ハンドルを-1回。「あれっ」。-1回、-1回。全てクリア

F:「ひき算、うーんおかしいなあ」。

G:「あっひき算になってしまう」

という除数の1回減算に伴う発話が、G以外は課題後半にも見られた。特にFには後半5分間に3回見られた。

②除数回の減算を想定した混乱

被験者Gは、当初から、

G:「37を37回わるんじゃだめ」

「37を37回ひくとだめか」

と、除数を商回数ひくという正しい手続きと除数回ひく

という手続きとを混同させている。乗算 1500×41 を、41回ハンドルを回すことで達成した後にも、

G:「じゃあわり算は回した回数だけひくってことなんですか」

と正しく指摘したにもかかわらず、

G:1532(数値誤認)を設定、ハンドルを+1回。

<÷>, 37を設定、ハンドルを-1回、

ハンドルを-35回。(回転値は37となる)

「やっぱり合いませんね、37回ひいても」

「そうだね、xを37回ひかなきゃいけないんだ」

(中略)

「1332わる」、1332を設定、ハンドルを+1回。

(中略)37を設定、ハンドルを-1回、

「うん?」

ハンドルを-36回、「うん」、-1回。

「37だよこれで」(回転値は37)

と、除数37を37回ひいてしまっている。

(b)乗算の逆操作関連の誤認

乗算は多くの被験者が自発的に数値を設定して行い、D、I2名が達成、A、C、F、G4名が位取りレバーは利用しなかったものの達成した。その後、4名が再度除算を試みたが、その際、被験者Gの失敗と似たような動作が、D、Iの2名にみられた。

D:1332を設定、ハンドルを-1回。

「これは?」(積算計を指さす)

全てクリア。1332を設定、ハンドルを+1回。

「何でここ(積算計)」。

これは、1332を入力後、ハンドルを乗算とは逆に回すことで積算計に答が求まると予想したものである。

I:1332を設定、逆転レバー÷を指さす。

ハンドルを-1回、+1回、(略)-1回、-8回。

とした後、動作を中断した。事後の報告では、「かけ算でこれ(逆転レバー)を×にしたときと同じ方法で、これを÷の時にやればわり算になるのかなと思ったんですけどならなかった」と述べた。

これらは、乗算の手続きが被乗数を設定計に入力後ハンドルを乗数回だけ回すことから、単にハンドル回転方向を逆にして除数回だけ回すことで商が求まるかと推論したものである。また被験者Fも乗算後、「じゃあ逆にやればいいのかなあ」と再試行を行ったが、結局ハンドルを前・後に1回転ずつすることを2度行ったのみで中断した。

2. (c)①加減乗算と同じ答位置の予想

加減乗算はいずれも積算計に答が出力されるが、除算のみ回転計に答が表される特徴をもつ。だが最終的に達

成できなかった6名中3名は加減乗算と同様積算計に答を求めた。例えばDは前項で述べたように、乗算達成後に行った動作の中で積算計に答を求めた。Fは終始設定計から積算計へ2数の入力を試みたが、事後の報告でも「わり算はここ(設定計)にわられる数がきて、こっち(回転計)にわる数がきて、答(積算計)と思います」と述べている。Gは「これ(設定値)かけるこれ(回転値)が」と原理の一部を指摘しながらも、最終段階で積算計の値を答として読みとろうとしている。この3名とも乗算は達成しており、回転値が乗数となり、(設定値)×(回転値)=(積算値)となる構造は発見しているにもかかわらず、除算では回転計が商を表示すると見なすことができなかった。Aは答が回転計から読みとれるとしながらも、設定値(除数)をかけていって積算計の表示が問題の被除数になったらその時の回転値が求める答であると説明したが、操作の最終到達点が積算計にあるとする見方は変わっていない。

②乗算と同じ計算進行

一方Iは、乗算を達成し、回転計に答が表示されるとするが、被除数が設定計、除数が積算計に表されるとして、乗算同様設定値からの計算進行を試みていた。

(d)単純操作への期待

改めて述べるまでもなく、回転計、積算計における数値変化はハンドル1回転につきそれぞれ1あるいはある数値を加・減することに尽きる。回転値の変化方向を制御できるか確認できなかった被験者は数名いるものの、この変化値の原理は全員が発見している(表1)。それでも達成者Hを含め6名は、逆転レバーの操作により値を一瞬に希望値に変え得るのではないかとの期待をもつ。また位取りレバーについては、乗除算を通じて有効に用いられなかった5名中2名が、積算計の両端に2数を入力する(被験者B)とか、乗算等を簡単にする際に使う(被験者C)との予想を立てる。こうした、基本的原理にはない機能への期待は、直接推論上の動作に生じることはなく、未達成状況での、具体的機構を仮定しない説明原理として言及された程度であった。

IV 考察

A 既存概念としての「除概念」の影響

1. 成人の「除概念」

本論ではまず、除法に関連する事態に際しては、以下のことが成人の「除概念」として生起すると考えられている。

すなわち、既に分類したように除法は等分除と包含除

とに大別される。たとえば $2m/\text{分} \times 3\text{分} = 6m$ のような正比例型の乗法 ($ax=y$) に対して、比例定数(あるいは単位量)を求める $a=y/x$ が等分除、ベースを求める $x=y/a$ が包含除と呼ばれる(森, 1973)。言い換えれば、 $x \times 9 = 1332$ に対して、 x を求める操作(等分除)と、 $9 \times x = 1332$ の x を求めること(包含除)との操作上の違いと考えてもよい。この二者は除法としての意味は全く異なるが、実際の計算手順は変わらない。児童の除法学習初期には、等分除をも包含除に重ねることで行うことは、いわゆる「トランプ配り」の例などにより紹介されている(遠山, 銀林, 1971)。しかし学習の進行につれて計算手続き自体が定着、自動化されていくと、等分除は、減算に解消され得る包含除とは異なることから、除法独自の操作としてとらえられるようになると考えられる。これには速度、密度など内包量学習において速度等を求める等分除が多く用いられ、速度で除する包含除の場面は用いられにくいことも関連する可能性がある。

一方筆算は、商の数値を想定すること、いわゆる商を「立てる」ことは、除数に対し被除数を超えない最大の積を求めること、つまり除数のいくつ分かを求めることであって包含除の意味をもつ。また被除数を分解してそれぞれを除する手順など、筆算は細かな手続きに分解してみれば包含除であり、累減に近い。しかし筆算手続き全体を見るならば、上位桁から進めていく、言わば大づかみに除して精細化していくという意味では等分除とも言える。当然、計算が熟達し商の値を即座に求められるようになるに従い、各部分の持つ包含除としての特質は弱まる。

こうしたことから、除法学習が十分進行した段階では等分除が優位となり、それと比較して包含除の想起されにくい状況が生じる。

さらに乗法との関連では、運動量や、広義には面積も含める複比例の二次元的性格に対応する除法も、包含除ではとらえられない。

2. 反応の特徴から明らかになったこと

本実験における各被験者の遂行からは、いずれも上述した「除概念」の影響に合致する結果が得られた。課題未達成者の主な反応特徴は、減算の回避と、除数配置の混乱であった。第1の、被除数から除数を1回ひいて動作を中断してしまう減算回避は、課題の除算を包含除ととらえていないことを示している。また第2の、除数配置の混乱にはいくつかあり、除数を累減する途中から誤って結局除数回累減してしまったもの、被除数を入力後ハンドルをただ除数回乗算とは逆方向に回し続けたもの

などである。これらはいずれも「 \times 除数」が想定された上での逆操作と考えられる。したがって、累減による手続きの発見を妨げるものとして、等分除を優位にもつ「除概念」の存在が大きな影響を及ぼしていることは明らかと言える。しかも特徴的なことは、本実験の課題は成人被験者に十分習熟されている筆算手順に類似した手続きを発見するに過ぎないものであるにもかかわらず、発見すべき累減手続きを基礎とする包含除とは全く異なる機能の、等分除を優位とする「除概念」を既有概念としてもつ場合であることに加え、被験者にとって筆算手続きは言わば自動化されたアルゴリズムで包含除の意味に結びつかないこともあって、達成が困難になるという、既有概念の強い影響が示されたことである。

ただし付言すれば、このことからこの「除概念」自体を除法への不十分な概念ととらえることは正しくない。既に述べたように、除法を減法の延長上でなく別の操作ととらえることにより、内包量や面積の概念の正確な理解に結びつくと考えられ、その点ではむしろ積極性をもつ。この結果の示唆するものは、手続き学習に、既有概念との関連を考慮することの重要性を提起したところにあることは言うまでもない。

B 計算機への「信頼」

対象が実用の計算機であるということにより、合理的な推論が妨げられるか否かが検討された。具体的には、電卓同様四則の入・出力欄を同一と予想すること、乗算「九九表」の影響も加わって加減原理以外の特殊な計算原理を想定することが仮定された。根拠とする構造、原理を具体的に想定せずに推論に用いるかどうかを検討するためである。

結果からは著しい傾向は得られなかったが、回転計と設定計、積算計の関連を利用し乗算を達成したものの中に、なお商も積算計に表されるとした被験者3名がみられた。また回転計・逆転レバーに対して、1操作で数値を入力、変換できる特殊機能を期待した被験者は多かった。各計間の関連や加減原理が機構全体を支配していることを発見してもなお、根拠をもたない特殊機能の期待をすてきれない点に、仮定した「信頼」のはたらきが示唆されるが、依然仮定にとどまっている。

C まとめと今後の課題

本実験により、手続き化されている知識以上に、具体的手続きの対応づけのない既有概念が、関連する新手続き学習に強く影響する場合のあることが、除法に関して

明らかにされた。これは一般的に、新手続きの学習は、関連する既有手続きの転移の前提として、基礎となる既有概念に関係づけられた上で成立するというを示すための基礎的資料となる。

今後、除法の問題では、対象の機構理解水準をより高めてもお「等分の」概念や計算機特殊機能の期待が用いられるかを、さらに検討する必要がある。また「除概念」について、今回含めなかった除法唯一の特徴である「予想」を立てる必要のある計算であること、つまり商を「たてる」という独自の手続きとの関連の検討が残されている。

除法から一般化されるべき問題としては、例えば既学習の手続きの一般化や、比喩として既知手続きを学習することなどが、基礎となる概念との関連づけなしには単純に成立しないことが検討されよう。

ただ、さらに展望すれば、既有概念が強く、影響するという、学習上の慎重さを強調する観点から、新知識の獲得に伴い既有概念はいかに変化するかという、既有概念の変化の過程としての学習の側面の検討へも発展させていくことが、大きな課題となる。

(指導 大村彰道助教授)

引用文献

- Behr, M.J., Lesh, R., Post, T.R., & Silver, E.A. 1983 Rational-number concepts. In Lesh, R. and Landau, M. (Eds.) Acquisition of mathematics concepts and processes. NY: AP.
- di Sessa, A.A. 1982 Understanding Aristotelian Physics: A study of knowledge-based learning. Cognitive Science, 6, 37-75.
- 森 毅 1973 解説「乗除」, 森 毅・竹内 啓『数学の世界』, 71-72, 中央公論。
- Resnick, L.B. & Ford, W.W. 1981 The psychology of mathematics for instruction. NJ: LEA
- Resnick, L.B. 1983 A developmental theory of number understanding. In Ginsburg, H.P. (ed.) The development of mathematical thinking. NY: AP.
- Resnick, L.B. & Omanson, S.F. 1987 Learning to understand arithmetic. In Glaser, R. (ed.) Advances in instructional psychology (Vol. 3). NJ: LEA.
- Rosnick, P. & Clement, J. 1980 Learning without understanding: The effect of tutoring strategies on algebra misconceptions. Journal of Mathematical Behavior, 3, 3-27.
- 鈴木久男 1967 『計算機発達史』, 富士短大出版。
- 遠山 啓, 銀林 浩(編) 1971 『新版 水道方式入門』整数編, 国土社。
- 付記 快く被験者をひき受けてくださった方々に感謝いたします。