溶液の混合問題における誤答の起源とその生成プロセス

学校教育学研究室　鈴　木　宏　昭

Error Generation in Juice-Mixing Problems

Hiroaki SUZUKI

Three experiments were conducted to investigate the processes of the mathematical problem-solving using juice-mixing problem. The results indicate that the error patterns are not consistent among the problems that have the same mathematical structure, the conceptual bugs in the mixing schemata determine the availability of the values of variables in the problem and the informal knowledge of "thickness" obtained through everyday experiences interacts the subjects' strategy choice. Detailed protocol analysis revealed that the informal knowledge of "thickness" has critical roles to monitor the results and to generate the elaborated internal representations during the course of solving the problem.

I．問　　題

誤答はなぜ生じるのか，またどのようなプロセスで生成されるのだろうか。本研究では算数の問題解決における誤答の起源とその生成プロセスが考察される。さて高学年の算数の中で特に指導の難しいものとして「割合」「１あたり量」が挙げられる。これらは数学的には内包量であるから，合併に際して加法的でないという性質（以下，非加法性注1）と呼ぶ）を持っている。この非加法性が端的にあらわれる問題として溶液の混合算（例えば，２％の食塩水300ｇと４％の食塩水200ｇをまぜて新しい食塩水をつくりたいと思います。何％の食塩水になるでしょうか。）が挙げられる。石谷ら誤算誤答研究会（誤算誤答研究会 1960）[1] によれば上述の問題の正答率は10％程度で，誤答の中では濃度同士の和（２％＋４％＝６％）や平均（（２％＋４％）÷２＝３％）を求めるものが多かった。これらの誤答例を見ると興味深い問題があらわれてくる。第１に，誤った解法は誰が教えたわけでもないのになぜ用いられるのかということ，第２に重さの数値が式中で全く用いられないのはなぜかということである。このような誤答に対しては従来，「～が理解されていない」，「～の能力がない」，「問題が難しい」等の漠然とした説明が与えられたに過ぎなかった。

最近の認知心理学では教科内容に即した問題の解決過程についての研究が盛んにすすめられているが，このような立場から誤答を扱ったものとして Brown & Van Lehn(1980)[2] の間に合わせ理論（repair theory）が挙げられる。彼らの理論によれば，正答を導出するために必要なルールのうちのどれかが何らかの理由で抜け落ち，そのために解決不可能な状態となる。そこでいくつかの間に合わせ方略を用いてその状態を脱し答えを出す。ところが彼らの理論にはいくつかの問題点が存在する。まずある特定のルールが抜け落ちるのはなぜかという問題がある。ルールがランダムに抜け落ちるとしたら，ある問題に対して被験者間で比較的一定した誤答傾向が見られるという事実と矛盾する。一方，誤答のルールの一貫性は被験者内ではさほど高くないという問題もある。さらに溶液の混合算のような複雑な問題についての誤答例から明らかなように正答を導き出すルールが抜け落ちたというよりは全く別の方略を用いたために生ずる誤答が存在するという問題もある。これらの問題を考えあわせると誤答のルールそれ自体を分析するだけでは不十分であり，それらを支える知識を分析する必要がでてくる。

近年，問題解決における領域固有の知識の役割が重視されている（Briars 1983[3], Mayer[4] 1984)。これらの研究では一般に初心者と熟達者の比較という方法が用いられるが，その結果，熟達者は初心者に比べて問題の型に

ついて多くのレパートリーを持ち，それによって問題のパターン化を行なっていること（Hinsley et al. 1977[5]），またその問題の型が当該領域の原理に基づいていること（Chi et al. 1981[6]），また解決のための手続きが知識構造の中に組み込まれていること（Chi et al. 1981[6], Schoenfeld & Herrman[7] 1982）が明らかにされてきた。これらの研究は初心者，熟達者の差が単に当該領域の知識の量の問題ではなく，その構造化のされ方の違いによることを示している。したがって誤答を分析する際にも，それを単に知識の欠如の結果とみなすのではなく，知識の構造の特性として捉える必要がある。

しかしながら，領域固有の知識の分析だけでは誤答を研究するには不十分である。なぜなら誤ったルールや手続きまたは知識は学校等で教授されたものではなく，子ども自身がつくりだしたものだからである。そこで領域固有の知識とは別の知識を想定する必要が出てくる。我々はある文化的な環境の中で生活し，そこから様々な知識を獲得している。それらの知識の中には学校で学習するような知識と内容的に重なるものも数多く存在している。溶液の混合算で問題となるような「濃さ」という概念についても，生活の中ではかなりの経験がなされているはずであり，そこから獲得した知識（以下，生活的知識と呼ぶ）が何らかの形で干渉してきた結果，ある種の誤答が生成されるのではないだろうか。この生活的知識の役割にはじめて注目したのは Vygotsky(1934)[8] であるが，その機能や構造についての具体的な研究はまだはじめられたばかりである。したがって，一般的な特性を述べることは難しいが，生活的知識はそれが獲得された状況，文脈に深く埋め込まれているのでどのような場面でも適用可能なわけではないこと（Lawler 1981[9]，三宅 1982[10]），またきわめて根強く存在しており，学校で学習したことを凌駕するほどに強力であること（diSessa 1982）[11] が明らかにされている。また算数における生活的知識は一般にそれを正当化するだけの数学的手続きをともなわない。したがって解決過程の詳細には関与せず，答えの予想やチェックといったメタ認知的な機能をもつと考えられる。

本研究では溶液の混合算を題材として，そこに見られる誤答が「なぜ」生みだされたのかを領域固有の知識と生活的知識から説明する。さらに解決過程の中でのそれらの知識の相互作用を分析することにより，「どのように」誤答が生成されるかについての考察を行なう。

Ⅱ．誤答を生み出す知識の枠組み

鈴木(1983)[12]は溶液の混合算3題を含むテストを小学校6年生に対して行なった。その結果，立式のパターンがきわめて多様であること（111名の被験者から20種類以上のパターンが検出された），②立式パターンの被験者内の一貫性は低いこと（3題とも一貫したパターンのものは36名），③全体の約3分1の被験者が濃度同士の足し算を行なうこと，④等濃度の溶液の混合問題では他と比べて正答者数が多く，その大部分は計算をしていないこと，が明らかになった。①，②より式のパターンの表層的な分類だけでは誤答を分析するには不十分であること，また③，④から子どもがインフォーマルに獲得した「濃さ」の知識の存在が示唆される。

以下，実験1では混合算の誤答パターンの同定と誤答の性質についての分析を行なう。実験2では各誤答パターンと領域固有の知識との関係が，実験3では各パターンと生活的知識の関係が論ぜられる。

A．実験1

本実験では混合算における誤答パターンの同定を行ない，誤答の性質を明らかにするために，個別に面接を行ない，プロトコルをとる。特に誤答の一貫性を手がかりとして，従来の研究における誤答の考え方を検討する。なおプロトコルの結果については実験2，3の結果とあわせて後述する。

1．方法

被験者　足立区立K小学校6年生20名（男子11名，女子9名）と渋谷区立T小学校6年生15名（男子8名，女子7名）の計35名。K小学校の児童20名は事前に行なったテストの混合算3題中2題以上で一貫した立式パターンを示したことを規準に選ばれた。T小学校の児童15名は予備調査の人員に制限があったため，算数を非常に得意とするもの5名，普通のもの5名，苦手としているもの5名を担任の教師に選んでもらった。但し，この基準は分析の中では一切用いていない。

課題及び手続き　市販されている50%の缶入りオレンジジュース250gと100%の箱入りオレンジジュース1000gの実物を被験者の前に置き，各々の濃度，重さを確認させてから，それらを一度暗唱させた。間違えたり，忘れたりした場合には同じ手続きをくりかえした。そして次のような教示を与えた。「これ（50%のジュース）とこれ（100%のジュース）を全部まぜあわせたら何%のジュースができるかな。もし計算がいるなら紙に書いて下さい。間違ってもいいから自由に使って下さい。また考えていることや思ったことはなるべく口に出して下さい。」解答後に式の中で用いられた数値の確認，演算の意味等についてて質問を行なった。その後に割合の第

表1

一次調査 ＼ 実験 I	%+% A 群	$\frac{g+g}{\%+\%}$, $\frac{\%+\%}{g+g}$	$\frac{g}{\%}+\frac{g}{\%}$, $\frac{\%}{g}+\frac{\%}{g}$	(%+%)/2 M 群	N群	C群	その他	計
%+%	3			1			4	8
$\frac{g+g}{\%+\%}$, $\frac{\%+\%}{g+g}$	1			1	1		1	4
$\frac{g}{\%}+\frac{g}{\%}$, $\frac{\%}{g}+\frac{\%}{g}$	2			1			1	4
(g×%)+(g×%)		1			1		1	3
(g×P)+(g×P)	1							1
(g±%)+(g±%)	2							2
g	2							2
(%+%)/2						1		1
C						3	2	5
そ　の　他	2		1	1	1			5
計	13	1	1	4	3	4	9	35

1，第2用法の確認を含む援助（たとえば，「濃さをもとめる時はどうやったのかな。」等）を行なった。この過程は全てテープレコーダーで録音された。

2.　結果と考察

問題を確認した直後に被験者がたてた式は次のように分類できる。

C　(正答)：(250×0.5+1000×1)÷(250+1000)

または，

1000：250=4：1

$$50+(100-50)\times\frac{1}{4+1}$$

M　(平均)：(100+50)÷2

A　(足し算)：100+50

N　(計算なし)：100%または125%

C群4名，M群4名，A群13名，N群3名であった。その他の11名は各々が独自の立式をし，同一の式はなかった。その中で実験者の援助をうけて正答に至った被験者が6名いる（以下，H群と呼ぶ)。N群とは，単に計算をしなかったというのではなく，答を式で裏づけることが出来なかったものをさす。

一次調査と本実験の立式パターンの対応についてまとめたものが表1である。表から明らかなように同一のパターンの被験者は濃度のたし算（%+%→A群）と正答（C→C群）3名のみである。また，一次調査で（g＋g)/(%+%)，(%+%)/(g＋g)，g/%＋g/%，%/g＋%/g，等の複雑なストラテジーを用いたものは16名いたが本実験ではうち12名がより単純なA群，M群N群へと分類された。この結果は誤答が Brown & Van Lehn が述べるような正しい手続きの一部が抜け落ちたために生ずるというよりは，より深いレベルの概念的なつまづきから発生していることを示していると考えられる。

B．実験2

実験1で明らかになったように誤答のパターンの一貫性は乏しい。また一次調査でみられた複雑なパターンはより少数の単純なパターンへと収束するケースが多かった。これらの事実から次のような仮説をたてることができる。被験者にとって，問題文中の数値の全てが利用可能なわけではなく，そのうちのいくつかのみが有効に利

用されると考えられる。つまり，彼らの混合のスキーマには特定の数値を受け入れる枠組みが欠如している。にもかかわらず，文中の数値が利用しやすい形であらわされている場合（例えば一次調査時のように印刷されているような場合）それらを無理に用いようとするため，式がかなり恣意的に構成され，その結果複雑で意味の推定が困難な式ができあがるのではないだろうか。そこで本実験では各群の被験者のスキーマの構造を分析し，どの数値を有効に利用できるかについて考察を行なう。

1.　方法

被験者　実験1と同じ。

課題　混合算では一般に2つの溶液の濃度，重さの計4つの数値を用いる。この4つの数値を体系的に欠如させることにより5つの欠如文がつくられた。すなわち濃度が1つ欠如している文（$\overline{T1}$），2つ欠如している文（$\overline{T2}$），重さについても同様に2文（$\overline{W1}$，$\overline{W2}$），さらに一方の溶液は濃度，他方は重さが欠如している文（$\overline{TW}$）である。また，食塩水と塩，食塩水と水の混合についての文（各々S，W），2つの溶液の濃度，重さともに与えられている文(N)，2つの溶液の濃度が与えられ，かつ重さが同一の文(M)，2つの溶液の溶質と溶液の重さが与えられている文（I）と重さは与えられていないが濃度が同一の文（C）の計6つの適切文がつくられた。

手続き　被験者は次のような教示を与えられた。「これから割合，特に濃さについてのいろいろな問題をみてもらいます。僕（実験者）が問題をつくったんだけど作る途中でいろいろと間違えてしまいました。間違えてつくったから誰がやっても解けないような問題があります。そういう問題があったら教えて下さい。」なお，被験者が自分自身に解く力がないということと誤解しないように教示を徹底した。問題文は全被験者とも，$\overline{T2}$→W→$\overline{W2}$→C→S→$\overline{T1}$→$\overline{W1}$→N→I→M→$\overline{TW}$の順に提示され，一度に一文しかみられないようにした。提示後，被験者は文を一度音読し，誤読した場合は実験者が訂正し，再読させた。また問題文に誤りがあることを被験者が指摘した場合はその個所を訊ねた。

2.　結果と考察

問題文別の正答数（率）は図1に示すとおりである。適切文の正答率は欠如文のそれよりも高い。C文を除けば被験者の90%程度が正答している。このことから被験者が教示を正しく理解して課題を遂行したことがわかる。次に実験1で同定されたストラテジー別に正答数をまとめると図2のようになる。C群は全員が全問に正答しており，欠如文については欠如した個所を正しく指摘

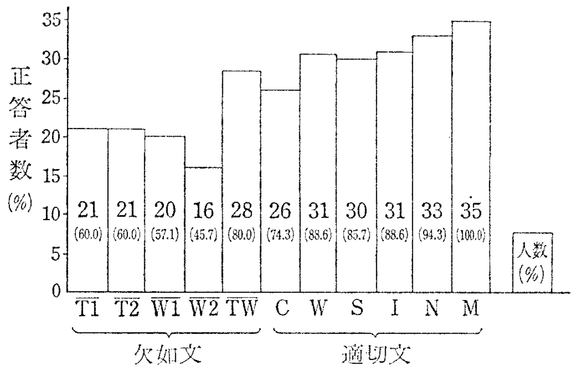

図1

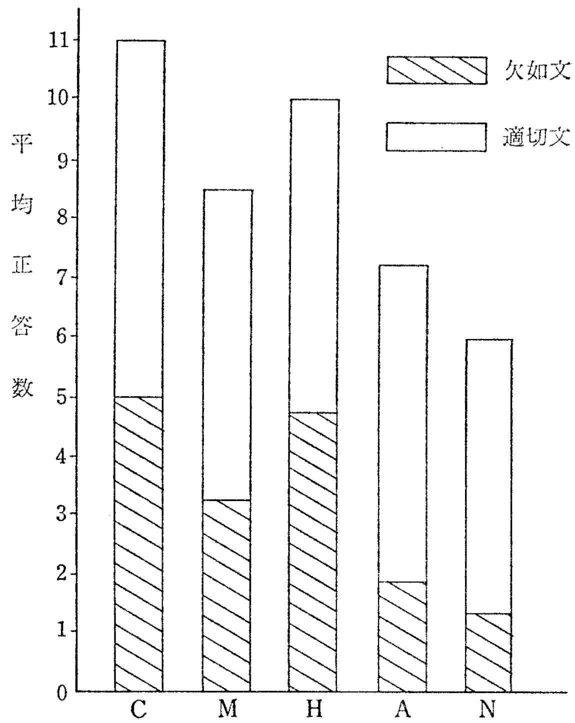

図2

することができた。このことから，彼らは混合算において濃度と重さを有効に利用するためのスキーマができていると考えられる。さらに$\overline{W2}$文，C文に正答していることから等濃度の溶液の混合においては，重さに関係なく濃度は不変であるということを把握していると考えられる。

H群の成績はC群とほぼ同じであり，全被験者とも1文に誤答しただけであった。うち4人はC文についての誤答が見られ，理由として「重さが書いてないから」と述べていた。

M, A, N群の成績は上の2群と比べるとかなり低いが，これはほぼ欠如文の誤答に還元できる。A群においては$\overline{W2}$文は全員が誤答しており，$\overline{W1}$文でも4名が正答していたのみである。これはA群の被験者の多くが濃度と重さの関係を理解しておらず，特に後者を無視しが

ちであることを示している。しかし，適切文の成績はH群とほぼ同じであることを考えれば，重さが不必要な情報とは考えられていない。それらは彼らにとって２次的な情報なのである。したがって重さについての情報が利用しやすい形で提示されれば，それらを式中で用いることもあると考えられる。但し，この場合でも彼らには重さを有効に利用するための枠組みが存在しないため，式はかなり恣意的に構成されることになる。このように考えるとA群の被験者の一次調査時における様々な立式パターンが，なぜ実験１では濃度の足し算という単純なパターンに収束したかが理解できる。

M群については顕著な誤答のパターンはみられないが，４名中２名が$\overline{\mathrm{W}2}$文に誤答している。

N群は最も成績が低く，欠如文については１～２問正答しているに過ぎない。さらに適切文についても他の群よりも明らかに成績が低い。この事実は彼らが実験１において答えを式でうらづけることが全くできなかったことと関係があると考えられる。つまり問題文中の濃度や重さをうけいれるスキーマがきわめて不安定であるために情報の選択が恣意的に行なわれるのである。

C．実験３

実験２では各群によって混合算における濃度のスキーマが異なっており，それによって利用可能な情報が異なってくることが明らかにされたが数値間で用いられる演算までを特定化することは出来なかった。例えば，A群では重さを有効に利用するスキーマがなく，濃度だけで計算を行なっている。しかし，実際のところ彼らは濃度同士の足し算を行なっているのであり，このような演算子がなぜ選択されたのかは今のところは不明である。この問題を算数についての知識だけから説明することは難しい。なぜなら誤ったストラテジーは学校等で直接教授されたものではないからである。第１章で述べたように子どもにはその生活の中で様々な「濃さ」についての知識を獲得し，またそれらを合成し，新たな知識を生みだしている。したがってこの種の知識の内容について考察する必要がある。本実験では，できるだけ算数という文脈から離れて，子どもが溶液の性質，特に濃度の非加法性についてどのような知識を持っているかを分析する。

1．方法

被験者　実験１，２と同じ。

課題及び手続き　知識の領域固有性についての諸研究が示すように，知識はどのような文脈でも適用可能ではないので，本実験でも砂糖水とそれよりも親近性が高いと思われるオレンジジュース（市販）を用いた。

課題A（等濃度の砂糖水の混合）　２つのビーカー（A，B）に等量の水（300ｇ）を入れ，各々に等量（スプーン１さじ）の砂糖を入れる。そして完全に溶けるまでかきまぜる。(1)AとBではどちらが甘いかを判断させる。次に，A，Bから約100ｇずつの水を別のビーカー（C）に入れる。(2)CとAではどちらが甘いか，またCとBではどちらが甘いかを判断させる。さらにAからCに100ｇの砂糖水を加える。(3)CとAではどちらが甘いか，CとBではどちらが甘いかを判断させる。

課題B（異なる濃度の砂糖水の混合）　２つのビーカーに水を等量入れ，一方（A）には砂糖をスプーン２さじ，他方（B）には１さじ入れる。あとは課題Aと同じ手続きで(1)，(2)，(3)の各質問を行なう。

課題C（等濃度のジュースの混合）　市販されている50%の缶入オレンジジュースを２本用意し，ジュースが50%であることを教示確認する。次に２つのオレンジジュースから等量でないことがはっきりとわかるようにビーカーにジュースを注ぐ。そしてビーカーの中のジュースは何%かを質問する。

課題D（異なる濃度のジュースの混合）　市販されている50%の缶入りオレンジジュース１本と箱入りの100%オレンジジュース１本を用意し，その濃度を確認させる。次に各々を別のビーカーに移し，それらのビーカーから第３のビーカーに等量にならないことがはっきりとわかるようにジュースを注ぐ。そして，50%のジュースの入ったビーカーと混合ジュースの入ったビーカーの濃さを比較させ，次に混合ジュースの入ったビーカーと100%のジュースの入ったビーカーの濃さを比較させる。

なお課題A～Dの各質問に対する判断については全てその理由を訊ねた。

2．結果及び考察

各課題についての正答者数（率）は図３に示すとおりである。なおA(２)，A(３)，B(２)，B(３)，Dの課

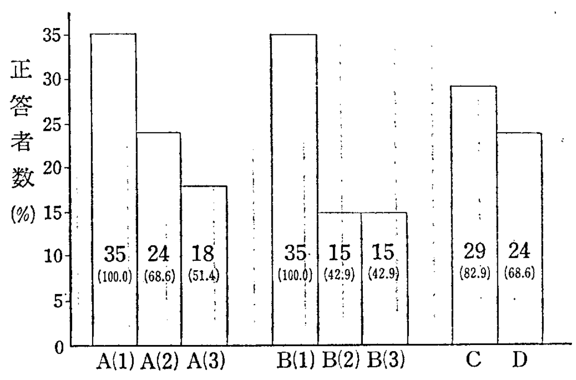

図３

題には質問が2つ含まれるが，2つとも正しく答えた場合に正答とした。

A(3)とC，B(3)とDは構造的に同一の課題であるが，課題C，Dのようにジュースを用いた方が正答者が多い。また，A(3)で誤答しているがCでは正答の被験者が11名，B(3)で誤答し，Dで正答のものが10名いるのに対し，その逆は各々0名，1名である。この事実は知識の領域固有性についての諸研究を支持する。

次に群別に平均正答数をまとめると図4のようになる。但し，これにはA(1)，B(1)の得点は含まれていない。従って，6点が最高となる。

C群は実験2同様，全員が全問に正答している。つまり，用いられる材料が何であれ，混合溶液の濃度はもとよりの溶液の濃度の間にあることが理解されている。理由づけを課題Dについてみると，50%のジュースと混合ジュースとの比較では「100%のジュースをまぜたから」，100%のジュースと混合ジュースの比較では「50%のジュースをまぜたから」というものが多かった。

M群の4名中2名は全問に正答しており，課題B以外は全員が正答している。理由づけはC群とほぼ同じである。したがってこの群の被験者も濃度の非加法性についての理解がほぼなされていると考えられる。

A群は最も平均が低い（A群の得点は他群にくらべて分散が大きいが，13名中10名は3点以下である）がその誤答は全て混合溶液はもとの2つの溶液よりも濃いというものであって，その逆はなかった。理由づけを課題Bについてみると，「(砂糖) 1杯のものと2杯のものをまぜたから（混合溶液の方が2杯まぜた溶液より濃い)」としたものが多かった。しかし，課題Cでは13名中9名が正答していること，また全問誤答は1名しかいなかった。これらの事実を考えれば，彼らは濃度の非加法性についての知識を全く持っていないというよりも，その適用範囲が限定されていると考えた方が適切である。

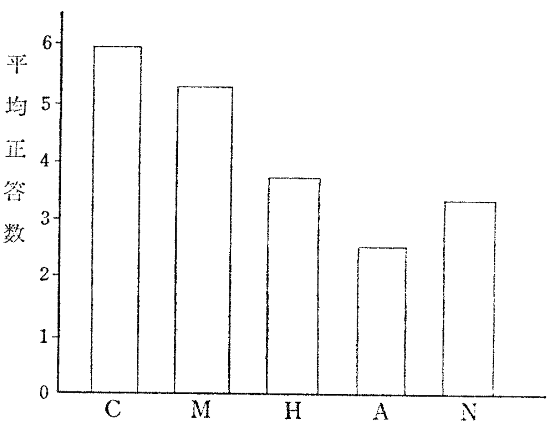

図4

N群のうち実験1で100%と答えた2名はきわめて特異なパターンを示している。彼らは混合溶液の濃度がもとの2つの溶液のそれと等しい課題A，Cには正答している。しかし，課題B，Dでは混合溶液の濃度はもとの2つの溶液のうち濃度が高い方と同じ濃度であるとしている。

3. 討論

以下，実験1で得られたプロトコルと実験2，3での結果をもとに各群の特徴をまとめる。

C群のうち2名は溶質を溶液でわるというストラテジー，残りの2名は濃度差を重さの比で分配するというストラテジーを用いた。彼らは濃度の非加法性を十分に理解しており問題文中の数値を有効に利用するスキーマを持っている。また彼らは解決までの時間がきわめて短く，滞ることが全くなかった。ある被験者は問題が説明されるとすぐに1125÷1250という式を書き，計算を行なった。また他の被験者は，缶ジュースの重さ（250g）と濃度（50%）を説明するとすぐに「じゃあ，(果汁は) 125だ。」と述べた。これらのことから，彼らは任意の2つの量が出されると，すぐさま残りの量を導きすことがわかる。このような解法は熟達者の問題解決の特徴とされる前向きの解法 (forward working) ときわめて類似している。

M群は濃度の非加法性は理解しているが，彼らのスキーマは重さをうまく扱えない。したがって重さを無視して濃度同士の足し算を行なってしまうが，一方，生活知識の制約があるために2でわるというストラテジーを用いると考えられる。ある被験者（S1）に，(100+50)÷2という式の説明を求めたところ次のように答てた。

E　なぜたしたの
S1　大きいおけに2つともたすから。
E　じゃあ，なぜ2でわったの。
S1　100%のジュースと50%のジュースをたしても150%のジュースはできなくて……できないから，2でわればできるんじゃないかなあと思った。

別の被験者（S2）にからは次のようなプロトコルが得られた。

E　100+50じゃだめ？
S2　だめ。
150%というと，こっちがこいのに，こっちがうすいと……。
こいものとうすいものをまぜて，よけいこくなったらおかしいから。
E　どうなればいいの。

S 2　50%以上100%以下じゃないとおかしいから。

これらのプロトコルから明らかなように，M群の構成した式は生活的知識が立式過程に積極的に関与した結果うみだされたものといえる。

A群は混合算において重さの数値を有効に利用することができない。さらに彼らの多くは濃度の非加法性についての知識の適用が限定されており，多くの場合，混合溶液の濃度が最も高いと考えている。したがって濃度同士を加算する。なぜ加えるのか，という質問に対しては「混ぜたから」,「こっちが50%，こっちが100%だから」という回答が大半を占めた。次に挙げる被験者（S 3）は，実験2では欠如文5文中4文に誤答し，実験3ではジュースを用いた課題C，Dには正答していた。

（問題説明後，直接150%と書く）

E　どうして。
S 3　たしたの。
E　100と50たしたの？
S 3　100と50たしたの。
E　たしたものは，これ（100%のジュース）よりも濃くなるの。
S 3　こくならない。
E　150%ていったら，これよりもこくなっちゃうよ。
S 3　そうか。
E　そうしたらどうなるの，何%？
S 3　書き直していい？
（100%と書く）
E　どうやってやったの？
S 3　100%よりもこくならないから。

このように生活的知識が起動して矛盾に気づいても，重さの数値をうまく利用できない。

次に挙げる被験者（S 4）は実験3では全問誤答している。

（はじめに100+50=150とした後）

E　まぜたら100%よりこくなる？
（しばらく考え込む）
E　なんかおかしい？
S 4　なんかおかしい。
E　どこらへんがおかしい？
S 4　こっちが50%で（もう1つは）100%でね。果汁50%は本当のみかんが50で，他はいろんなの……。水でうすめてあるからおかしい。
E　答えがおかしい？　式がおかしい？
S 4　どっちも。
E　まぜるとどうなる？
S 4　やっぱこくなる。

（その後，100+100−50=150とした）

ここで重要なことは一度矛盾に気づき，その理由をほぼ正確に述べているにもかかわらず，結局混合溶液が最も濃いという考えに戻ってしまうということである。このことは生活的知識がきわめて強固であり，矛盾や葛藤を吸収してしまうことを示している。

N群は混合算における混合のスキーマがきわめて不安定な構造をしている。したがって彼らの生活的知識（例えば，混合溶液の濃度はもとの2つの溶液のうち濃度の高い方と同じになるという知識）が直接的にあらわれて，それを式でうらづけることができなくなっていると考えられる。

H群ははじめに構成した式のパターンは全て異なっており，また実験3での成績も1点，4点，5点が各1名，3点が2名であり，これだけからは明確な特徴を抽出することは難しい。しかし，実験2での成績はかなり高い。したがって，彼らは濃度や重さを活用するスキーマを持っていると考えられる。この群のうち3人は割合の第1用法を確認することにより正答に至った。この事実は混合算における混合のスキーマが構造的に安定している場合，「濃度を求める=果汁÷果汁ジュース全体」というゴールに達する手続きが確認されれば解決し得ることを示していると考えられる。

Ⅲ．誤答生成のプロセス

2章で述べられた実験から，誤答を生みだす要因として混合算における混合のスキーマの構造と混合溶液の性質についての生活的知識が抽出された。しかしながら，誤答の生成のプロセスにおける2つの知識の機能については十分に明らかにされたとは言い難い。つまり，「どのように」誤答が生成されていくのかについては明確ではない。

ところで，プロセスを分析する際にはモデルが必要となるが，ここでは以下のような仮説的モデルを仮定する。まず我々は問題文を読み，内的表現を構成する。そしてそれにしたがって式を構成したり，計算を行なったりする。この過程の様々なレベルで様々な知識が関与する。但し本研究ではこれらの知識のうち，実験2，3で特定化された知識を中心にして分析をすすめる。

このような枠組みにしたがって，修正の過程も含めたプロセス全体を分析することにより，「どのように」誤答が生成されるかを考察する。

A．プロトコル分析

以下のプロトコル分析の対象となる被験者（Ｓ５）は，実験１では$1\times\frac{1}{2}$という式をたてたためどの群にも分類されていない。実験２では重さが欠如した文（$\overline{W1}$，$\overline{W2}$）に誤答しており，実験３では全課題に正答していた。したがって，Ｓ５は重さについての情報を有効に利用することはできないが，濃度の非加法性についての知識はすでに獲得していると考えられる。

以下，Ｓ５のプロトコルを説明を交えながら記述する。なおプロトコルの中でカッコ内は筆者が補足したものである。また，$\boxed{E1}$，$\boxed{E2}$などの記号はＳ５が計算用紙に書きとめた式をあらわす。

Ｓ５(1)　まずはじめに，これ（100%のジュース）は100%でしょ。これ（50%のジュース）が50（%）でしょ。
　(2)　だから，これ（100%）が１で，これ（50%）が0.5だ。
Ｅ　これが１で，これが0.5ね。まぜると何%になるの。
Ｓ５(3)　まぜるとわるのかな，いやかけるんだな。そうだ，かけるんだ。
$\boxed{E1}$　$1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
Ｓ５(4)　あれ，なんだ，これは２分の１。
Ｅ　２分の１って何。
Ｓ５(5)　50%
　(6)　おかしい気が。
Ｅ　じゃあ，これ（50%）と同じになるの。
Ｓ５(7)　なんないねえ。じゃあ，これはバツだ。

ここで見られるように，Ｓ５は重さをうまく利用できないため，濃度の数値を変換し，それだけを操作して解決しようとしている。しかし，50%という値は適切ではないとして次に進む。

Ｓ５(8)　これ100（%），これ50（%）。
　(9)　これ（100%）が100ｇ，これ(50%）も100ｇね。
Ｅ　どれが100ｇ？
Ｓ５(10)　いや，これ100ｇだして，これも100ｇだすの。
　(11)　関係ないかなあ，パーセントでてるからなあ。あれえ。
　(12)　50%が水もまざるから……こりゃ頭痛い。
（中断）
　(13)　これが10で，これが５でしょ。
Ｅ　どれが10？
Ｓ５(14)　（100%のジュースをさして）これが10で，（50%のジュースをさして）これが５。
Ｅ　10とか５って何？
Ｓ５(15)　果汁。果汁をへらすの。
　(16)　これ（100%）をもとにして10。これが最高。これ（50%）が50だから５。
　(17)　たすじゃ，だめなんだよね。
$\boxed{E2}$　$10+(5+5)=20$
　(18)　たすと20だ。
Ｅ　10っていうのは何？
Ｓ５(19)　10ていうのは（100%の）果汁。５っていうのは（50%の）果汁で，こっちの方（式中のあとに書かれている５）は，(50%のジュースの中の)水なの。
Ｓ５(20)　それでイコール。これはやっぱり20でしょ。
$\boxed{E3}$　$20-5=15$
Ｅ　20から水の５をひいてるの。
Ｓ５(21)　え，あわせて何%てきいてるんだっけ。
Ｅ　そう。
Ｓ５(22)　あっそうか。

(1)～(7)で濃度の数値だけを操作しても解決できなかったため，この段階ではより精緻な内的表現をつくりだそうとしている。例えば(13)～(18)にみられるように両方のジュースを10と置き，50%のジュースの果汁を５，水を５としていることがあげられる。そして，$\boxed{E2}$は，このように表現されたジュースがまぜあわされたことを示していると考えられる。但しここで注意すべきことはＳ５の内的表現はより精緻なものとなっているが，各ジュースの重さは均等化されており((9)～(10)，(19))，重さの数値は無視されているということである。これはＳ５のスキーマの構造から十分に予測しうる。

Ｓ５(23)　20を２でわって。
　(24)　えー。頭痛くなってきた。
　(25)　15でしょ，水が５なんでしょ。
　(26)　10たす５で15
　(27)　水が５なんだから
　(28)　これをうまく……できない。
　(29)　これを15
Ｅ　15%じゃないの。
Ｓ５(30)　わる５じゃないな。
　(31)　わる５でやってみよう。
$\boxed{E4}$　$15\div5=3$
　(32)　３だ。
　(33)　はじめは100%を10と考えたんだから……30にはならないよねえ。

この段階でＳ５は前段階で構成された内的表現にもとづいて，様々な演算を試みている。(23)では全体を２でわるとか，(31)では果汁（＝15）を水（＝５）でわる，などである。しかし，いずれも適当でないとされる。

E　どのくらいになりそうなの？
S５(34)　100%と50%たしたら，75%。
E　ぴったり75%になるの？
S５(35)　なってもいいんじゃないかなあ。
E　じゃあ，75%ってやれば。
S５(36)　いや，そういう，なんとなく，かくれたのが75だっていってるの。
S５(37)　でも計算で示さないとわからないでしょ。
E　75は計算やらなくてもでちゃうの？
S５(38)　なんとなく頭でたせば，こうなるんじゃないかなあと思ったんだよね。

この部分のプロトコルは，$\boxed{\text{E１}}$から$\boxed{\text{E４}}$までの計算結果が答えとしてなぜ不適切とされたかを説明してくれる。Ｓ５の実験３の成績から明らかなように，彼は生活的知識として濃度の非加法性を把握しており，その知識が計算結果の妥当性を絶えずモニターしていたと考えられる。

S(39)　あっ。20を10と考えるの。
E　20ってどれ？
S５(40)　だから，水５と果汁５とこっちが……をたして。
(41)　あっ簡単だ，簡単だ。
(42)　20でしょ，たして20。
(43)　20に５でしょ，５。
E　５って水？
S５(44)　うん。これ（水）は４分の１なんだ。
(45)　そうすれば４分の１は……あれえ。
(46)　あっそうか。水は25%ってことなんだ。
(47)　そうしたらもう簡単でしょ。
$\boxed{\text{E５}}$　100−25＝75
(48)　やっぱり僕の頭脳はおかしくなかった。
（終り）

正解ではないが，Ｓ５はこの段階で一挙に解決に至る。ここでは前段階の内的表現が割合の第１用法によって一層精緻化されている。つまり，以前は全体が20，水が５と表現されていたが，ここでは水は全体に対して４分の１＝25%と表現され直した（(43)，(44)）。そこで水の割合が25%ならば，残りの75%は果汁の割合であり，それが答えとされる。そしてその答えは生活的知識と矛盾しないため完全に理解したという状態になる。

B．討論

図５をみると，式や内的表現が様々に変化し，精緻化していくことがわかる。最初の内的表現は，50%＝1/2，100%＝１というきわめて単純なものであったが，果汁と水が独立したものと変化し，最終的にはそれらが割合化される。しかし，両ジュースの重さについての情報は最後まで用いられず，重さは均等化されたままである。したがって，スキーマの構造によって利用可能な情報が決定されることが示される。

一方，生活的知識は内的表現が精緻化していく際にきわめて重要な役割をはたしている。この知識は個々の計

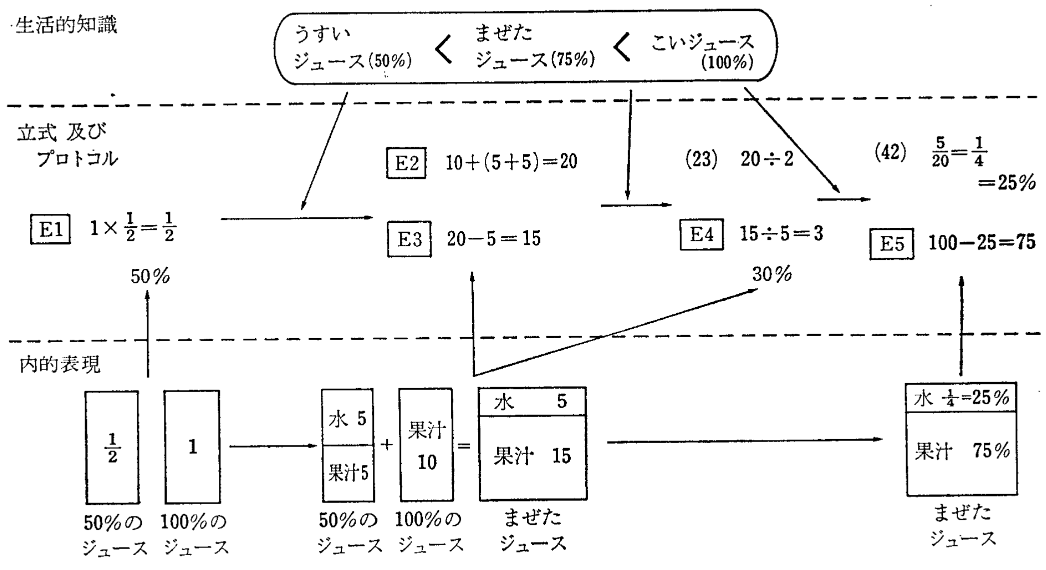

図５

算の結果をモニターし，答えが矛盾する場合には別の演算を試みさせたり，内的表現を変更させるといったメタ認知的な機能をもっていると考えられる。このような機能的特性は，前述したように，生活的知識はそれを数量化させるだけの数学的手続きをともなわないためだと思われる。

Ⅳ．展　望

一般に問題解決のプロセスには様々な知識が関与しており，そこからうみだされる誤答もまた多様な知識の相互作用の結果である。したがって誤答の分析に際しては，その起源となる知識を多元的に捉えなければならないし，またそれらの知識が関係しあう過程を詳細に分析し，それらの機能を特定化する必要がある。

本研究ではこのような見解にしたがい，溶液の混合算における誤答を混合のスキーマの構造及び生活的知識の問題として捉え，その機能を明らかにした。しかし，今後とりくまねばならない，いくつかの問題も同時にうかびあがってきた。第1に，一次調査でみられた複雑な式はどのようにして構成されたのか，また実験1ではなぜそれらが単純なパターンへと収束したのか，という問題である。本研究では情報の利用のしやすさという視点からこの問題を論じた。しかし，一方で「文中の数値は式の中に必ず入れる」というような高次のストラテジーが働いているという可能性もある。また，このような課題間の非一貫性は，子どもがそれらの問題の各々について，異なった定式化（problem formulation）を行なった結果とも考えられる。この問題を明らかにするには，なおいくつかの研究が必要であろう。

第2に，生活知識の起源及びそれが獲得された文脈についての問題がある。本研究で用いた異なる濃度のジュースの混合などという事態は日常生活の中では，まず起り得ないだろう。だとすれば，濃度の非加法性についての知識はどのようにして生じたのだろうか。温度や速度といった他の内包量についての経験が転移したものか，または等濃度の溶液の混合についての経験が拡大していったものなのか等の様々な可能性が考えられる。今後，内包量についての発達研究を通して，明確化していかねばならないだろう。

（指導教官　佐伯　胖助教授）

注1

ここでは厳密に数学的な意味，つまり重みづけを含む加法性を問題にしているわけではなく，単純に足し算ができるか，できないかを問題にしている。

文　献

1) 誤算誤答研究会（1969）算数誤算誤答の事例研究。明治図書。
2) Brown, J.S. and Vanlehn, K. (1980) Repair Theory: A Generative Theory of Bugs in Procedural Skills. *Cognitive Science*, 4, 379-426.
3) Briars, D.J. (1983) An Information Processing Analysis of Mathematical Ability. In R.F. Dillon, and R. R. Schmeck (Eds.) *Individual Differences in Cognition* Academic Press.
4) Mayer, R.E. (1984) A Cognitive Analysis of Mathematical Problem-Solving Ability. In R.J. Sternberg (Ed.) *Advances in Psychology of Intelligence:: vol* 2.
5) Hinsley, D., Hayes, J.R. and Simmon, H. A. (1977) From Words to Equations. In T.P. Carpenter and M. Just (Eds.) *Cognitive Processes in Comprehension.* L.E.A.
6) Chi, M.T.H., Feltovich, P.J. and Glaser, R. (1981) Categorization and Representation of Physics Problem by Experts and Novices. *Cognitive Science*, 5, 121-152
7) Schoenfeld, A.H. and Herrman, D.J. (1982) Problems Perception and Knowledge Structure in Expert and Novice Mathematical Problem Solvers. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 8, 484-494.
8) ヴィゴツキー（1934）思考と言語。（柴田義松訳。明治図書。1962.）
9) Lawler, R.W. (1981) The Progressive Construction of Mind. *Cognitive Science*, 5, 1-30.
10) 三宅なほみ（1982）文化と社会の中での学習。波多野編：学習と発達（認知心理学講座4）。東京大学出版会。
11) diSessa, A.A. (1982) Unlearning Aristotelian Physics: A Study of Knowledge-based Learning. *Cognitive Science*, 6, 37-75.
12) 鈴木宏昭（1983）算数の問題解決過程の分析。東京大学大学院教育学研究科学校教育学専門課程修士論文。