確率概念の教授＝学習

——教材化に関する理論的考察——

学校教育学研究室　菅　岡　強　司

Teaching and Learning of Probabilistic Concepts: A Theoretical Study towards the Teaching Material Construction

Tsuyoshi SUGAOKA

By employing intuitive heuristics, people are prone to make erroneous intuitive judgments on uncertain events. This proneness reveals two kinds of serious gaps between logic and intuition: the first in application and the second in interpretation. The first one arises from the people's failure in the application of the rules of probability theory to the uncertain events, and the second one from the people's little confidence in the outcome of the application itself. Now, to stop the first gap, mainly two methods are proposed: (1) to incorporate those problems, which cannot be expected by the learners, into the teaching materials, and (2) to develop heuristics which are not only intuitively accessible to the learners but also mathematically correct in the light of probability theory. In order to fill the second gap, the use of appropriate probability experiments is suggested.

Only when the naive fallible intuitions are thus overcome by the logic and adequately mathematized, this author asserts, probabilistic concepts for real-life judgments on uncertain events are mastered.

はじめに

本研究は，子どもにどのような確率概念をどのようにして習得させたらよいかを，教材化の側面から理論的に明らかにすることを目的としている。

そのために，まずⅠでは，学習指導要領で確率の単元がどのように扱われてきたかを概観したあと，学校とくに高校における実践の蓄積から生まれた代表的な教材を中心に検討する。Ⅱでは，従来の教材研究で顧みられることのなかった確率判断に関する心理学的研究をとりあげる。Ⅲでは，Ⅱに基づいて，現実の確率判断における論理と直観の遊離の問題を明らかにする。Ⅳでは，まず，Ⅰでとりあげた実験を参考にして確率の実験を分類し，教材にとりいれるべき実験を明らかにする。ついで，確率の実験の効用，とりわけⅢで論じた遊離を解消するのにどのような役割を果たすかを明らかにする。Ⅴでは，ⅢとⅣをふまえて，子どもに確率概念を習得させるための新たな確率の教材化の方法を提案する。

Ⅰ．学校における確率の実践研究

A．学習指導要領における確率の扱い

最初に，学校での実践に大きな影響を与える学習指導要領において，確率の単元がどのように取り扱われてきたかを簡単にみておこう。

小学校では，1968年告示1971年実施の学習指導要領で確率の単元が現れた。しかし1977年の学習指導要領改訂により，1980年には姿を消した。

中学校では，小学校より1年遅れて，1969年告示1972年実施の学習指導要領で第2学年の内容として確率がとりあげられた。1977年告示で1981年実施の学習指導要領では，指導の学年が第3学年に移行し，内容も少し削減された。

高校では，戦後の新制高校ができた当初から確率の単元はあった。しかし，他の単元と同等の扱いを受けるようになったのは，1960年告示1963年実施の学習指導要領からで，「数学ⅡA」，「数学Ⅲ」，「応用数学」に含まれ

ていた。1970年に学習指導要領が改訂されると（実施は1973年から），確率の単元はさらに「数学一般」と「数学Ｉ」にも現れた。現行の1978年改訂1982年実施の学習指導要領では，確率は「数学Ⅱ」と「確率・統計」という科目の中に入り，「数学Ｉ」などからは姿を消した。

現在このように，確率は，中学校３年の数学と高校の選択科目で指導されている。

高校では，「数学Ｉ」に確率が入ったことを契機として，1970年代になって実践研究がいっそう本格的に行われるようになった。そして，その成果として最近ようやく完成度の高い教材がいくつか出現した。そこで，以下の節では，このような教材，または，このような教材による実践のうちの代表的なものの例として，北陸地区数学教育協議会（以下では北数協と略す）の場合と，北海道大学で作成された授業書について検討しよう。

B．北陸地区数学教育協議会の確率の実践研究

北数協では，「手でつくり，手で学ぶ数学」の一貫として確率も位置づけている[1]。確率が「わかる」にはまず「一定の生活経験」が必要だとして，この「一定の生活経験」を授業の中で組織している。すなわち，生徒に問題を与えて予想させてから，実際に実験させ，その結果をグラフに表現させたりするわけである。多数回試行の実験では，このグラフは，シェーマとして比率（相対度数）の安定性をイメージ化するものになる。このような「一定の生活経験」，つまり客観的法則の体得を基盤として，１回だけの試行における「起こりやすさの量」を数値化したものとして確率を導入している。こうして，より多くの実験のデータによってより正確にできる統計的近似値としてと同時に，実験によってその正しさが確かめられる理論的推定値として，確率の概念が形成されることを期待しているのである。言うまでもなく，前者の確率が統計的確率であり，後者の確率が数学的確率である。

具体的に実践をみていこう。

まず，北数協刊の確率の授業書を使って行われた実践に触れておきたい。福井県の高校教師中村隆二は，この授業書に従って“act 1”から“act 11”まで，ツマヨウジ，サイコロ，画鋲について，投げた結果を予想させてから，実際に実験を行わせるなどの授業を，高校２年生に週２回ずつ２学期の後半全部を使って，行った[2]。生徒は，13名全員働いており，－5と0の大小関係さえしっかりと把握していない程度の学力の者ばかりであった。

“act 3”で３個のサイコロを100回ふって１の目が１個だけ出る回数について予想させ，実験を行わせた。これを受けて“act 3”の実験で回数を100回から1,000回にふやしたときの結果のバラツキが大きくなるか小さくなるかを“act 8”で生徒にきいた。しかし意外にも12名中，大きくなると答えた生徒が６名，同じ程度と答えた生徒が６名で，小さくなると答えた生徒は全くいなかった。大きくなるという理由は大部分，「100回から1,000回にふやしたのだから比率が大きくなるからバラツキも大きくなる」と大同小異の内容であった。同じ程度という理由は，「100回でも1,000回でもかずがふえただけで，やり方は同じなんだからバラツキのはばは同じ程度であると思う」，「グラフをみて，いっていのはばのままで大きくなったり小さくなったりすると思う。だからバラツキは同じ程度だと思う」，「比率が0.……と出るのだから同じ程度だと思う」といった内容であった。そこで“act 9”では実際に1,000回サイコロをふらせた。“act 10”では，“act 8”と同様にして，回数を1,000回から10,000回にふやしたときの実験結果についてバラツキの大小をきいた。すると，生徒全員が小さくなると答えた。中村は次のように言っている。「生徒がここで何をどんなふうに獲得してくれたか定かでない。しかし，いつにない自信に満ちた生徒の表情は忘れることができない」。こうして「一定の生活経験」をもつことによって，生徒全員が大数の法則を理解したのである。

「手でつくり，手で学ぶ数学」を創造した石川県の農業高校の教師山岸昭則は，数学教育協議会における研究成果をふまえて次のような実践を行っている[3]。１学期間にわたって，生徒に毎時間問題を書いたプリントを手渡してノートに貼らせ，ゲーム・実験の予想，結果の考察，教師の解説などをノートの余白に書き込ませるという形式をとっている。その最初のプリントでは，M. Gardner の「ギャンブラーの証明」[4]を利用してつくった問題で，確率の誤解に基づく通念の正誤を生徒にきいている。

次に実験１において，12cm 間隔の多数の平行線の上に100本のツマヨウジを落としたら，平行線に何本ぐらいのツマヨウジがかかるかという問題で，予想させないで実験させている。

実験２では，平行線の間隔を６cm にして，実験１の結果を参考にして予想させてから，実験させている。こうして，集団現象には法則性があるということを体得させている。

実験３では，「ネコ家の人々」[5]の話から子ども４人の性別の分かれ方を予想させてから，４枚の硬貨を投げる問題に置き換えて実験させている。こうして，確率計算の前に，起こりやすさの量的相違の存在，いわば「量感」を確認させている。

次に，ツマヨウジの実験に関して問題を与え，起こりやすさの大小の判断のしかた，数値化の可能性をきき，「量感」を比率の計算によって数値化させている。同様に，実験1，2の結果について数値化を行わせ，グラフに表現させている。こうして「起こりやすさの量」の数値化・図式化を行い，その量の平均からのズレやバラツキをも視覚的にわからせようとしている。

実験4では，実験3の試行回数を100回から1,000回にふやしたときの実験結果のグラフの振幅の変化を予想させ，そのあと実際に実験させ，比率計算を行ってグラフをかかせることにより予想の当否を確かめさせている。こうして，比率の安定性，つまり大数の法則を視覚的イメージに訴えて理解させている。

これで実質的に統計的確率を導入したことになる。同様に数学的確率も「起こりやすさの量」を数値化したものとして導入している。確率計算のためには「起こりやすさの量」の一様分布性，すなわち等確率という前提を理解することが最も重要であると山岸は考えて，この理解に適した素材・シェーマとして，数学者J.R. d'Alembertも間違えたと言われる問題を次のようなゲーム（ゲーム1）につくりかえ，生徒に実際にゲームを行わせている。

A：コインを投げてゲームをしようじゃないか。1回目に表が出れば私の勝ち，1回目が裏なら次に君が投げて，表が出れば私の勝ち，裏が出ればあなたの勝ちとする。

B：いいだろう。しかし，不公平を改めてからですよ。なぜかというとこれには，次の3つの場合が起こりうるんだ。

1. 君が表を出せばゲームはそれまでだ。
2. 君が裏を出し，私が表を出す。
3. 君が裏を出し，私も裏が出る。

つまり，起こりうる3つの場合の2つが君の勝ちになり，不公平なのだ。

A：よし，それでは公平にするために，それぞれの手元にツマヨウジを20本持ち，私が勝ちなら，君は私に1本，君が勝ちなら，私は君に2本受渡しすることにしよう。

B：うん，それならよいだろう。どちらかが破産したらゲーム・セットとしよう。

このゲームの結果，ほとんど間違いなくBが破産する。実際に行った結果，Aが破産したのは，30班中1班だけであった。

この体験で何が等確率なのかを考える動機づけを生徒に与えたあと，ゲーム1の問題と本質的に同じ誤りに基づく「九半十二丁の謎」をゲーム化することによって数学的確率の定義を導入している。すなわち，2つのサイコロを同時に投げて出た目の合計が丁（偶数）か半（奇数）かにかける丁半博打で，丁になるのが12通り，半になるのが9通りあるとして，次のような「公平な」ルールを決めてゲーム（ゲーム2）を行う。そのルールというのは，AとBに分かれて40本ずつのツマヨウジを持ち，丁ならAの勝ちでBはAに3本渡し，半ならBの勝ちでAはBに4本渡すということにして，どちらかが破産するまでゲームを続けるということである。生徒には，ゲームを行わせたあと，試行回数，丁半の出た回数と比率を，班ごとおよびクラス全体の累計で表に書かせ，グラフに図示させる。その結果，生徒はAが必ずといってよいほど破産することを知るだけでなく，試行回数を累加したグラフから丁半の可能性が五分五分であることも体得することになる。そこで，生徒にこのような結果になった理由を考えさせ，「九半十二丁の謎」解きをすることによって数学的確率の定義を導入している。また，生徒の描いたグラフを利用して統計的確率も定義し，数学的確率と統計的確率の結びつきを理解させている。

次に，2つのサイコロを1回だけ投げたときに出る目の合計にかけるゲーム（ゲーム3）を行わせている。一人一人にかける目を選ばせ，その理由を書かせたあと，2人1組でこの実験を行わせ，クラスの全部の組の結果を記録させている。こうして，1回きりでは7が出るとは限らず，数学的確率は予測値にすぎないが，多数のデータを集めたときには相対的に7が多いということを生徒に体得させている。

以上のようにして，「教育的目的に適った問題」をゲームと実験でもって解かせていくなかで，生徒に確率計算に対する十分な動機をもたせると同時に，確率計算の意味の確かな理解をする基盤をつくっていることになる。そこで，このあと山岸は，実験4，ゲーム2,3の数学的確率を求めさせ，さらにいくつか問題演習をさせることによって，確率空間づくりをし，確率の加法定理・乗法定理，条件つき確率などを導入している。そして再びゲーム（ゲーム4,5）を行わせることによって，期待値の概念を体得させている。

C．北海道大学の確率の授業書

次に，矢島昭予が中心となって北海道大学教育学部教育方法学研究室が作成した『教授学研究シリーズ No.7 高等学校における「確率」の基礎概念の指導過程について　その1）授業書編』（以下では，北大の授業書と略す）を検討しよう[6]。

この授業書は，ドスト博士に案内されてペテルとマルサがルーレッタブルグの町を行くというストーリーを，生徒がたどることによって確率を学習できるように構成されている。

最初の実験1では，1枚の10円硬貨を2人1組で1人100回ずつ投げさせている。そして「ドスト博士の話し1」によって頻度論的立場から確率の定義を導入してから，実験の結果を表に整理させてグラフにかかせ，ついでクラス全体の結果も表とグラフにかかせている。こうして，コインの実験から，表Hの出る相対度数は1/2に近づくから，P(H)=1/2 と結論できるとしている。

実験2では，画鋲を10個ずつ10回投げさせている。この実験の前には，画鋲を10個投げたときの上下（針が上になる場合と下になる場合）を予想させて，実験を行うことへの動機づけを与えている。実験後は，各自の実験結果とクラス全体の結果を表にまとめさせてから，同じ紙に画鋲が下になる相対度数をグラフにかかせ，相対度数がどんな値に近づいているかを考えさせている。さらに，コイン投げの結論と比較させ，確率が1/2でないことを確認させている。

次に，男女の出生の確率の問題をとりあげている。まず男女の出生数はどちらが多いかを余市町と札幌市について予想させてから，それぞれの数年間の統計を与えて男女の相対度数を計算させている。このあと，起こりうる場合が2通りでも確率は同じになるとは限らないということを，コイン投げ，画鋲投げ，出生を比較することによって「ドスト博士のまとめ」として説明している。

そして，「ドスト博士のまとめ」の内容をいっそう強調するために，「あした死ぬ」確率は1/2だというルーレッタブルグの町長の主張に関する話を載せ，この主張の真偽を問うている。

次に，P(A)=1 と P(A)=0 の意味をお話として説明してから，定理1として，Laplace 流の確率を導入している。この導入は，20個中7個が白玉の袋から1個取り出してきたとき，その玉が白玉である確率はいくらになるかという問題についての，次のような「ドスト博士の話し2」によっている。

袋の中の玉のどの玉が出やすいという傾向はまったくないのだから，各玉がだいたい同じ回数だけ平等に取り出されるだろうと期待することは自然なことなんだ。

例えば，1,000回試みるとすれば，20個の玉のそれぞれは，1,000/20回づつあらわれると期待して良いだろうということになる。

袋の中には7個の白玉があるから白玉は

$$7\times\frac{1,000}{20}=1,000\times\frac{7}{20}\text{回}$$

得ることが期待されることになる。

つまり，相対度数の定義から，白玉の出る相対度数は，

$$\frac{1,000\times\frac{7}{20}}{1,000}=\frac{7}{20}$$ となるわけだ。

実は，この説明は，同様に確からしいという Laplace 流の確率の考えを導入した上で，これを有限回数の試行における生起回数の予測に適用して，Laplace 流の確率を定義しようとしているので，論点先取りと大数の法則の誤解という2重の間違いを犯している。

実験3は，発行年の異なる4種の1円玉計100個入れた袋からの復元抽出をくり返すもので，定理1による理論値と比較することによって，生徒が定理1に確信をもつようになることがねらいである。

このあと，「ドスト博士の話し3」で定理1から加法定理を導き，「ドスト博士の話し4」で，試行が独立なときの積事象の確率を予想させてから，乗法定理（定理3）を導いている。

この授業書の最後は，加法定理，乗法定理の応用として二項分布を扱っている。その中の実験4では，4個のサイコロを100回ふらせており，6の目が r 個（$r=0,1,2,3,4$）出る場合が何回あるかをこの実験値と二項分布の計算による理論値とで比較させている。

この授業書を使って授業を行った教師が，実験3の直前で生徒に感想を書かせたところ，「わかりやすかった」，「おもしろかった」という声が多かった。この点からすれば，少なくともここまでは，この授業書が成功した教材であるといってよいであろう。

また，実験についても次のような感想があるので，ある程度，授業書作成者のねらい通りに生徒が確率を理解したといえよう。

「表と裏の出方がコインも画鋲も同じ2通りしかないのに，投げるものをかえたら変わるなんて，おもしろいと思いました。」（実験1, 2）

「2通りの確率んときは1/2づつだと思っていたようで，ここではそうではないのだとはっきりわかって自分にとっては発見なのだ。」（実験2）

「同じ年数の少ないお金はめったに出てこないし，多いのはほとんどの人がひいていたのでほんとうに出ずらいんだと思った。」（実験3）

なお，以上で内容をみてきたように，北大の授業書を構成している論理は非常に単純で明快である。しかし，

山岸の教材と比較すると，生徒にとってはストーリーをたどること以外に論理の展開の必然性が乏しい。また，ある生徒が「小学生でもできることだ。バカにして」と感想を書いていたのは，実験１などでの素材の選び方，そして，これとかかわっての問題の配列の順序に改善の余地があることを示していると考えられる。

Ⅱ．確率判断に関する心理学的研究

確率判断に関する心理学は，確率現象に対する人間の判断の様相を明らかにしようとするものである。これまで，確率現象の問題に対する被験者の応答を分析するという方法で研究がすすめられてきた。ただし，Einhornによれば[7]，従来は，確率論と照合してどれだけ正しく人々が判断するかが研究の中心であったが，最近は，人々がどのようにして判断するかに焦点が合わされるようになってきた。その結果，確率現象に対して人々が特有の発見法を用いて誤った判断をするという傾向がいくつか明らかになった。このような人々の判断の傾向を知れば，それに対する対処のしかたとして，確率概念を習得させるための教材化を考えることができよう。

そこで，以下では，大数の法則に関するものを中心に，こうした心理学的研究によって明らかになった人間の判断の傾向をみていこう。

大数の法則は，相対度数の統計的安定性という経験法則を数学的に表現したものである。すなわち，確率変数列の平均が統計的に安定するための一般的条件を明らかにした定理である。

多くの人々は，短い確率変数列であっても，この大数の法則が成立すると考えがちである。たとえば，コインを６回投げるときに，表が出るのをＨ，裏が出るのをＴと表すと，コインの公平さを反映していないＨＨＨＨＴＨなどは，ＨＴＴＨＴＨより起こりにくいと判断する傾向がある[8]。

こういった傾向を，A. Tversky と D. Kahneman は，大数の法則を小数に適用したものを信じているという意味で，「小数の法則（law of small numbers)」の信念と呼んだ[9]。この「小数の法則」の信念は，確率変数列全体の本質的な特徴を，その任意の小部分が局所的に代表しているはずだという人々の期待にほかならないと考えて，のちに彼らは，これを「局所的代表性（local representativeness)」の期待とも呼んだ[10]。山岸の実践で導入として使われていた「ギャンブラーの証明」(p. 470) は，「賭博者の誤信」と呼ばれている事柄であり，この「局所的代表性」の期待を示したものである。

以上の結果は，大数の法則を過剰に適用する傾向を示している。では，大数の法則そのものは受け入れているのであろうか。

Kahneman と Tversky は被験者に次の問題を提示した[11]。

ある町は２つの病院でまかなわれている。大きい方の病院では毎日およそ45人の赤ん坊が生まれ，小さい方の病院では毎日およそ15人の赤ん坊が生まれている。赤ん坊全体のおよそ50％が男の子である。しかし，男の子の生まれる正確な割合は毎日毎日変わる。50％を越えることもあれば，50％に満たないこともある。

１年間，それぞれの病院で60％以上男の子が生まれた日が記録された。どちらの病院の方がそのような日が多かったと思うか。

その結果，A. 大きい方の病院，B. 小さい方の病院，C. ほぼ同じ（５％以内の差）の順に，選択した被験者の数は，12人（24％），10人（20％），28人（56％）であった。この結果を Kahneman らは，同等に「代表的な（representative)」結果は同等に起こりやすいと判断したからだと説明した。ここに，「代表的」とは，標本が母集団に類似しているという意味である。

その後，M. Bar-Hillel は，「60％以上」の部分を，70％以上，80％以上，100％などと変えて調査した[12]。そうすると，「60％以上」では Kahneman らとほぼ同様の結果が得られたが，「70％以上」では，28人の被験者が選択した割合はA：25％，B：43％，C：32％となった。「80％以上」や「100％」でも，B，C，Aの順に選択者が多かった。こういった結果について Bar-Hillel は次のように説明した。「60％以上」の標本結果は「非代表的（nonrepresentative)」に見えないから標本の大きさを無視するが，「70％以上」等の標本結果は「非代表的」として符号化されるから，小さい標本の方がこの結果と両立しやすいのである，と。

ところで，視点を変えると，この産院の問題は，標本平均の統計的安定性を問う内容になっていると筆者は考える。Kahneman らは明言してはいないが，この意味で，大数の法則に関する問題といってよい。実際，Kahneman らの研究結果は，中村の実践の “act 8” を実験的に確認したものになっている。Bar-Hillel の研究結果も参考にすれば，一般に，ただ単にどちらがバラツキが大きいかときけば，同じと答えるが，一定の程度を越えたバラツキはどちらの方が起こりやすいかときけば，標本の小さい方または試行回数の少ない方と答える傾向があるということになろう。

さらに，中村の実践における “act 9” と “act 10” の

結果は，実験により，このような傾向を変革できたことを示している。もちろん，この産院問題を解決するためには，大数の法則に関する問題として定式化することが必要である。しかも，あとで論じるように，この定式化はなかなか困難である。ちなみに Kahneman ら自身は，ソクラテス的な問答法を実験者が被験者と行うことにより，被験者が産院問題を解決するという可能性を示唆している[13]。

以上の大数の法則に関する確率判断で使われていると説明された「代表性発見法(representativeness heuristics)」は，次の積事象の確率に対する人々の判断の傾向により明確に現れている。

Tversky と Kahneman は，

> リンダはたいへん明るく，無遠慮にものを言う31歳の独身女性である。彼女は哲学を専攻した。学生のころは，人種差別と社会正義の問題に非常に関心をもっていて，反核運動にもまた参加していた。

というスケッチを被験者に与えて，次のうちどちらが可能性が大きいかを評定させた[14]：（A）リンダは銀行の金銭出納係である；（B）リンダは銀行の金銭出納係であって，女性解放運動で活動している。

その結果，確率・統計を学んでいない大学生86人中87%，確率・統計を学んだことのある大学院生では約50%[15]が，P(A)<P(B) と評定した。ところが，これらの文をリンダに関する他の6個の文と混ぜて，確率の大きい方から順位をつけさせたところ，同様の大学生で89%，大学院生で85%が，P(A)<P(B) と評定した。Tversky らは，このように $P(E_1)\leqq P(E_1\cap E_2)$ と判断するパターンを「合接効果（conjunction effect)」と呼び，（B）の方が（A）よりもリンダの特徴が詳述されているので実際のリンダに近いであろうという「代表性」によって人々は判断しているのだと説明した。なお，Tversky らは，被験者の大多数が $P(E_1\cap E_2)\leqq P(E_2)$ を抽象的な形では喜んで支持するが，「代表性」の直観と葛藤すると実際にはこのルールを破ってしまうという点で，抽象と具体の関係が，“if-then” 文の検証についての Johnson-Laird と Wason の発見[16]と対照的だと述べている[17]。

Tversky らによれば[18]，一般に「代表性」における対応関係には，(1) 1つの値と1つの分布，(2) 1つの例と1つのカテゴリー，(3) 1つの標本と1つの母集団，(4) 1つの原因と1つの結果，という4つの場合がある。主として，(1)はどれについて最もよく知っているか，(2)と(3)はどれが最もよく類似しているか，(4)はどれが最も原因として考えやすいかによって，「代表性」が決定される。大数の法則についての「代表性」は(3)であり，「合接効果」を生じる「代表性」は(2)であろう。

Tversky らは，また，「代表性」を人々が用いる理由として，すぐに使えること，実際の確率と相関している場合が多いこと，この相関を人々が過大評価していることという3点をあげている[19]。

しかしながら，人々が確率判断のさいに用いる発見法は「代表性」だけではない。

Tversky と Kahneman は，人々がよく使う発見法を次のようにまとめている[20]。対象や事象がクラスやプロセスに属している確率を判断することを求められると「代表性」を使う。1つのクラスの頻度や1つの特定の発展のもっともらしさを評定することを求められると，「例やシナリオの利用可能性（availability of instances or scenarios)」を使う。関連した値が利用できるときの数値の予測においては，「始点からの調整（adjustment from anchor)」を使う。たとえば，根元事象の確率の値を与えて，その和事象の確率を推定させると，始点となる根元事象の確率からの調整は全く不十分であり，その推定値は根元事象の確率にあまりにも近いままである。こうして和事象の確率は過小評価される。なお，Einhorn は，こういった発見法は，ルールの生成のしかたについてのルールであるという意味で「メタ発見法（metaheuristics)」であると言っている[21]。

Ⅲ．確率判断における論理と直観の遊離

ある確率概念が身についているといえるためには，その確率概念にかかわるどんな現実の問題に対しても，確率論に符合した行動をとることができなければならないであろう。このような行動が可能になるためには，その確率概念に関する確率論のルールを正しく適用できることが最も肝腎なことである，と筆者は考える。

しかし，現実の問題どころか，これをいくらか定式化した数学的な問題に対してさえも，確率論のルールはなかなか正しく適用できないのである。これは，Ⅱの例，すなわち，コイン投げ等の「局所的代表性」の問題，産院問題，積事象の確率に関するリンダの問題にも現れていた。

ただし，一口に正しく適用できないと言っても，その背景を考えると，さまざまな場合がありうる。Ⅱの例は，確率論のルールを経験的に，または論理的に知っていても，十分に適用できなかったり（リンダの問題など），適用したが，別の判断をしたりする（賭博者の誤信など）ということを示したものである。このような意味で，確率判断に関しては論理と直観の遊離がある。前

者の場合のように，問題にルールを適用できなかったために生じる遊離を適用の遊離と呼び，後者の場合のように，適用した結果を信頼しなかったために生じる遊離を解釈の遊離と呼ぶことにしよう。

適用の遊離は，ルールを十分に適用できるようになれば，正しい判断か，解釈の遊離かのどちらかに至る。では，どうすればルールを適用できるようになるのか。非常に抽象的で数学的に定式化された原型的な問題であればルールを適用できるのであるから，現在解決しようとしている問題と同型である（本質的に同じ構造をもつ）原型的な問題を見つけることができるようになれば，ルールは適用できるわけである。しかし，問題の同型性を認識することはきわめて困難であると指摘されている[22]。それでも，原型的な問題への同型変換という一種の定式化はルールを適用するための必須条件であろう。

解釈の遊離は，少なくとも現在解決しようとしている問題に関する限り，その人にとって，確率論が空理空論であることを示している。この遊離をひきおこした最大の原因は，ルールをたとえ論理的に理解していても，納得していないということにあると考えられる。したがって，この遊離を解消するためには，ルールを納得させるような手段を講じる必要がある。ここでは，誤っている直観をどのようにして正しい直観に質的に変化させるかが指導における大きな問題になる。

Ⅳ．確率の実験

A．確率の実験の分類の試み

一口に確率の実験と言っても，いくつかの場合がある。Ⅰでとりあげられた実験を参考にして分類してみよう。

生徒にとっての確率計算の可能性という観点からすれば，次の3つの場合がある。

① 実際に実験してみなければ確率がわからない場合（例：北大の授業書における画鋲投げ)。

② 生徒の知っている計算法によって確率計算は可能であるが，多くの生徒にとっては実験してみなければ確率がわからない場合（例：山岸の実践における「九半十二丁の謎」)。

③ 生徒にとっても実験してみなくても確率がわかる場合（例：北大の授業書における1枚のコイン投げ)。

また，確率の実験で教師が達成しようとする目標からすれば，次の3つの場合がある。

α　大数の法則における規則性（バラツキの減少）の発見。

β　大数の法則を利用しての確率の発見。

γ　大数の法則による，統計的確率と数学的確率との橋渡しの発見。

以上の①,②,③と α, β, γ の組合せで確率の実験は行われる。α は①～③すべてについて可能である。確率のゲームは主としてこの組合せで行われる。このゲームの目標は，バラツキが小さく，ほぼ一定の結果が生じるということの発見である。β は①と②について可能である。γ は③としか結びつかない。このように，実際には6通りの組合せしか存在しない。

ここで，a より b の方がレベルが高いということを $a<b$ と表現すれば，

①α＜①β，

②α＜②β＜③γ，

③α＜③γ

が成立する。$a<b$ のとき，$b\to a$ と直接進むことは，少なくとも1回 $a\to b$ と進んでからでなければ，不可能である。①α→①β または②α→②β と進むときには，統計的確率が導入されることになる。②β は，確率計算を生徒が知れば，直ちに③γ に変化する。③α→③γ と進む場合は，③α の部分に②α→②β が集約されている。

では，生徒に確率概念を習得させるためには，どのように実験をとりいれたらよいのか。α, β, γ をそれぞれ少なくとも1回は含んでいなければならないことは言うまでもない。とくに β については，統計的にしかわからない確率を認識させるために，①β は不可欠である。また，生徒の認識を大きく変化させて確率概念を意識化させるためには，生徒にとって意外性のある実験が望ましいであろう。この点で，規則性がないように見えたものに規則性があることがわかる①α と②α，統計的にしかわからないと思っていたものが計算できることを知る②β→③γ の筋道は有効である。

以上の点をふまえると，実験の教材が，重要なポイントをおさえつつ十分に意外性をもっているためには，最低限，

①α→①β，②α→②β→③γ………(＊)

を含んでいることが必要である。実際，山岸の実践では，①α（実験1,2)→②α'（実験3）→①β（実験1,2)→(②α→②β)（実験4)→②α（ゲーム1)→(②α→②β→③γ)（ゲーム2と実験)→③γ（ゲーム3)→…と進んでおり，(＊)を含んでいる。ただし，α' は，α と β の中間段階として，大数の法則を利用した数値化の直前の量化の状態を表している。また，北大の授業書は，(③α→③γ)（実験1)→(①α→①β)（実験2)→③γ（実験3)

→③γ（実験4）という順序になっており，山岸の実践に比べて，実験の面では意外性の乏しい教材であるといえる。

B．確率の実験の効用

次に，Ⅲで論じた論理と直観の遊離を解消する上で，実験がどのような働きをするのかを考えてみたい。

北大の授業書による授業のあと，生徒は次のような感想を書いている。

「ふだん気にもしていない10円玉や画鋲を使って相対度数などを出すなんて知らなかった。それに10円玉の表と裏が同じ1/2に近づいていくことも。」

「実際に自分でコインを投げて実験し，ほんとうに1/2の確率になるのかどうか確かめることができて満足した。」

この内容からすれば，③γは，直観を質的に変化させることによって解釈の遊離を解消する機能をもっているのではないかと考えられる。したがって，Aの(＊)は，③γを含んでいるので，この機能を期待できるように思われる。

ところが，ある生徒は次のような感想を述べている。

「コイン投げをしてわかったことが1つありました。例えば，表が3回か4回連続して出た後，今度は必らずといっていい程裏も同じく連続して出たことです。確率というものは，ある程度正確なものであるということが，この実験をして学んだことです。」

これは，まさしく実験によって「局所的代表性」を学んでしまったことを示している。しかも，「ドスト博士の話し2」が「局所的代表性」を正当化する内容になっているので，授業の中で「局所的代表性」に対する確信を強めていったであろうと推察される。

「賭博者の誤信」は，賭博者たちが数多くの体験を積んだ上で獲得した発見法である。したがって，ただ単に実験等を体験すれば，「局所的代表性」の期待を捨て，解釈の遊離を解消できるというものではない。実験結果等の見方が偏っていると，むしろ実験等の体験を重ねることによって，このような「代表性発見法」が強化されていくこともありうるのである。

それゆえ，解釈の遊離を解消するのに実験が有効なものとなるためには，「局所的代表性」そのものも実験と関連させて，とりたてて扱うことが必要であろう。たとえば，生徒に，同じ実験の結果の中から任意に2つの小部分の系列をとらせることによって，一般には「局所的代表性」は成立せず，大数の法則のみが成立するということを意識化させるのが，最も直接的な方法であろう。

ところで，W. Feller は，表が出れば＋1，裏が出ればー1として，コイン投げを続けると，累積した結果は正または負の一方に偏り続けることが多く，原点に戻ることがきわめて少ないということを，数学的に証明している[23]。このランダム・ウォークをうまく教材化できれば，「局所的代表性」が誤りであることを生徒に容易に意識化させることができると考えられる。

確率の実験のさいに，こういった方法を活用することによって，生徒は，大数の法則を正しく認識し，意識化できるようになる。すると，他の確率現象に対しても，無限の長さの確率変数列を想定できさえすれば，大数の法則に基づいた判断ができるようになる。

このような確率変数列を容易に想定することができるようにするには，できるだけ数多くの多様な実験を生徒に行わせるのがよい。しかし，実験を数多く行わせるかわりに，さまざまな確率現象を，Aで分類した実験で代表されるような少数の実験でシミュレートしてもよいであろう。その場合には，シミュレーションがほんとうにシミュレーションになっていることが生徒にわかるように，丁寧に指導することが必要である。

以上のようにして，大数の法則の正しい認識に支えられると，実験による確率現象の体得は一般化すると考えられる。解釈の遊離を解消するという③γも，このような状況で初めて一般化すると考えられるから，現実の確率判断における解釈の遊離を解消するための1つの方法は，(＊)のような③γを含む一連の実験を生徒に行わせることである。

さて，実験の効用という面では，論理と直観の遊離の解消のほかに，誤った思い込みを実験の事実によって修正するということも忘れてはならない。たとえば，ⅠのCで述べたように，北大の授業書による授業を受けた一人の生徒は，画鋲が下になる確率が1/2だと思っていたのに，そうでないことがはっきりわかったと言っている。また，ⅠのBで論じたように，中村の実践においても，実験によって，生徒全員が多数回の試行におけるバラツキの減少を認めるようになった。このような効用は，上で論じた解釈の遊離を解消する効用と同様に，実験が直観を質的に変化させる働きをもっているということに基づいていると考えられる。

Ⅴ．確率の教材化の方法

最後に，生徒に確率概念を習得させるためには，どう教材化すればよいのかを考察しよう。

Ⅱの心理学的研究は，人間の確率判断の傾向を明らか

にしたものである。したがって，この傾向に反する問題は，生徒にとって意外性のある問題になる。IIで被験者に与えられた課題自体もそのような問題である。しかし，単に奇抜な問題ではだめであり，同型の問題に確率論のルールを適用するときに参考になる，あるいは少なくとも意識できる問題であって，しかも，より高度な確率概念の習得に結びつくものでなければならないであろう。

この問題における意外性には，直観を質的に変化させないまでも，直観の限界を意識化させる働きがある。この働きを確実なものにするためには，問題の正答を事実によって検証できなければならない。したがって，IVのAで論じた①α，②α，②β→③γのいずれかをとりいれた問題であればよい。実験できない場合でも，たとえば「このクラスには誕生日の同じ人はいるか」という誕生日の問題のように，意外な事実を直接調べることができる方がよい。こうして，生徒は，直観を克服し，確率論のルールを使わなければどうにもならない場合があることを知ることになる。その結果，IIにおける被験者とは異なり，最初からルールを適用しようとする構えができるようになる。それゆえ，問題をただ漠然とながめるのではなく，その問題の構造を見きわめようとするようになるので，問題の定式化におけるギャップは縮まると考えられる。

生徒に確率概念を習得させるためには，教材の中に，このような意外性のある問題と，IVのAで論じた(＊)を含んだ問題を最低限とりいれるべきであろう。が，さらに，IIIで論じた論理と直観の遊離を解消するような教材化を行う必要がある。解釈の遊離の解消については，③γを含む一連の実験の効用としてある程度期待できるが，適用の遊離の解消についてはどうであろうか。意外性のある問題による上述の効用に期待するとしても，適用の遊離全般にわたって，そのような問題をつくるのは困難であろう。

ここで，Kahneman と Tversky による「肯定的分析(positive analysis)」と「否定的分析(negative analysis)」という概念[24)]が参考になる。「肯定的分析」とは，特定の正しくない反応を生み出した要因に焦点を合わせるものであり，「否定的分析」とは，なぜ正しい反応がなされなかったかを説明しようとするものである。確率判断について言えば，「肯定的分析」は，人々が判断，評価，予測を行うのに使う発見法に関係しており，「否定的分析」は，推論の基本的なルールを理解し適用するときの困難に関係している。ちなみに，IIで述べたEinhornの評価に従えば，確率判断に関する心理学的研究は，「否定的分析」から「肯定的分析」へと重点を移してきていることになる。

適用の遊離の問題は，「否定的分析」によれば，IIIで論じたような定式化の問題に帰着できる。「肯定的分析」に従えば，適用の遊離の解消法は，「代表性」などにとってかわる，人々にとって使いやすくて，正解に至りやすい発見法を開発するということになろう。この発見法の開発には，確率論のルール自体を適用しやすいように変形するという作業も必要である。このような発見法は，直観を数学化したものといえる。また，北数協で言っている「一定の生活経験」のもう一つの組織のしかたを示しているともいえるかもしれない。

もちろん，この発見法によっては，完全な問題解決に至りえないのがふつうである（もし必ず解決できるのであれば，確率論のルールは全く不要になり，この発見法を基にした実用的な確率論が別に構築できるということになろう)。一般には，この発見法を使うと，近似的な答が得られるにすぎない。完璧な答を得るためには，やはり確率論のルールに頼らざるを得ないのである。しかし，逆にこのことは，この発見法が，確率論のルールを適用した結果をチェックする機能をもっているということを意味している。

IIでみたように，確率現象に対しては，数学的に考えないで，すぐに直観的に判断し，それに基づいて行動しがちである。この点は，数学の他の分野とは異なった，確率の特徴である。そこで，筆者は，直観に焦点を合わせた教材化をすすめていく必要があると考える。具体的には，すでに論じたように，直観を克服するために，意外性のある問題を見つけていき，同時に直観を質的に変化させ数学化するために，実験と数学的な発見法を開発していくという研究の筋道があろう。こうして直観の克服と直観の数学化が連動すれば，より高度な確率概念を，現実の確率現象を解析するための道具として習得することが容易になると考えられる。

（指導教官　吉田章宏助教授）

注

1) 北陸地区数学教育協議会　1978「地区協のページ〔15〕北陸地区協」『数学教室』，No.308，pp.83-97.
2) 中村隆二　1977「予想と実験で学ぶ確率――授業書（北数協）で教えて――」，『数学教室』，No.292，pp.28-34.
3) ここでの論述は，数学教育協議会第28回全国研究大会(1980年)の「確率・統計」分科会における山岸の発表に基づいている。
4) Gardner, M. 1979『逆説の思考』（野崎昭弘監訳），日本経済新聞社，pp.32-33.
5) 同上，pp.34-35.
6) ここでの論述は，数学教育協議会第30回全国研究大会(1982年)の「確率・統計」分科会で提出された資料に基づ

いている。

7) Einhorn, H.J. 1980 Learning from experience and suboptimal rules in decision making. In T.S. Wallsten (ed.), *Cognitive processes in choice and decision behavior*, Lawrence Erlbaum Associates, p.1.

8) さらに，HHHTTT やHTHTHT などは結果の順序が不規則でないから，HTTHTHより起こりにくいと判断する傾向もある。要するに，6回投げるときには，HTTHTHのような系列が最も起こりやすいと判断してしまうのである。

9) Tversky, A. & Kahneman, D. 1971 The belief in the law of small numbers. *Psychological Bulletin*, **76**, pp.105-110.

なお，確率論で小数の法則と言えば，独立確率変数の和がPoisson 分布に従う条件を示した定理をさすが，Tverskyらのいう「小数の法則」とは何の関係もない。

10) Kahneman, D. & Tversky, A. 1972 Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive Psychology*, **3**, pp.434-437.

11) *Ibid.*, p.433.

12) Bar-Hillel, M. 1982 Studies of representativeness. In D. Kahneman, P. Slovic&A. Tversky (eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*, Cambridge University Press.

13) Kahneman, D. & Tversky, A. 1982 On the study of statistical intuitions. *Cognition*, **11**, pp.130-131.

14) Tversky, A. & Kahneman, D. 1982 Judgments of and by representativeness. In D. Kahneman, P. Slovic & A. Tversky (eds.), *Judgment under uncertainty: Henristics and biases*, Cambridge University Press, pp.91-94.

15) この大学院生に関する結果だけは，Kahneman & Tversky, *op. cit.*, p.126. による。

16) Johnson-Laird, P.N. & Wason, P.C. 1977 A theoretical analysis of insight into a reasoning task. In P.N. Johnson-Laird & P.C. Wason (eds.), *Thinking*, Cambridge University Press. によれば，多くの被験者は，「もしPならばQである」という命題を，抽象的な素材では検証できなかったが，具体例では検証できた。

17) Tversky & Kahneman, *op. cit.*, p.97.

18) *Ibid.*, p.87.

19) *Ibid.*, p.89.

20) Tversky, A. & Kahneman, D. 1974 Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. *Science*, **185**, pp. 1124-1131.

21) Einhorn, *op. cit.*, p.4.

22) たとえば，Hayes, J.R. & Simon, H.A. 1977 Psychological differences among problem isomorphs. In N.J. Castellan, Jr., D.B. Pisoni & G.R. Potts (eds.), *Cognitive theory*, Vol. 2, Lawrence Erlbaum Associates.

23) Feller, W. 1960 『確率論とその応用Ⅰ(上)』(河田龍夫監訳)，紀伊國屋書店，pp.95-125.

24) Kahneman & Tversky, *op. cit.*, pp.135-138.