

①

固有モード展開法による平面回路の解析と応用

Analysis of Microwave Planar Circuit  
with Eigenfunction Expansion Method and Its Application

穴田 哲夫

工学博士学位論文

1991年 2月 2日

穴田 哲夫

研究はマラソンの孤独なランナーに似ている。  
ゴールに至る道のりは決して容易ではない。

苦しさに負けて走る事を止めようと思うこともある。それでも、周囲からの暖かい励ましによって、ただひたすらゴールを目指して走り続ける。

そして、苦しさに打ち勝ってゴールをくぐり抜けると、また次の試合を目指して走り始める。

本論文は1972年より1990年までの18年間の研究成果をまとめたものである。

## 論文要旨

マイクロ波回路のストリップ線による集積回路化が盛んになるにつれ、マイクロ波からミリ波に至るまでの広い帯域を利用する回路技術の確立が望まれている。今後のマイクロ波回路の構成技術として、(1)回路の集積化、(2)高周波化、(3)広帯域化等が研究の大きな課題となっている。これらの点に着目して、電磁界分布の二次元的広がりを積極的に利用すれば、回路設計の自由度が一つ増すことから、分布定数回路では実現できない新しい機能回路を実現できるのではないかと、【平面回路】という考え方が益々重要となってきた。この平面回路の解析と合成の観点からより短時間に入出力特性のみならず内部の電磁界分布も含めて見通し良く計算する手法の開発が望まれている。本論文では、固有関数展開法による任意形状平面回路の数値解析法とその実際の応用に関する研究について述べている。具体的には

1. 平面回路の固有関数展開法に基づく電算機による数値解法の開発  
計算精度の検討
2. 任意形状不連続問題の平面回路手法による解析
3. ストリップ線回路を伝送線路理論で設計したときの適用限界の明確化  
及び機能解析による合成手法の開発
4. 平面回路内部の電磁界分布の解析法とその測定法の開発と共に  
入出力周波数特性と電磁界分布の周波数特性との関係  
等の研究について述べている。

本論文は、これらの研究をまとめたもので、各章ごとにその内容を要約すれば次の通りである。

第1章では、本論文の概要、背景、位置と意義について述べている。

第2章では、平面回路の解析と設計をより系統的に展開する方法を述べている。先ず平面回路周囲が磁気壁あるいは電気壁といった解析モデルを設定し、マックスウエルの式より電界と磁界に対応したモード電圧、モード電流を定義し、平面回路方程式を導出すると共に平面回路の姿態インピーダンスは境界条件を満足するグリーン関数で表現できる事を示している。次に、この姿態インピーダンスを用いて、平面回路が伝送線路の基本モードに対する実効インピーダンスの表現式を回路論的に導出している。

第3章では、平面回路の周囲が開放境界の平面回路を取り上げ、固有モードが解析的に得られる簡単な形状に対して入出力特性を数値計算し、本解析法の収束性、計算誤差を明確にしている。このとき、周波数特性を±1%以内の計算精度で得るためには必要帯域幅のほぼ4倍程度の帯域内に存在する固有モードを考慮すれば良い事を明らかにしている。又実際に計算に対応した回路を作製して実験でも確かめ、本解析法の妥当性を明らかにしている。

第4章では、任意形状を持った平面回路の境界条件付2次元固有値問題を精度高く且高速に解く方法について述べている。即ちRayleigh-Ritzの変分法による数値解法の計算精度を確かめるために、解析解と数値計算結果を比較検討している。このとき基底関数に三角関数 ( $f_i = \cos(l_i x/a) \cos(m_i y/b)$ ) を採用し、 $N = 25$ 個程度考慮すれば実用的な精度で計算する事を示している。又回路論的手法に基づく素回路法によって、他の手法では不向きな樹枝状フィルタ回路の固有モードを計算し、周波数特性と対応させて検討した。この結果、全くの任意形状平面回路では変分法による数値解法が適しているが、フィルタ回路のような細長い回路形状に対しては、素回路法が計算時間、計算精度等の点で優れていることを明らかにしている。

第5章では、第2章の理論を短絡境界平面回路に適用するための定式化と実際的なH面ステップ、H面T分岐・Y分岐回路等に適用し、解の収束性、計算誤差

について検討している。更に任意形状平面回路として、H面方形導波管くさび入りT分岐回路の周波数特性を計算し、くさびの大きさ $C = 0.5$ のとき最適特性となる事を明らかにしている。またH面 $90^\circ$ 円形ベンドの解析は、伝送線路モード( $\theta$ 方向に対して無限個のモードを考慮した事に相当)を用いることによって正確に周波数特性を計算できる事を示した。

第6章では、ストリップ線路の不連続問題の応用例として、ストリップ線路 $90^\circ$ コーナー、円形ベンド等の広帯域周波数特性の計算結果を示している。このとき、第4章で記述した変分法の一つであるRayleigh-Ritz法を用いて等価回路定数を算出した。これらの計算結果は、周波数が低いとき、従来の純静的な近似計算と一致しており、広帯域周波数特性(高次非伝搬モードのカットオフ近傍までの)を与えている。

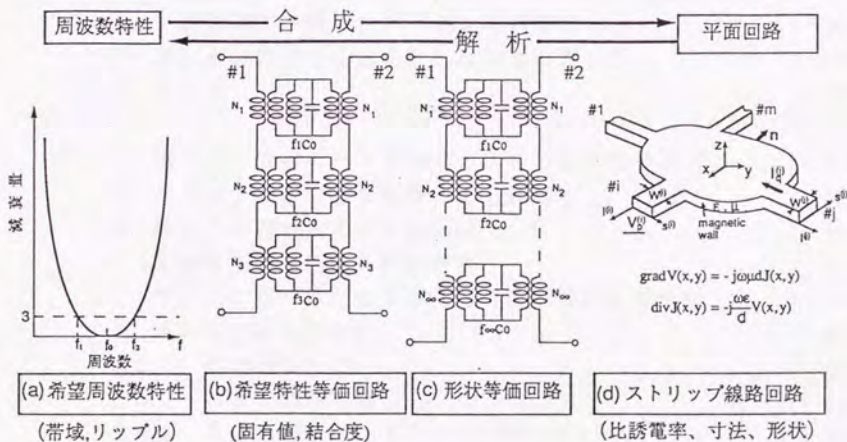
第7章では、トリプレート形ストリップ線ハイブリッド回路を平面回路的手法に基づいて最適設計を行うと共に従来理論で設計したときの適用限界を明確にした。伝送線路理論に基づいて設計されたストリップ線回路では、ストリップ線接続部での2次元電磁界分布の乱れとその相互干渉が考慮されていない為に動作周波数の上昇に連れて、回路全体を平面回路理論で設計し直す必要性を指摘した。次に、ストリップ線ハイブリッド回路を系統的に設計する手法を開発するため、分岐線路形3dBハイブリッド回路の機能解析を行った。特に接合回路部分の適切な設計の必要性を指摘し、実際に接合回路を平面回路理論に基づいて形状、結合位置を決定する事によって、本来の所用特性を回復する事を明らかにしている。更に設計に対応した回路をトリプレート形ストリップ線路で作製し、所望の特性が得られる事を実験によって確認している。

第8章では、平面回路の電磁界分布の視覚的観測が可能であれば、従来の伝送線路回路の特性改善、平面回路の固有モードの解析、集積回路の回路調整等に大変有益であると考えられる。本章では、コレステリック液晶を用いて、トリプレ

ート形構造による種々の伝送線路回路，共振器を製作し，電磁界の周波数特性を観測している．また短絡境界平面回路（H面導波管回路）の電磁界分布は上部開放の表面波トラフ形平面回路との間に存在するアナロジーを用いて，解析及び測定できる事を明らかにしている．更に電算機による電磁界の数値解析を行い，入出力特性と電磁界分布との関連を明確にした．

第9章では，各章のまとめを与えると共に今後の平面回路の問題点を整理している．残された問題点の一つは固有モード展開法による合成法の確立である．他の一つは平面回路理論をミリ波～光波帯への拡張の問題である．

以上，簡単に各章の概要を述べた．現在までの研究の状況を図式化すると下図のようになり，現在ようやく任意形状平面回路の計算機解析がほぼ可能になってきた．将来，所望の周波数特性を持った平面回路の形状決定（回路網の合成に相当する）といった問題を含めて，この種の回路独特の応用が期待される．



固有モード展開法による解析と合成

# 固有モード展開法による平面回路の解析とその応用

## Analysis of Microwave Planar Circuit with Eigenfunction Expansion Method and Its Application

	目次	項
第1章	総論	1
1.1	本論文の概要	1
1.2	本研究の位置と意義	4
1.3	平面回路の構造	6
第2章	平面回路の平面回路方程式による解析法	11
2.1	解析モデル	11
2.2	平面回路方程式の導出	15
2.3	平面回路内の電磁界	16
2.4	伝送線路の姿態インピーダンス	18
2.5	平面回路の姿態インピーダンス	20
2.6	平面回路の実効インピーダンスの導出	20
2.7	高次伝送姿態の伝搬を許した場合の取り扱い	22
2.8	まとめ	25
第3章	固有モード展開法による平面回路の解析	26
3.1	グリーン関数の固有関数による展開法	26
3.2	解析的に取り扱える平面回路	28
3.3	本解析法の妥当性と計算精度	33
3.4	解析的に取り扱える平面回路の広帯域周波数特性	35
3.5	実効幅近似の妥当性	46
3.5.1	固有値の計算	46
3.5.2	3次元の取り扱い	47
3.5.3	実効幅近似による2次元の取り扱い	48
3.5.4	放射の問題	50
3.5.5	各種形状平面回路のユニバーサル曲線の決定	50
3.5.6	検討, 考察	51
3.6	まとめ	52



第 4 章 任意形状平面回路の固有モードの数値解析	56
4.1 固有モードの数値解析法	56
4.2 Rayleigh-Ritzの変分法	57
4.2.1 定式化	57
4.2.2 線形試験関数の選択	60
4.2.3 数値計算例と計算精度	61
4.3 有限要素法	63
4.3.1 定式化	63
4.3.2 計算例の比較	66
4.4 素回路法 (領域分割法)	68
4.4.1 計算法	68
4.4.2 適用例	70
4.5 まとめ	76
第 5 章 短絡境界平面回路の応用	77
- H面方形導波管回路の不連続問題 -	
5.1 短絡境界平面回路の固有モード展開	77
5.2 短絡境界平面回路の解析法	79
5.2.1 解析モデル	79
5.2.2 実効的インピーダンス行列の導出	79
5.3 解析法の妥当性, 計算誤差	83
5.3.1 本解析法の妥当性を示す一例	83
5.3.2 平面回路の固有モードの打ち切り誤差	84
5.3.3 伝送線路内の非伝搬高次モードの打ち切り誤差	86
5.3.4 計算例	87
5.3.5 一般化 S 行列の適用例	91
5.4 短絡境界 H 面 T 分岐導波管回路の周波数特性	94
5.4.1 問題の定式化, 回路の正規化	94
5.4.2 固有状態の計算機解析	95
5.4.3 H 面 T 分岐回路の広帯域周波数特性	98
5.5 H 面円形ベンドの固有伝送モードとその伝送特性	102
5.5.1 解析法	102
5.5.2 直線導波管部及び曲がり導波管部の電磁界	102
5.5.3 円形ベンドのモード・インピーダンスの導出	104
5.5.4 円形ベンドの伝搬定数と固有伝送モードの数値計算	107

5.5.5	任意角H面円形ベンドの伝送特性	109
5.6	まとめ	111
第6章 トリプレート形ストリップ線路の不連続問題 —解放境界平面回路の応用—		112
6.1	ストリップ線路の不連続問題の電算機解析	112
6.2	トリプレート形90°コーナーの広帯域周波数特性	112
6.2.1	平面回路の姿態インピーダンス, 等価回路	113
6.2.2	電算機による平面回路の解析手順	115
6.2.3	問題の正規化 —角切断直角曲がりの 広帯域周波数特性—	117
6.2.4	固有姿態の計算	119
6.2.5	計算精度について	121
6.2.6	角切断直角曲がりの広帯域周波数特性	121
6.2.7	考慮すべき姿態数(N, q)の検討	122
6.2.8	角切断直角曲がりの周波数特性の計算結果	123
6.2.9	トリプレート形伝送線路の最適角切断量	123
6.3	トリプレート形90°円形ベンドの周波数特性	125
6.3.1	解析法	125
6.3.2	円形ベンドのモード・インピーダンスの導出	125
6.3.3	数値結果	128
6.4	扇形平面回路の周波数特性	130
6.4.1	解析法	130
6.4.2	数値結果	131
6.5	まとめ	132
第7章 平面回路手法によるストリップ線3dB分岐 線路形ハイブリッド回路の解析と合成		133
7.1	ストリップ線分岐線路形3dBハイブリッド回路	133
7.2	分岐線路形3dBハイブリッド回路の解析	135
7.2.1	平面的伝送線路モデル	135
7.2.2	解析法	136
7.2.3	一開口1/4ハイブリッド回路の 実効インピーダンス	137
7.2.4	基本的ハイブリッド回路の高周波特性	141
7.2.5	基本的ハイブリッド回路の改善	145

7.3	分岐線路形 3 dB ハイブリッド回路の合成	151
7.3.1	ハイブリッド回路の合成法	151
7.3.2	合成の考え方	152
7.3.3	伝送線路形ハイブリッド回路の機能解析	152
7.3.4	平面的伝送線路モデルによる 3 dB ハイブリッド回路の合成法	152
7.3.5	三開口接合回路の一設計	155
7.3.6	ストリップ線分岐線路形 3 dB ハイブリッド回路の 設計と実験	158
7.4	まとめ	159
	第 8 章 平面回路の電磁界分布の周波数特性	164
8.1	液晶によるトリプレート形平面回路の固有モードの測定	164
8.1.1	原理	164
8.1.2	実験準備	167
8.1.3	測定結果	167
8.2	プローブによる短絡境界平面回路の電磁界分布の 周波数特性の計算と測定	173
8.2.1	表面波平面回路方程式	173
8.2.2	方形導波管回路とトラフ形表面波平面回路の アナロジー	174
8.2.3	トラフ形表面波線路の分散特性	176
8.2.4	測定装置とプログラム	176
8.3	高周波電磁界分布の測定	179
8.4	考察・検討	180
8.5	まとめ	181
	第 9 章 結 辞	189
	謝 辞	195
	公表文献	196
	参考文献	205
	付録	208

## 1. 総 論

### 1.1 本論文の概要

近年、マイクロ波用半導体素子の急速な進歩に伴って、各種回路素子を一体化してマイクロ波回路システムの安定化をはかろうという気運が高まってきている。このような一体化の技術は、従来導波管を回路素子として構成したデスクリート回路からストリップ線利用の集積回路化(MIC)へ進展し、マイクロ波回路技術に大きな変革をもたらした。

このようなストリップ線路によるマイクロ波回路のMIC化は、一枚の誘電体基板上に色々な機能を持つ回路を併せて作ることができるために、集積回路の利点である高性能、小形、軽量、高信頼度を十分に生かすことができる。そのため、衛星通信、レーダー機器として不可欠な構成要素になっている。一方最近の大容量の情報通信の必要性に伴って、広帯域、高品質の通信システムの開発が望まれており、マイクロ波からミリ波および光波に至るまでの広い帯域を利用する技術の確立が要求されている。

そこで、今後のマイクロ波回路の構成技術として、(1)回路の集積化、(2)高周波化、(3)広帯域化などが研究の大きな課題となっている。しかし、マイクロ波、ミリ波帯での集積回路では、良好な集中定数素子が得難い事もあって、その設計は分布定数回路である一次元伝送線路理論を中心に設計されており、電磁界分布の二次元的広がりを考慮した考え方によるものは多くはなかった。

この点に着目して、東京大学の太越教授は、この電磁界分布の二次元的広がりを積極的に利用すれば、回路設計の自由度が一つ増すことから、分布定数回路では実現できない新しい機能回路を実現できるのではないかと、「平面回路」という考え方を提案した。平面回路の代表的な解析法として、太越、三好氏は、「円筒波に対するウェーブの解を利用し、積分方程式を連立方程式に直して計算機解析する手法」を確立された。この手法は、現在、境界要素法として電磁界解析の数値解析法の一つに発展している。その他、多くの研究者によって色々な解析手法が報告されており、1.2節に整理して記述する。

しかし、平面回路の解析と合成の観点からより短時間に入出力特性のみならず内部の電磁界分布も含めて見通し良く解析する手法の開発が望まれている。そこで、本論文では、任意形状平面回路の周波数特性の厳密な机上設計を行な

う為に、固有関数展開（特異値展開）法を応用する事を考えた。この考え方は、物理的意味が明確な上、簡単なアルゴリズムで容易に計算することが可能で、しかも従来の回路理論を積極的に利用できるといった特長を持っている。この手法は、Civalleri, Ridella, Bianco, 大越, 許, 三好氏らによって解析的に取り扱える平面回路に、また古くは1945年代にスレーターによって空洞共振器の概念的な説明に用いられたが、無負荷Q値がそれほど高くはない任意形状平面回路の解析にも適用できるかどうかを検討し、解析の計算精度、その収束性等を明らかにする必要がある。

本論文では、固有関数展開法による任意形状平面回路の解析と設計について述べる。

具体的には

1. 平面回路の固有関数展開法に基づく電算機による数値解法の開発と計算精度の検討
2. 任意形状不連続問題の平面回路手法による解析
3. ストリップ線回路を伝送線路理論で設計したときの適用限界の明確化及び機能解析による合成手法の開発
4. 平面回路内部の電磁界分布の解析と測定法の開発を行なうと共に入出力周波数特性と電磁界分布の周波数特性との関係等の研究を行う。

本論文は、これらの研究をまとめたもので、各章ごとにその内容を要約すれば次の通りである。

第1章では、本論文の概要、歴史的背景、位置と意義について記述している。

第2章では、平面回路の解析と設計をより系統的に展開させるために、まず、平面回路周囲が磁気壁といった解析モデルを設定し、電磁界EとHに対応したモード電圧、モード電流を定義し、電磁界のマックスウエルの方程式より平面回路方程式  $\text{grad } V_n = -Z_n J_n$ ,  $\text{div } J_n = -Y_n V_n$  を導出し、平面回路の姿態インピーダンスは境界条件を満足するグリーン関数で表現できる事を示す。次に、この姿態インピーダンスを用いて、平面回路が伝送線路の基本モードに対する実効インピーダンスの表現式を回路論的に導出している。

第3章では、平面回路の周囲が開放境界の平面回路を取り上げ、固有モード

が解析的に得られる簡単な形状に対して入出力特性を数値計算し、本解析法の収束性、計算誤差を明確にする。また実際に計算に対応した回路を作成して、実験でも確かめ、本解析法の妥当性を明らかにしている。

更に、ここでの磁気壁モデルに対して、正方形、円形、正三角形等の平面回路を作成し、実験により磁気壁の妥当性を検討している。

第4章では、固有モードの解析は、本質的に2次元固有値問題であり、任意形状平面回路に対して、電算機による数値解法に頼らざるを得ない。この数値解法としては、差分法、変分法（有限要素法を含む）、境界整合法、素回路法等が一般的に存在するが、これらの手法の計算精度を比較検討している。また回路論的手法に基づく素回路法によって、他の手法で不向きな樹枝状フィルタ回路の固有モードを計算し、周波数特性と対応させて検討している。

第5章では、平面回路の周辺の境界が短絡された場合を取り上げ、本解析法を一開口、二開口（H面ステップ、H面分岐）、三開口（T分岐、Y分岐）平面回路に適用し、解の収束性、計算誤差について検討している。

更に、短絡境界平面回路の応用として、従来のH面方形導波管回路システムで良く利用されている90°コーナー回路、90°円形バンド、H面方形導波管T分岐回路の周波数特性を計算し、Marcuvitzの"Wave-guide Handbook"の等価回路定数がどの程度の精度かを比較検討している。

第6章では、ストリップ線路の不連続問題への応用について述べている。ストリップ線路90°コーナー、円形バンド等の回路素子は良く用いられるが、その広帯域周波数特性は解析的にあまり明らかにされていない。そこで、本解析法の実際問題への応用例として、上記の回路素子の広帯域周波数特性を明らかにしている。このとき、第4章で記述した変分法の一つであるレイリー・リッソ法を用いて等価回路定数を算出している。

第7章では、前章までに解析した各種平面回路を伝送線路を介して幾つか組み合わせさせた機能回路の一つとして、分岐線路形3dBハイブリッド回路を取り上げ、これを解析、合成する方法を述べている。また実際に分岐線路形（プランチライン形）3dBハイブリッド回路の特性改善及び設計理論を確立してい

る。更に設計に対応した回路をトリプレート形ストリップ線路で作製し、所望の特性が得られる事を実験によって確認している。

第8章では、平面回路の電磁界分布の視覚的観測が可能であれば、従来の伝送線路回路の特性解析と特性改善、平面回路の固有モードの解析、集積回路の回路調整等に大変有益であると考えられる。本章では、コレステリック液晶を用いて、トリプレート形構造による種々の伝送線路回路、共振器を作成し、電磁界の周波数特性を観測している。又、H面導波管回路の電磁界分布も表面波トラフ形平面回路の間に存在するアナロジーを用いて、マイコン制御自動2次元測定装置を開発し、測定している。更に、簡単な形状を持つ平面回路に対して電算機による電磁界の数値解析を行い、入出力特性と電磁界分布との関連を明確にする。

第9章では、各章のまとめを与えると共に今後の平面回路の問題点を整理する。残された問題点の一つは固有モード展開法による合成法の確立である。最後に公表文献、参考文献、付録はそのあとにまとめてある。

## 1. 2 本研究の位置と意義

平面回路は大越教授によって提案されたように分布定数回路(一次元回路：一方向に対してのみ $\sim\lambda$ 、他の二方向に対して寸法 $<\lambda$ )と立体回路(三次元回路：三方向に対して寸法 $<\lambda$ )の中間に位置するものであり、二方向に対して寸法 $\sim\lambda$ 、一方向に対して寸法 $<\lambda$ であると定義する。上記のように平面回路を定義すると、図1.1に示すような構造に分類できる。

さて1次元的な分布定数線路の問題を拡張して、2次元の分布定数回路を考える。図1.2のように波長と比較して十分に薄い等方性媒質をはさんで、2枚の導体板が向かい合った構造である。このとき、境界近傍での端効果を無視すると、電界は導体に直角であるとしてよいが、電流は導体中を2次元的に複雑に分布して流れる。電圧 $V(x,y)[V]$ はスカラー量、電流密度 $J(x,y)[A/m]$ はベクトル量となる。従って、2次元回路の場合には、回路方程式は1次元の方程式を拡張して次のようにかける。

$$\text{grad } V(x,y) = -Z J(x,y)$$

$$\text{div } J(x,y) = -Y V(x,y)$$

ここで、 $Y$ は並列アドミタンス密度 $[S/m^2]$ 、 $Z$ は直列面インピーダンス $[\Omega]$ である。式(1)、(2)から $J$ を消去すると、電圧 $V$ に対する偏微分方程式が導かれる。

$$\operatorname{div}\left(-\frac{1}{Z}\operatorname{grad}V\right)=-YV$$

特に、構造が一様で $Y$ 、 $Z$ が位置に無関係な定数であれば

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \gamma^2 V = 0 \quad \gamma = \sqrt{ZY}$$

上式を与えられた境界条件のもとで正確に解くことにより、平面回路内の任意の電圧分布 $V(x, y)$ を決定するといった2次元境界値問題となる。

次に、これまでに提案された平面回路の解析法について整理する。

電磁場の境界値問題の数値解析は、今日の大型計算機の発展に伴って、著しく進歩した分野の一つである。従来、電磁場の境界値問題は古典解析学の手法(例えば、Wiener-Hopf法)による固有の解法を工夫し、整った形状に関する厳密解を求める事が行なわれてきた。ところが、計算機の利用を前提とする数値解法では、ある範疇に属する境界値問題を系統的かつ統一的に解析できる一般的なアルゴリズム(算法)を見出すことが目的となる。その先駆的役割を果たしたのは、東京大学の太越教授が提案した2次元平面回路の考え方である。この平面回路の数値解法に限ってこれまでに提案されている主な手法を列挙すると、次の通りである。

- (1) 太越、三好氏は円筒波に対するウェーバーの解を利用し、積分方程式を連立方程式に直して計算機解析する手法を確立した。
- (2) 許教授は固有関数展開法による「フォスタ形等価回路」を仲立ちとした数値解法及び太越、三好、イタリアのCivalleri, Ridella, Biancoらによる固有関数展開法に基いたTEM近似解法があり、これらはいずれも平面回路の解析と合成に有用な数値解法である。
- (3) カナダのSilvesterは有限要素法による数値解法を発表している。この解法は変分法の変形であり、固有関数展開によるHelmholtz方程式の一つの解法である。また、Harigntonはモーメント法によって最近、平面回路の解析を行っている。
- (4) 西ドイツのIngo Wolffはモード整合法によってマイクロストリップ線路不連続問題の解析を行っている。



(5) 大越教授及びアメリカのGuptaは素回路法で, Itoh, Mittra等はスペクトラムドメイン法によって解析を行っている.

(6) 最近, W. J. G. Hoefler, 北大の深井, 吉田らはTLM法(伝送線路行列による等価回路)によってマイクロストリップ線回路の時間領域解析を報告している.

このように, 各国の多数の研究者によって精力的に研究が行われているが, 日本ほど系統的に研究を行われていないのが現状である. また, 平面回路の合成に関しては, 日本が最も精力的に研究を行っている.

本論文は, 主として, マイクロ波からミリ波の広い帯域にわたって, 回路構成の基礎となる平面回路を, (2)の固有関数展開法をさらに任意形状まで解析できるように拡張し, 伝送線路の非伝搬高次モードの影響を考慮した解析法を確立した. その結果, 従来近似計算あるいは実験的に取り扱われていたストリップ線回路の不連続問題を系統的に解析する事が可能になった. また平面回路の入出力特性と平面回路内部の電磁界分布の周波数特性との関連についてある程度説明できるようになった.以上, 簡単に本論文の位置と意義について述べたが, 特に, 第7章のストリップ線回路の設計の考え方, 第8章の電磁場の周波数特性に関する内容は, 今後, 益々MIC回路の設計, 調整, 開発等に利用される事が期待される.

### 1.3 平面回路の構造

次に, 各平面回路の構造について述べる.

図1.3(a)の構造は, 従来のトリプレート形ストリップ線路で中心導体が幅の様な伝送線路から任意形状を持った平面状導体に置き換えられたもので, この形状の端には従来と同じように伝送線路が何本かこの平面状導体に接続され, マイクロ波の入出力回路を構成しているものとする. 中心導体の上下には外部の遮蔽効果もある金属板があり, 両金属板間には通常 $\epsilon$ なる誘電率を持った誘電体で充填されているものとする.

図1.3(b)の構造は, 図1.3(a)の場合で中心导体より上部の金属板と誘電体を取り去ってしまった構造になっており, これは従来のマイクロストリップ線路(不平衡形ストリップ線路)で, 伝送線路の部分が任意形状を持った平面状導体に置き直っているのに相当している.

図1.3(c)の構造は, 従来の導波管回路を薄くした構造となっており, 導波

管の上下の金属壁が任意形状となつて、これに導波管形の入出力線路が接続されている。

図1.3(d)の構造は、従来の平面回路では、回路内の誘電体の誘電率は均質となつていたが、誘電体媒質 ( $\epsilon(x,y)$ )、あるいは磁性体媒質 ( $\mu(x,y)$ ) が場所の関数となつている不均質な平面回路が考えられる。

図1.3(a)~(d)の平面回路は、上下を金属壁で囲まれた閉構造となつていたが、ミリ波、サブミリ波、光波帯では金属壁によるオーム損失、また回路寸法が小さくなり過ぎて工作精度を確保するのが困難である。図1.3(e)の構造は、表面波による高さ方向の閉じ込めと屈折率差による横方向の閉じ込めを利用した表面波平面回路が将来重要になると考えられる。しかし、本質的に外部に電磁界が漏れるので解析がかなり厄介である。

上記に示すような回路で、形状Sと入出力伝送線路の位置を色々に変化して所望の特性を得ようとするのが平面回路の考え方である。

その他、色々な構造の平面回路が考えられるか、これらは、まったく同じ平面回路方程式によって取り扱うことができるので、境界条件のはっきりした図1.3(a)~(c)について考察する。

各回路の特徴を比較すると次のようになる。つまり、図1.3(a)の回路は平衡形回路となつており、電磁場は外部に放射がないので回路の解析は容易であるが、能動素子をマウントしたり、回路を調整したりする時には不便である。図1.3(b)の回路は、この点便利であるが、平面回路の上部が一般に空気、下部が誘電体といった構造となつており、回路の解析が図1.3(a)に比して困難となり、実際の回路でも電磁場が外部にかなり漏れるので外部の影響を受け易く、又放射損が大きくなり回路のQが低下する。従つて、この種の回路を実際に使用する場合には、金属箱に収めて外部より遮蔽する必要があると考えられる。図1(c)の回路は半導体素子のマウントに便利のように導波管の高さを低くし、かつ低インピーダンス回路を実現したもので、放射損もなく解析も容易である。しかし、実際に任意形状を持った導波管形平面回路を作るのが困難であると考えられるので、強化プラスチックによる一体成形技術によって任意形状平面回路を作成し、金のスパッタリングによる作製方法が検討されている。以上、平面回路の特徴と利害得失を述べた。

## CLASSIFICATION OF ELECTRIC CIRCUIT

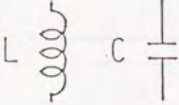
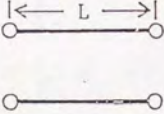
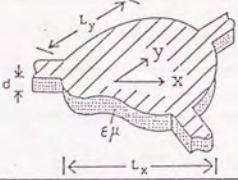
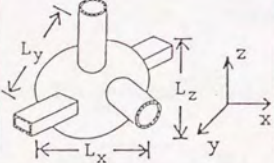
Circuit Structure	Name of Circuit	Size
	Lumped Element Circuit 0-Dimension in Space	$D \ll \lambda$
	Transmission-Line Circuit 1-Dimension in Space	$L \approx \lambda$ (100MHz~ Optical- frequency)
	Planar circuit 2-Dimension in Space	$L_x, L_y \approx \lambda$ (1GHz~ Optical frequency)
	Volume Circuit 3-Dimension in Space	$L_x, L_y, L_z \approx \lambda$

図1.1 電磁波回路の分類

ANALOGY BETWEEN TRANSMISSION-LINE EQUATION  
AND PLANAR CIRCUIT EQUATION

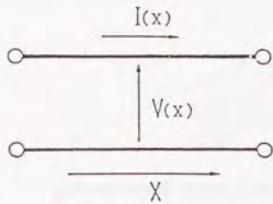
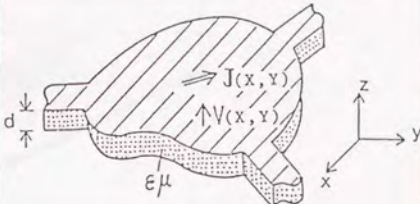
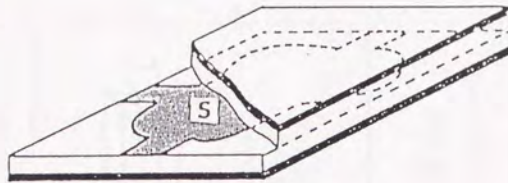
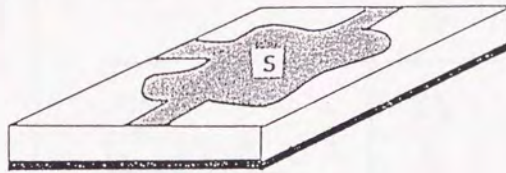
TRANSMISSION-LINE	PLANAR CIRCUIT
	
TRANSMISSION-LINE EQUATION	PLANAR CIRCUIT EQUATION
$\frac{\partial V}{\partial x} = -ZI$ $\frac{\partial I}{\partial x} = -YV$	$\text{grad } V = -ZJ$ $\text{div } J = -YV$
Z: Series Impedance ( $\Omega/m$ ) Y: Shunt Admittance ( $S/m$ )	Z: Planar Series Impedance ( $\Omega$ ) Y: Planar Shunt Admittance ( $S/m^2$ )
GENERAL SOLUTION	
$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - YZ V = 0$ $V = A e^{-j\beta x} + B e^{+j\beta x}$ $I = \frac{1}{Z_c} (A e^{-j\beta x} - B e^{+j\beta x})$ $Z_c = \sqrt{Z/Y} \quad (\Omega)$ $\beta = \sqrt{-ZY} \quad (1/m)$	$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) V - YZ V = 0$ $V(x, y) = A e^{-j\beta_t \cdot r} + B e^{+j\beta_t \cdot r}$ $J(x, y) = \frac{1}{Z_c} (A e^{-j\beta_t \cdot r} - B e^{+j\beta_t \cdot r}) \frac{\beta_t}{\beta_t}$ $Z_c = \sqrt{Z/Y} \quad (\Omega m)$ $\beta_t = \sqrt{-ZY} \quad (1/\Omega m)$

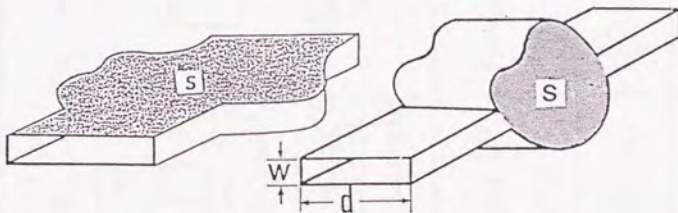
図1.2 伝送線路方程式と平面回路方程式のアナロジー



(a)トリプレート形平面回路

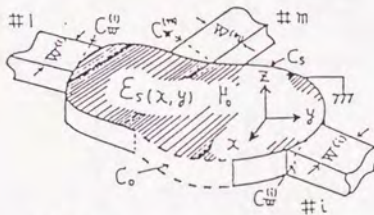


(b)ストリップ形平面回路

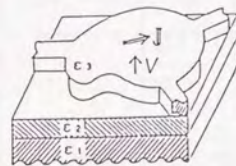


(c) H面導波管形平面回路

(c') E面導波管形平面回路



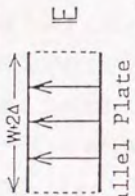
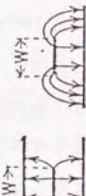
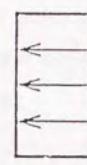
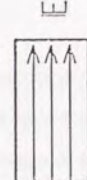
(d)誘電体平面回路



(e)屈折率分布形平面回路

図1.3 各種平面回路構造例

# PLANAR-TYPE TRANSMISSION LINE

	H-Plane Transmission Line		E-Plane Transmission Line
<p style="text-align: center;">Structure of Guide</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p>Parallel Plate Waveguide (TM mode)</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Triplate Microstrip</p> </div> </div>	 <p style="text-align: center;">Rectangular Waveguide (TM mode)</p>	 <p style="text-align: center;">Rectangular Waveguide (TE mode)</p>	
<p style="text-align: center;">Normal Mode Function</p>	$f_p(S) = \sqrt{\epsilon_p} \cos \frac{p\pi S}{W}$ <p style="text-align: center;"><math>p=0, 1, 2, \dots</math></p>	$f_p(S) = \sqrt{\epsilon_p} \sin \frac{p\pi S}{W}$ <p style="text-align: center;"><math>p=1, 2, 3, \dots</math></p>	$f_p(S) = \sqrt{\epsilon_p} \cos \frac{p\pi S}{W}$ <p style="text-align: center;"><math>p=0, 1, 2, \dots</math></p>
<p style="text-align: center;">Characteristic Impedance of Guide</p>	$Z_{cp}^E = \frac{j\omega\mu}{\gamma_p} \frac{d}{W} \quad (\Omega)$	$Z_{cp}^E = \frac{j\omega\mu}{\gamma_p} \frac{d}{W} \quad (\Omega)$	$Z_{cp}^H = \frac{j\omega\mu}{\gamma_p} \frac{d}{W} \quad (S)$
<p style="text-align: center;">Propagation Constant of Guide</p>	$\gamma_p = \sqrt{\left(\frac{p\pi}{W}\right)^2 - \omega^2 \epsilon \mu}$	$\gamma_p = \sqrt{\left(\frac{p\pi}{W}\right)^2 - \omega^2 \epsilon \mu}$	$\gamma_p = \sqrt{\left(\frac{p\pi}{W}\right)^2 - \omega^2 \epsilon \mu}$

$$\epsilon_p = \begin{cases} 1 & p=0 \\ 2 & p \geq 1 \end{cases}$$

図1.5 各種平面的伝送線路モデル

各種マイクロ回路の集積化に伴って、頻繁に利用されているマイクロ波平面回路を精度よく且系統的に解析する手法が要求されている。

ここでは、各種平面回路を統一的に解析するための一般論を述べる。具体的には平面回路の解析モデルの設定と解析に便利な平面回路方程式を導出する。更に、本平面回路方程式を用いて、伝送線路の特性状態インピーダンス、平面回路の状態インピーダンスを定義、導出すると共に、状態インピーダンスが求まると容易に回路の入出力特性（周波数特性）が求まる事を示す。なお、開放境界平面回路の取り扱いとは第3章に、任意形状開放境界平面回路の取り扱いは第4章に、短絡境界平面回路の取り扱いは第5章で説明する。

### 2.1 解析モデル<sup>(1)・(8)</sup>

ここで取り扱う伝送線路は図2.1(a), (b)に示すようにTEM, 又は準TEM状態が基本伝送状態のトリプレート線路, ストリップ線路, 又は図2.1(d)に示すようにTE<sub>10</sub>モードが基本伝送状態の方形導波管である。図2.1(a), (b)に示すような伝送線路では同図(c)に示すように幅 $W_0$ の導体ストリップの両側に漏れ電界が存在し、この漏れ電界は一般に伝送線路断面の構造、線路寸法、周波数、誘電率の関数である。

今、この漏れ電界により伝送線路片側で呈する等価的容量が、 $C_1(F/m)$ で与えられるとし、この漏れ容量を図2.1(c)に示すように片側 $\Delta$ だけ広げて取り込むことにすると、この $\Delta$ は式(2.1)で与えられる。今後、 $\Delta$ を

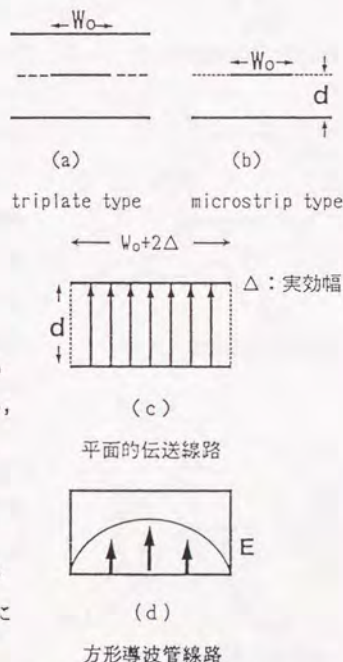


図2.1 各種平面的伝送線路モデル

実効幅と呼ぶことにする。

$$\Delta = C_1 d / \epsilon \quad (2.1)$$

実効幅 $\Delta$ が求まると図2.1(a), (b)に示す幅 $W_0$ のストリップ伝送線路は、同図(c)に示すように幅 $W = W_0 + 2\Delta$ で、両側開放の理想化された平面的伝送線路に近似的に置き直すことができる。

同様に、ここで解析するマイクロ波平面回路の構造も、図1.3(a), (b), (c)に示すようなトリプレート形、マイクロストリップライン形、回路周囲が短絡壁の導波管形をしており、この回路に $m$ 本の伝送線路（各伝送線路の幅 $W^{(1)}$ とする）が $P^{(1)}$ なる位置で平面回路に接続されている。

なお、ストリップライン形の場合、アース基板と回路の間には誘電率 $\epsilon$ なる誘電体で充填されており、平面回路の上部は空気である。

トリプレート形の場合、アース基板間は誘電体で充填されているものとする。このような回路の周辺は、伝送線路が接続されている場合を除いて、通常開け広げになっており、電磁界は平面回路 $S$ 外へ漏れ出ている。この漏れ電磁界は $d \ll \lambda$ なるときには非放射場となっているので、近似的に図2.2で実線で示す平面回路の形状を破線で示すように伝送線路を含めて、実効幅 $\Delta$ だけ広げて、その周辺に磁気壁を仮定すればよいということが既に知られている。

この結果、形状 $S$ となり、伝送線路の幅は $W^{(1)}$ となる。なお、トリプレートの場合、 $\Delta$ の

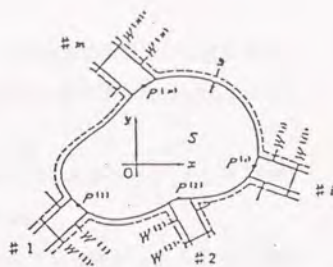
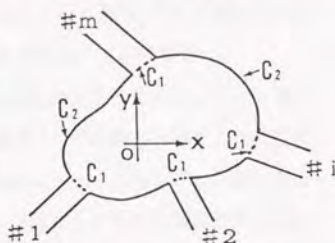
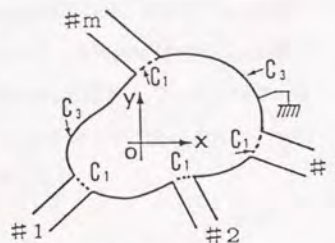


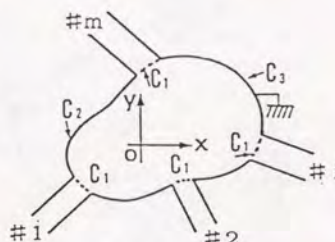
図2.2 実効幅だけ考慮した平面回路



(A) 開放境界平面回路



(B) 短絡境界平面回路



(C) 混合境界平面回路

図2.3 各種平面回路



大きさはほぼ  $d \cdot 2/\pi \cdot \ln 2$  であるが、ストリップラインの場合は誘電体の比誘電率と  $d$  の関数になると考えられる。従って、図1.3に示す回路を解析するためには、今後、図2.3に示す次の3つの平面回路モデルを用いる。

- (A) 開放境界モデル：入出力伝送線路が接続されている部分 ( $C_1$ ) 以外の境界の周囲 ( $C_0$ ) が開放 ( $C_2$ ) となっている場合。
- (B) 短絡境界モデル：入出力伝送線路が接続されている部分 ( $C_1$ ) 以外の境界の周囲 ( $C_0$ ) が短絡 ( $C_3$ ) となっている場合。
- (C) 混合境界モデル：入出力伝送線路が接続されている部分 ( $C_1$ ) 以外の境界の周囲 ( $C_0$ ) が開放 ( $C_2$ ) と短絡 ( $C_3$ ) が混在している場合。

これらのモデルを解析するために、図2.4に示す直角座標系を定義し、又、 $i$  番目の伝送線路上での座標系  $1^{(i)} - s^{(i)}$ 、及びその原点  $o^{(i)}$  は図2.5に示すように定義する。ここで斜線の面積の部分は本来伝送線路の一部と考えられるが、この解析では平面回路  $S$  への繰り込んでしまうことにする。このようにして平面回路の部分  $S$  を定義したときに生じる  $i$  番目の伝送線路と接続部分を、図2.5に示すように  $C^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ) と定義し、 $S$  の周辺で伝送線路の接続されていない部分を  $C_2$  と定義する。更に、平面回路の厚さ  $d$  は波長  $\lambda$  に比して薄いとし、金属板は理想導体、誘電体は無損失を仮定すると、図2.4に示すモデルで、誘電体内の電界は、 $E_z$  成分だけとなり、磁界は平面回路に平行な成分  $H_t = (H_x, H_y, 0)$  だけとなり、共に  $x, y$  の関数となっている。従って平面回路と見なすことができる。

$$E = (0, 0, E_z) \quad H = (H_x, H_y, 0) \quad (2.2)$$

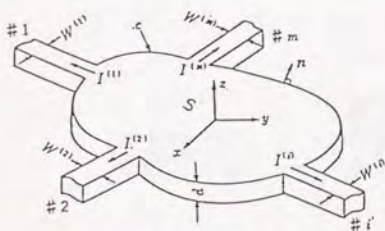


図2.4 平面回路モデル

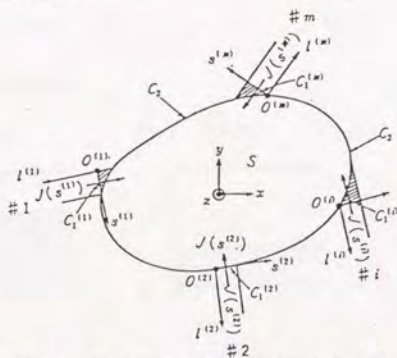


図2.5 平面回路と伝送線路内の座標系

## 2.2 平面回路方程式の導出<sup>(8)</sup>

図2.6に示すような高さ構造を持った平面回路の平面回路方程式を導出する。本平面回路は  $x, y$  面では一様となっており、高さ方向 ( $z$ ) には比誘電率  $\epsilon_s$  が高さの関数  $\epsilon_s(z)$  となった構造を有している。従って、平面回路の平面回路方程式は、電磁界ベクトルが高さ方向  $z$  に関する関数と面方向 ( $x, y$ ) に関する関数に変数分離できる。今、電磁界の各成分は式 (2.4) で与えられる  $f_n(z), g_n(z)$  関数を用いて、次式のように変数分離される。

$$\begin{aligned} E_z(x, y, z) &= E_z(x, y) g_n(z) \\ H_t(x, y, z) &= H_t(x, y) f_n(z) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{\epsilon_s(z)} \frac{d}{dz} (\epsilon_s(z) g_n(z)) + (k_0^2 \epsilon_s - \beta^2) g_n(z) = 0 \quad (2.4)$$

ここに  $g_n(z) = \sqrt{\frac{\epsilon_n}{\epsilon_s}} \cos\left(\frac{n\pi}{d} z\right)$  (図2.6(a)の場合には、 $n=0$ となり、その他は、第8章で記述する。)

$$\int f_n(z) \cdot g_m(z) dz = \delta_{nm}, \quad f_n(z) = \sqrt{\epsilon_s(z)} g_n(z)$$

従って、平面的伝送線路回路内の電圧、電流密度を式 (2.5) のように定義すると、

$$V = -E_z \cdot d, \quad J = H_t \times k = (H_y, -H_x) \quad (2.5)$$

電圧、電流密度は、 $(x, y)$  の関数として、式(2.6),(2.7)の平面回路方程式で与えられる。

$$\text{grad} V = -j\omega \mu d J = -jX J(x, y) \quad (2.6)$$

$$\text{div} J = -j \frac{\omega \epsilon}{d} V = -jB V(x, y) \quad (2.7)$$

但し、 $\text{grad}, \text{div}$  は、 $x, y$  に関する2次元演算子

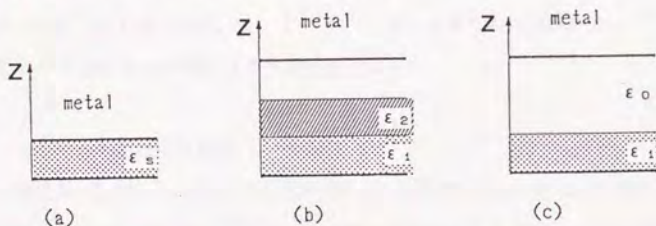


図2.6 平面回路の高さ方向の  $\epsilon_s(z)$  について

平面回路方程式(2.6)は、回路内に電流  $J(x, y)$  が流れると、その方向に  $jX J(x, y)$  だけの電圧降下が起こる事を意味している。又、式(2.7)は回路の上下に  $V$  の電圧が加わると  $jB V(x, y)$  の変位電流が上面より下面へ流れ出す事を意味している。この時、Maxwellの方程式より、次の関係式が成立する。

$$E_z(x, y, z) = -\nabla(x, y) \cdot g_n(z) \quad (2.8)$$

$$H_t(x, y, z) = [k \times J(x, y)] \cdot f_n(z)$$

但し、

$$\text{grad} E_z = Z(H_t \times k)$$

$$\text{div}(H_t \times k) = Y E_z$$

$$Z = j\omega \mu d, \quad Y = j\omega \epsilon / d$$

図2.4に示すような平面回路の入出力特性は、式(2.6)、(2.7)の平面回路方程式を与えられた境界条件及び励振条件で解けば求まる。即ち、 $V(x, y)$  は、式(2.9)を式(2.10)の境界条件で解けば求まる。

$$\nabla_t V + k^2 V = 0, \quad k^2 = \omega^2 \epsilon \mu \quad (2.9)$$

但し、 $\nabla_t = i \partial / \partial x + j \partial / \partial y$

$$n \cdot \nabla_t V = \begin{cases} j\omega \mu J^{(i)}(s^{(i)}) & \text{on } C_1^{(i)} \\ 0 & \text{on } C_2 \\ V = 0 & \text{on } C_3 \end{cases} \quad (2.10)$$

なお、 $i, j$  は、 $x, y$  方向の単位ベクトル、 $n$  は平面回路  $S$  に平行で縁に垂直な外向き単位ベクトルである。又、 $J^{(i)}(s^{(i)})$  は、 $i$  番目の伝送線路上  $s^{(i)}$  なる点で下側の平面回路 ( $x=0$ ) へ流入する電流密度である。

### 2.3 平面回路内の電磁界<sup>(9)</sup>

一般に式(2.11)で定義される2次元グリーン関数  $G(x, y; x_0, y_0)$  を用いると

$$\nabla_t^2 G(x, y; x_0, y_0) + k^2 G(x, y; x_0, y_0) = -\delta(x-x_0) \cdot \delta(y-y_0) \quad (2.11)$$

式 (2.9) の解  $V(x, y)$  は式 (2.12) となる。

$$V(x, y) = -\oint_{C_1 + C_2} V(x_0, y_0) \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{t}} G(x, y; x_0, y_0) ds_0 + \int \omega \mu d \oint_{C_0} J^{(1)}(x_0, y_0) G(x, y; x_0, y_0) ds_0 \quad (2.12)$$

但し、 $(x, y)$  は観測点、 $(x_0, y_0)$  は  $S$  の縁の任意の点、 $\mathbf{n}$  は点  $(x_0, y_0)$  での平面回路の外向き法線ベクトル、 $\nabla_{\mathbf{t}}$  は  $(x_0, y_0)$  に関する grad.、 $C_1 + C_2$  は平面回路の全周囲を意味する。

式 (2.12) のグリーン関数を求める場合、境界条件については任意性があつたので、式 (2.10) の境界条件に合わせてグリーン関数を求め、 $V(x, y)$  を整理すると表 2. 1 に示すような結果となる。なお、表 2. 1 で、グリーン関数を求め易いように A の場合  $C_1$  の部分は開放境界にくり入れ、B の場合には  $C_1$  の部分を短絡境界にくり入れた。C の場合についてはどちらにくり入れてもよいが端子で電流励振を考えて開放境界にくり入れた。

表 2. 1 各境界条件とグリーン関数による電圧分布

Case	境界条件	G の条件	2次元電圧分布 $V(\mathbf{r})$
A	開放	$\frac{\partial G}{\partial n} = 0$ on $C_0$	$V(\mathbf{r}) = j\omega \mu d \int_{C_1} \mathbf{j}_n(\mathbf{r}_0) \cdot G(\mathbf{r} \mathbf{r}_0) ds_0$
B	短絡	$G = 0$ on $C_0$	$V(\mathbf{r}) = \int_{C_1} V(\mathbf{r}_0) \cdot \frac{\partial G(\mathbf{r} \mathbf{r}_0)}{\partial n_0} ds_0$
C	混合	$G = 0$ on $C_3$ $\frac{\partial G}{\partial n} = 0$ on $C_1$ $C_2$	$V(\mathbf{r}) = j\omega \mu d \int_{C_1} \mathbf{j}_n(\mathbf{r}_0) \cdot G(\mathbf{r} \mathbf{r}_0) ds_0$
D	自由	Free	$V(\mathbf{r}) = -\frac{j}{4} \int k \cos \theta H_1^{(2)}(k\rho) ds_0$ $-\frac{1}{4} \omega \mu d \int_{C_1} \mathbf{j}_n(\mathbf{r}_0) \cdot H_1^{(2)}(k\rho) ds_0$

表2.1に示す結果より図2.1のA, B, Cの各場合の電磁場を解くためには, A, B, Cに対応したグリーン関数を求めればよい事が分かる. 又Dの方法によりA, B, Cの各場合に対する電磁場を求める事ができ, 大越, 三好氏はこの積分方程式を連立方程式に直して電子計算機によって取り扱っている. 本論文では, Cの開放, 短絡境界条件の混在した場合を取り扱う.

式(2.11)の解として, 式(2.11)で,  $\mathbf{n} \cdot \nabla_{t_0} G = 0$  on  $C_1 + C_2$ なる境界条件を付すると, 式(2.11)の解は表2.1より式(2.13)となる.

$$V(x, y) = j\omega\mu d \sum_c \int_{C_c} J^{(1)}(x_0, y_0) G(x, y; x_0, y_0) ds_0 \quad (2.13)$$

## 2.4 伝送線路の姿態インピーダンスの導出

図2.7に示す幅Wの両側開放あるいは短絡境界平面的伝送線路の伝送姿態は, 平面回路方程式によって導出された式(2.6)及び表2.2の境界条件より次式で与えられる.

$$V_p(l, s) = A_p e^{-\gamma_p l} f_p(s) \quad (2.14)$$

但し,  $p$ は伝送線路のモード数,  $\gamma_p$ は電磁波の進行方向の伝搬定数,  $A_p$ は振幅,  $f_p(s)$ は伝送線路の正規化固有関数である.

又, この時の電流密度は, 平面回路方程式(2.7)より次式で求められる.

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(l, s) &= -\frac{1}{j\omega\mu d} \text{grad} V \\ &= \frac{\gamma_p^{(1)}}{j\omega\mu d} A_p e^{-\gamma_p l} f_p(s) \end{aligned} \quad (2.15)$$

なお, ここでの電圧, 電流は進行波についてのみ考えている. 電圧, 電流密度から平面的伝送線路の進行波電力を求める. 伝送電力は, ポインティングベクトルを伝送線路断面にわたって積分する事によって求まるので, 電圧と電流密度の定義式(2.6)を用いると次式を得る.

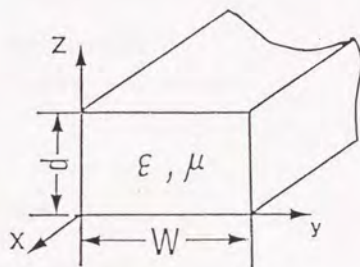


図2.7 平面的伝送線路

表 2. 2 伝送線路の固有モード

$$\frac{d^2 f_p}{d s^{(1)2}} + h_p^2 f_p = 0 \quad 0 \leq s^{(1)} \leq w^{(1)}$$

$$\gamma_p^2 = h_p^2 - k^2$$

$$\frac{1}{W^{(1)}} \int f_p(s^{(1)}) f_q(s^{(1)}) d s^{(1)} = \delta_{pq}$$

(1) ストリップ線路

(2) 方形導波管線路

$$f_p^{(1)} = \sqrt{\epsilon_p} \cos \frac{(p-1)\pi}{W^{(1)}} s^{(1)}$$

$$f_p^{(1)} = \sqrt{2} \sin \frac{p\pi}{W^{(1)}} s^{(1)}$$

$$h_p^{(1)} = (p-1)\pi / W^{(1)}$$

$$h_p^{(1)} = p\pi / W^{(1)}$$

$$P_i = \operatorname{Re} (k E_z \times H_t)_i d s$$

$$= \operatorname{Re} \{ J_1(l, s) f(z) \} \left\{ -\frac{V(l, s)}{d} g(z) \right\} dz ds$$

$$= \operatorname{Re} \{ J_1(l) V(l) W \} = \gamma_p^{(1)} |A_p|^2 W / (j\omega \mu d)$$

モード電圧，モード電流の定義より，進行波伝送電力は，両者の積で表わせる。故に，次式が成り立つ。

$$V_p I_p^* = \frac{\gamma_p^{(1)}}{j\omega \mu d} |A_p|^2 W \quad (V_p = |A_p|) \quad (2.16)$$

式(2.16)より，平行平板伝送線路の特性状態インピーダンスは  $V_p = Z_{cp} I_p$  なる関係を用いて次式を得る。

$$Z_{cp}^{(1)} = \frac{j\omega \mu}{\gamma_p^{(1)}} \cdot \frac{d}{W^{(1)}} \quad (\Omega) \quad (2.17)$$

$$\gamma_p = j\beta_p = \{ (p\pi/W^{(1)})^2 - \omega^2 \epsilon \mu \}^{1/2}$$

但し， $\gamma^{(1)}$  は  $(i, p)$  状態の伝搬定数， $p = 0, 1, 2, 3, \dots$

## 2.5 平面回路の姿態インピーダンス

2.3で定義および導出した平面回路方程式より、平面回路の姿態インピーダンスを導出する。平面回路は、接続された伝送線路から励振されるので、その電磁界は、励振源におけるグリーン関数Gを用いて記述される。

今、j番目の伝送線路のq番目伝送姿態電流 $I_q^{(j)}$ のみで、この平面回路を励振したときの平面回路内の電圧は式(2.13)より

$$V(x, y) = -j\omega\mu d \frac{I_q^{(j)}}{W^{(j)}} \int G(x, y; x_0, y_0) \cdot f_q(s^{(j)}) ds_0 \quad (2.18)$$

$$\text{但し, } J^{(j)}(x_0, y_0) = I_q^{(j)} / W^{(j)} \cdot f_q(s^{(j)}) \quad (2.19)$$

従って、i番目の伝送線路のp番目の伝送姿態の電圧は、式(2.19)と姿態電圧の定義より次式として導出される。

$$V_p^{(i)} = \frac{1}{W^{(i)}} \int V(x_0, y_0) \cdot f_p(s^{(i)}) ds^{(i)} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} &= -j\omega\mu \frac{d}{W^{(i)}W^{(j)}} \int f_p(s^{(i)}) \cdot G(x, y; x_0, y_0) \cdot f_q(s^{(j)}) ds^i ds^j \\ &= Z_{pq}^{ij} I_q^{(j)} \end{aligned} \quad (2.21)$$

故に、姿態インピーダンスは、式(2.22)で与えられる。

$$Z_{pq}^{ij} = - \frac{j\omega\mu d}{W^{(i)}W^{(j)}} \int f_p(s^{(i)}) \cdot G(x, y; x_0, y_0) \cdot f_q(s^{(j)}) ds^i ds^j \quad (2.22)$$

## 2.6 平面回路の実効インピーダンスの導出

ところで平面回路を実際に使う場合、伝送線路内の基本姿態のみ伝搬し、高次姿態は非伝搬となる周波数帯で使用するか、又はこのような条件が成立する伝送線路構造で使用する場合が多い。このような場合、基本姿態入力に対して平面回路との不連続で生じる高次姿態の反射波は伝送線路を伝搬せず、不連続部近傍でのエネルギーの蓄積のみ寄与するだけである。この効果を各伝送線路のq次までの伝送姿態を考慮して基本姿態に対する実効的インピーダンス行列を回路理論に基づいて計算する。

今、姿態電圧、姿態電流に対し、伝送線路の開口数mによって、次の電圧、電流ベ

クトルを定義する。

$$\mathbf{V}_p = (V_p^{(1)}, V_p^{(2)}, \dots, V_p^{(m)})^t \quad (2.23)$$

$$\mathbf{I}_p = (I_p^{(1)}, I_p^{(2)}, \dots, I_p^{(m)})^t \quad (2.24)$$

式(2.22)の姿態インピーダンスの定義より，次の行列方程式を得る。

$$\begin{vmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{V}_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} & \dots & \mathbf{Z}_{1q} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & \dots & \mathbf{Z}_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Z}_{q1} & \mathbf{Z}_{q2} & \dots & \mathbf{Z}_{qq} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{I}_q \end{vmatrix} \quad (2.25)$$

式(2.25)において，実際には無限個のモードを考慮しなければならないが，計算の便宜上  $q$  次で打ち切っている。回路の非伝搬高次モードは伝送線路の特性インピーダンス  $Z_{op}^{(1)}$  で終端されていると見なすことができる。従って，

$$\mathbf{V}_2 = -Z_{c2} \mathbf{I}_2, \mathbf{V}_3 = -Z_{c3} \mathbf{I}_3, \dots, \mathbf{V}_q = -Z_{cq} \mathbf{I}_q \quad (2.26)$$

式(2.23)，(2.24)より各伝送線路の  $q$  次までの高次モードを考慮した基本モードに対する実効インピーダンスを導出すると次式で与えられる。

$$\mathbf{Z}_{eff} = \mathbf{Z}_{1..1} + \Delta \mathbf{Z}^q \quad (2.27)$$

$$\Delta \mathbf{Z}^q = - \begin{vmatrix} \mathbf{Z}_{12} \\ \mathbf{Z}_{13} \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_{1q} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{Z}_{22} + \mathbf{Z}_{c2} & \mathbf{Z}_{23} & \dots & \mathbf{Z}_{2q} \\ \mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} + \mathbf{Z}_{c3} & \dots & \mathbf{Z}_{3q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Z}_{q2} & \mathbf{Z}_{q3} & \dots & \mathbf{Z}_{qq} + \mathbf{Z}_{cq} \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} \mathbf{Z}_{21} \\ \mathbf{Z}_{31} \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_{q1} \end{vmatrix} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{Z}_{pq}^{ij} = (Z_{pq}) \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.29)$$

式(2.27)で，第2項は伝送線路の不連続部で生じる高次非伝搬姿態の基本伝送状態への寄与を表わしており，高次モードがすべて非伝搬であるから， $\Delta \mathbf{Z}^q$ は純虚数行列となる。なお，基本姿態に対するS行列は回路理論より式(2.30)で与えられることになる。

$$\mathbf{S} = (\mathbf{Z}_{eff} + \mathbf{Z}_{c1})^{-1} (\mathbf{Z}_{eff} - \mathbf{Z}_{c1}) \quad (2.30)$$

但し， $\mathbf{Z}_{c1} = \text{diag.} (Z_{c1}^{(1)}, Z_{c1}^{(2)}, \dots, Z_{c1}^{(q)})$



## 2.7 高次伝送姿態の伝搬を許した場合の取り扱い<sup>(6)</sup>

ここでは、基本伝送姿態の他に高次伝送姿態の伝搬を許した場合、あるいは他の姿態への姿態変換波も含めて解析するためには、新たに一般化S行列を定義する必要がある。

今、式(2.25)において、伝搬姿態と非伝搬姿態に分け、各部分行列に分解すると式(2.31)を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_A \\ \mathbf{V}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{AA} & \mathbf{Z}_{AB} \\ \mathbf{Z}_{BA} & \mathbf{Z}_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_A \\ \mathbf{I}_B \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

但し、 $\mathbf{V}_A$ ,  $\mathbf{I}_A$ は伝搬モードの高次姿態電圧、電流

$$\mathbf{V}_A = (V_1, V_2, \dots, V_m)^t$$

$$\mathbf{I}_A = (I_1, I_2, \dots, I_m)^t$$

$\mathbf{V}_B$ ,  $\mathbf{I}_B$ は非伝搬モードの高次姿態電圧、電流

$$\mathbf{V}_B = (V_n, \dots, V_q)^t$$

$$\mathbf{I}_B = (I_n, \dots, I_q)^t$$

$\mathbf{Z}_{AA}$ ,  $\mathbf{Z}_{BB}$ は正方行列となるように部分行列に分解する。

図2.8に示すように、非伝搬高次姿態の各開口には特性リアクタンス行列 $\mathbf{V}_B = -\mathbf{Z}_{CB} \mathbf{I}_B$ を接続し、整理すると次式を得る。

$$\mathbf{V}_A = \{ \mathbf{Z}_{AA} - \mathbf{Z}_{AB} (\mathbf{Z}_{BB} + \mathbf{Z}_{CB})^{-1} \cdot \mathbf{Z}_{BA} \} \mathbf{I}_A = \mathbf{Z}_A \mathbf{I}_A \quad (2.32)$$

基本伝送姿態の他に高次伝送姿態の伝搬を許した場合の実効インピーダンス行列は式(2.32)によって与えられる。従って、この場合の[S]行列は形式的に式(2.30)と同様の形で与えられる。

$$\mathbf{S} = (\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_{CA})^{-1} (\mathbf{Z}_A - \mathbf{Z}_{CA}) \quad (2.33)$$

但し、 $\mathbf{Z}_{CA} = \text{diag.} (Z_{CA}^{(1)}, Z_{CA}^{(2)}, \dots, Z_{CA}^{(q)})$

更に、入射波、反射波の縦行列A, Bを定義すると姿態電圧、電流行列との関係は

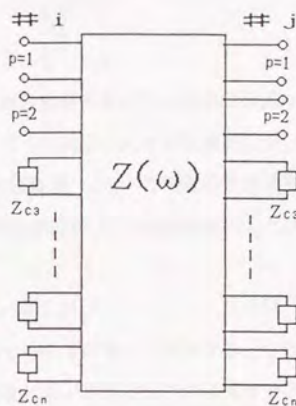


図2.8 高次伝送姿態の伝搬

を許した場合

式(2.34)となる。

$$V = A + B, \quad I = Z_C^{-1}(A - B) \quad (2.34)$$

この上記の関係式を式(2.31)に代入して整理すると

$$\begin{pmatrix} B_A \\ B_B \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} Z_{AA} & Z_{AB} \\ Z_{BA} & Z_{BB} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_{CA} & 0 \\ 0 & Z_{CB} \end{pmatrix} \right\}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} Z_{AA} & Z_{AB} \\ Z_{BA} & Z_{BB} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Z_{CA} & 0 \\ 0 & Z_{CB} \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} A_A \\ A_B \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

ここに、 $B_A$  は伝送モードに対する入射波と反射波の関係を、又、電力の伝送には寄与しないが不連続部で  $k$  番目の入射波モードによって励振された非伝搬高次モードとの関係は  $B_B$  で与えられる。いま、 $k$  番目の入射姿態 ( $A_k$ , その他の姿態は零) で平面回路を励振したとき、式 (2.35) において伝送行列  $[T_{pk}]$  を定義すると次式で与えられる。

$$B_1 = T_{1k} A_k, \quad B_2 = T_{2k} A_k, \quad \dots, \quad B_q = T_{qk} A_k \quad (2.36)$$

ここに、 $[T_{pk}]$  は  $k$  番目の入射モードが  $p$  番目のモードにモード変換するときの変換係数を意味する。実際に式 (2.35) を求める場合には、平面回路内の固有モード、及び伝送線路の非伝搬高次モードをある有限個で打ち切らざるを得ないが、原理的には入射波に対する反射波、透過波、及びモード変換波の大きさを計算することができ、どの位の固有モードを考慮すれば収束するかは数値計算によって確かめる必要がある。さらに、基本モード以外の高次伝送モードを入射した場合、あるいは他のモードへのモード変換波も含めて解析するためには入射電力波、反射電力波を新たに定義する。今、 $i$  番目の伝送線路の  $k$  番目の伝送モードが運ぶ電力をポインティング・ベクトルより入射電力波に対して計算すると

$$\begin{aligned} |a_k^{(1)}|^2 &= \frac{1}{2} \int ds^{(1)} dz \cdot \operatorname{Re} \left[ \frac{\gamma^{(1)}}{j\omega\mu} |A_k^{(1)}|^2 \cdot e^{(\gamma_{p1} + \gamma_{p2})z} \cdot (f_k(s^{(1)}))^2 \right] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\beta_k^{(1)}}{\omega\mu} W^{(1)} d |A_k^{(1)}|^2 & (\text{伝搬モード}) \\ 0 & (\text{非伝搬モード}) \end{cases} \quad (2.37) \end{aligned}$$

同様に反射電力波について計算し、入射電力波、反射電力波を次のように定義する。

$$a_k^{(1)} \equiv Z_k^{(1)} \cdot A_k^{(1)}, \quad b_k^{(1)} \equiv Z_k^{(1)} \cdot B_k^{(1)} \quad (2.38)$$

$$Z_k^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{\beta_k^{(1)}}{\omega \mu} \cdot W^{(1)} d \quad (\text{伝搬モード})$$

$$0 \quad (\text{非伝搬モード})$$

従って、式 (2.38) の関係より、S 行列は式 (2.39) で与えられる。

$$S_{pk} = Z_p^{1/2} T_{pk} Z_k^{-1/2} \quad (2.39)$$

但し、 $a_k = (a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \dots, a_k^{(m)})^t$

$$b_k = (b_k^{(1)}, b_k^{(2)}, \dots, b_k^{(m)})^t$$

$$Z_k = \text{diag.} (Z_k^{(1)}, Z_k^{(2)}, \dots, Z_k^{(m)})$$

式 (2.39) で定義された  $S_{pk}$  ( $p \neq k$ ) は  $k$  番目の入射モードが  $p$  番目の反射モードに変換するときのモード変換行列を意味する。又、 $S_{kk}$  は各伝送線路の  $k$  番目のモード間の結合を意味しており、一般に  $S_{pk}$  は式 (2.40) で与えられる。

$$[S_{pk}] = \begin{pmatrix} S_{pk}^{11} & S_{pk}^{12} & \dots & S_{pk}^{1m} \\ S_{pk}^{21} & S_{pk}^{22} & \dots & S_{pk}^{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{pk}^{m1} & S_{pk}^{m2} & \dots & S_{pk}^{mm} \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

この式で、 $S_{pk}$  は  $j$  番目の伝送線路の  $k$  番目のモードの単位電力波に対して、 $i$  番目の伝送線路の  $p$  番目の反射電力波がどの位あるかを意味している。

## 2. 8 まとめ

本章では、平面回路を統一的且系統的に解析するために、平面回路周囲の境界が開放と短絡の混在した解析モデルの設定と解析に便利な平面回路方程式を導出した。電磁界解析の問題を回路解析の問題に置き直して解析し、従来の回路理論を平面回路に適用することによって統一的且系統的な取り扱いが可能になった。更に、本平面回路方程式を用いて、伝送線路の特性姿態インピーダンス、平面回路の姿態インピーダンスを定義し、グリーン関数より導出すると共に、この姿態インピーダンスより、回路の入出力特性（周波数特性）が容易に求まる事を示した。特に、基本波姿態に対する実効的インピーダンスと非伝搬高次姿態のリアクティブ・エネルギーの実効的インピーダンスへの寄与を与える簡潔な表現式を与えた。

更に、基本伝送姿態の他に高次伝送姿態の伝搬を許した場合の実効インピーダンス行列を定義した。これらの具体的な適用方法は第3章以下に述べる。また高さ方向に比誘電率が分布した場合については第8章に述べる。

本章では、第2章で述べた平面回路理論の妥当性と収束性を確かめる意味で、固有値、固有関数が解析的に与えられる簡単な回路形状の開放境界平面回路を取り上げ、入出力周波数特性を計算する。

まず、3.1節で、固有モード展開法による平面回路の解析法について述べ、3.2節で、どのような回路形状が解析的に取り扱えるかを固有モードと共に示す。3.3節で、ここで説明した解析法の妥当性と収束性を検討する。更に、3.4節で、実際の回路に適用する例として、正方形回路に伝送線路が、1本〜4本接続されたときの周波数特性を計算し、伝送線路中の高次非伝搬モードの影響、正方形回路中の固有モードと周波数特性との関係等について考察した。最後に、3.5節で、本解析モデルの妥当性を計算と実験によって確認する。なお、ここでは、主に、開放境界平面回路の解析例について記述し、第5章で短絡境界平面回路の解析例と収束の具合を示す。

### 3.1 グリーン関数の固有関数による展開法<sup>(1)・(2)</sup>

結局、平面回路内での電磁場を知るためには、グリーン関数を表3.1で対応した境界条件で計算すればよい。このグリーン関数を求めるために式(3.1)で与えられる固有関数系を定義する。

$$\nabla^2 \phi_n + k_n^2 \phi_n = 0 \quad \text{in } S \quad (3.1)$$

但し、式(2.11)を解く場合、求めるグリーン関数に対応した境界条件を満たしているものとする。固有値は小さい順に番号付けし、固有値  $k_n$  に対応した境界条件を満たしているものとする。このとき固有関数、固有値には、次の性質のあることが証明されている。

- (1)  $k_n$ ,  $\phi_n$  は実定数、実関数
- (2)  $\int \phi_m \phi_n d s = \delta_{mn}$  (正規直交化)
- (3)  $\int \nabla \phi_m \nabla \phi_n d s = k_m \delta_{mn}$
- (4)  $\{\phi_n\}$  は完備系を作る。

表3.1 正規直交固有関数系

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial y^2} + k_n^2 \phi_n &= 0 && \text{in } S \\ n \cdot \text{grad } \phi_n &= 0 && \text{on } C_1, C_2 \\ \phi_n &= 0 && \text{on } C_3 \\ \frac{1}{S} \int \phi_n \phi_m \, dx dy &= \delta_{nm} && (\text{直交性}) \\ 0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \end{aligned}$$

今、式(2.12)で  $n \cdot \nabla_{x_0} G(x, y; x_0, y_0) = 0$  on  $C_1 + C_2$  なる境界条件を付したときのグリーン関数は、表3.1で示す性質を持った固有関数系  $\phi_n(x, y)$  で展開することができ、式(3.2)で与えられる。

$$G(x, y; x_0, y_0) = \sum_n \frac{\phi_n(x_0, y_0)}{k^2 - k_n^2} \phi_n(x, y) \quad (3.2)$$

従って、平面回路Sでの固有関数が何等かの方法で計算できると、平面回路内の電圧は伝送線路より流入する電流  $J^{(i)}$  より式(3.3)で計算される。

$$V(x, y) = \sum \left[ -\frac{j \omega \mu d}{k^2 - k_n^2} \sum_n J^{(i)}(x_0, y_0) \phi_n(x_0, y_0) ds_0 \right] \phi_n(x, y) \quad (3.3)$$

次に、この平面回路に幅  $W^{(i)}$  ( $i=1, 2, \dots, m$ )、高さ  $d$  なる平行平板伝送線路を  $m$  本接続し、 $j$  番目の伝送線路の  $q$  番目のモード電流  $I_q^{(j)}$  で同伝送線路より平面回路を励振したとき、 $i$  番目の伝送線路の  $p$  番目のモード電圧の規準面での値  $V_p^{(i)}$  は次式で与えられる。

$$V_p^{(i)} = Z_{pq}^{ij} \cdot I_q^{(j)} \quad (3.4)$$

この式で、 $Z_{pq}^{ij}$  をモードインピーダンスと呼び、式(3.5)で与えられる。

$$Z_{pq}^{ij} = -j \frac{1}{C_0} \sum \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_n^2} \cdot n_{pn}^{(i)} n_{qn}^{(j)} \quad (3.5)$$

但し,  $C_0 = \epsilon_0 S/d$        $\omega_n = k_n / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$

$$\Gamma_{pn}^{(1)} = \frac{\sqrt{\epsilon_p}}{W^{(1)}} \left( \int \psi_n(x_0, y_0) \cdot \cos \frac{p\pi S}{W^{(1)}} ds^{(1)} \right) \quad (3.6)$$

なお, 式(3.5)の形より,  $Z_{pq}^{ij} = Z_{qp}^{ji}$ となっていることから, このモードインピーダンスでは相反定理が成立している。

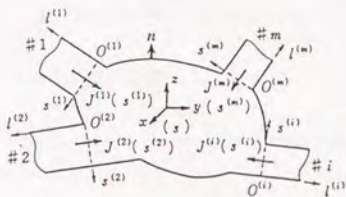


図3.1 m開口平面回路

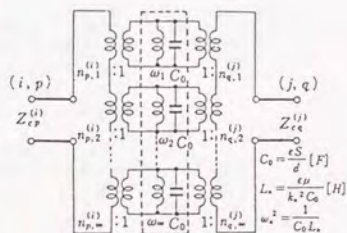


図3.2 平面回路の等価回路

姿態インピーダンス, 姿態特性インピーダンスの考え方をすると平面回路の等価回路は図3.2の如くなる。平面回路の共振回路(固有モード)に伝送線路モードが理想変圧器を通して結合した形である。

この等価回路より,  $q$  次の高次非伝搬モードに対するインピーダンス行列は式(2.27)となる。式(2.27)で,  $\Delta Z^q$  は高次モードの基本モードへの寄与を表わしており, 高次モードがすべて非伝搬であるとき純虚数行列となり  $Z_{in}$  はリアクタンス行列となる。

### 3.2 解析的に取り扱える平面回路

ここでは, 既に固有関数と固有値が解析的に分かっている平面回路形状と固有モードを整理して記述する。

#### (1) 正方形平面回路の固有姿態(直角2等辺3角形を含む)

図3.3(a)に示すような大きさ  $a \times a$  を持つ正方形平面回路を考える。

第3章の表3・1を満たす固有関数群は式(3.7)で与えられる。

$$\psi_{mn}(x,y) = \sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_n} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\frac{n\pi}{a}y \quad (3.7)$$

$$k_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad \varepsilon_m = 1 (m=0), 2 (m \geq 1)$$

又、図3.3(b)のように  $y=x$  の対称性を利用し、偶姿態と奇姿態に分類したときの固有関数系は、式(3.8)のように表現できる。

(a) 偶姿態:

$$\psi_{mn}(x,y) = \frac{\sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_n}}{2} \left( \cos\frac{m\pi}{a}x \cdot \cos\frac{n\pi}{a}y + \cos\frac{n\pi}{a}x \cdot \cos\frac{m\pi}{a}y \right) \quad (3.8a)$$

(b) 奇姿態:

$$\psi_{mn}(x,y) = \frac{\sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_n}}{2} \left( \cos\frac{m\pi}{a}x \cdot \cos\frac{n\pi}{a}y - \cos\frac{n\pi}{a}x \cdot \cos\frac{m\pi}{a}y \right) \quad (3.8b)$$

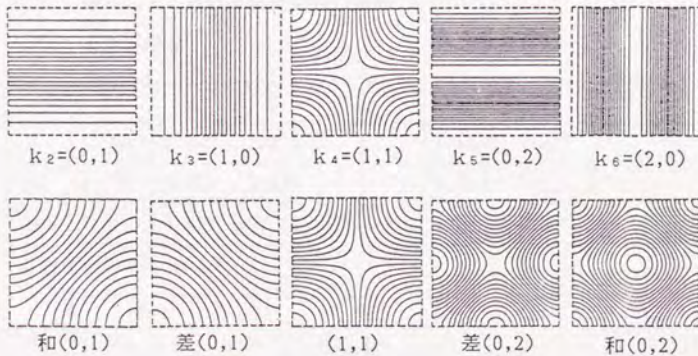
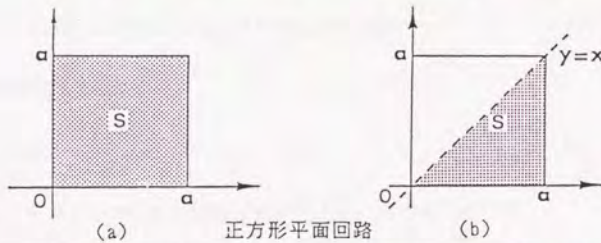


図3.3 (c)正方形平面回路の固有関数系



(2) 円形平面回路の固有姿態

円形回路：図3.4(a)に示す円形平面回路の固有値、固有関数は次式で与えられる。なお、式(3.9)の形より、 $n \neq 0$ の場合に2重に縮退している。

$$\psi_n(r, \theta) = A_{nm} J_n\left(\frac{\chi_{nm}}{a} r\right) \{\cos n\theta \text{ or } \sin n\theta\} \quad (3.9)$$

但し、 $J_n(\chi_{nm}) = 0$ 、 $k = \chi_{nm}/a$ 、 $A_{nm}$ は正規化定数

$$A_{nm} = \sqrt{\epsilon_{nm}} \sqrt{\frac{\chi_{nm}^2}{\chi_{nm}^2 - n^2} \frac{1}{J_n(\chi_{nm})}} \quad A_{00} = 1$$

扇形回路：図3.4(b)に示す回路形状は、入出力結合線路と任意の結合度 $g$ 得られるためにMIC回路によく用いられるので整理しておく。

扇形回路周囲の磁気壁の条件より

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial r} = 0 \quad \text{at } r=a \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_n}{\partial \theta} = 0 \quad \text{at } \theta=0, \theta=\alpha$$

$$\psi_n(r, \theta) = A_{p,q} J_{\frac{n\pi}{\alpha}}\left(\frac{\chi_{n\pi, m}}{\alpha} r\right) \cdot \cos \frac{n\pi}{\alpha} \theta \quad (3.10)$$

共振周波数 $f_0$ は

$$f_0 = \frac{\chi_{n,m}}{2\pi a \sqrt{\epsilon \mu}} \quad (3.11)$$

$\chi_{n,m}$ を $n$ 、 $m$ の小さな値について示すと、次のようになる。

表3.2 扇形の固有値の計算例

$$\alpha = 10/6\pi$$

$$\alpha = 7/6\pi$$

n	1	2	3
1	1.309	2.093	2.819
2	4.753	5.613	6.437
3	7.941	8.828	9.688

n	1	2	3
1	1.6562	2.717	
2	5.127	6.322	
3	8.3259	9.566	

正規化定数A： $d=a/b$

$$A_{p,q} = \sqrt{\frac{\epsilon_p}{1 - (n\pi/\alpha/\chi_{p,q})^2}} \cdot \frac{1}{J_{n\pi/\alpha}(\chi_{p,q})} \quad (3.12)$$

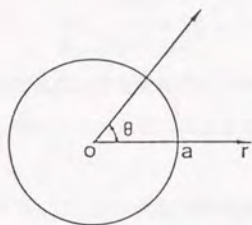


図3.4(a)円形平面回路

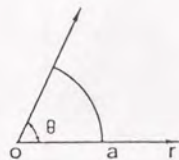


図3.4(b)扇形平面回路

(3) 正三角形平面回路の固有姿態<sup>(a)</sup>

図3.5の座標系で定義した正三角形の固有値  $k_{lmn}$ , 固有関数  $\psi_{lmn}(x, y)$  を表3. 1の直交性, 正規化条件を満たすように求めると式(3.13)となる.

$$\psi_{lmn}(x, y) = C_{lmn} \{ \cos lA \cdot \cos(m-n)B + \cos nA \cdot \cos(n-l)B + \cos nA \cdot \cos(l-n)B \} \quad (3.13)$$

$$k_{lmn} = \frac{4\pi}{3a} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$$

$$\text{但し, } A = \frac{2\sqrt{3}}{3a} \pi \left\{ \left(x - \frac{a}{2}\right) \cdot \cos \alpha + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{6}a\right) \cdot \sin \alpha + \frac{a}{3} \right\}$$

$$B = \frac{2\sqrt{3}}{9a} \pi \left\{ \left(x - \frac{a}{2}\right) \cdot (\cos \beta - \cos \gamma) + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{6}a\right) \cdot (\sin \beta - \sin \gamma) \right\}$$

$$\beta = \alpha + \frac{2\pi}{3}, \quad \gamma = \beta + \frac{2\pi}{3}, \quad (\alpha = 3/2\pi) \quad C_{lmn}: \text{正規化定数}$$

次に, 固有値が等しく固有関数が異なる姿態が存在するので,  $\alpha = 3/2\pi$  のときの固有関数を  $\psi^0$  とすると, それから各々  $120^\circ$ ,  $240^\circ$  回転したときの固有関数が考えられる. それを  $\psi^{120^\circ}$ ,  $\psi^{240^\circ}$  と置くと次式に示すように和と差により, 偶姿態, 奇姿態の固有関数を求めることができる.

$$\text{奇姿態: } \psi_{\text{odd}} = \psi^{120^\circ} - \psi^{240^\circ}$$

$$\text{偶姿態: } \psi_{\text{even}} = \psi^{120^\circ} + \psi^{240^\circ}$$

正三角形平面回路の周波数特性を計算するためには正規化定数  $C$  を求めることが必要である.

$$\frac{1}{S} \int \psi^2 ds = \frac{2}{S} \int_{x=0}^{x=a/2} \int_{y=0}^{y=\sqrt{3}x/2} \psi^2 dx dy = 1$$

上式の正規化の計算を偶姿態，奇姿態について行ない，整理すると表3.3となる。

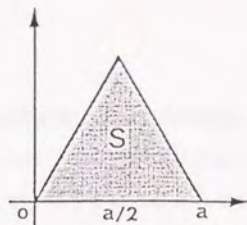


図3.5 正三角形平面回路

表3.3 正三角形平面回路の正規化定数

$l+m+n=0$	$l, m, n=0, 1, 2, \dots$	偶姿態	奇姿態
$l=m=n=0$		$\frac{1}{6}$	
$l=0, m=-n$	$l, m, n \neq 3k$ ( $k=1, 2, \dots$ )	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$l=-n, m=0$	$l, m, n = 3k$ ( $k=1, 2, \dots$ )	$\frac{1}{6}$	
$ l-m =3k$	( $k=1, 2, \dots$ )	$\frac{1}{3}$	
その他		$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

このときの固有姿態として，低次の偶姿態，奇姿態を図3.6に示す。

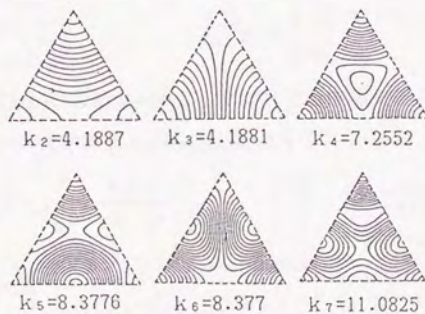


図3.6 正三角形平面回路の低次固有関数分布

### 3.3 本解析法の妥当性と計算精度

3.1で平面回路の示す状態インピーダンスは固有関数によって展開でき、開放境界平面回路の固有関数が何かの方法で求めれば、同じアルゴリズムで解析できる事を示した。具体的な解析例は3.4で記述する事とし、ここでは解析の妥当性および計算精度について検討する。

式(3.5)を用いて平面回路の周波数特性を計算する場合、無限個の項まで考慮するわけにいかないで、当然ある項までで打ち切らざるを得ない。このために打ち切り誤差が生じ、この誤差が最終的に本解析法の計算精度を決めるものと考えられる。この間の関係を知る

ために、図3.7に示すように幅Wなる伝送線路の一部を長さLだけ切り取る。今、この部分を平面回路であるとし、これに幅Wなる伝送線路#1と#2を接続したときの $|S_{12}|^2$ を固有モードという考え方で計算する。なお、図3.7の $|S_{12}|^2$ は、 $W$ 、 $d < \lambda$ を満たす全周波数で透過電力は1となることは自明である。所で、方形平面回路の固有関数は式(3.14)となる。

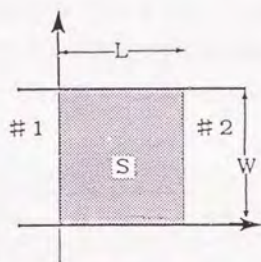


図3.7 幅Wの一様伝送線路

$$\psi_n(x, y) = \sqrt{\epsilon_m \epsilon_n} \cos k_m x \cdot \cos k_n y \quad k_m = n\pi/L, \quad k_n = n\pi/W \quad (3.14)$$

$$k_{m, n} = \sqrt{k_m^2 + k_n^2} \quad \epsilon_m, \epsilon_n = \begin{cases} 2 & (m, n=1) \\ 1 & (m, n=0) \end{cases}$$

式(3.14)を式(3.5)に代入し、N項までの固有モードを考慮して正規化インピーダンスを求めると、式(3.15a)となる。

$$[\bar{Z}] = \Sigma -j \frac{F}{\pi^2} \cdot \frac{\epsilon_m}{F^2 - m^2} \begin{vmatrix} 1 & (-1)^m \\ (-1)^m & 1 \end{vmatrix} \quad F = \omega L \sqrt{\epsilon \mu} / \pi \quad (3.15a)$$

$$= -j \begin{vmatrix} \cot(\beta_m \cdot L) & \operatorname{cosec}(\beta_m \cdot L) \\ \operatorname{cosec}(\beta_m \cdot L) & \cot(\beta_m \cdot L) \end{vmatrix} \quad (3.15b)$$

式(3.15a)の固有モード展開によるインピーダンス行列は固有モード数を無限個考慮し、級数展開の公式<sup>(9)</sup>を利用すると式(3.15b)に変形する事がで

きる。これは伝送線路理論と一致し、本理論の正当性を証明している一例である。

更に、式(3.15a)よりS行列の周波数特性を固有モード数Nをパラメータに、Fの関数として $|S_{12}|^2$ を求めると図3.8に示す結果を得る。正確な解(真値)は0dBであるので、図3.8(a)で $-10\log|S_{12}|^2$ は計算誤差の大きさを示す。Nの値を大きくしていくとある計算精度で計算できる帯域幅は次第に増加していく。この関係を図3.8(a)より求めたのが図3.8(b)で、横軸は考慮したモードの個数(N)、縦軸は正規化帯域幅である。図3.8(b)より、ある帯域内で0.1dBの計算精度( $|S_{12}|^2$ で $\pm 1.2\%$ 、 $|S_{12}|^2$ で $\pm 0.6\%$ )を得るために必要なモード数は図3.8(b)でほぼ鎖線上になくはならない。つまり、 $F=N/4$ 。この関係より $N=4F$ となり、 $\pm 1\%$ の計算精度を得るためには、必要帯域幅のほぼ4倍の帯域内に入るモードを考慮すればよいという事になる。

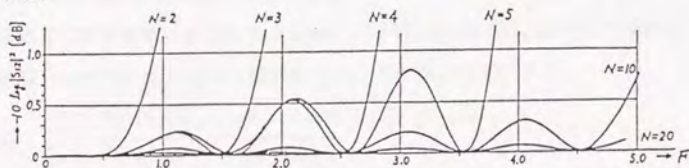


図3.8(a)  $-10\log|S_{12}|^2$ の計算誤差

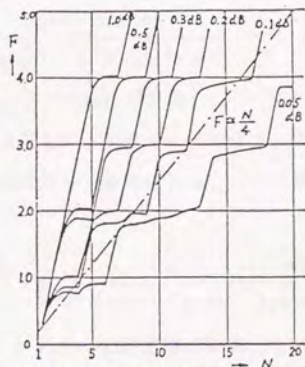


図3.8(b) 正規化帯域幅とモード数

### 3. 4 解析的に取り扱える平面回路の広帯域周波数特性<sup>(2)・(3)</sup>

任意形状Sに伝送線路が接続されている回路は、固有値、固有関数を求めるには計算機に頼らざるを得ないので、別の章で取り扱う事にし、ここでは解析的に扱える例として、既に固有値、固有関数が式(3.16)になると分かっている図3.9に示すような一辺aなる正方形回路に幅Wなる伝送線路をm本接続したときの周波数特性をTEM近似を用いた場合、高次非伝搬モードも考慮した場合の各々について計算する。

$$\phi_{l,m} = \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_m} \cos \frac{l\pi}{a} x \cos \frac{m\pi}{a} y \quad (3.16)$$

$$k_{l,m} = \frac{\pi}{a} \sqrt{l^2 + m^2} \quad l, m: \text{整数}$$

[1] 正方形平面回路と1本の伝送線路

図3.9の正方形平面回路に、幅Wなる伝送線路1本を垂直に接続したときの

接続面(x=0)より見た平面回路の入出力特性を計算する。

$$n_{p,(l,m)} = \frac{\sqrt{\epsilon_p \epsilon_1 \epsilon_m}}{\pi} \cdot \frac{mW \sin \pi nW}{(nW)^2 - p^2}$$

$$Z_{pq} = -\frac{d}{a} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{F}{\pi^3} \sum_l \sum_m \frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon_m}{F^2 - (l^2 + m^2)} \cdot \frac{(nW)^2 \sin \pi nW}{\{(nW)^2 - p^2\} \{(nW)^2 - q^2\}} \quad (W = W/a)$$

$F = a k / \pi = 2 a \epsilon \mu \cdot f$  : 正規化周波数

先ず、WをパラメータとしてTEMモード近似で、49個(l=0~6, m=0~6)の平面回路内の固有モードを考慮して、リアクタンス $X_o^{TEM}$ を求めると、式(3.17)となる。

$$X_o^{TEM} = \frac{d}{a} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left\{ -\frac{F}{\pi^3} \sum_l \sum_m \frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon_m}{F^2 - (l^2 + m^2)} \cdot \frac{\sin^2 \pi nW}{(nW)^2} \right\} \quad (3.17)$$

式(3.17)をF=0~1.8にわたって計算機で計算した結果を図3.10に示す。破線は、低周波では平面回路がコンデンサとして働くので、このコンデンサ

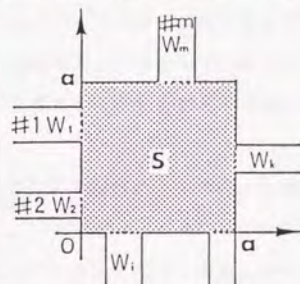


図3.9 m開口正方形平面回路

の有するリアクタンスの周波数特性である。又、この図で、リアクタンスは  $(d/a) \cdot \mu/\epsilon$  で正規化している。  $W=0.8$  ,  $W=1.0$  では×印以上の周波数で高次伝搬モードが生じるために計算していない。

伝送線路内の高次非伝搬モードが基本モードのリアクタンスに及ぼす影響を調べるために、 $q$  次までの非伝搬モードを考慮したときのリアクタンスの変化分  $\Delta X^q$  を  $W$  ,  $F$  をパラメータとして、2.6節の手法を用いて計算した。図3.11には、 $W=0.2$  としたときの  $\Delta X^q$  の  $q$  に対する収束の状況が  $F$  をパラメータとして描かれている。この図より、伝送線路内の4次までのモードを考慮すれば、TEM波に対するリアクタンスが十分な精度で計算できることが分かる。

又、このリアクタンスの増分  $\Delta X^q$  が、平面回路の特性に、どの位の影響を及ぼすかを調べるためにS行列を計算した。今の場合、S行列は一行一列となるので単に  $S_0$  と表わすと、平面回路はリアクタンス成分しか有しないので、 $|S_0| = 1$  となり、 $S_0 = \exp(-j\phi)$  として位相遅れ  $\phi$  の周波数特性をTEMモード近似の場合と高次非伝搬モードを考慮した場合について計算した。特に、 $W=0.05$  と  $W=0.6$  の計算結果を図3.12に示す。

この図より、伝送線路の幅が平面回路に比し細い場合にはかなりTEMモード近似が成立すること、及び線路幅が広くなると伝送線路上の非伝搬高次モードの影響が表われてくることが分かる。いずれにしても、TEMモード近似で計算した特性がかなりの精度で成立するものと考えられる。

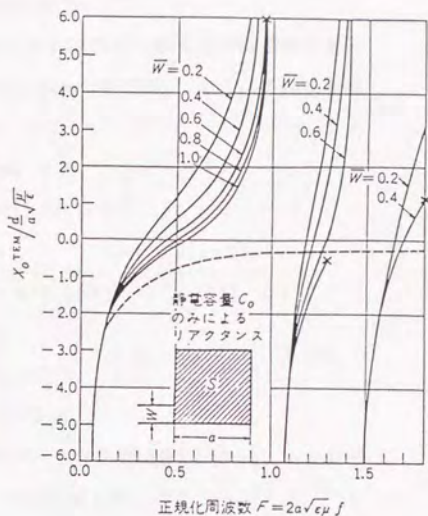
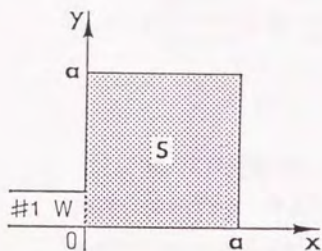


図3.10  $X_0^{\text{TEM}}$ の周波数特性

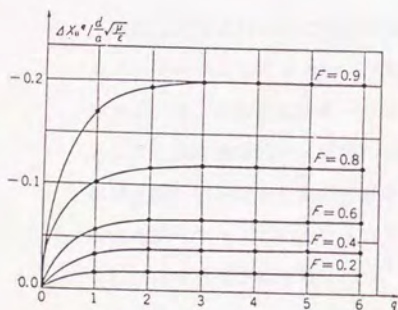


図3.11  $\Delta X_0^q$ のqに対する収束の状況

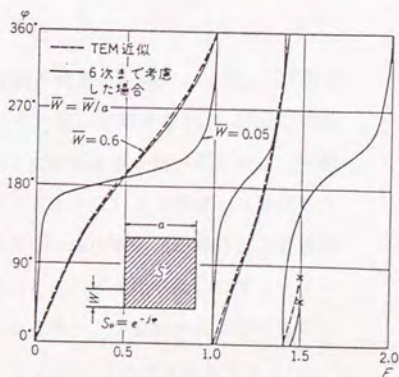


図3.12 位相遅れの周波数特性





結果を得る。更に、図3.13(b)に示すように、伝送線路の結合位置を変化させることにより、特性がどう変化するかを図3.13(b)に示す。図3.13(b)に示す回路は、線路の幅が狭い場合にはTEM近似では同じ結果とならなくてはならない。しかし、実際上図3.13(b)に示すような結果となり、伝送線路の幅が広くなり、又周波数が上昇するにつれて、伝送線路との結合の仕方が周波数特性に大きく効いてくること分かる。

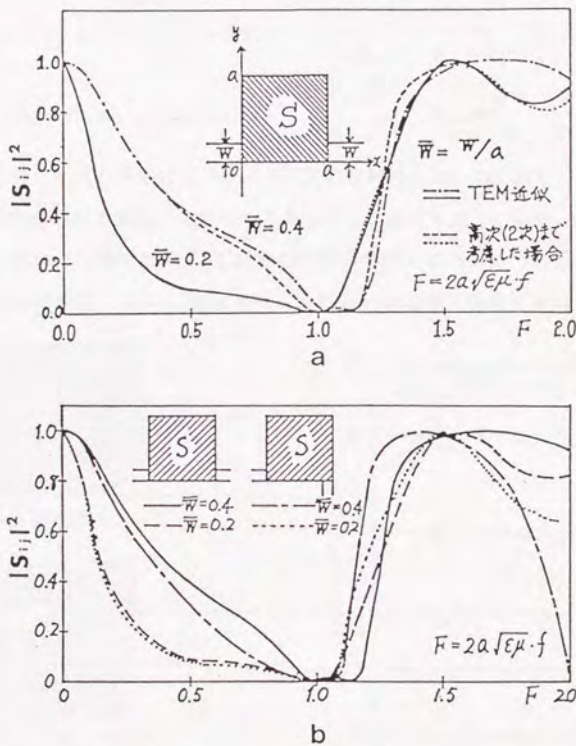


図3.13 2開口平面回路の周波数特性

(a : TEMモード近似との比較, b : 伝送線路の結合位置の比較)

又、2開口平面回路の計算例として、図3.14(a),(b)に示すように一辺  $a$  の正方形に幅  $W_1 (= a)$  と  $W_2$  の伝送線を接続したステップ不連続を計算し、従来の解析結果と比較する。なお、図3.14(b)の回路は図3.14(a)の回路と基本的に同じ特性（上下の対称性のため、 $W_2/W_1$ の比が同じなら周波数を2倍になる）となるので(a)の回路を計算する。

このとき結合度  $n_{p, (1, m)}$ 、姿態インピーダンスは次式となる。

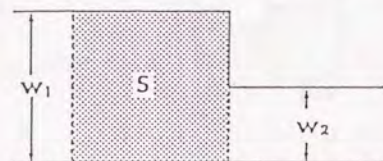
$$n_{p, (1, m)}^{(1)} = \epsilon_1 (-1)^p \delta_{pm}$$

$$n_{p, (1, m)}^{(2)} = \frac{\sqrt{\epsilon_p \epsilon_1 \epsilon_m}}{\pi} (-1)^{p+1} \frac{m W_2 \cdot \sin \pi m W_2}{(m W_2)^2 - p^2} \quad (3.20)$$

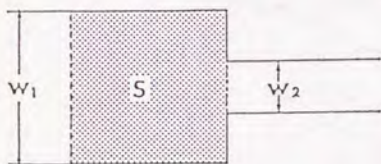
$$Z_{pq} = -j \sum n_{p, m}^{(i)} \cdot n_{p, m}^{(j)} Z_{cm} \left\{ \begin{array}{l} \cot(\beta_m a) \\ \csc(\beta_m a) \end{array} \right\} \quad Z_{cm} = \frac{\omega \mu \cdot d}{\beta_m \cdot W}$$

計算結果より線路幅をパラメタに周波数特性を図3.15に示す。この図で実線は伝送線の高次非伝搬モードを  $q = 2$  次まで考慮した結果、細い破線はA.A.Olinerの解析結果<sup>(4)</sup>（詳細は付録A参照）より求めたものである。

正規化周波数  $F = 0.7$  以上ではA.A.Olinerの結果は適用できない。



(a) 非対称ステップ



(b) 対称ステップ

図3.14 2開口ステップ不連続

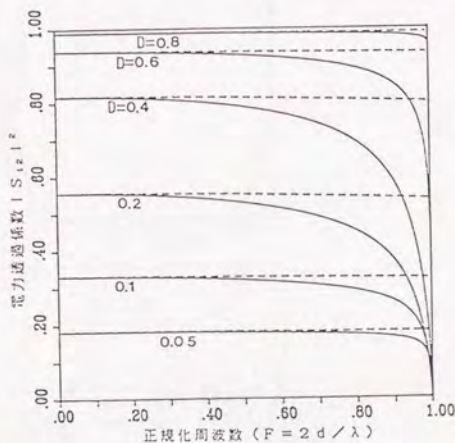


図3.15 2開口ステップ不連続の周波数特性

[3] 3開口正方形平面回路 (電力分配器)

図3.16に示すように一辺  $a$  の正方形回路に伝送線路を3本接続した電力分配器を考える。数値計算結果を図3.17に与える。この結果より、 $W (=W/a) = 0.05$  の特性は正規化周波数  $F = 1.0$  つまりダイポール・モードの共振周波数では#1より入射した電力は#2、#3に等分に分配されるが  $V.S.W.R. = 2.0$  である。#1の結合線路位置を  $45^\circ$  の角度で接続すると特性改善が可能である。入出力伝送線路の線路幅を広くすると透過特性のアンバランスが大きくなり、 $|S_{11}|^2$  は大きく、 $|S_{12}|^2$  は小さくなる。なお、 $W = 0.05$  のときは高次非伝搬モードを考慮した解析とTEM近似による解析はほとんど一致しているが、線路幅を広げるにつれ、その差は大きくなる。

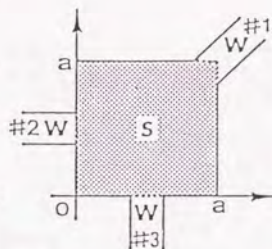


図3.16 3開口正方形平面回路

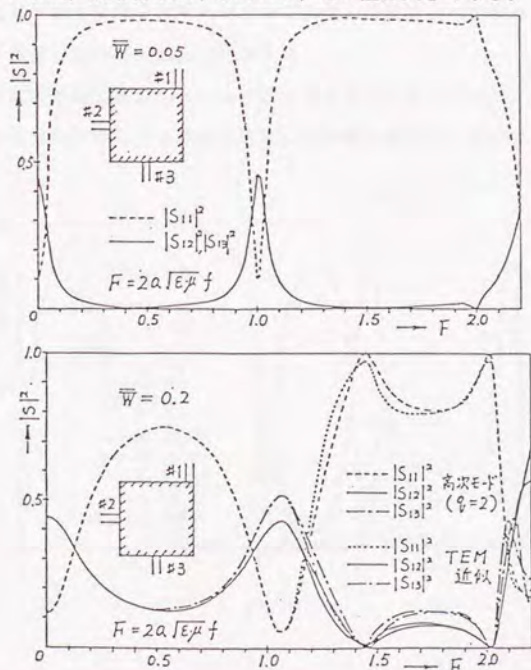


図3.17 3開口正方形平面回路の周波数特性

[4] 4開口正方形平面回路 (ハイブリッド回路への応用)

図3.18(a)に示すように正方形回路のダイポール・モードの縮退モードを利用したハイブリッド回路の動作原理を考える。この回路で#1から励振した場合、図3.18(b)のようにダイポール・モードが励振されるので#2と#4に結合があるが#3と結合しない。同様に#2より励振すると図3.18(c)のようなモードが励振され、#1と#3に結合があるが#4と結合がない。#3及び#4より励振すると各々図3.18(c),(d)のモードが励振される。以上の定性的理由でハイブリッド回路が実現できる。より正確な

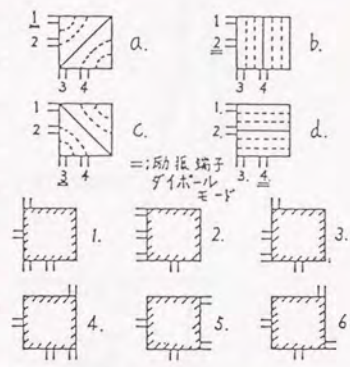
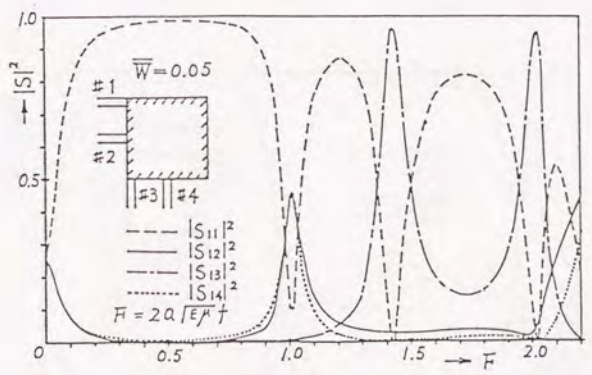


図3.18 4開口正方形平面回路

周波数特性は平面回路内の固有モードを49個、伝送線路の高次モードを3個考慮して計算した結果を図3.19に与える。

4開口正方形平面回路のもう一つの応用例はやはりダイポール・モードの2重縮退を利用した平面交叉回路である。この解析例を図3.20に与える。



(a)

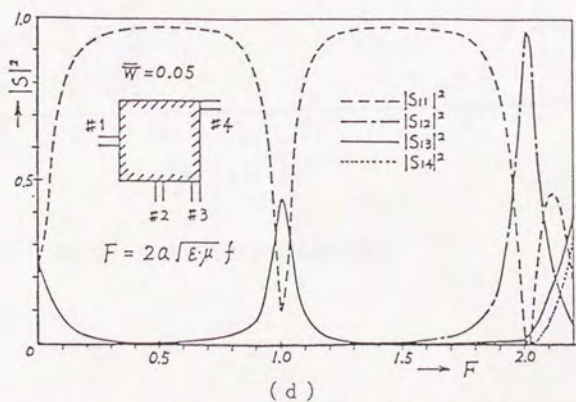
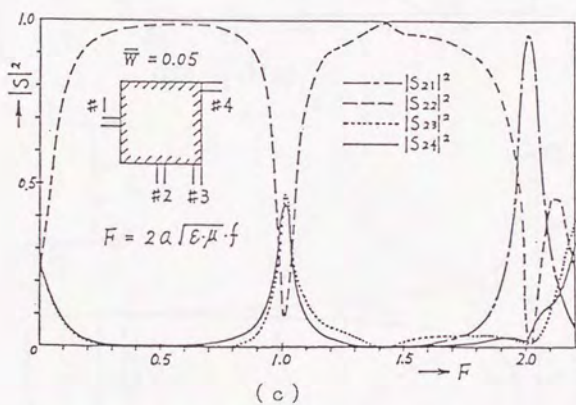
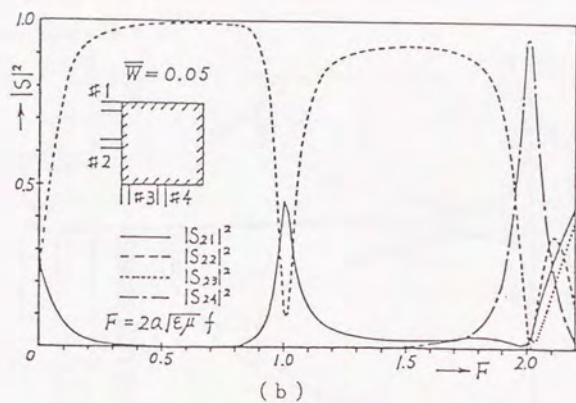
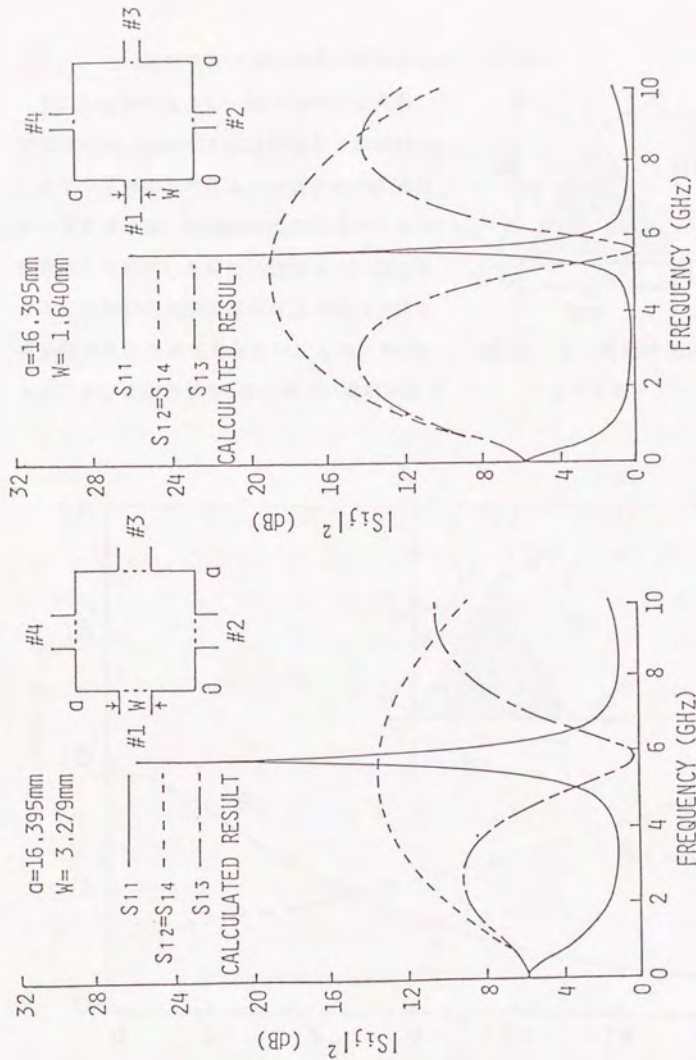


図3.19 4 開口正方形平面回路の周波数特性(ハイブリッド特性)



INPUT/OUTPUT CHARACTERISTICS OF SQUARE PLANAR CIRCUIT (4-PORT)

図3.20 平面交叉回路の周波数特性

[5] 正三角形平面回路の広帯域周波数特性 (Y分岐)

図3.21に示すように一辺  $a$  なる正三角形平面回路に、幅  $W$  なる伝送線路を3本接続したY分岐回路を考える。平面回路内の固有モードを49個、伝送線路の高次モードを3個考慮して計算した周波数特性を図3.22に与える。当然であるが無損失可逆3開口回路は完全整合条件を満足できないことが計算からも分かる。直流近傍で1/9の電力の反射がある。

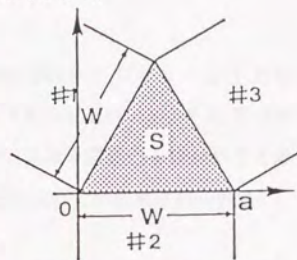


図3.21 正三角形平面回路とY分岐

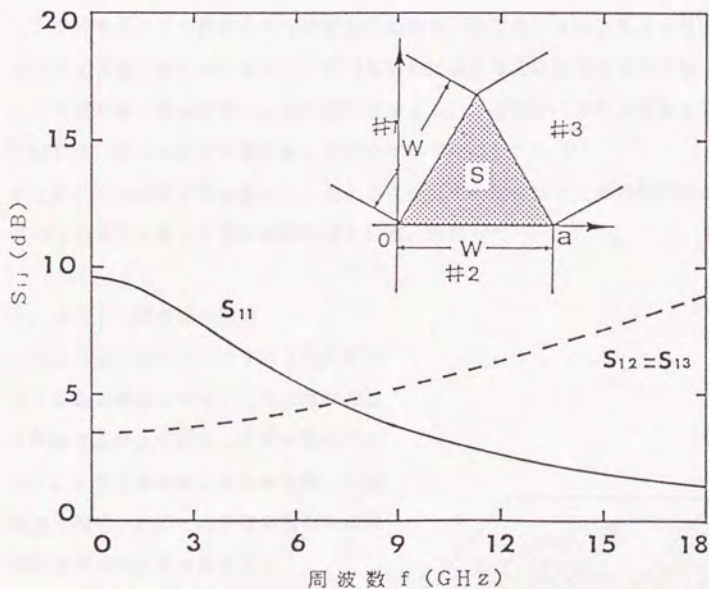


図3.22 正三角形Y分岐回路の広帯域周波数特性



### 3.5 実効幅近似の妥当性<sup>(5), (6), (7)</sup>

平行平板形平面回路の解析モデルとして回路周囲を $\Delta$  ( $2d/\pi \cdot \log 2$ ) だけ広げた所に完全な磁気壁を仮定したいわゆる「実効幅近似モデル」に基づいて回路の周波数特性を解析してきたが、ここではその妥当性を確かめるために円形、正方形、正三角形回路を作成し、実験によって共振周波数を測定し、実効幅を算出する。

ところで、平行平板形平面回路の固有値、固有関数は、正確には3次元的な電磁界の方程式を解かなくてはならない。しかし、ここでは方程式の形より、平面回路の形を一定に保つと、平面回路の大きさ $a$ と厚さ $d$ より決まる変数 $s = a/d$ に対して $ka$ がユニバーサル曲線になることを示す。また、 $s > 1$ の場合、この種の3次元問題は平面回路の縁で生じる漏れ電界を実効的に平面回路に繰り込むことにより（実際には漏れ電界に相当する実効幅 $\Delta$ だけ平面回路の縁を拡張し、磁気壁を仮定する）、近似的に2次元問題として取り扱い得ることが各種の論文で報告されている。<sup>(1), (2), (3)</sup>

そこで、このような取り扱いをしたときに使用する周波数では実効幅近似がどの位の精度で成立するかを実験値と比較、検討した。

#### 3.5.1 固有値の計算

ここでは、図3.23に示すような任意形状 $S$ を中心導体を持ち、上下の導体基板は無限に広がっており、平面回路の内部は $\epsilon$ 、 $\mu$ なる誘電率と透磁率を持った誘電体で充填されている平行平板形平面回路の固有値の計算を試みる。

ところで、この種の平行平板形平面回路は一般に同軸モードで励振されるので、電磁界は中心導体面の上下で対称になっていると考えられる。従って、対称面で

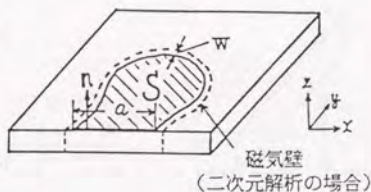


図3.23 平行平板形平面回路

回路S以外は磁気壁となっている図3.23に示すモデルで電磁界方程式を解いて固有値、固有モードを求めれば、平行平板形平面回路の固有値、固有モードを知ることができる。

### 3.5.2 3次元の取り扱い

図3.24に示すモデルで平面回路の固有値、固有関数は式(3.21)に示すヘルムホルツ方程式を式(3.22)の境界条件で解くことにより求まる。

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (3.21)$$

但し、 $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } Z=0 \quad \text{and } S \quad (z=d) \quad (3.22)$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } S \text{ 以外の } z=d \text{ の面}$$

従って、式(3.21)、(3.22)より固有値が求まったとすると、式(3.23)に示すように形状Sと厚さdの関数になる。

$$k = F(S, d) \quad (3.23)$$

いま、形状を形と大きさaという成分に分け、形を一定に保って大きさaと厚さdのみを変化すると考える。このとき解析に便利のように正規化座標  $X = x/a$ 、 $Y = y/a$ 、 $Z = z/d$  を考えると、図3.24のモデルは図3.25のようになる。つまり平面回路の大きさaが変わっても正規化図形Sは一定に保たれ、また厚さdが変わっても平面回路と磁気壁のある位置は  $Z = 1$  となり、解析されるモデルは新しい座標系

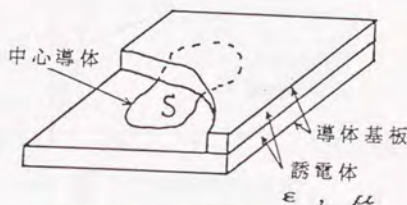


図3.24 解析モデル

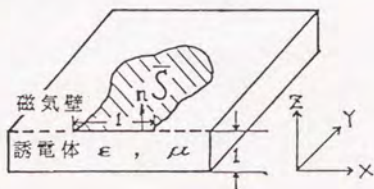


図3.25 正規化座標

X, Y, Zで一定となつて式(3.21)は

式(3.24)と変形される.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial Z^2} + (ka)^2 E = 0 \quad (3.24)$$

但し,  $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$

$$E \times n = 0 \quad \text{on } Z=0 \quad \text{and } S \quad (Z=1) \quad (3.25)$$

$$E \cdot n = 0 \quad \text{on } S \quad \text{以外の } Z=1 \text{ の面}$$

式(3.24)と式(3.25)より固有値(ka)はsとSの関数となることが分かる.

$$ka = F(s, S) \quad (3.26)$$

となり, 形Sが例えば正三角形, 正方形のように一定に保たれると, kaはs(=a/d)だけの関数となる. 以上の事からsを横軸に, kaを縦軸にとつて各種の形の回路についてユニバーサル曲線を描くことができる. 特に半径aの円形共振器については図3.26のユニバーサル曲線が得られる.

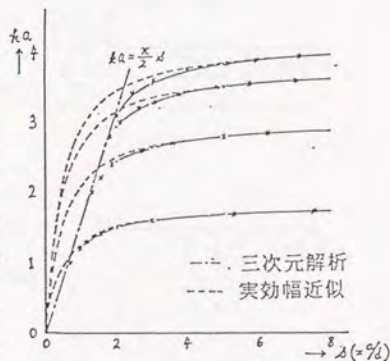


図3.26 円形共振器の固有値

### 3. 5. 3 実効幅近似による2次元的取り扱い

図3.27(a)に示すように中心導体が半無限平面となっている構造で, y方向に一様となっているとした場合の電磁界は既に分かつており, 実効幅Wは

$$W = \frac{1}{\pi} \left\{ 2d \cdot \log 2 + \frac{\lambda}{2} S(4d/\lambda) - \lambda \cdot S(2d/\lambda) \right\} \quad (3.27)$$

$$S(x) = \sum \left( \sin^{-1} \frac{x}{n} - \frac{x}{n} \right) \quad , \quad k = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = 2\pi/\lambda \quad (3.28)$$

だけ, 図3.27(b)に示すように平面回路を拡張して, そこに磁気壁を仮定すれば漏れ電界の影響を取り込む事ができる. 式(3.27)を変形してW/dを求

めると式(3.28)となり、この関係を図3.28に示す。

$$W/a = -\frac{2}{\pi} \log 2 + \frac{s}{ka} \{ S(2/\pi \cdot ka/s) - 2 \cdot S(1/\pi \cdot ka/s) \} \quad (3.29)$$

また、 $4d/\lambda < 1$  ( $ka/s < \pi/2$ ) の場合には式(3.27)及び式(3.29)の第2、3項は無視できて、

$$W/d = 2(\log 2)/\pi \quad (3.30)$$

となって周波数によらず一定となる。

図3.24において式(3.27)で表わされる実効幅Wのところには磁気壁を仮定する。

このときの固有値kは、式(3.21)から

図3.25の点線のところにxy平面に垂直な磁気壁があるとして求められる。z方向に対して電磁界は一様になっていると

仮定すると、結局、固有値kは図3.26に示す正規化平面回路の周辺で、

$n \cdot \text{grad } \psi = 0$  を仮定して式(3.31)の

ヘルムホルツ方程式

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \chi^2 \psi = 0 \quad (3.31)$$

の固有値 $\chi_n$ を求める事により、式(3.32)の如く与えられる。

$$k = \frac{\chi}{a + cw} \quad (3.32)$$

但し、係数cについて、wは常に辺と垂直な方向に取るものとするので、形状の大きさを示すaに対してはcwなる磁気壁への寄与を考える。なお、3次元解析と一致させるために、kaの値を求めると式(3.33)の如くなる。

$$ka = \frac{a}{a + cw} \chi_n \quad (3.33)$$

又、wは図3.28に示すように周波数特性が

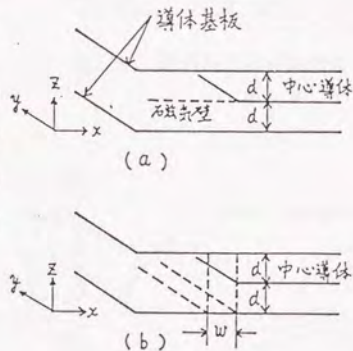


図3.27 半無限平行平板回路

あるが、一般に平面回路として使用する場合には、 $4d/\lambda < 1$ となっているので、式(3.30)で近似することにする。この考えに基づいて、円形共振器の固有値は東京大学の太越教授、埼玉大学の小林氏等により求められているので、その結果を3次元解析の結果と合わせて図3.28に示す。なお、 $w$ の周波数特性を考慮した場合の図式解法については付録Bに示し、円形共振器の固有値の計算結果を図3.29

(\*印)に示す。

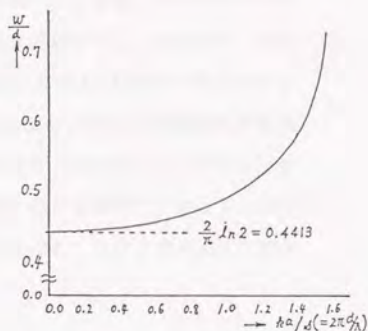


図3.28 実効幅の周波数特性

### 3.5.4 放射の問題

図3.27のような半無限平面において  $\lambda < 4d$  となったとき、つまり

$$ka > \pi / 2d \quad (3.34)$$

のとき放射が起り、従って、回路のQが低下するので一般には平面回路として使用されない領域である。式(3.33)を  $ka$  と  $s$  との関係に直すと

$$ka > \pi / 2s \quad (3.35)$$

となる。なお、半径  $a$  の円形共振器の放射限界についてはすでに計算されており、やはり、式(3.35)と一致する。この関係を図示すると、図3.27で斜線を施した部分が放射の起る領域である。

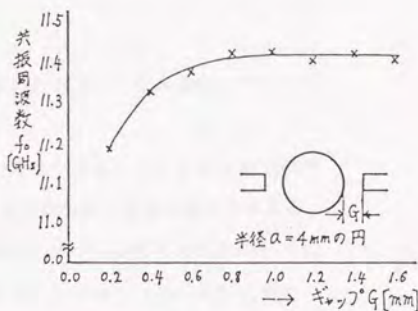


図3.29 伝送線路の結合度と共振周波数の関係

### 3.5.5 各種形状平面回路のユニバーサル曲線の決定

式(3.26)より  $ka$  は  $s$  だけの関数となり、

$$ka = F(s) \quad (3.36)$$

形に対する一つのユニバーサル関係になっている。各種の形についてこのユニバーサル関係を解析的に求める事は大変困難であるので、実際にトリプレート形平面回路を作成し、その共振周波数より決定することを試みる。実際に作成した回路の材料は、比誘電率  $\epsilon_s = 2.62$ 、厚さ  $d = 1.45$  のレクソライト 2200 で、回路の大きさ  $a$  及び厚さ  $d$  を変化させて  $4 \sim 12$  GHz の共振周波数を測定した。又、共振周波数は伝送線路の結合の強さ（ギャップの大きさ）により図 3.33 のように変化するがある程度離すと一定となるので、ここでの測定では共振器と伝送線路とのギャップを  $1$  [mm] とした。なお、測定共振周波数より式 (3.37) を用いて  $ka$  を求めた。

$$ka = \frac{\pi \sqrt{\epsilon_s}}{150} \cdot f_0 \cdot a \quad f_0 [\text{GHz}], a [\text{mm}] \quad (3.37)$$

円形、正方形、正三角形の測定結果を図 3.30 ~ 3.32 に示す。

### 3.5.6 検討, 考察

図 3.30 ~ 3.32 で、各種形状の実験より求めたユニバーサル曲線について、次の事が言える。

(1) 実効幅近似とユニバーサル曲線との合い方は、これまで 1% 以内で合うと言われていたが、形状及びモードにより幾分様子が異なるようである。つまり、形状に鋭角がなく、 $s$  の値が大きい ( $d \ll \lambda$ ) 場合には低次モードについてはほぼ  $\pm 1\%$  以内で実効幅近似と合うことが分かった。また、更に、精度を要する場合には  $C$  の値を実験的に求めて補正することも可能である。

(2) 実効幅の周波数特性を考慮して、付録に示すように各種形状の固有値を計算することも可能であるが、實際上計算が複雑となり、また、実際に使用する範囲  $d < \lambda$  ( $s \gg 1$ ) では  $W = 2d/\pi \cdot \log 2$  と近似してもそれほど差が生じないので割愛した。但し、 $s$  が  $1 \sim 2$  付近で固有値が急激に低下するのは、実効幅の周波数特性を考慮すると良く説明することができる。

(3) 最後に、作成した回路の寸法精度、測定した共振周波数の精度、導体基板は理論上無限大を仮定したが、実際には有限になってしまうこと等を考慮して測定データのばらつきを無視するとユニバーサル曲線が得られた。

### 3. 6 まとめ

本章では、マイクロ波平面回路に伝送線路が接続されているときの伝送線路より見た基本波モード (TEMモード) のインピーダンス行列が、伝送線路内の非伝搬高次モードの影響を考慮したとき、 $Z_0 = j(X^{TEM} + \Delta X^q)$  で計算されることを示した。この式で、 $X^{TEM}$  は伝送線路内に TEMモードしか存在しないとされたときの平面回路が示すリアクタンス行列、 $\Delta X^q$  は伝送線路内の  $q$  次までの非伝搬高次モードを考慮したときの基本波モードに対するリアクタンス行列への補正行列である。この補正行列が無視できるときには、 $Z_0 = jX^{TEM}$  となり、このときの等価回路を示した。

$q$  次までの非伝搬高次モードを考慮したときのリアクタンス行列の補正行列  $\Delta X^q$  は当然  $q$  が大きくなるにつれて収束するはずである。この収束の状況を一開口正方形平面回路に対して計算した結果、伝送線路幅にもよるが、伝送線路内の非伝搬高次モードを4次まで考慮すれば十分収束することが分かった。更に、この非伝搬高次モードが入出力特性に及ぼす影響を調べる為に、一開口及び二開口正方形平面回路のS行列を計算した。この結果、伝送線路が平面回路に比して狭いときには、TEM近似で十分な計算精度があるが、広いときには、高次非伝搬モードを考慮しないと十分な計算精度が確保できないことが分かった。

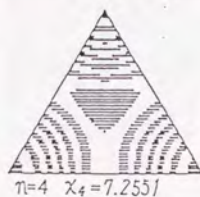
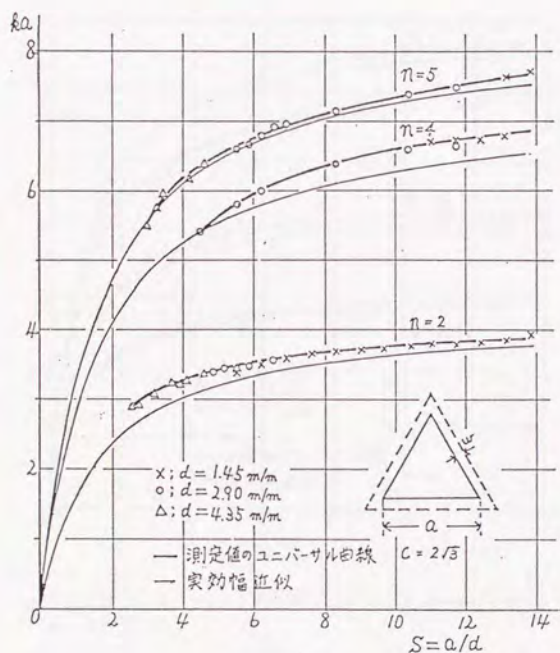
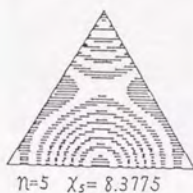
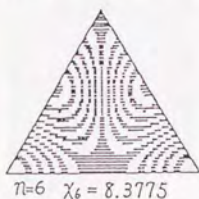
以上のモード数を考慮し、正方形平面回路独特の応用例として平面回路内の2次元電磁界分布を積極的に利用した1開口～4開口回路 (正方形ハイブリッド回路、正方形交叉回路等) の周波数特性を解析した。

最後に、平面回路の解析モデルの実効幅近似モデルの妥当性を確かめるために鋭角な角を持つ正三角形、正方形、円形と言った回路を実際に作製し、その共振周波数を測定することによって実効幅を算出した。本解析モデルがほぼ  $d_c \sim 18$  GHz (誘電体基板厚  $d < \lambda/4$ ) まで成り立つ事を確認した。

今後、本論文の解析法に基づいて、現在使用されている種々のマイクロ波回路の特性解析及び特性改善を行う一方、平面回路内の2次元電磁界を積極的に利用した新しいマイクロ波平面回路の開発に役立てていく予定である。

正三角形平面回路の固有値・固有モード

Eigenvalue and Normal Mode of Regular Triangular Planar Circuit.



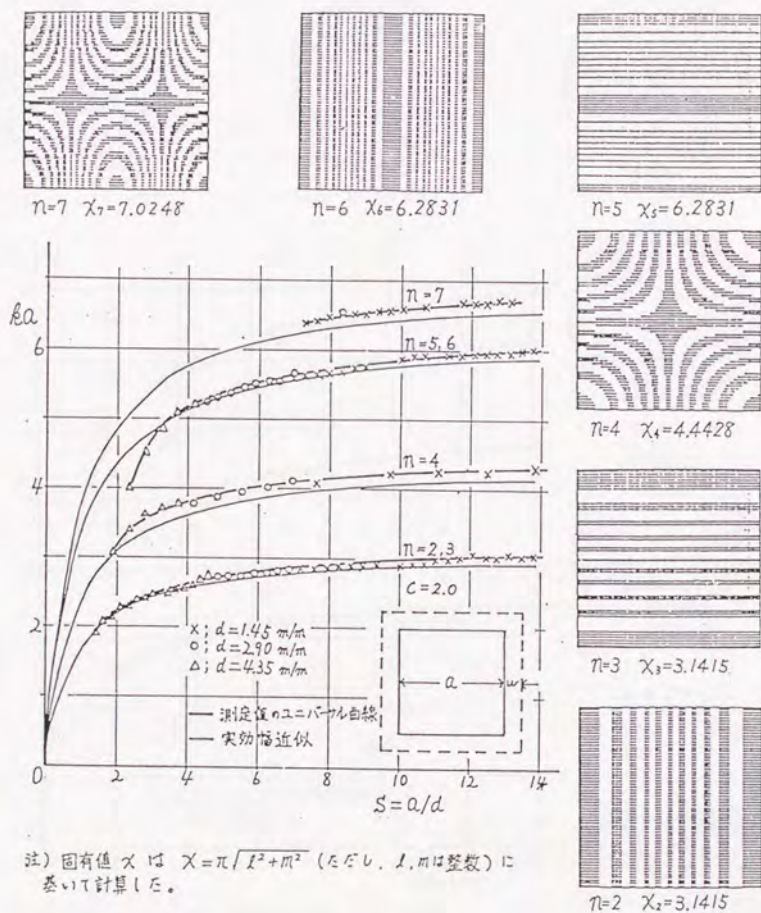
注) 固有値は  $\chi = (4\pi/3) \cdot \sqrt{m^2 + \alpha n + n^2}$  ( $m, n$ は整数) に基いて計算した。

図3.30 正三角形平面回路の固有値・固有モード



正方形平面回路の固有値・固有モード

Eigenvalue and Normal Mode of Square Planar Circuit.



注) 固有値  $\chi$  は  $\chi = \pi \sqrt{l^2 + m^2}$  (ただし、 $l, m$  は整数) に  
 基いて計算した。

図3.31 正方形平面回路の固有値・固有モード

円形平面回路の固有値・固有モード  
Eigenvalue and Normal Mode of Circular Planar Circuit

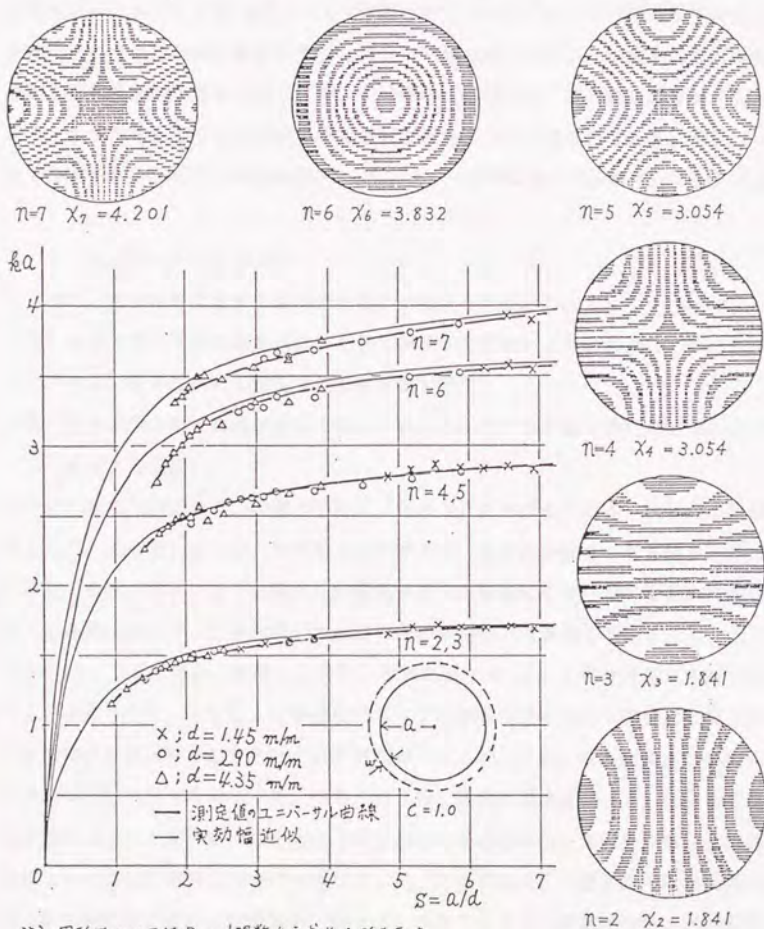


図3.32 円形平面回路の固有値・固有モード

## 第 4 章 任意形状平面回路の固有モードの数値解析

第 2 章及び第 3 章で述べたように、平面回路の回路定数は、開放境界平面回路では 2 次元ヘルムホルツ方程式のノイマン問題を解くことにより、又短絡境界平面回路では与えられた境界条件を満足する混合境界値問題を解く事により決定される。本章で記述する数値解法は第 2 章および第 3 章の理論に基づいて、固有値問題を解くことにより、任意形状を持つ平面回路の回路定数を求めようとするものである。特に、この章では固有値問題の種々の数値解法を示し、それらの特徴を比較検討することにある。

### 4. 1 固有モードの数値解法

一般に、電磁場を支配する偏微分方程式の解法を大別して、

- (1) 境界条件を完全にあるいは部分的に満足する関数により領域全体にわたって近似し、微分方程式を満足する解を見出す手法。
- (2) 境界条件でなく領域における微分方程式を満足する関数の重ね合わせによって展開する手法。

に分類することができる。前者の手法は「領域法」と呼ばれており、代表的な数値解法として、変分法、差分法、有限要素法等がある。後者の手法は「境界法」と呼ばれており、最近、計算コストの低減、無限領域を含む問題にも適用できるために注目されている手法である。任意形状平面回路の周波数特性だけを求める場合には、この境界法に基づく平面回路の外周上の電圧、電流に関する Weber の積分方程式を解くことにより決定される。しかし、広帯域にわたって周波数特性を求める場合には周波数事に最初から計算を繰り返すために計算時間がかかるが、現在、有限要素法と共に境界要素法の先駆的役割を果たした。本章で取り扱う数値計算法は、(1)の方法に属する手法に基づいて固有値問題を解き、平面回路の周波数特性、電磁界分布および回路合成にも有用な数値解法について述べる。又、この手法は、一度与えられた形状に対する固有値問題を解いて固有関数、固有値を求めておけば、周波数特性は短時間に計算できるといった特徴を有する。

固有値問題の数値解法として、代表的なものを列挙すると、次の通りである。

- 1) 差分法
- 2) Rayleigh-Ritzの変分法<sup>(7)</sup>
- 3) 有限要素法<sup>(6), (8)</sup>
- 4) 素回路法<sup>(2)</sup> (平面回路と伝送線路に分割し、回路論的に計算する手法)
- 5) Point-Matching法

等が挙げられる。1)の差分法は古典的手法であるが、最近の超大型計算機の普及に伴ってもう一度検討する必要があると考える。2)のRayleigh-Ritzの変分法はアルゴリズムが容易で固有値の精度がよい。3)の有限要素法は、変分法と同じ原理、且領域を編目状に分割する点では差分法と共通している。ここ10年間で最も進歩した数値解法であるが無縁根の混入する恐れがある。4)の素回路法は平面回路が全くの任意形状であれば、2), 3)の手法に頼らざるを得ないが、方形回路に分割できる形状に対して有効な手法である。5)のPoint-Matching法は平面回路の周囲のサンプリング点を取り微分方程式を満足させる手法である。ここでは2)~4)の手法について言及する。

#### 4.2 Rayleigh-Ritzの変分法

##### 4.2.1 定式化

一般に、図4・1に示すように伝送線路が接続されている部分を除いた平面回路の周辺が開放境界条件になっている場合の固有値、固有関数は式(4.1)で与えられる(伝送線路の接続部分は開放境界とする)。

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} + k_n^2 \psi_n = 0 \quad \text{in } (S) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{n} \cdot \text{grad} \psi_n = 0 \quad \text{in } (C)$$

$k_n^2$ の取り得る値(固有値)は離散的となり、これに対して一つの関数(固有関数) $\psi_n$ が対応することになる。これに相当するノイマン問題の変分表現は、一般に式(4.2)となる。

$$k^2(\phi_n) \leq \frac{\iint_S (\nabla \phi_n)^2 dS}{\iint_S \phi_n^2 dS} \quad (4.2)$$

式(4.2)で、汎関数 $k^2$ が停留値となるとき $k$ の値が固有値で、そのときの関数 $\phi$ が固有関数ということになる。今、この関数 $\phi$ を、適当な $n$ 個のパラメータ $C_i$ を含む与えられた同次境界条件を満足するある基底関数( $f_i: i=1, 2, \dots, N$ )で展開することを考える。

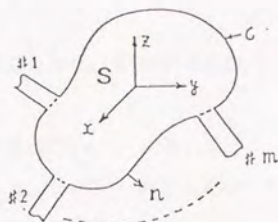


図4.1 任意形状平面回路

$$\phi(x, y) = \sum C_i f_i(x, y) \quad (4.3)$$

なお、コンデンサに当たる直流モードを含めるために、基底関数 $f_i$ で常に $f_i=1$ とする。

式(4.3)を仮定し、その線形試験関数を汎関数に代入すれば、 $k^2(\phi)$ は有限個の $C_1, C_2, C_3, \dots, C_N$ の関数と考えられるから、これを最小にする $C_i$ の値は、式(4.4)から決定される。

$$\frac{\partial k^2(\phi_n)}{\partial C_i} = 0 \quad i=1, 2, \dots, n \quad (4.4)$$

又、この式は行列式で表わした固有値問題で固有値 $k^2$ に対して固有ベクトル $C$ が対応することになる。

$$(A - \lambda B) C = 0 \quad \lambda = k^2 \quad (4.5)$$

$$A_{ij} = \iint_S \nabla f_i \cdot \nabla f_j dS \quad (4.6)$$

$$B_{ij} = \iint_S f_i f_j dS$$

$$C^t = (C_1, C_2, \dots, C_N)$$

ここに、行列Aは対称行列、行列Bは正定値行列であるから、固有値kは実数且正の値を持つことが保証される。又、式(4.5)の行列の固有値問題の解法は種々の方法が知られており、一般化ヤコビ法、ハウスホルダ・QR法、パイセクション法等が良く用いられる。

式(4.3)で  $f_1 = 1$  と取ることにより、 $A_{11} = A_{11} = 0$  となり、式(4.5)は式(4.7)のように変換される。

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda (B_{11}C_1 + B_{12}C_2 + \dots + B_{1N}C_N) \\ A_{22}C_2 + A_{23}C_3 + \dots + A_{2N}C_N &= \lambda (B_{21}C_1 + B_{22}C_2 + \dots + B_{2N}C_N) \\ A_{32}C_2 + A_{33}C_3 + \dots + A_{3N}C_N &= \lambda (B_{31}C_1 + B_{32}C_2 + \dots + B_{3N}C_N) \\ &\vdots \\ A_{N2}C_2 + A_{N3}C_3 + \dots + A_{NN}C_N &= \lambda (B_{N1}C_1 + B_{N2}C_2 + \dots + B_{NN}C_N) \end{aligned} \quad (4.7)$$

式(4.7)の第1式より  $\lambda_1 = 0$  の固有値があり、このときの固有ベクトル  $C_1$  は式(4.7)の残った式より  $C_1 = (1, 0, \dots, 0)^t$  と計算される。なお、この固有関数は、平面回路が平行平板として持っているコンデンサのモードに相当している。

又、式(4.7)の第1式より、 $\lambda \neq 0$  とすると次の関係を得る。

$$C_1 = -\frac{1}{B_{11}} (B_{12}C_2 + B_{13}C_3 + \dots + B_{1N}C_N) \quad (B_{11} \neq 0) \quad (4.8)$$

この式を式(4.7)の残りの式に代入し、整理すると式(4.9)を得る。

$$\begin{aligned} A_{22}C_2 + A_{23}C_3 + \dots + A_{2N}C_N &= \lambda \left\{ \left( B_{22} - \frac{B_{21}B_{12}}{B_{11}} \right) C_2 + B_{23} - \frac{B_{21}B_{13}}{B_{11}} C_3 + \dots + B_{2N} - \frac{B_{21}B_{1N}}{B_{11}} C_N \right\} \\ A_{32}C_2 + A_{33}C_3 + \dots + A_{3N}C_N &= \lambda \left\{ \left( B_{32} - \frac{B_{31}B_{12}}{B_{11}} \right) C_2 + B_{33} - \frac{B_{31}B_{13}}{B_{11}} C_3 + \dots + B_{3N} - \frac{B_{31}B_{1N}}{B_{11}} C_N \right\} \\ &\vdots \\ A_{N2}C_2 + A_{N3}C_3 + \dots + A_{NN}C_N &= \lambda \left\{ \left( B_{N2} - \frac{B_{N1}B_{12}}{B_{11}} \right) C_2 + B_{N3} - \frac{B_{N1}B_{13}}{B_{11}} C_3 + \dots + B_{NN} - \frac{B_{N1}B_{1N}}{B_{11}} C_N \right\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

よって、 $\lambda_1 = 0$ 、 $C_1 = (1, 0, \dots, 0)^t$  以外の固有値、固有ベクトルは式(4.9)、即ち式(4.10)を解けばよい。

$$(A' - \lambda B') C' = 0 \quad C' = (C_2, C_3, \dots, C_N) \quad (4.10)$$

$$A'_{ij} = A_{i+1, j+1}, \quad B'_{ij} = B_{i+1, j+1} - \frac{B_{i+1, i} B_{i, j+1}}{B_{ii}}$$

$$C_i = -(\sum_{j=2}^N B'_{ij} C_j) / B'_{ii} \quad (4.11)$$

一般に行列式の固有値は大きい順に求まってくるが、我々の場合は $\lambda$ の小さい順に知りたい、式(4.10)で $\lambda \neq 0$ であるから、式(4.12)の如く変形すると $\lambda$ の小さい順( $\lambda'$ の大きい順)に固有値を求めることができる。

$$(B' - \lambda' A) C' = 0 \quad \lambda' = 1/\lambda \quad (4.12)$$

なお、この行列方程式で $B'$ 、 $A'$ は共に対称行列になっていることが容易に証明できる。また、固有関数は $\iint_S \phi^2 dx dy = 1$ と正規化しておくこと、等価回路定数の計算に便利である。そのためには、式(4.10)で求めた $C_i$ に次の係数を掛けてやればよい。

$$S = \left( \sum_i^N \sum_j^N C_i C_j B_{ij} \right) \quad (4.13)$$

#### 4. 2. 2 線形試験関数の選択

式(4.3)の試験関数としては互いに一次独立な関数系  $\{f_i : i = 1, 2, \dots, n\}$  の一次結合を採用する。即ち

$$\phi(x, y) = \sum C_i f_i(x, y) \quad (4.14)$$

この関数系が完備系を作る無限関数列  $\{f_i\}$  の最初の $n$ 個であるとすれば、 $n$ を充分大きく取って計算すると正しい解に充分近くなると考える。しかし、実際の近似計算では $n$ を無限大まで取ることは不可能であって、あまり大きくない $n$ で近似し

なければならない。従って、基底  $\{f_i\}$  はその初めの数個で正しい解  $\psi$  が充分よく近似できるものでなければならない。

ワイエルシュトラウスの近似定理によると基底  $\{f_i\}$  として  $x, y$  のべき関数  $\{f_i = X^m Y^n\}$ 、三角関数  $\{f_i = \cos(m\pi x) \cos(n\pi y)\}$ 、極座標系  $\{f_i = r^m \cos(n\theta)\}$  等を選ぶとよいことが分かっている。また、 $i$  と  $(m, n)$  の組み合わせの対応付けは表4に示すように取った。

n		n
6	$f_{28}$ 例: $f_8 = x^2 y$	$f_{29} = \cos 2\pi x \cos 4\pi y$
5	$f_{21} f_{27} f_{25} = x^3 y^3$	$f_{36} f_{35} f_{34} f_{33} f_{32} f_{31}$
4	$f_{15} f_{20} f_{26}$	$f_{25} f_{24} f_{23} f_{22} f_{21} f_{30}$
3	$f_{10} f_{14} f_{19} f_{25}$	$f_{16} f_{15} f_{14} f_{13} f_{20} f_{29}$
2	$f_6 f_9 f_{13} f_{18} f_{24}$	$f_9 f_8 f_7 f_{12} f_{18} f_{28}$
1	$f_3 f_5 f_8 f_{12} f_{17} f_{23}$	$f_4 f_3 f_6 f_{11} f_{18} f_{27}$
0	$f_1 f_2 f_4 f_7 f_{11} f_{16} f_{22}$	$f_1 f_2 f_5 f_{10} f_{17} f_{26}$
	0 1 2 3 4 5 6 m	0 1 2 3 4 5 m

(a)  $x^m y^n$  のべき乗

(b) 三角関数列

表4.1 基底関数の順序と組み合わせ

#### 4.2.3 数値計算例と計算精度

本計算法の精度を確かめるために、解析的に解の分かっている正方形回路を取り挙げ、基底関数は表4.1(a), (b)について基底関数の個数を15~36個まで変えて計算した。

(a) 基底関数として、 $x^m y^n$  のべき乗を採用したとき、下記の表より  $N=28$  とすれば、低次モードについてはほぼ0.5%の精度で計算できていることがわかる。 $N=36$  としてもそれほど固有モードの精度は改善されないばかりでなく、計算時間が掛かるようになる。なお、表4.2では低次の固有値のみを示しているが36個中2個を除いてほぼ理論値と一致した結果を得ている。



表4.2 正方形回路の  $x^m y^n$  のべき乗による計算結果

$N \backslash n$	1	2	3	4	5	6
15	0	9.8751	9.8751	19.8044	39.7637	39.7763
21	0	9.8695	9.8696	19.8046	39.7586	39.7712
28	0	9.8696	9.8696	19.7384	39.3619	39.3814
36	0	9.8693	9.8695	19.7325	39.4207	39.4755
真値	0	9.8696	9.8696	19.7392	39.4784	39.4784

(b) 基底関数として三角関数列を採用したとき、 $N=25$ 個として正三角形回路を計算し、真値と比較した結果を表4.3に与える。なお、一辺  $a$  なる正三角形回路の固有値、固有モードの解はすでに解析的に分かっており、固有値は式(4.15)で与えられる。

「ワイエルシュトラウスの近似定理」<sup>(7)</sup>

閉正方形  $a \leq x \leq b$ ,  $a \leq y \leq b$  で連続な関数  $f$  は多項式によって一様に近似される。即ち、任意な  $\epsilon > 0$  に対して適当な多項式  $p(x, y)$  を選べば、

$$|f(x, y) - p(x, y)| < \epsilon$$

$$a \leq x \leq b, a \leq y \leq b$$

「正定値マトリックス」の意味

ベクトルを対称マトリックスの両側から

$$v^t A v = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} v_i v_j$$

の形で掛けたものを2次形式という。また、0以外のいかなるベクトル  $v$  に対しても、2次形式の値が正  $v^t A v > 0$  になるようなマトリックスを正定値マトリックスという。正定値マトリックスの固有値はすべて正であることを保証される。

なお、混合境界のときの変分表現は

$$k^e(\psi_n) \leq \frac{\iint_S (\nabla \psi_n)^2 dx dy - 2 \oint \psi_n dl}{\iint_S \psi_n^2 dS} \quad (4.2)^*$$

と周回積分の項が分子に追加した表現式が得られるが、基底として、 $C_0$  で零となる関数系を選択すると式(4.2)\* は式(4.2)と一致する。

$$K_{mn} = \frac{4\pi}{3a} \sqrt{m^2 + mn + n^2} \quad m, n \text{ は整数} \quad (4.15)$$

表4.3 正三角形かいらの計算結果 (基底として三角関数を採用)

N	1	2	3	4	5	6	7
計算機解析	0	4.1628	4.1889	7.2346	8.3430	8.3815	11.0909
真値	0	4.1887	4.1887	7.2551	8.3775	8.3775	11.0824

#### 4.3 有限要素法<sup>(1)</sup>

##### 4.3.1 定式化

有限要素法は、図4.2に示すように差分法と同じように領域を仮想的な三角要素(element)と呼ぶ小領域に分割、総合して変分原理を用いて解析する手法で、次の三段階に分ける事ができる。

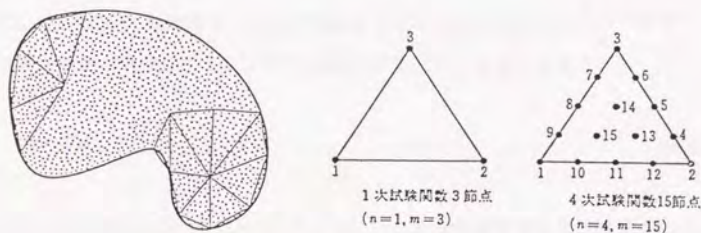


図4.2 有限要素法による領域分割

(1) 分割した要素に相当するマトリクスを変分原理 (局部関数の1次結合を試験関数に用いるRitz-Galerkin型の解法) を用いて求める。

(2) 要素間の連続、適合条件を用いて系全体に関する系マトリクスを要素マトリクスから組み立てる。このとき、分割された要素に関して要素内ポテンシャル $\phi$ を近似するものとして接点におけるポテンシャルを内挿する比較的単純な内挿関数を想定する。

(3) 変分原理を適用して支配偏微分方程式に近似的に対応する離散化多元連立マ

トリクス方程式を数値計算する。

2次元境界値問題の支配方程式は、次のヘルムホルツ方程式で与えられる。

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0 \quad (4.16)$$

式(4.16)の汎関数は、一般に次の形で与えられる。

$$L(\phi) = \frac{1}{2} \iint (\nabla \phi)^2 dA - \frac{1}{2} \iint (k^2 \phi) \phi dA - \int \phi \phi dl \quad (4.17)$$

ここで、 $dl$  は境界に沿った微小長さ、 $dA = dx dy$  である。境界がノイマン境界の場合は上式の第3項は零となる。

全領域の汎関数は各領域の汎関数の総和として与えられる。従って、

$$L(\phi) = \sum L_e(\phi) \quad (4.18)$$

ここで、 $L_e(\phi)$  は要素  $e$  に関する汎関数で式(4.18)と同じ形のものである。

要素内任意の点でのポテンシャルは次の形で近似できるとしよう。

$$\phi = \sum N_i(x, y) \phi_i \quad (4.19)$$

ここで、 $\phi_i$  は節点ポテンシャル、 $N_i(x, y)$  は内挿関数である。解は  $\phi$  の増分  $\delta \phi$  に対して系の汎関数を最小にすること ( $\delta L = 0$ ) で求められる。

式(4.19)を  $x, y$  について偏微分すれば

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sum_i \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \sum_i \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial y}$$

これを各要素に関する汎関数  $L_e$  に代入すれば

$$L_e(\phi) = \sum_i \sum_j \frac{1}{2} \phi_i M_{ij} \phi_j - \sum_i \sum_j \frac{1}{2} k^2 \phi_i K_{ij} \phi_j - \sum_i \phi_i Q_i \quad (4.21)$$

ここで,  $[M_{ij}]$  を剛性マトリクス,  $[N_{ij}]$  を質量マトリクスと呼ぶ.

$$M_{ij} = \iint \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dA_e \quad (4.22)$$

$$K_{ij} = \int (N_i N_j) dA_e \quad (4.23)$$

$$Q_i = \int (\phi N_i) dl_e \quad (4.24)$$

これらの積分は, 内挿関数が多項式であれば容易に行える. 式(4.21)をマトリクス表示を用いれば, 式(4.25)となる.

$$L_e(\phi) = \frac{1}{2} (\phi_e)^T [M_e] (\phi_e) - \frac{1}{2} k^2 (\phi_e)^T [K_e] (\phi_e) - (\phi_e)^T [Q_e] \quad (4.25)$$

ここに,  $(\phi_e)$  は要素節点におけるポテンシャルを成分とするベクトルで,  $[M_e]$ ,  $[K_e]$  はそれぞれ式(4.22), (4.23)を成分とする要素マトリクスである. 従って, 系全体は式(4.25)の総和として式(4.26)の形に書くことができる.

$$L(\phi) = \frac{1}{2} (\phi)^T [M] (\phi) - \frac{1}{2} k^2 (\phi)^T [K] (\phi) - (\phi)^T [Q] \quad (4.26)$$

ここで,  $(\phi)$  は系全体の節点ポテンシャルからなるベクトル,  $[M]$ ,  $[K]$  は  $[M_e]$ ,  $[K_e]$  の節点を共有する成分の和で与えられる.  $[Q]$  は内部節点に対応する成分は 0, 境界節点に対応する成分は境界で規定された値を取る. 変分原理より

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial (\phi)^T} = ([M] - k^2 [K]) (\phi) - [Q] = 0 \quad (4.27)$$

従って, 離散化された連立代数方程式は式(4.27)となる. 任意の  $k$  を与えて解くことができる. 特に,  $[Q] = 0$  のとき固有値方程式となる.

$$([M] - k^2 [K]) (\phi) = [Q] \quad (4.28)$$

式(4.27)を実際に数値計算する手法は, 最近では計算機センターに科学技術数値計算ライブラリーとして登録されているので省略する.

#### 4.3.2 計算例の比較<sup>(1)</sup>

図4.3に示すトリプレート形T分岐回路において端子3を開放したスタブ形回路の電力透過係数 $|S_{12}|^2$ の有限要素法による計算結果を図4.4に示す。この回路のスタブ部分は方形平面回路と見なし、接合部で生じる非伝搬伝送モードを充分に考慮して計算した結果を図4.4に同時に示す。周波数が $F=8.0(\text{GHz})$ より高い領域で差異が生じて来る。又、 $W_3/W_1=3.0$ と線路幅が大きい場合により差異が見られる。これは有限要素法での固有モードの計算精度によるものと考えられる。

ここでは、変分法に基づくレイリーリッツ法と有限要素法について述べた。形状が直線的な限られた場合にはレイリーリッツ法で必要な帯域内の固有モード(25個程度)が得られる事を示した。又、全くの任意形状では計算時間、計算機メモリーなどを多く使用するが有限要素法が適している。従って、固有モード展開法は固有モードを一度求めるだけで全帯域内の周波数特性を計算できると言った特徴を有する。又、固有モードが入出力伝送線路と結合しているか否かで周波数特性を推測することができる。

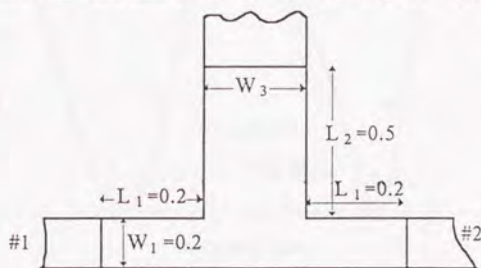
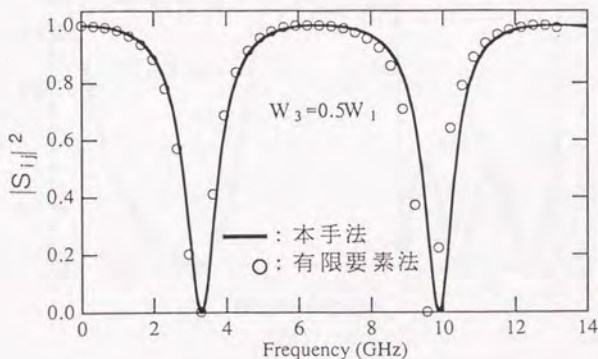
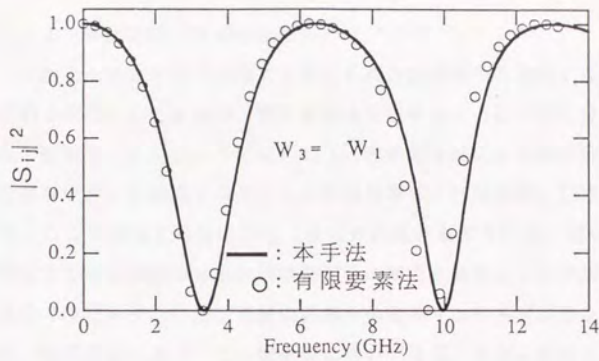


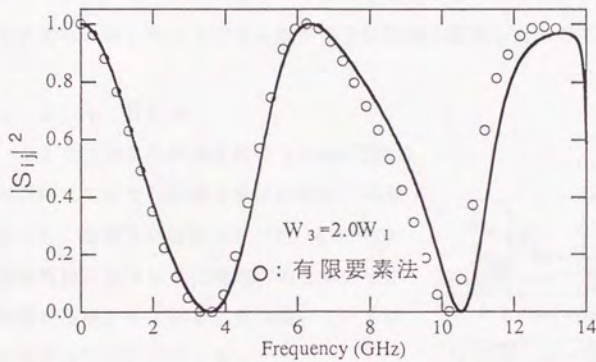
図4.3 トリプレート形T分岐線路回路



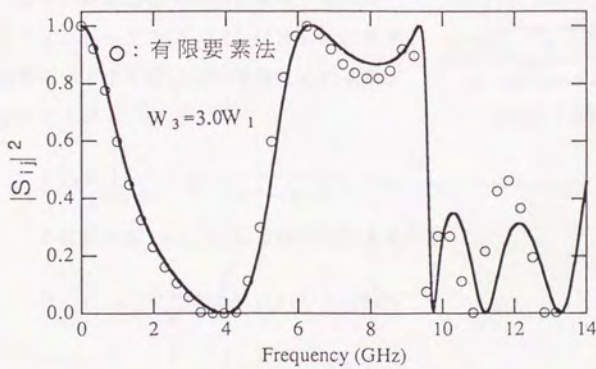
(a)



(b)



(c)



(d)

図4. 4 トリプレート形T分岐回路の  
周波数特性 (— : 本手法 ○ : 有限要素法)

#### 4.4 素回路法 (領域分割法) <sup>(2), (4), (5)</sup>

2次元ヘルムホルツ方程式を与えられた境界条件を満足する固有モードを求める手法として変分法, 有限要素法を説明した. この節では全くの任意形状の固有モードを求めるには4.2, 4.3節の電算機による数値解法に頼らざるを得ないが, 計算機プログラムの負担を増し, 計算時間, 記憶容量が増大する. ここで提案する素回路法 (領域分割法とも言う) は, 図4.5のように回路全体を接合回路部分と伝送線路部分の集合と見なす. この接合回路部分の姿態インピーダンス及び伝送線路部分の姿態インピーダンスを計算する. 次に, 回路理論に基づいて, 接続面において電圧, 電流の連続条件より固有モードを計算する. この手法はマイクロ波回路でよく利用されている横共振法と本質的に同じ考え方であるが多端子回路網に拡張したものである.

##### 4.4.1 計算法

ここでは抽象的議論を避けるために図4.5の回路において斜線部分を平面回路(S)と見なし, 各端子には長さ $L^{(1)}$ , 幅 $W^{(1)}$ の先端開放, あるいは先端短絡の2本の伝送線路が接続されているときの固有モードの計算方法について述べる.

さて, 接合回路の各接合面より見たモード・インピーダンス  $Z_{pq}^{ij}$  は表4.4 に示す固有モードより式(4.29)で与えられる事が分かっている.

$$Z_{pq}^{ij} = \frac{\mu d}{\epsilon S} \sum \frac{jk}{k^2 - k_n^2} \cdot n_{q, (i, m)}^{(j)} \cdot n_{p, (i, m)}^{(j)} \quad (4.29)$$

ここに結合度  $n_{p, (i, m)}^{(j)}$  は次式で与えられる.

$$n_{p, (i, m)}^{(1)} = \frac{1}{W^{(1)}} \int \psi_n(a, s) f_p^{(1)}(s) ds \quad (4.30)$$

$$n_{p, (i, m)}^{(j)} = \frac{1}{W^{(j)}} \int \psi_n(a-s, b) f_p^{(j)}(s) ds$$

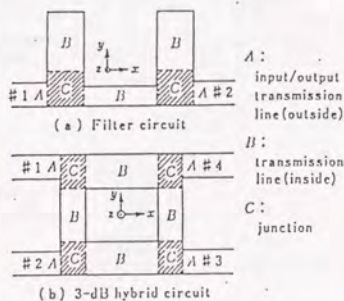


図4.5 素回路法

表4.4 平面回路の固有関数と伝送線路の固有関数系

$$\psi_n(x,y) = \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_m} \cos \frac{\ell}{a} \pi x \cdot \cos \frac{m}{b} \pi y \quad f_p^{(1)}(\ell, s) = \sqrt{\epsilon} \cos \frac{p\pi}{W} s$$

$$k_n^2 = \left(\frac{\ell}{a} \pi\right)^2 + \left(\frac{m}{b} \pi\right)^2$$

接合部でTEM波以外に無限個の非伝搬高次モードが励振される。しかし高次モード程励振量は小さいと考えられるのでq次までの高次モードを考慮し、それ以上のモードを無視して各端子での端子電圧、端子電流の集合の縦行列 ( $V^{(1)}$ ,  $V^{(j)}$ ,  $I^{(1)}$ ,  $I^{(j)}$ ) を

$$V^{(1)} = \begin{bmatrix} V_1^{(1)} \\ V_2^{(1)} \\ \vdots \\ V_q^{(1)} \end{bmatrix} \quad I^{(1)} = \begin{bmatrix} I_1^{(1)} \\ I_2^{(1)} \\ \vdots \\ I_q^{(1)} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

と定義すると、端子インピーダンス行列との関係は式(4.31)で与えられる。

$$\begin{bmatrix} V^{(1)} \\ V^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{1j} \\ Z_{j1} & Z_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{(1)} \\ I^{(j)} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$i, j$ : 各端子番号 (開口)

$p, q$ : 伝送線路の高次モードの次数

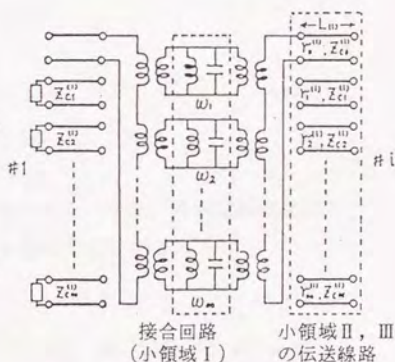


図4.6 等価回路

次に、接合回路の接合面  $i, j$  に先端開放、あるいは先端短絡の各固有伝送モードに対応した伝送線路を接続する。即ち

$$V^{(1)} = -Z_L^{(1)} I^{(1)}, \quad V^{(j)} = -Z_L^{(j)} I^{(j)} \quad (4.33)$$

但し、

$$Z_L = \text{diag.}(Z_{L1}, Z_{L2}, \dots, Z_{Lq})$$



$$Z_{LP} = \begin{cases} Z_{cp} \tanh(\gamma_p L) & (\text{先端開放}) \\ Z_{cp} \coth(\gamma_p L) & (\text{先端短絡}) \end{cases}$$

$$Z_{cp} = \frac{j\omega\mu d}{\gamma_p W} \quad \gamma_p = \sqrt{\left(\frac{(p-1)\pi}{W}\right)^2 - k^2}$$

従って、行列固有値方程式を得る。この式が非自明解を持つための条件より、固有値  $k_n$  が求まる。

$$\begin{vmatrix} Z^{II} + Z_{L^I} & Z^{IJ} \\ Z^{JI} & Z^{JJ} + Z_{L^J} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I^{(I)} \\ I^{(J)} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.34)$$

又、式(4.34)を満足する固有値  $k_n$  に対応した固有ベクトル  $[I^{(I)}, I^{(J)}]$  を求めることにより伝送線路部分の電界  $E_z$  は

$$V^{(i)} = \sum A_p^{(i)} \cosh \gamma_p^{(i)} (L^{(i)} - L) f_p^{(i)}(s^{(i)}) \quad (4.35)$$

$$A_p^{(i)} = - \frac{Z_{cp}^{(i)}}{\sinh(\gamma_p^{(i)} L^{(i)})} I_p^{(i)}$$

接合回路部分の電界  $V(x, y)$  は次式で与えられる。なお、先端短絡伝送線路の場合には上式の  $\cosh(\ )$  と  $\sinh(\ )$  を入れ替えるだけでよい。

$$V(x, y) = \sum \left( - \frac{j\omega\mu d}{k^2 - k_n^2} \sum \left[ \psi_n(x_0, y_0) \frac{I_p^{(i)}}{W^{(i)}} f_p^{(i)}(s^{(i)}) ds^{(i)} \right] \right) \psi_n(x, y) \quad (4.36)$$

式(4.35), (4.36)の電界は相対振幅であるから、大きさに関して  $\iint_S \psi_n^2 dx dy = S$  (平面回路の面積) となるように正規化する必要がある。

#### 4.4.2 適用例

【1】固有モードの計算：図4.7に示す形状において、接合回路部分の固有値を  $N = 30$  個、伝送線路の高次モードを  $P = 5$  次まで考慮して計算した結果を図4.7に示す。伝送線路幅  $W^{(1)} W^{(2)}$  は同じ幅で、 $L^{(1)} = L^{(2)} = 2W^{(1)}$

1) とした。図4.7に電位ポテンシャルの等電位線を示す。接合部と伝送線路部の境界で等電位線に幾分不連続が見られるが、 $N, P$ を増すと解決する。この結果と変分法の結果を比較して低次の10個までのモードは良く一致している。このようにフィルタ回路のように細長い回路形状に対しては、有限要素法等よりも伝送線路の固有モードを利用した領域分割法の方が精度、CPU時間、記憶容量に関して優れていると考える。

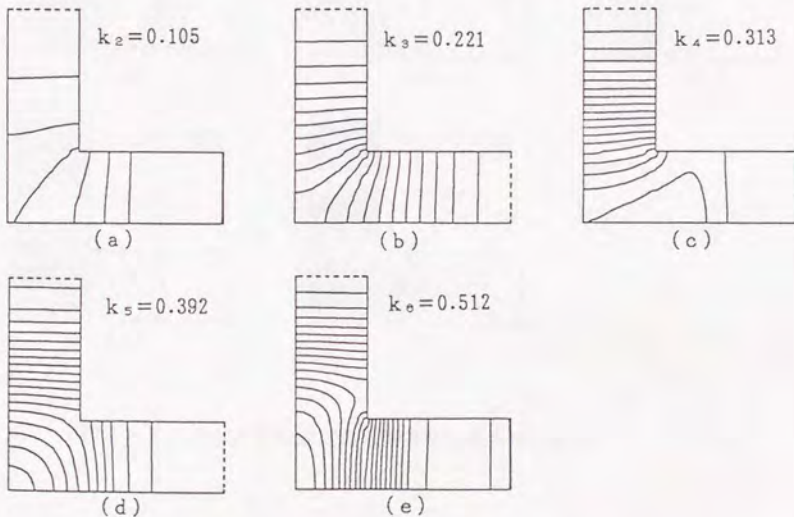
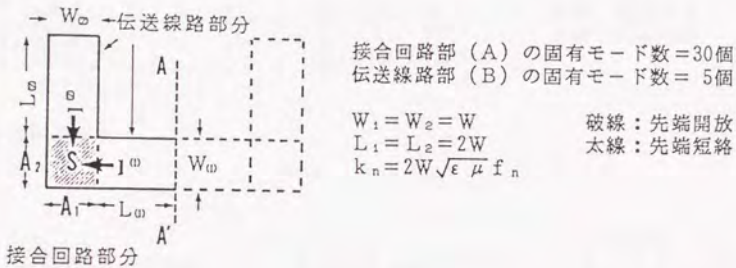
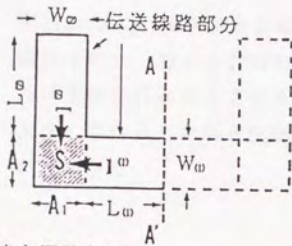


図4.7 ステップ形2段回路の固有関数分布の計算例



接合回路部 (A) の固有モード数 = 30個  
 伝送線路部 (B) の固有モード数 = 5個

$$W_1 = W_2 = W$$

$$L_1 = L_2 = 2W$$

$$k_n = 2W \sqrt{\epsilon \mu} f_n$$

破線：先端開放  
 太線：先端短絡

接合回路部分

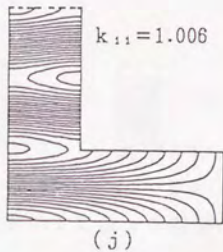
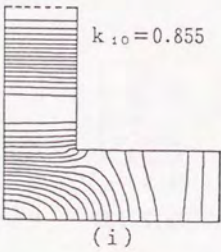
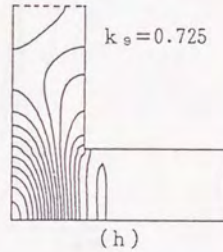
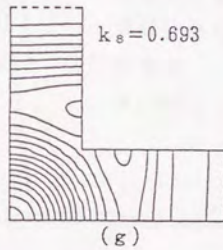
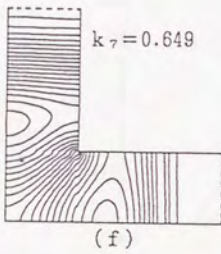


図4. 7 スタブ形2段回路の固有関数分布の計算例

【2】低域通過フィルタ：図4.8に示す簡単な3段無極チエビシェフ低域通過フィルタを誘電体基板Rexlite2200( $\epsilon_s=2.62, d=1.45\text{mm}$ )を想定し、実効幅近似を用いて設計し、基準周波数 $f_0=6\text{GHz}$ 、通過域の最大減衰量 $\alpha_p=0.2\text{dB}$ 、 $\alpha_p=0.8\text{dB}$ 、 $\alpha_p=1.0\text{dB}$ の回路の周波数特性を伝送線路理論、2次元的な領域分割法、および実験値と比較した結果を図4.9に示す。この周波数帯では線路幅比が大きくなると回路の不連続部で発生する高次モードのために $f=7\text{GHz}$ 付近に不要応答が生じている。また、通過域のripple、遮断周波数、周期性が大きく崩れることから伝送線路理論による解析では不十分となってくるのが分かった。

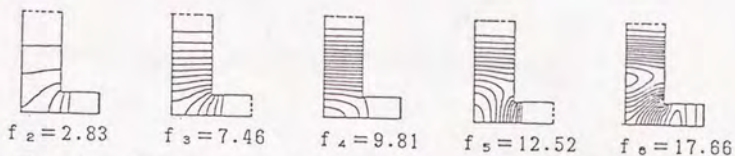
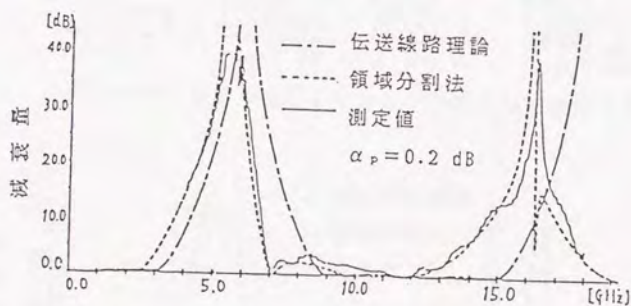


図4.8(a) 3段無極チエビシェフ回路の周波数特性と固有モード

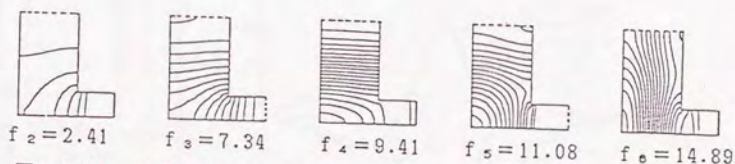
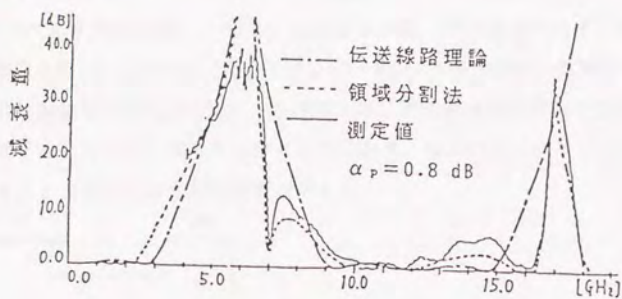


図4.8(b) 3段無極チェビシェフ回路の周波数特性と固有モード

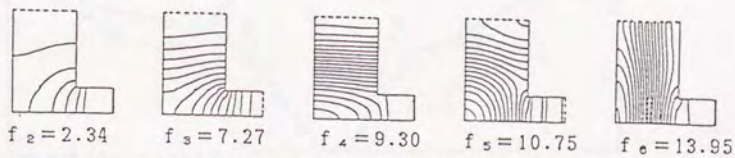
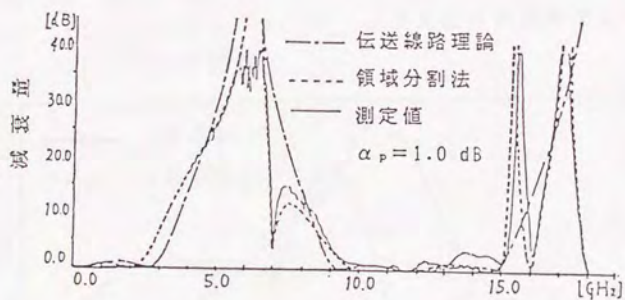


図4.8(c) 3段無極チェビシェフ回路の周波数特性と固有モード



#### 4.5 まとめ

マイクロ波平面回路を解析あるいは合成するためには、等価回路の回路定数である結合度（固有関数）、共振周波数（固有値）を精度よく、より短時間に求める事が本質的である。このためには境界条件付偏微分方程式を行列に関する固有値問題へ直す手法および行列に関する固有値問題を効率よく解く手法を開発する必要がある。本論文では変分法、有限要素法、素回路法（領域分割法）について検討した。

変分法は基底関数に三角関数（従来は $x, y$ のべき乗）を用いることにより25個程度まで正確に求めることに成功した。

有限要素法は計算機センターのライブラリーを利用した。無縁根が生じないようにプログラムを改良する必要がある。これは今後の課題とする。

実際にマイクロ波回路で用いられるフィルタ回路等上記の手法をそのまま適用するには無理がある。接合部と伝送線路部に回路を分割し、接合部には変分法（有限要素法）を採用し、伝送線路部には伝送線路モードを用いる新しい手法を開発する必要がある。

ここでは、素回路法を発展させて、固有モードの計算に便利な伝送線路モードを用いた領域分割法の定式化と数値結果について詳細に述べた。本手法は、解の収束性に関する数学的な証明が与えられていないが、考慮するモード数を増すと共に振動しながら収束する（一様収束ではなく絶対収束であると考え）る。しかし、より複雑なプランテライン形 $n$ 素子フィルタ回路、3-プランテライン3dBハイブリッド回路の固有モードの計算に適用可能であり、更に、短絡境界平面回路の解析にも同様に適用できることから、素回路法（領域分割法）という考え方は平面回路解析の有力な手法の一つとなるであろう。

東京大学大越孝敬教授により提案された短絡境界平面回路は従来のH面方形導波管回路のかんりの部分を含んだ有用な回路であると考えられる。本節では、この回路を解析する手法として、平面回路内の電界を混合境界条件を満たすスカラ固有関数で展開し、方形導波管内の電磁界を非伝搬高次モードを含む固有伝送モードで展開し、基準面で各電磁界をモード整合させることにより、基準面より平面回路を見たときの基本モード (TE<sub>10</sub>モード) に対するインピーダンス行列を求める手法を提案する。更に、本手法の妥当性を簡単な回路及び計算例で確認し、周波数特性を1%の精度で計算するのに必要な考慮すべき平面回路内の固有モードの数、伝送線路内の非伝搬高次モードの数について考察した。最後に、本手法を用いて先端短絡方形導波管回路、方形導波管H面T分岐回路の周波数特性、方形導波管H面90°円形バンドの周波数特性を計算し、各々、測定結果あるいはWavguide Handbookの結果と比較してよい一致が見られた。

### 5.1 短絡境界平面回路の固有モード展開<sup>(2)</sup>

東京大学大越孝敬教授により提案された短絡境界平面回路<sup>(1)</sup>は、従来のH面方形導波管回路を含むだけでなく、新しい可能性も含んだ有用な回路形式であると考えられる。従って、本回路を解析する有効な手法を開発する事は、上に述べたH面不連続方形導波管回路のより正確な解析と設計の手助けになるだけでなく、より周波数特性の優れた回路の解析、設計に役立つと考えられる。ところで、本回路を解析する手法として、既に2次元ヘルムホルツ方程式をウエーバの式を用いて積分方程式に直し、この積分方程式より直接端子アドミタンスを数値計算する手法<sup>(2)</sup>、方形導波管より平面回路を電圧励振したときに平面回路内に生じる2次元ベクトル磁界をベクトル固有関数で展開し、端子より見たアドミタンス行列を求める手法が提案されている。前者の手法は回路の周波数特性を計算する場合、各周波数毎に計算するために計算時間を要するが、任意形状に適用できるといった特長を持っている。この点、後者の手法は一度境界条件を満たすベクトル固有関数が求まれば、等価回路が容易になると言った利点があるが、境界条件を満たすベクトル



ル固有関数を見出すのに手間がかかるといった欠点を有する。

ここでは、新たに、方形導波管より励振された短絡境界平面回路内の電界が高さ方向のみとなる点に着目して、この電界をスカラ固有関数で展開して端子より見た基本モード (TE<sub>10</sub>モード) に対するインピーダンス行列を求める手法<sup>(4)</sup>を提案する。この点は、第3章で記述した開放境界平面回路の固有モードによる解析と原理的に同じであるが、本論文で取り扱う回路は周辺が短絡された回路であること (開放境界)、伝送線路が方形導波管であること (ストリップ線路)、伝送線路と平面回路の結合がステップだけでなく誘導性窓も考えられること (ステップ)、多くの場合伝送線路の幅 ( $W^{(1)}$ ) が平面回路の寸法と同程度であること ( $W^{(1)} \ll \text{寸法}$ ) といった差異のために、固有関数の境界条件も混合境界条件 (開放境界条件) となりインピーダンスを与える式も新たに導出する必要が生じ、又、本計算法を実際に適用する際に重要となる考慮すべき平面回路内および方形導波管内の固有モードの個数についても考察し直す必要がある (前文の ( ) 内は開放境界平面回路の場合を表わす)。本節はこのような問題を系統的に扱ったものである。

なお、本解析法は、既に提案されている固有モード展開によるアドミタンス行列の導出に対応して、平面回路のインピーダンス行列を導出するだけでなく、従来の理論では考慮されていなかった方形導波管と平面回路との接続部で生じる非伝搬高次モードの基本モード・インピーダンスへの寄与の大きさを与える簡潔な表現式を導出している。又、本解析法を実際問題に適用する場合、混合境界条件を満足するスカラ固有関数を一度求めればよいので、ベクトル固有関数を求めるのに比して手間を要しないと考えられる。

本節では、最初基本モードのインピーダンス行列を計算する式を導出した後、本計算法の妥当性を確かめると共に、本解析法を実際問題に適用する場合に重要となる考慮すべき平面回路内および伝送線路内の固有モードの個数について考察している。

最後に、本計算法を固有関数が解析的に分かる先端短絡方形導波管回路、方形導波管2開口回路、3開口回路、円形バンドに適用して、その広帯域周波数特性を計算した。この計算結果は測定結果或いはWaveguide Handbookの結果と比較して良い一致を見た。更に、Waveguide Handbook<sup>(10)</sup>では計算できない高次モードの遮断周波数近傍での特性も計算した。

## 5・2 短絡境界平面回路の解析法

### 5.2.1 解析モデル

ここで解析する短絡境界平面回路は図5.1に示すように高さ $d$ なる方形導波管(各導波管の横幅= $W^{(i)}$ )が $m$ 本入出力線路として誘導性窓あるいはステップを通して結合されているとする。この種の平面回路を解析するに当たり次の仮定を行なう。

- (1) 入出力導波管も含めた平面回路の高さ方向の構造は一様である。
- (2) 平面回路と方形導波管との結合はステップまたは誘導性窓で、窓面は、導波管の壁と常に直角をなす。
- (3) 導波管内は $TE_{10}$ モードのみ伝搬可能とし、入射電磁界モードは $TE_{10}$ モードのみとする。

仮定(2)の結果、図5.2に示す上から見た平面回路で斜線の部分は、本来導波管の一部と考えられるが、本解析では短絡境界平面回路内に繰り入れる事とする。

従って、平面回路の境界は結合窓の部分( $C^{(i)}$ )を除いてすべて短絡境界( $C_0$ )となる。更に、 $x-y$ 座標を図5.2に示すように、 $z$ 座標をそれに垂直に取る。又、 $i$ 番目の伝送線路上での座標系 $l^{(i)}-s^{(i)}$ 、及びその原点 $0^{(i)}$ を図5.2のように定義する。

上記の仮定より、平面回路内の電磁界分布は開放境界平面回路の場合と同様に電界は $E_z$ 成分のみ、磁界は、 $H_x, H_y$ 成分だけとなり、共に $x, y$ の関数となっており、2章で記述した平面回路方程式(2.6), (2.7)に従う。従って、平面回路内の電圧 $V(x, y)$ は、式(2.9)のスカラーヘルムホルツ方程式を式(2.10)の境界条件を満足するように解けば求まる。

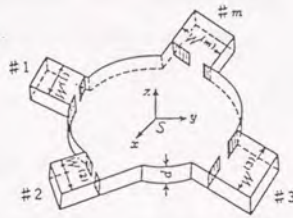


図5.1 短絡境界平面回路

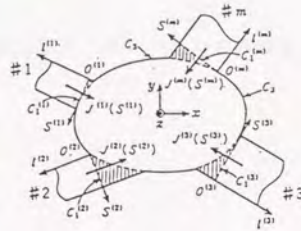


図5.2 上部より見た図( $z=0$ )  
平面回路と導波管線路の座標系

### 5・2・2 実効的インピーダンス行列の導出

第2章で、姿態電圧、電流の定義とその取り扱いについて記述したので重複するが、ここでは、方形導波管線路に限って説明する。いま、各導波管中でのTE<sub>10</sub>モードに対する等価回路、等価電流を定義し、この定義に基づいて、各導波管の基準面より平面回路を見たときのTE<sub>10</sub>モードに対するインピーダンス行列を導出する。今、各導波管中の基本モードに対する等価電圧、等価電流として式(5.1)を定義する。

$$V_p^{(1)} = K_{vp}^{(1)}(a_p^{(1)} + b_p^{(1)}) \cdot d$$

$$I_p^{(1)} = K_{ip}^{(1)} \frac{\gamma_p^{(1)}}{j\omega\mu_0} (a_p^{(1)} - b_p^{(1)}) \cdot W^{(1)} \quad (5.1)$$

$K_{vp}^{(1)}$ 、 $K_{ip}^{(1)}$ は、導波管中の基本モードの電界成分、磁界成分と基本モードの等価電圧、等価電流を結び付ける無次元比例定数である。等価電圧、等価電流の積が実際に導波管を流れる電力に対応する為には $K_{vp}^{(1)}$ 、 $K_{ip}^{(1)}$ の間に式(5.2)の関係が必要となる。

$$K_{vp}^{(1)} \cdot K_{ip}^{(1)} = 1 \quad (5.2)$$

式(5.1)の定義より基準面( $o^{(1)}$ 点)での基本TE<sub>10</sub>モードに対する等価電圧、等価電流は式(5.3)で与えられる。

$$V_i^{(1)} = K_i^{(1)} d (a_i^{(1)} + b_i^{(1)})$$

$$I_i^{(1)} = K_i^{(1)} (a_i^{(1)} - b_i^{(1)}) \quad (5.3)$$

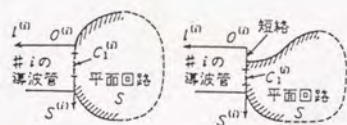
$V_i^{(1)}$ 、 $I_i^{(1)}$ より電圧縦行列 $V$ 、電流縦行列 $I$ を次式で定義すると、

$$V = (V_i^{(1)}, V_i^{(2)}, \dots, V_i^{(m)})$$

$$I = (I_i^{(1)}, I_i^{(2)}, \dots, I_i^{(m)}) \quad (5.4)$$

$$V_i = (a_i + b_i), \quad I_i = (a_i - b_i) \quad (5.5)$$

短絡境界平面回路と導波管との結合は図5.3に示すように誘導性窓あるいはステップの2種類が考えられ、各場合での $C^{(1)}$ の取り方は破線で示す通りである。式(5.1)で与えられる導波管内の姿



(a) 誘導性窓による結合 (b) ステップによる結合

態電圧 $V^{(1)}$ は $1^{(1)}=0$ で、 $0 \leq S^{(1)} \leq W^{(1)}$

にわたって電圧の連続性により次式を満たさなくてはならない。

$$V^{(j)} = \begin{cases} \text{式(5.7)の } V & : C^{(j)} \\ 0 & : 0 \leq S^{(1)} \leq W^{(1)} \text{ で } C^{(j)} \text{ 以外の部分} \end{cases} \quad (5.6)$$

但し,

$$V(x, y) = \sum \left\{ -\frac{1}{k^2 - k_n^2} \sum W^{(1)} \sum \frac{n_p^{(1)} n_p^{(1)} \gamma_p^{(1)}}{2} \cdot (a_p^{(1)} - b_p^{(1)}) \right\} \phi_n(x, y) \quad (5.7)$$

$$\gamma_p^{(1)} = ((p\pi/W^{(1)})^2 - k^2)^{-1/2}$$

式(5.6)の両辺に表2. 2に示す  $f_p^{(j)} = \sqrt{2} \sin(q\pi S^{(j)})/W^{(j)}$  を乗じて整理すると式(5.8)を得る。

$$\begin{aligned} \sum \sum (Z_{cp}^{(j)} \delta_{ij} \delta_{pq} + Z_{pq}^{ij}) I_q^{(j)} \\ = -\sum Z_{cp} I_i^{(1)} \end{aligned} \quad (5.8)$$

但し,  $j = 1, 2, \dots, m$        $q = 1, 2, \dots,$

混合境界条件を満たす固有関数系より, 式(2.22)に基づいて, 短絡境界平面回路の姿態インピーダンスは式(5.9)で与えられる。

$$Z_{pq}^{ij} = \frac{1}{C_0} \sum -\frac{j\omega}{\omega^2 - \omega_n^2} n_n^{(j)} n_{pn}^{(i)} \quad (5.9)$$

$$n_{pn} = \frac{\sqrt{2}}{W^{(1)}} \int \phi_n(x, y) \sin \frac{p\pi S^{(1)}}{W^{(1)}} ds^{(1)} \quad (5.10)$$

従って, 式(5.5)のように電圧, 電流を定義したとき, 平面回路が示すインピーダンス行列は式(5.11)で定義される。

$$\begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_q \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1q} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{q1} & Z_{q2} & \dots & Z_{qq} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_q \\ \vdots \end{vmatrix} \quad (5.11)$$

今, 実効的インピーダンス行列を導出するために式(5.11)を用いて計算する。ところで, 式(5.11)は無次元の行列方程式となっている。しかし, 非

伝搬高次モードは次数が高くなる程、その励振量は小さくなると考えられるので、 $(q+1)$ 次以上の非伝搬高次モードは無視できるとして、式(5.11)を有限次元の行列方程式に直して姿態電圧 $V$ と姿態電流 $I$ の関係を求めると式(5.12)を得る(これらの関係式は、第2章と重複しているが、短絡境界平面回路の理論展開に必要なので、再度記述した)。

$$Z_{eff} = Z_{11} + \Delta Z^q \quad (5.12)$$

$$\Delta Z^q = - \begin{vmatrix} Z_{12} & Z_{22} + Z_{c2} & \dots & Z_{2q} \\ Z_{13} & Z_{33} & \dots & Z_{3q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{1q} & \dots & Z_{qq} + Z_{cq} & \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} Z_{21} \\ Z_{31} \\ \vdots \\ Z_{q1} \end{vmatrix}$$

$$Z_{cp} = \text{diag.} (Z_{cp}^{(1)}, Z_{cp}^{(2)}, \dots, Z_{cp}^{(m)})$$

式(5.12)で、 $\Delta Z^q$ は高次モードの基本モードへの寄与を表わしており、高次モードがすべて非伝搬であるから、 $\Delta Z^q$ は純虚数行列となる。なお、式(5.12)は実効インピーダンス行列より $S$ 行列を求めると次式となる。

$$S = (Z_{eff} + Z_{c1})^{-1} (Z_{eff} - Z_{c1}) \quad (5.13)$$

但し、 $Z_{c1} = \text{diag.} (Z_{c1}^{(1)}, Z_{c1}^{(2)}, \dots, Z_{c1}^{(m)})$

この節では、短絡境界平面回路内の電圧(電界)をスカラ固有関数で展開する事により導波管線路内の非伝搬高次姿態も考慮したときの基本姿態(T<sub>E<sub>10</sub></sub>モード)に対するインピーダンス行列を求める手法を述べた。具体的な周波数特性は次節以降に与える。又、電磁界分布は第8章で測定と共に示す。

### 5.3 解析法の妥当性, 計算誤差<sup>(2)</sup>

ここでは, 先ず本解析法の妥当性を確かめた後, 本解析法の計算誤差について考察する. 本解析法の本質的な計算誤差の原因には2種類ある. つまり, (1) 平面回路内の固有モードを無限個考慮するわけにはいかないために生じる打ち切り誤差, (2) 導波管内の非伝搬高次モードを無限個考慮するわけにはいかないために生じる打ち切り誤差である. この2種類の原因から生じる誤差の大きさを簡単な計算例より評価する.

#### 5.3.1 本解析法の妥当性を示す一例

5.2節で述べたインピーダンス行列に基づく解析手法は, 無限個の完備な固有関数と方形導波管内の無限個の固有モードを考慮すれば正確な解を与えるはずである. この点を確かめるために, 図5.4に示す方形導波管回路を取り上げる. ここで,  $x=0$ より $x=a$ までを短絡境界平面回路であるとし, これに幅 $W$ なる方形導波管が $x=0, x=a$ の所で入出力線路として接続されているとして, この短絡境界平面回路が $TE_{10}$ モードに対して示すリアクタンス行列を本手法を用いて計算する.

図5.4の斜線を施した部分の回路で, 混合境界条件 ( $x=0, a$ : 開放境界  $y=0, W$ : 短絡境界) を満たす固有関数, 固有値は式(5.15)で与えられる.

$$\psi_{1,m} = \sqrt{2\varepsilon_1} \cos \frac{l\pi}{a} x \cdot \sin \frac{m\pi}{W} y, \quad k_{1,m}^2 = \left(\frac{l\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{W}\right)^2$$

$$l, m: \text{整数}, \quad \varepsilon_1 = 1(l=0), 2(l \neq 0) \quad (5.15)$$

式(5.9)より  $n_{p,(l,m)}$  は

$$n_{p,(l,m)} = 2\varepsilon_1 \delta_{pm}, \quad n_{p,(l,m)} = (-1)^l 2\varepsilon_1 \delta_{pm} \quad (5.16)$$

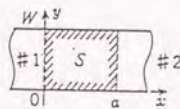
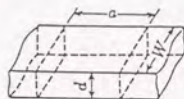


図5.4 方形導波管線路の解析モデル

となり、正規化リアクタンス行列は式(5.17)となる。

$$\bar{X} = \frac{1}{\pi} \frac{W}{a} \sum - \frac{\sqrt{F^2 - 1}}{F^2 - 1 - (1W/a)^2} \begin{vmatrix} 1 & (-1)^1 \\ (-1)^1 & 1 \end{vmatrix} \quad (5.17)$$

但し、 $F = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \cdot W / \pi$  (正規化周波数)

ここで、余弦関数、余割関数の級数展開の公式を用いると次式が得られる。

$$\bar{X} = \begin{vmatrix} -\cot \beta_1 a & -\operatorname{csc} \beta_1 a \\ -\operatorname{csc} \beta_1 a & -\cot \beta_1 a \end{vmatrix} \quad (5.18)$$

ここに、 $\beta_1 = (k_0^2 - (\pi/W)^2)^{-1/2}$

これは伝送線路理論から求められた方形導波管線路の正規化リアクタンス行列と一致していることが分かる。この一例より、本解析法の妥当なことがある程度確かめられた。

### 5. 3. 2 平面回路の固有モードの打ち切り誤差

実際に、平面回路の周波数特性を本解析法により求めるとき、平面回路内の固有モードを無限個考慮するわけにはいかないので、ある有限個で打ち切りざるを得ない。つまり、式(5.9)の $Z_{pq}^{ij}$ の計算をN個の固有モードで近似すると式(5.19)を得る。

$$Z_{pq}^{ij} = \frac{1}{C_0} \sum - \frac{j\omega}{\omega^2 - \omega_n^2} n_n^{(j)} n_{pn}^{(i)} \quad (5.19)$$

この近似により生じる周波数特性の計算誤差の大きさを評価するために、既にそのS行列の周波数特性が $|S_{12}| = 1$ と分かっている図5.4に示した回路のS行列を本解析法に従って計算する。図5.4の回路において、計算の便宜上 $a = W$ とし、又、式(5.16)に示すように、 $n_{1, (1, m)} = 0$  ( $m \geq 2$ )となっていることを考慮するとN個のx方向の固有モードを考慮した基本モードの正規化リアクタンス行列は式(5.20)となる。

$$\bar{X} = \frac{1}{\pi} \sum - \frac{\sqrt{F^2 - 1}}{F^2 - 1 - 1^2} \begin{vmatrix} 1 & (-1)^i \\ (-1)^i & 1 \end{vmatrix} \quad (5.20)$$

但し,  $F = 2d/\lambda$

式(5.20)より  $N$  をパラメータとして、 $|S_{12}|^2$  を計算して dB 表示すると図5.5の結果を得る。正確な解は 0 dB となるので、図5.5の縦軸は、考慮する固有モードが有限なために生じる打ち切り誤差と考える事ができる。確かに考慮するモード数 ( $N$ ) が増加するにつれて打ち切り誤差が減少すること、又、より広い周波数帯域にわたって正確に周波数特性が計算できることが分かる。考慮した平面回路内の固有モードの個数と計算できる帯域との関係を打ち切り誤差をパラメータに取って図示すると図5.6となる。この図より  $S$  行列の周波数特性を基本モードのみが伝搬する帯域 ( $F = 1 \sim 2$ ) で  $\pm 1\%$  の打ち切り誤差で計算するために必要な固有モードの個数は  $N = 5$ 、つまり  $F = 0 \sim 5$  の範囲にあるすべての固有モードを考慮すればよいという評価を得る。

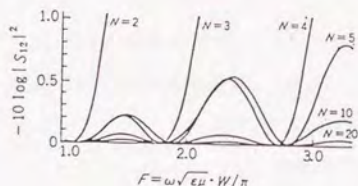


図5.5  $N$  個の固有モードで近似した  $|S_{12}|^2$  の周波数特性

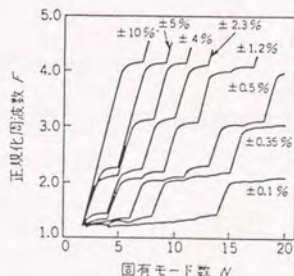


図5.6 打ち切り誤差を一定として考慮した固有モード数と帯域幅



### 5.3.3 伝送線路内の非伝搬高次モードの打ち切り誤差について

平面回路と伝送線路との接続部で、非伝搬高次モードが励振されるが、高次非伝搬モードほど励振量は小さいので基本モードの周波数特性に影響を及ぼすのは低次の非伝搬高次モードであると考えられる。従って、ここでは伝搬モードも含めて $q$ 次までのモードを考慮し、それ以上のモードを無視したときに生じる打ち切り誤差を図5.7に示す先端を短絡した一開口平面回路に対して計算し、この計算結果よりどの位の高次モードまで非伝搬高次モードを考慮すべきかを検討する。

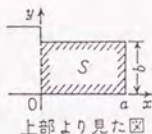
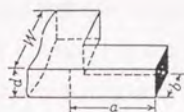


図5.7で斜線を施した部分を平面回路としたときの固有関数、固有値は式(5.21)で与えられる。

$$\psi_{1,m} = 2 \cos \frac{(2l+1)\pi}{2a} x \cdot \sin \frac{m\pi}{b} y \quad (5.21)$$

$$k_{1,m}^2 = \left( \frac{2l+1}{2a} \pi \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 \quad k_{1,m} = \omega_{1,m} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

式(5.21)を式(5.16), (5.15)に代入して $n_{p,(1,m)}$ ,  $Z_{p,q}$ を計算すると式(5.22), (5.23)を得る。

$$n_{p,(1,m)} = (-1)^{m+1} \frac{2\sqrt{2} W m \sin(pb\pi/W)}{\pi b ((W/b \cdot m)^2 - p^2)} \quad (W \neq b) \quad (5.22)$$

$$Z_{p,q} = \frac{8 a W^2}{\pi^3 b b^2} \sum \sum - \frac{jF}{F^2 - ((2l+1)/2)^2 - (a/b \cdot m)^2} \cdot \frac{n^2 \sin(qb/W\pi) \sin(pb/W\pi)}{(W/b \cdot m)^2 - q^2 (W/b \cdot m)^2 - p^2} \quad (5.23)$$

式(5.23)で $l, m$ に関する無限総和は計算できないので $l = 0 \sim 6, m = 1 \sim 6$ までの総和で近似する。今、 $a = W, b = 0.66W$ のとき、この近似は $F = 0 \sim 6.5$ 以内にあるすべての固有モードを考慮に入れたことに相当しているので、平面回路内の固有モードの打ち切り誤差は $F = 1 \sim 2$ の範囲で図5.6より $+0.5\%$ 程度に相当していると考えられる。 $q$ 次までの非伝搬高次モードまで考慮した基本モードのリアクタンスを $X^q$ とすると式(5.23)で定義された正規化リアクタンスは式(5.24)となる。

$$X^q = X_{11} - \Delta X^q \quad (5.24)$$

図5.7の形状に対する真のリアクタンスは分からないので、ここでは、 $q$ に対する $X^q$ の計算誤差を示す代わりに $|\Delta X^q| = |X^q - X_{11}| = |\Delta X^q|$ の $q$ に対する収束の状況を示すことにより、非伝搬高次モードの打ち切り誤差を評価する。図5.8に $X^{TE} = X_{11}$ の周波数特性、及び $q = 2, 3$ のときの $X^q$ を示す。 $q = 3$ 程度で十分収束していることが分かる。更に、収束の状況を詳しく調べるために正規化周波数 $F$ をパラメータとして $|\Delta X^q|$ の $q$ に対する収束の状況を図5.9に示す。図5.8、図5.9の結果より伝送線路内の4次までの非伝搬高次モードを考慮すれば、 $TE_{10}$ モードに対する正規化リアクタンスは $1\%$ の計算精度(実用的には十分な計算精度)で求められることが分かった。

#### 5.3.4 計算例

今までに述べてきた手法を用いて、図5.7に示す先端短絡方形平面回路、図5.11に示す方形導波管H面T分岐の周波数特性を計算した。前者の結果は実験値と、後者の結果は文献(5.8)の結果と比較して良い一致を見た。

##### a) 先端短絡方形導波管回路

図5.7に示す先端短絡方形導波管回路のS行列は1行1列となり、 $|S| = 1$ であるから、 $S = \exp(-j\phi)$ として位相遅れ $\phi$ の周波数特性を平面回路内の固有モードを42個( $l = 0 \sim 6, m = 1 \sim 6$ )、伝送線路内の非伝搬高次モードを5個( $q = 6$ )まで考慮して計算した結果を図5.10に示す。又、方形導波管WRJ-10を用いて実験により求めた位相遅れ $\phi$ を図5.10に同

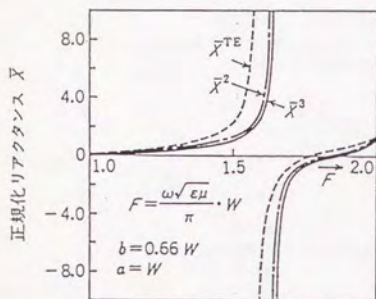


図5.8 正規リアクタンス  $X^q$  の周波数特性

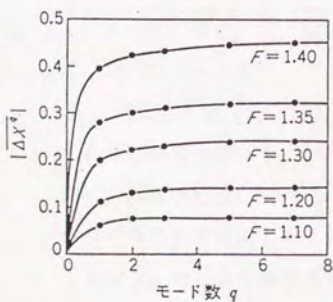
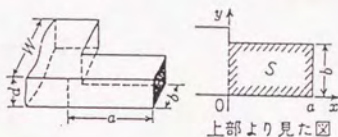


図5.9  $\Delta X^q$  の  $q$  に対する収束の状況



先端短絡方形平面回路  
Short circuited rectangular planar circuit.

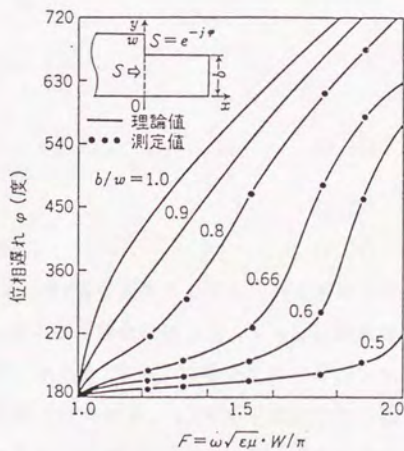


図5.10 先端短絡方形導波管回路の位相特性

時に黒丸印で示す。実験値は理論値と良く一致しており、本計算の正しいことが確認された。

b) 2開口2段H面ステップ接合回路

ここでは図5.11に示すように導波管幅  $W$ 、窓の大きさ  $b$ 、金属厚  $t$ 、長さ  $a$  の有限な厚さを持つ対称誘導性窓について計算する。この場合の結合度  $n_{p, (1, m)}$ 、

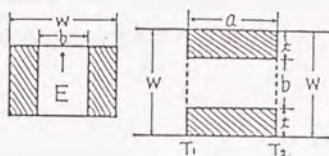


図5.11 2開口2段H面ステップ接合回路

$Z_{pq}$  は次式で与えられる。

$$n_{p, (1, m)}^{(1)} = \frac{2\sqrt{2\epsilon_1}}{\pi} \frac{(W/bm)}{(W/b \cdot m)^2 - p^2} \cdot A_{p,m} \quad (5.25)$$

$$n_{p, (1, m)}^{(2)} = (-1)^l \cdot \frac{2\sqrt{2\epsilon_1}}{\pi} \frac{(W/bm)}{(W/b \cdot n)^2 - p^2} \cdot B_{p,m}$$

$$A_{p,m} = \sin p \left(1 + \frac{b}{W}\right) \frac{\pi}{2} - (-1)^m \sin p \left(1 - \frac{b}{W}\right) \frac{\pi}{2}$$

$$B_{p,m} = \sin p \left(1 - \frac{b}{W}\right) \frac{\pi}{2} - (-1)^m \sin p \left(1 + \frac{b}{W}\right) \frac{\pi}{2}$$

$$Z_{p, q}^{i, j} = -j \frac{1}{C_0} \sum \sum \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_{1, m}^2} n_{p, (1, m)}^{(i)} \cdot n_{p, (1, m)}^{(j)} \quad (5.26)$$

$$Z_{eff} = Z_{1, 1} + \Delta Z^q \quad (5.27)$$

$$S = (Z_{eff} + Z_{c1})^{-1} (Z_{eff} - Z_{c1}) \quad (5.28)$$

これらの結果を用いて、 $a/W = \text{一定}$ 、 $b/W$  を変数として  $S$  行列を求めると図5.12(a), (b), (c), (d) を得る。 $b/W = 0$  の場合には  $|S_{11}| = 1$ 、即ち導波管を基準面で短絡したことになり、また  $b/W = 1$  の場合には  $|S_{12}| = 1$  となり、ただ方形導波管が存在するだけである。 $a/W$  が十分に小さいときには対称誘導性窓と見なすことができ、 $a/W$  が1.5より大きい場合には  $F > W/b$  で急峻な立ち上がり特性を示し、その後波状特性を持つ。更に対称構造であるから偶数次の非伝搬高次モードは励振されないので、 $1 < F < 3$  の周波数特性まで計算することができるが、ここでは詳しく述べない。なお、 $a$

$\bar{W}=1.0$ ,  $b/W=0.7\sim 0.8$ のときの周波数特性は周波数に比例した出力を取り出す周波数弁別器に利用できるものと考えられる。また、遮断領域の特性を利用することにより、リアクタンス減衰器を作ることができる。図中の\*印はWaveguide handbookの近似公式より計算した値である。

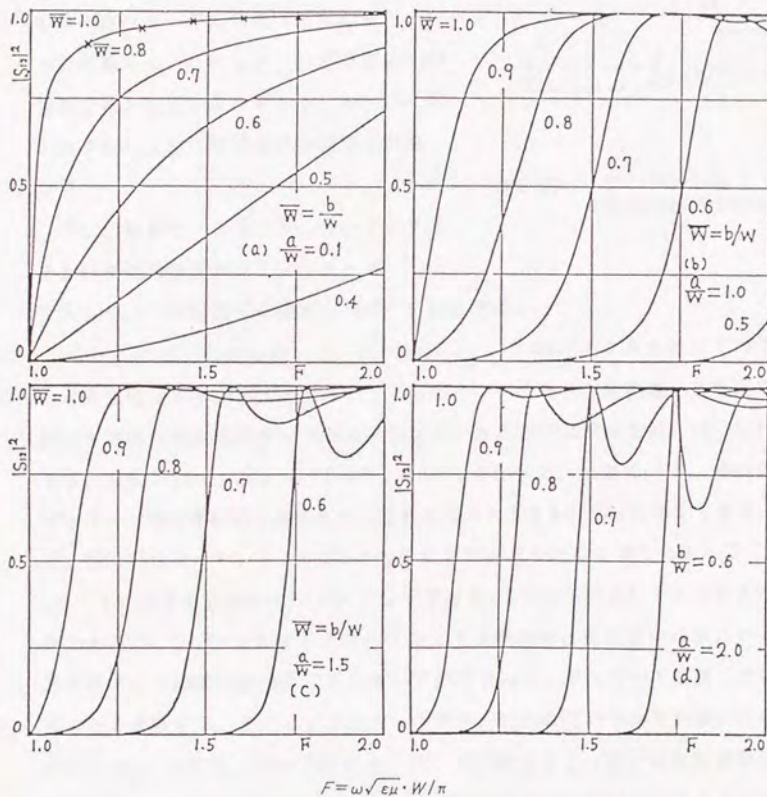


図5. 12 2開口2段H面対称ステップ接合回路の周波数特性

### 5.3.5 一般化S行列の適用例

ここでは第2章で展開した理論の妥当性を確認するために簡単な先端短絡H面ステップ不連続回路を取上げ、高次モードの伝搬を許した場合についてその周波数特性(S行列)、モード変換特性を広帯域にわたって数値計算した。これ等の数値計算において平面回路内の固有モード数は小さい順に50個、伝送線路の高次モードは9次( $TE_{20}$ モード)まで考慮した。このとき、計算精度は0.5%程度で得られていると考える。図5.13に示すように、1開口平面回路の特性を計算

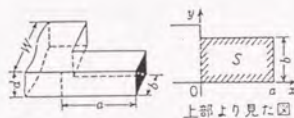


図5.13 1開口平面回路  
(先端短絡方形回路)

する。

但し、入射モードは $TE_{10}$ モードとする。

また計算周波数範囲は $TE_{10}$ モード、

$TE_{20}$ モードの伝搬する領域( $1.0 < F < 3.0$ )とする。

式(5.26), (5.27)を用いて、式(2.36), (2.39)より基本モードの電力反射係数( $|S_{11}| = 1$ )以外に $TE_{20}$ モードへのモード変換量、基準面で励振される非伝搬高次モードの複素振幅の大きさの計算結果を図5.14, 15に示す。図5.14は $a = W$ ,  $b = 0.6W$ ,  $0.85W$ のときに、伝搬モード、非伝搬高次モードが不連続部で励振される複素振幅の大きさを計算したものである。又、図5.15は $a = W$ ,  $b = 0.6W$ の場合に基準面より先端を見たときの $TE_{10}$ モードに対する正規化インピーダンスである。 $1 < F < 2$ ではリアクタンスのみであるが、 $2 < F < 3$ ではインピーダンスの実数部分と虚数部分の両方が計算される。この実数部分は $TE_{10}$ モードが $TE_{20}$ モードへモード変換していることを意味する。更に、どの位モード変換が行われているかを計算したのが図5.15(b)である。次の計算例は、図5.16に示すように厚い非対称誘導性窓に高次モードである $TE_{20}$ モードが入射した場合の伝搬領域にある伝送モードの電力透過係数及び $TE_{20}$ モードによる $TE_{10}$ モードへのモード変換係数を計算したものである。この場合にも電力保存則は成立しており、例えば、正規化周波数 $F = 2.5$ のとき

$$\begin{aligned}
 |S_{[20][20]}^{11}| + |S_{[20][20]}^{12}| + |S_{[20][110]}^{11}| + |S_{[20][110]}^{12}| &= 1 \\
 |S_{[20][20]}^{11}| &= 0.4408, \quad |S_{[20][20]}^{12}| = 0.1190 \\
 |S_{[20][110]}^{11}| &= 0.3495, \quad |S_{[20][110]}^{12}| = 0.0907
 \end{aligned}
 \tag{5.29}$$

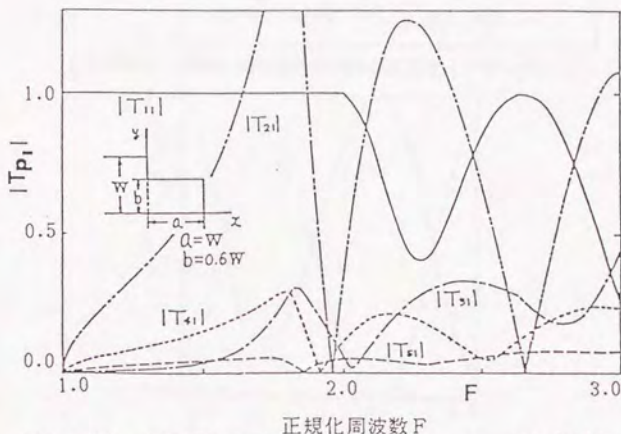


図5.14(a) 先端短絡方形導波管回路に  $TE_{10}$  モードを入射させた場合の高次  $TE_{no}$  モードの励振量 ( $b = 0.6W$ )

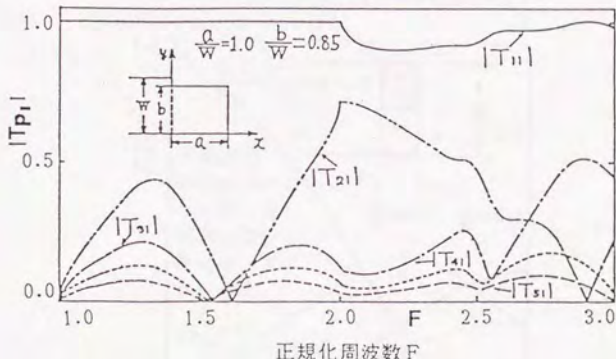


図5.14(b) 先端短絡方形導波管回路に  $TE_{10}$  モードを入射させた場合の高次  $TE_{no}$  モードの励振量 ( $b = 0.85W$ )

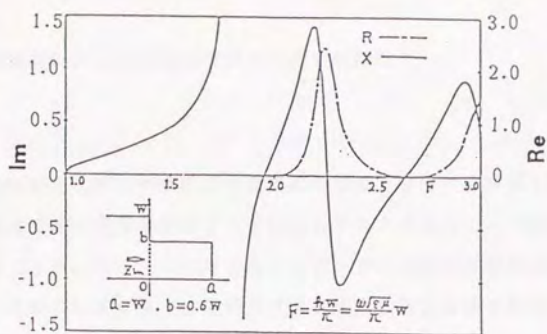


図5.15(a) 先端短絡形導波管回路の正規化インピーダンス

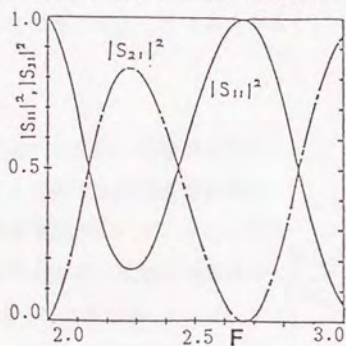


図5.15(b) 先端短絡形導波管回路の電力透過係数及びモード変換係数  
 $(S_{11} = S_{11}(TE_{10}, TE_{10}), S_{21} = S_{21}(TE_{20}, TE_{10}))$

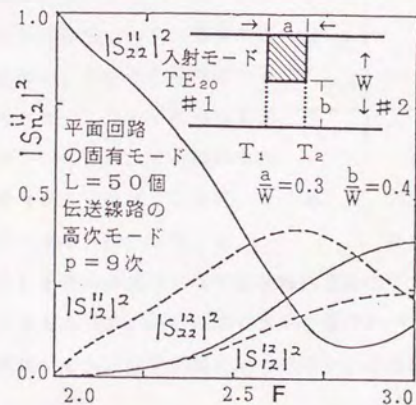


図5.16 厚い非対称誘導性窓に $TE_{20}$ モードを入射させた場合の周波数特性



#### 5.4 短絡境界H面T分岐導波管回路の周波数特性<sup>(4)</sup>

H面不連続導波管回路は短絡境界平面回路の考え方をういて解析する事ができ、すでにこの種の回路を解析する手法としてスカラ固有モード展開による基本モード(TE<sub>10</sub>モード)に対するインピーダンス行列を求める手法を第5章の5.2節で記述した。この節では、任意形状平面回路を解析するプログラムを用いて「楔」を入れたH面T分岐導波管回路の広帯域周波数特性を計算し、実際に計算に対応した回路を作成し、その周波数特性を比較検討した。

##### 5.4.1 問題の定式化, 回路の正規化

ここで解析するH面T分岐導波管回路は図5.17に示す構造を持っている。また、平面回路及び入出力方形導波管線路の座標系を同図bに示すように定義する。インピーダンス行列を求める手法を簡潔に要約すると、先ず、基準面( $l^{(i)} = 0$ )で伝送線路及び平面回路内の電磁界を整合させる。次に、各伝送線路中での基本状態に対する等価電圧, 等価電流を定義し、各線路の基準面から平面回路を見たときのTE<sub>10</sub>状態の示す正規化インピーダンス行列は、伝送線路の非伝搬高次状態をq次まで考慮すると式(5.11)で与えられる事が分かっている。

実際に式(5.11)を求める場合には平面回路の固有モード及び伝送線路の非伝搬高次モードをある有限個で打ち切らざるを得ないが、どの位のモード数を考慮すれば収束するかは数値計算によって確かめる必要がある。

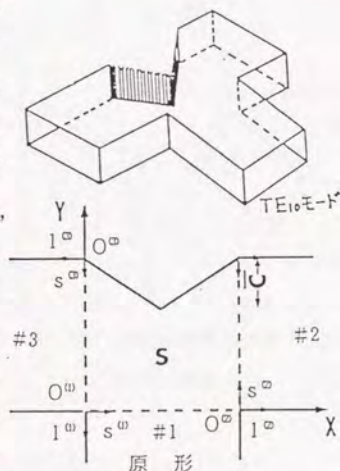


図5.17 H面T分岐導波管回路と座標系

### 5.4.2 固有姿態の計算機解析

図5.17に示す形状の固有値，固有関数を計算機で求めるためには平面回路の大きさを正規化する必要がある．ここでは大きさに関する正規化として伝送線路の幅 $W$ を取ると新しい無次元の正規化座標系で図5.18の如くなる．

この正規化座標系で無次元化された固有値，固有関数 $K_n, \Psi_n(X, Y)$ と実際の寸法の固有値，固有関数 $k_n, \phi_n(x, y)$ とは次の関係がある．

$$\phi_n(x, y) = \Psi_n(X/W, Y/W) \quad (5.30)$$

$$k_n = K_n/W$$

「楔」が $C=0$ の場合には解析的に固有モードが求まるが，任意の「楔」の大きさに対してはレイリーリッツの変分法で計算した．

(a)  $C=0$ の固有値，固有関数：  
一辺の長さ1なる開放と短絡が混在した正方形回路 ( $X=0, X=1, Y=0$ ：磁気壁； $Y=1$ ：電気壁) となるので固有関数，固有値は式(5.31)となる．

$$\Psi_n(X, Y) = \sqrt{2\epsilon} \cos(1\pi X) \cos((2m+1)/2\pi Y) \quad (5.31)$$

$$K_n = (1\pi)^2 + ((2m+1)/2\pi)^2$$

但し， $l, m$ は $0, 1, 2, \dots$

$l$ が偶数のとき， $X=1/2$ に対して偶モード， $l$ が奇数のとき，奇モードとなる．

このときの各端子の $n_{p, n}$ を式(5.9)より計算して $X_{p, q}$ を求めると式(5.32)となる．

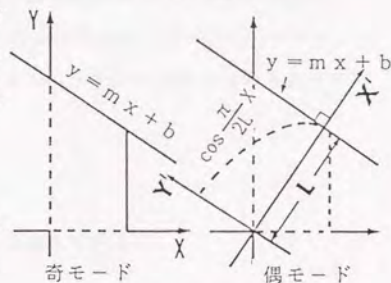
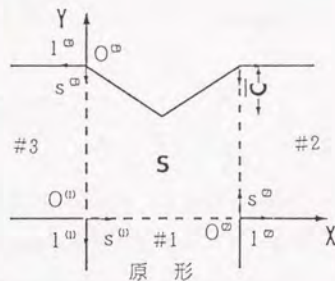


図5.18 正規化座標系と重み関数の決定方法

$$X_{pq} = \frac{1}{C_0} \sum \sum - \frac{\omega}{\omega^2 - l^2 - ((2 \cdot n + 1)/2)^2} n_{q, (l, m)}^{(j)} n_{p, (l, m)}^{(i)} \quad (5.32)$$

但し,

$$n_{p, (l, m)} = - \frac{2\sqrt{2} \epsilon_1}{\pi} \begin{bmatrix} (1 - (-1)^{p+1}) \cdot p / (p^2 - l^2) & (p \neq l) \\ 0 & (p = l) \\ (-1)^p \cdot \frac{p}{(2m+1/2)^2 - p^2} \\ (-1)^{l+1} \cdot \frac{p}{(2m+1/2)^2 - p^2} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

(b) 「樑」の大きさ  $C \neq 0$  の固有関数, 固有値: レイリーリッツの変分法を用いて計算する. 具体的には  $X=1/2$  の対称性を利用して偶モード, 奇モードを別々に計算する. このとき, 基底関数は回路周囲の境界条件を満たすように選ぶ必要がある. 先ず, 式(5.31)の固有関数系は  $X=0, 1/2, Y=0, 1$  の境界を満たす. 次に, 斜め線上での境界でのみ零となる重み関数を見出すと, 重み関数は式(5.33)となる.

$$W(X, Y) = \cos \frac{\pi}{2} (2CX + Y) \quad (5.33)$$

従って, 与えられた境界条件を満足する基底関数系は

$$f_i(X, Y) = \cos \frac{\pi}{2} (2CX + Y) \cdot \cos(1\pi X) \cdot \cos((2m+1)/2\pi Y) \quad (5.34)$$

また, 式(5.34)において,  $i$  と  $(l, m)$  の組み合わせは  $C=0$  の回路の固有値の小さい順に  $l$  の偶, 奇を選択する.

先ず, 「樑」を入れた形状について,  $C=0$  より  $0.1$  刻みで  $0.5$  までの大きさに対する偶, 奇モードの固有値を式(5.33)の基底関数系を用いて計算した結果を図5.19に示す. 図中の実線は  $X=1/2$  に対して奇モードを, 点線は偶モードを表す. 同時に各固有値に対応した低次の固有モードパターンの計算例 ( $C=0.3$ ) を図5.20に与える. なお, これらの計算において用いた基底の個数は数値実験により  $20$  個とした.

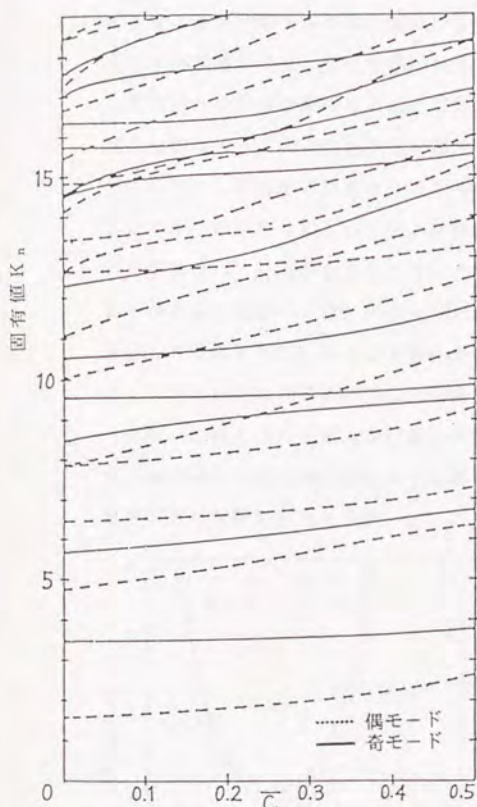
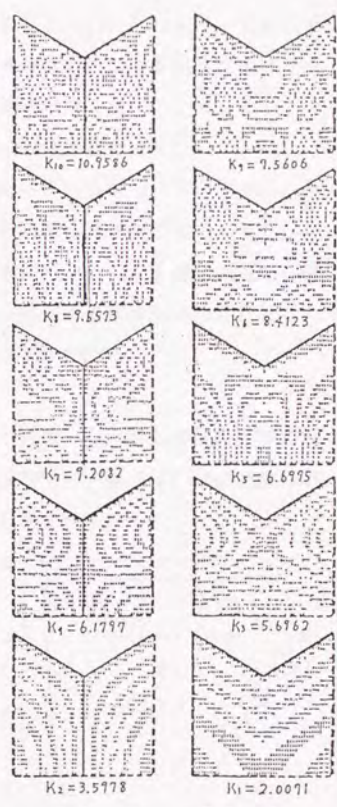


図5.19 固有値の計算値 (N=20)



奇モード 偶モード  
図5.20 固有モードパターン(C=0.3)

### 5.4.3 H面T分岐回路の広帯域周波数特性

本手法の計算精度は、(1)平面回路の固有モードの精度、(2)考慮する平面回路内の固有モードの個数、(3)考慮する伝送線路内の非伝搬高次モードの個数で決まる。これらのうち(3)については任意の非伝搬高次モードまで考慮することが可能であるから問題はない。しかし、(1)、(2)については任意形状平面回路の場合、数値計算に頼らざるを得ないので必要以上に固有モードの個数及び精度を要求することは数値計算の負担を増すことになるので、適切な固有モードの個数と精度を選択することは重要である。

ここでは、解析的に固有モードが与えられる $C=0$ について、固有モード数に対する収束性を検討し、又、伝送線路と平面回路の接続面での電界がどの程度整合しているかを検討する。この結果に基づいて、必要な固有モード数を推定して任意の「楔」が入ったH面T分岐回路の周波数特性を計算し、対応した回路を作成、測定して解析の正当性を確かめた。

#### (a) 平面回路の固有モード数と収束性

式(5.11)のインピーダンス行列の精度は、各モードの結合度と共振周波数が正確に求まるなら平面回路内の考慮した固有モード数( $N$ )と伝送線路の考慮した非伝搬高次モード数( $q$ )によって決まって来る。

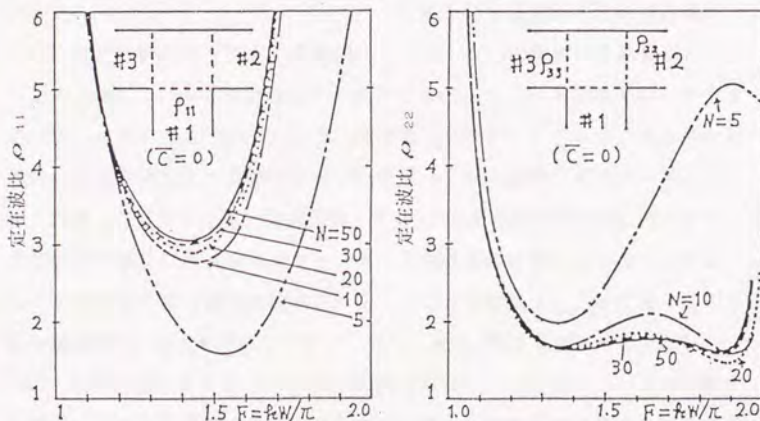


図5.21 平面回路の固有モード数と周波数特性の収束状況( $q=7$ )

ここでは周波数特性の収束状況を伝送線路の非伝搬高次モードを7次まで考慮し、平面回路の固有モード数(N)をパラメタとして、 $|S_{11}|$ 、 $|S_{22}|$  から求められる定在波比の周波数特性を図5.21(a),(b)に示す。計算結果より方形導波管の使用周波数帯域に渡ってN=30個程度考慮すれば実用的には収束していると考えられる。

(b) 電界分布の周波数特性

(a)で推定したN, qを用いて伝送線路と平面回路の接続面(端子1)における電界の整合性を検討する。ここでは、端子1より入射した場合に、N=30, q=7として接続面の断面における伝送線路側の電界分布 $E_z(0, s^{(+)})$ と平面回路内の電界分布 $E_z$ の計算結果を図5.22に与える。両結果は原点(0,0)と(1,0)の点で幾分異なっているが、電界の強い所では良く整合していることが分かる。

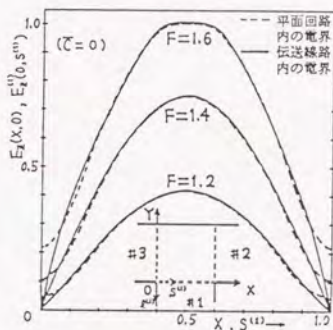


図5.22 伝送線路と平面回路の接続面の電界分布

(c) 周波数特性の計算値と実験値

上の(a), (b)の結果より、C=0からC=0.1刻みで0.5までの「楔」の大きさについて、正規化周波数Fに換算してF=6.0までの帯域内に存在するすべての固有モードを考慮し、伝送線路の高次モードは7次まで考慮して計算した電力透過係数 $|S_{11}|^2$ の周波数特性を図5.23に示す。この図の横軸は方形導波管のTE<sub>10</sub>モードの遮断周波数で正規化してある。C=0の場合には正規化周波数F=1.45のとき端子2, 3に高々37%しか透過せず、整合が取れないが、C=0.4の「楔」を挿入すると端子2, 3に48%透過するようになり特性改善が見られる。又、C=0.5の「楔」を挿入すると整合が悪くなる傾向にある。更に、計算結果の精度を確かめるためにH面T分岐回路を方形導波管(WRJ-10)で作成し、8~12GHz

zに渡って測定した結果を図5.23に示す。このとき、 $S_{11}$ 、 $S_{22}$ は他の2つの開口に無反射終端を接続して定在波測定器で定在波比を測定して求めた。

又、電力透過係数 $S_{12}$ 、 $S_{23}$ は反射係数 $S_{11}$ 、 $S_{22}$ から次式によって算出した。

$$|S_{12}|^2 = (1 - |S_{11}|^2) / 2, \quad |S_{23}|^2 = 1 - |S_{22}|^2 - |S_{12}|^2 \quad (5.36)$$

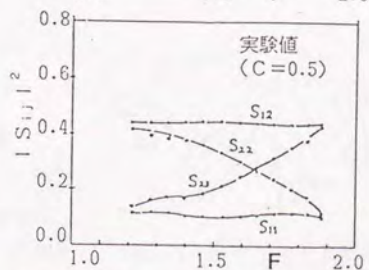
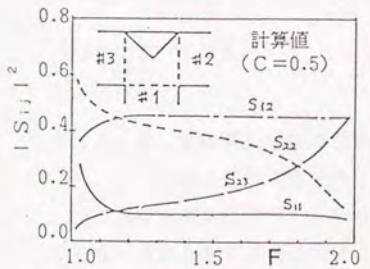
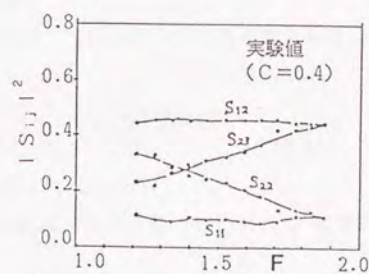
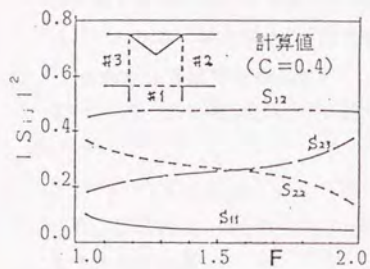
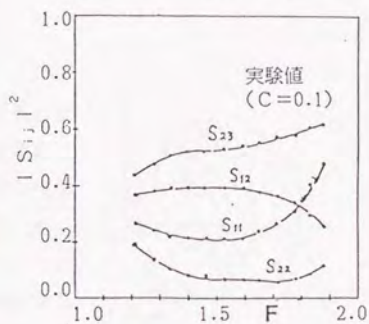
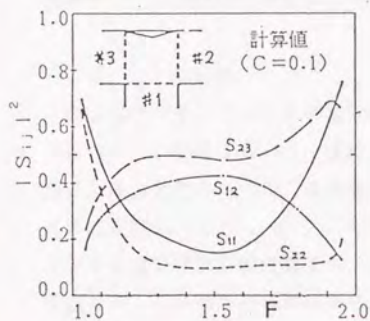
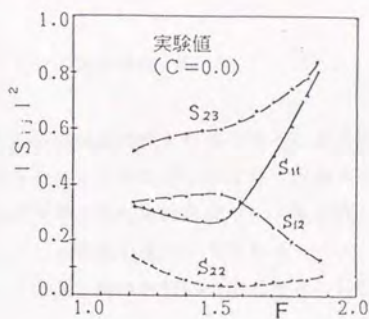
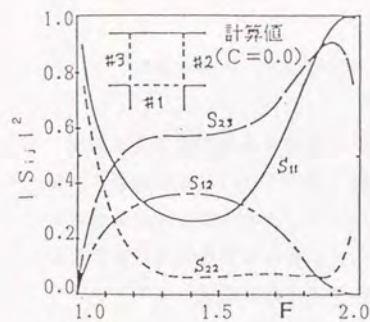


図5.23 H面T分岐回路の広帯域周波数特性  $F = 2d/\lambda$   
(左: 計算値 右: 測定値)



## 5.5 H面円形ベンドの固有モードとその伝送特性<sup>(5), (6), (7)</sup>

高周波帯での導波路に曲がりがあるときの伝送特性を明確にすることは興味ある問題である。ここでは、開放系を含めた一様曲がり導波路（円形ベンド）を解析する第一歩として、H面曲がり導波路の高次伝送モードを含めた伝搬定数、固有関数を計算した。次に、この固有伝送モードよりモード・インピーダンスの簡潔な表現式を誘導し、回路論的取り扱いによる任意角H面円形ベンドの伝送特性を計算した。

### 5.5.1 解析法

図5.24に示すように方形導波管任意角H面円形ベンドの回路において、直線導波管部と曲がり導波管部とに分け、直線導波管部は伝送線路座標系 $(l^{(1)}, s^{(1)}, z^{(1)})$ で、曲がり導波管部は円筒座標系 $(r, \theta, z)$ で表わす。この回路の構造は高さ方向に対して一様であるから、各領域の電磁界は式

(5.47)となる（添え字の"°"は直線導波管、"°"は曲がり導波管を表わす）。

$$E^{\circ} = (0, 0, E_z^{\circ}), \quad H^{\circ} = (H_r^{\circ}, H_{\theta}^{\circ}, 0)$$

(5.37)

$$E^{\circ} = (0, 0, E_z^{\circ}), \quad H^{\circ} = (H_r^{\circ}, H_{\theta}^{\circ}, 0)$$

式(5.37)より、 $E_z^{\circ}$  ( $E_z^{\circ}$ ) が分かれば、他の成分  $H_r^{\circ}$  ( $H_{\theta}^{\circ}$ ) は次式より計算できる。

$$H_r^{\circ} = \frac{1}{j\omega\mu} \cdot k \times \nabla E_z^{\circ} \quad (5.38)$$

### 5.5.2 直線導波管部及び曲がり導波管部の電磁界

図5.25の座標系において円形ベンド内にTEモードが入射する場合を考える。このとき、反射波として基本モードの反射波に加え

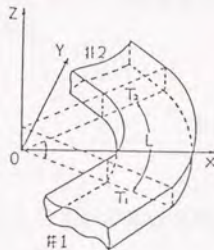


図5.24 方形導波管任意角H面円形ベンド

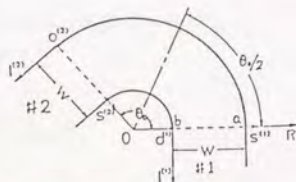


図5.25 円形ベンドと直線導波管の座標系

て  $TE_{p0}$  ( $p > 1$ ) モードの高次非伝搬モードが励振されるので直線導波管部の電磁界成分は次式のようにおくことができる。

$$E_z^0 = \Sigma (A_p e^{7\kappa} + B_p e^{-7\kappa}) f_p(s)$$

$$H_s^0 = \Sigma \frac{\gamma_p}{j\omega\mu} (A_p e^{7\kappa} - B_p e^{-7\kappa}) f_p(s) \quad (5.39)$$

$$f_p(s) = \sqrt{2} \sin \frac{p\pi s}{W^{(1)}}, \quad \gamma_p = \sqrt{\left(\frac{p\pi}{W^{(1)}}\right)^2 - k^2} \quad (5.40)$$

式(5.37)より曲がり導波管部の電磁界は、 $E_z^0$ に関する円筒座標系におけるヘルムホルツ方程式を解くことにより求められる。

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 E_z}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0 \quad (5.41)$$

今、 $\partial/\partial z = 0$ であるから、 $E_z = R(r) \cdot \Theta(\theta)$ とおいて変数分離すると式(5.41)は式(5.42)、(5.43)となる。

$$\frac{d^2 R}{d r^2} + \frac{1}{r} \frac{d R}{d r} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) R = 0 \quad (5.42)$$

$$R(a) = R(b) = 0 \quad B. C.$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d \theta^2} + \nu^2 \Theta = 0 \quad (5.43)$$

ここに、式(5.41)は $\nu^2 \geq 0$ のときには一般にBesselの微分方程式として知られており、式(5.41)の解は解析的に与えられる。

$$R_\nu(r) = C_\nu \{J_\nu(kr) Y_\nu(kr) - J_\nu(kr) Y_\nu(kr)\} \quad (5.44)$$

$$C_\nu = \left( \int (R_\nu(r))^2 d r / r \right)^{-1/2}$$

しかし、 $\nu^2 < 0$  のときには数値計算ライブラリーとして電算機に用意されていないので、数値計算方法を考えることにする。

又、式(5.43)の解は $\theta$ 方向に $e^{\pm j\nu\theta}$ で伝搬する界を仮定すると式(5.45)で与えられる。

$$\Theta(\theta) = A\nu e^{-j\nu\theta} + B\nu e^{+j\nu\theta} \quad (5.45)$$

ここに、 $A\nu$ 、 $B\nu$ は複素振幅係数、 $\nu$ は $\theta$ 方向の伝搬定数で、 $\nu$ が実数のとき伝搬モード、 $\nu$ が純虚数のとき非伝搬モードである。ところで、 $\theta$ 方向の高次モードも含めた伝搬定数 $\nu$ が求まったとすると、曲がり部分の電磁界( $E_z^\circ$ 、 $H_r^\circ$ )は式(5.46)、(5.47)となる。

$$E_z(r, \theta) = \sum R\nu(r) (A\nu e^{-j\nu\theta} + B\nu e^{+j\nu\theta}) \quad (5.46)$$

$$H_r(r, \theta) = \sum \frac{\nu_n}{\omega\mu} \frac{R\nu(r)}{r} (A\nu e^{-j\nu\theta} - B\nu e^{+j\nu\theta}) \quad (5.47)$$

### 5.5.3 円形ベンドのモード・インピーダンスの導出

図5.24に示すようにH面円形ベンドに基準面 $T_1$ 、 $T_2$ で方形導波管線路(入射基本モードは $TE_{10}$ モード)が接続されているとする。5.2で求めた電磁界に対応したモード電圧、モード電流を定義することにより電磁界解析を回路解析に置き直し、モード・インピーダンスの簡潔な表現式を導出する。なお、この式は従来の伝送線路理論と対応して分かりやすい表現式となっている。一般に、 $i$ 番目の伝送線路の $p$ 番目の伝送状態の断面での電界 $E_{zp}^{(i)}$ 、磁界 $H_{sp}^{(i)}$ とモード電圧 $V_p^{(i)}$ 、モード電流 $I_p^{(i)}$ の間に次の関係があるとしてモード電圧、モード電流を定義する。

$$E_{zp}^{(i)} = \frac{V_p^{(i)}}{K_{vp}d} \cdot f_p(s) \quad (5.48)$$

$$H_{sp}^{(i)} = \frac{I_p^{(i)}}{K_{ip}W} \cdot f_p(s)$$

式(5.39)と(5.48)より式(5.49)で与えられる。

$$V_p^{(i)} = K_{vp}d \cdot A_p e^{7\theta}$$

$$I_p^{(1)} = \frac{\gamma_p^{(1)}}{j\omega\mu} K_{1p} W A_p e^{7H} \quad (5.49)$$

但し、 $K_{vp}$ 、 $K_{1p}$ は正規化因子であり、 $K_{vp} \cdot K_{1p} = 1$ を満足する比例係数。

式(5.39)よりモード特性インピーダンスは式(5.50)となる。

$$Z_{op}^{(1)} = \frac{V_p^{(1)}}{I_p^{(1)}} = \frac{d \cdot j\omega\mu}{W \gamma_p^{(1)}} \quad (5.50)$$

次に、曲がり導波管に基準面 $T_1$ 、 $T_2$ で $j$ 番目の伝送線路の $q$ 番目の伝送線路のモード電流 $I_q^{(1)}$ を流し込んだとき、曲がり導波管線路を通して $i$ 番目の伝送線路の $p$ 番目のモード・インピーダンス $Z_{pq}^{ij}$ を次のように定義することができる。

$$Z_{pq}^{ij} = \left. \frac{V_p^{(1)}}{I_q^{(1)}} \right|_{(j,q) \text{ 以外のモード電流}=0} \quad (5.51)$$

但し、 $i, j=1, 2$   $p, q=1, 2, 3$

更に、このモード・インピーダンス $Z_{pq}^{ij}$ は対称性、 $Z_{pq}^{ij} = Z_{qp}^{ji}$ の関係が成り立つ。

今、式(5.51)の定義に基づいて、円形バンドの $Z_{pq}^{11}$ 、 $Z_{pq}^{21}$ を定める。定義式(5.51)より

$$Z_{pq}^{11} = \left. \frac{V_p^{(1)}(0)}{I_q^{(1)}(0)} \right|_{I_q^{(2)}(\theta_0)=0, I_q^{(1)}(0)=0} \quad (5.52)$$

$$Z_{pq}^{21} = \left. \frac{V_p^{(2)}(0)}{I_q^{(1)}(0)} \right|_{I_q^{(2)}(\theta_0)=0, I_q^{(1)}(0)=0} \quad (5.53)$$

端子2は開放の条件 $I_q(\theta_0)=0$ より式(5.47)の $H_r(r, \theta_0)=0$ となるから

$$B_v = A_v e^{-j2v\theta} \quad (5.54)$$

式(5.54)を式(5.46)、(5.47)に代入して整理すると

$$E_z(r, \theta) = 2 \sum R_n(r) A_v e^{-j2v\theta} \cdot \cos v_n(\theta - \theta_0) \quad (5.55)$$

$$H_r(r, \theta) = 2j \sum R_n(r) / r \cdot A_v e^{-j2v\theta} \cdot v / \omega \mu \cdot \sin v_n(\theta - \theta_0) \quad (5.56)$$

今、基準面T<sub>1</sub>で直線部と円形ベンド部の磁界の接線成分の連続性より

$$H_{zq}(r, \theta) = \frac{I_q^{(1)}}{W} f_q(r) = 2j \sum R_n(r) / r \cdot A \nu e^{-j\nu\theta} \cdot \nu_n / \omega \mu \cdot \sin \nu_n \theta_0$$

更に、上式にR<sub>n</sub>(r)を両辺に掛け、断面にわたって積分し、整理すると

$$A \nu = \frac{j}{2} I_q^{(1)} \frac{\omega \mu}{\nu_n W} \cdot \frac{1}{\sin(\nu_n \theta_0)} \cdot R_n(r) \cdot f_q(r) dr \quad (5.57)$$

従って、電界E<sub>z</sub>(r, θ)は式(5.58)となる。

$$E_z(r, \theta) = j I_q^{(1)} \sum \frac{\omega \mu}{\nu_n} \frac{n_{qn}^{(1)}}{\sin(\nu_n \theta_0)} \cdot R_n(r) \cdot \cos \nu_n(\theta - \theta_0) \quad (5.58)$$

次に、端子1におけるモード電圧V<sub>p</sub><sup>(1)</sup>は

$$V_p^{(1)} = \frac{d}{W} \int E_{zq}^{(1)} f_q(r) dr \quad (5.59)$$

$$= -j I_q^{(1)} \frac{d}{W} \sum R_n(r) \cdot f_q(r) dr \cdot \cot \nu_n \theta_0 \cdot \frac{\omega \mu}{\nu_n} \cdot n_{qn}^{(1)}$$

$$V_p^{(1)} = - \sum \frac{j \omega \mu}{\nu_n} \cdot d \cdot n_{pn}^{(1)} \cdot n_{qn}^{(1)} \cdot \cot(\nu_n \theta_0) \cdot I_q^{(1)} = Z_{pq}^{11} \cdot I_q^{(1)}$$

但し、 $Z_{pq}^{11} = - \sum Z_{cn} \cdot n_{pn}^{(1)} \cdot n_{qn}^{(1)} \cdot \cot(\nu_n \theta_0)$

$$Z_{cn} = j \omega \mu / \nu_n \cdot d [\Omega] \quad (\text{ベンド部の特性インピーダンス})$$

$$n_{pn}^{(1)} = \frac{1}{W^{(1)}} \int R_n(r, k_0) \cdot f_q^{(1)}(r) dr \quad (5.60)$$

同様に、式(5.52)、(5.53)よりZ<sub>pq</sub><sup>ij</sup>は

$$Z_{pq}^{21} = - \sum Z_{cn} \cdot n_{pn}^{(2)} \cdot n_{qn}^{(1)} \cdot \text{cosec}(\nu_n \theta_0)$$

$$Z_{pq}^{12} = - \sum Z_{cn} \cdot n_{pn}^{(1)} \cdot n_{qn}^{(2)} \cdot \text{cosec}(\nu_n \theta_0) \quad (5.61)$$

$$Z_{pq}^{22} = - \sum Z_{cn} \cdot n_{pn}^{(2)} \cdot n_{qn}^{(2)} \cdot \cot(\nu_n \theta_0)$$

このモード・インピーダンスより、曲がり導波管線路の等価回路は図5.26

の如くなる。これは曲がり部の伝搬定数  $\nu_n$ 、特性インピーダンス  $Z_{cn}$  の伝送線路に直線部の伝送線路モードが理想変圧器（変圧比  $n_{pn}$  は周波数の関数となっている）を通して結合した形である。

#### 5.5.4 円形バンドの伝搬定数と固有伝送モードの数値計算

式(5.42)は  $\nu^2 \geq 0$  のときには一般にBesselの微分方程式として良く知られており、その解は  $J_n(x)$ 、 $Y_n(x)$  の数値計算ライブラリーが用意されているので、式(5.42)の超越方程式を正確に解けば良い。ところが、 $\nu^2 \leq 0$  の場合には容易に解けないので、電算機による数値解法を行う必要がある。ここでは、式(5.42)はスツルム・リュウビル形の微分方程式であるから、固有値問題として解くことができる。

$\nu^2$  に関する変分表現は式(5.62)となり、レイリー・リッツの手法で数値計算する。

$$\nu^2 \leq \frac{-\int r(dR/dr)^2 \cdot dr + k_0 \int rR^2 dr}{\int R^2/r \cdot dr} \quad (5.62)$$

ここに、境界条件を満足する基底関数として

$$f_1(r) = a \sin \frac{i \pi (r-b)}{(a-b)}$$

を採用すると、近似固有関数  $R_n(r)$  は次式で与えられる。

$$R_n(r) = \sum C_i \cdot f_1(r) \quad (5.63)$$

ここに、 $C_i$  は式(5.62)が停留条件を満足することにより決定される。又、式(5.62)は行列の固有値問題に変換される。即ち、

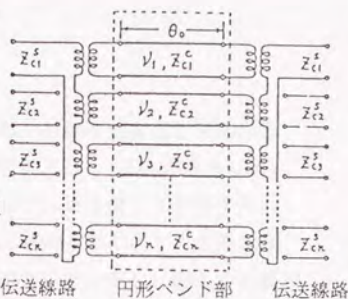


図.26 円形バンドの等価回路

$$(A - \lambda B) C = 0 \quad , \quad \lambda = \nu^2(k_0) \quad (5.64)$$

$$A = (A_{ij}), \quad B = (B_{ij}), \quad C = (C_1, C_2, \dots, C_n)^T$$

$$A_{ij} = - \int r \frac{df_i}{dr} \cdot \frac{df_j}{dr} dr + k_0^2 \int r f_i f_j \cdot dr \quad (5.65)$$

$$B_{ij} = \int f_i f_j \cdot dr / r$$

従って、式(5.64)に関する固有値問題を解けば、 $N$ 個の固有値と対応した固有ベクトル $C$ が得られることになる。式(5.65)の $A_{ij}$ 、 $B_{ij}$ の積分はsimpsionの公式により評価し、式(5.64)はハウスホルダー法を用いて計算する。このときの基底関数の個数は $N=20$ とした。上記の方法により、伝搬定数 $\nu_n$ と固有関数 $R_n(r)$ の計算例を図5.27、図5.28に示す。但し、図5.27の横軸は直線導波管の $TE_{10}$ モードの遮断周波数( $f_{c0}$ )で正規化してある。又、縦軸は、正の領域は $\text{Real}(\nu_n = \mu_n)$ で伝搬モードを、負の領域は $\text{Imaginary}(\nu_n = -j\mu_n)$ で非伝搬モードを表わす。円形ベンドの曲がり強いとき、曲がり伝送線路の遮断周波数( $f_{c0}$ )は $f_{c0} < f_{c0}$ となる。又、強い曲がり線路程、ある範囲内に高次非伝搬モードが多く存在し、ゆるやかな曲がりでは高次非伝搬モードの傾きが大きいことから早く減衰することが分かる。図5.28は円形ベンドの基本モードの界分布(正規化周波数 $F$ をパラメータ)であり、直線導波管の $TE_{10}$ モードと比較すると、強い曲がりのベンド程低い周波数で内側に、又周波数が高くなる程外側に集中している様子が分かる。

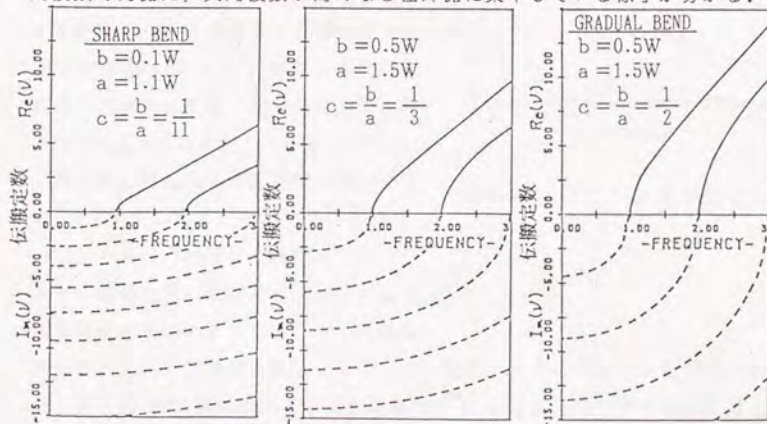


図5.27 円形ベンドの伝搬定数 (伝搬モード—— 非伝搬モード---)

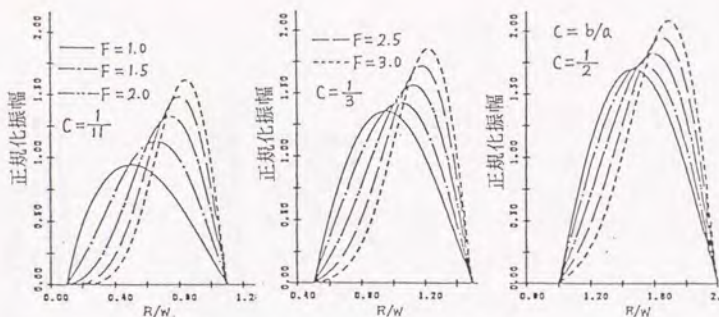


図5.28 円形ベンドの基本モードの界分布

### 5.5.5 任意角H面円形ベンドの伝送特性

5.5.4の方法で求めた固有伝送モードに基づいて、任意角H面円形ベンドの伝送特性を計算する。一般に、式(5.61)のモード・インピーダンス、及び図5.26の等価回路からTE<sub>10</sub>モードが入射したときの実効モード・インピーダンスを計算する。又、高次モードの反射電流  $i_1 \sim i_n$  とTE<sub>10</sub>モードの入射電流  $i_1$  の関係は式(5.37)より基本モードの入射波に対する高次モードの励振量を計算することができる。図5.29は90°円形ベンドの定在波比の周波数特性で、強い曲がりのベンドではV.S.W.Rが大きく、ゆるやかなベンド程波状特性を示すが広帯域に渡って低V.S.W.R特性である。又、すべての構造パラメータC(内径bと外径aの比で  $c=0$  は最も強い曲がりを、 $c=1$  は真直な導波管を表わす)に対して、正規化周波数  $F=1.8$  近傍では極小となり、又、 $F=2.0$  では大きくなる傾向がある。図5.30は90°円形ベンドに対する基準面T<sub>1</sub>でTE<sub>10</sub>モードの入射電流  $i_1$  に対する高次モード電流の反射量を計算した結果である。この結果よりベ

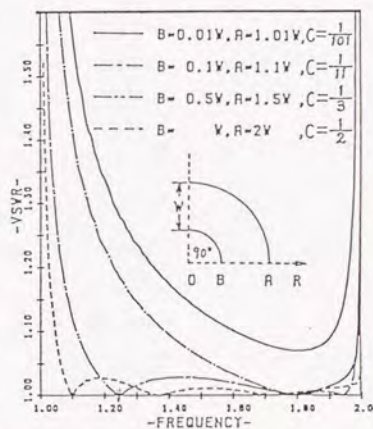
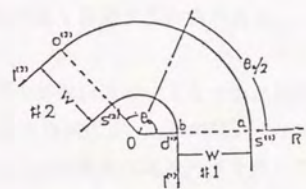
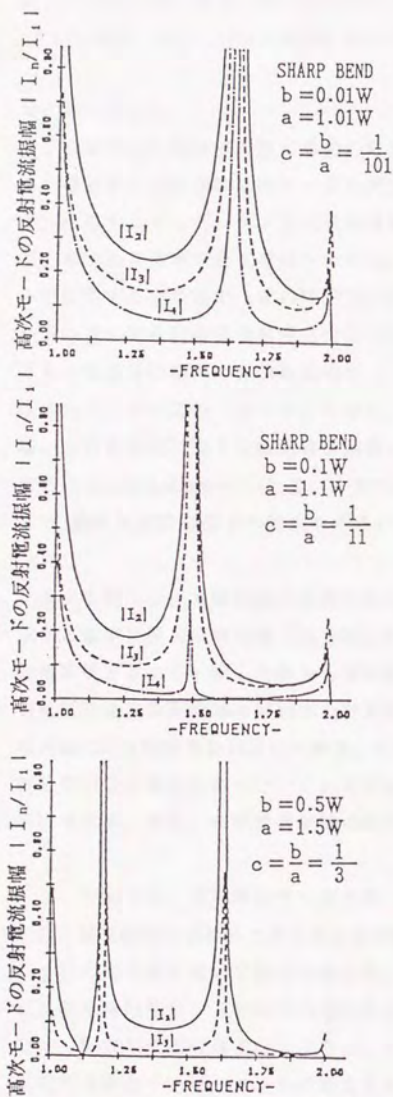


図5.29 円形ベンドの定在波比 (90°ベンド)





円形ベンドと直線  
 導波管の座標系

図5.30 TE<sub>10</sub>モードの入射波  
 に対する電流分布

ンドの曲がりかゆるやかな程、又、高次モード程反射振幅は小さくなっていることが分かる。更に、鋭い共振が見られるが、これは伝搬定数  $\gamma_n$  が  $2 \cdot \gamma_1 \cdot \theta_0 = 2n\pi$  (但し、 $\theta_0 = \pi/2$ ) のとき起こる。

## 5. 6 まとめ

この章では短絡境界平面回路内の電界をスカラー固有関数で展開することにより導波管内の非伝搬高次モードも考慮したときの基本モード (TE<sub>10</sub>モード) に対するインピーダンス行列を求める手法を提案した。5. 3節において、本手法を簡単な形状で確かめた上、本手法で周波数特性を基本モードのみが伝搬する全帯域で1%の精度で計算するためには、その固有値が基本モードの遮断周波数の5倍程度以内に存在するすべての平面回路内の固有モードを、導波管線路内の非伝搬高次モードは基本モードを除いて3個考慮すればよいという一応の「めやす」を得た。この考えに基づいて先端短絡平面回路、方形導波管H面T分岐回路を解析し、各々実験結果あるいは従来の解析結果(Waveguide handbook)と良い一致を見た。更に、高次モード(TE<sub>20</sub>モード)の遮断周波数近傍での特性を明らかにした。

5. 4節では、本解析法の妥当性を確かめるために固有モードが解析的に求まる基本H面T分岐回路(正方形)について解析した。その結果、計算値と実験値とはよく一致したことから本解析法の妥当性を確認した。更に、任意形状短絡境界平面回路を解析する計算機プログラムを作成して楔付H面T分岐回路の周波数特性を計算した結果、ある程度計算値と実験値は一致したが、幾分合わない場合もあった。これは固有モードの計算精度を改善することで解決できる。今後、有限要素法等の他の計算手法を開発する必要がある。

5. 5節では、方形導波管H面円形ベンドの高次伝送モードを含めた伝搬定数、固有関数を求めるために固有値問題として定式化し、ここではレイリ・リッツの変分法を用いて数値計算した。次に、この固有伝送モードを用いてH面任意角円形ベンドの広帯域周波数特性を計算した。なお、この取り扱いでは、従来の平面回路と同じように、モード・インピーダンスと基本モードに対する実効インピーダンスの考え方を用いている。また、高次伝送モードをどの位考慮すれば収束するかも合わせて検討した。