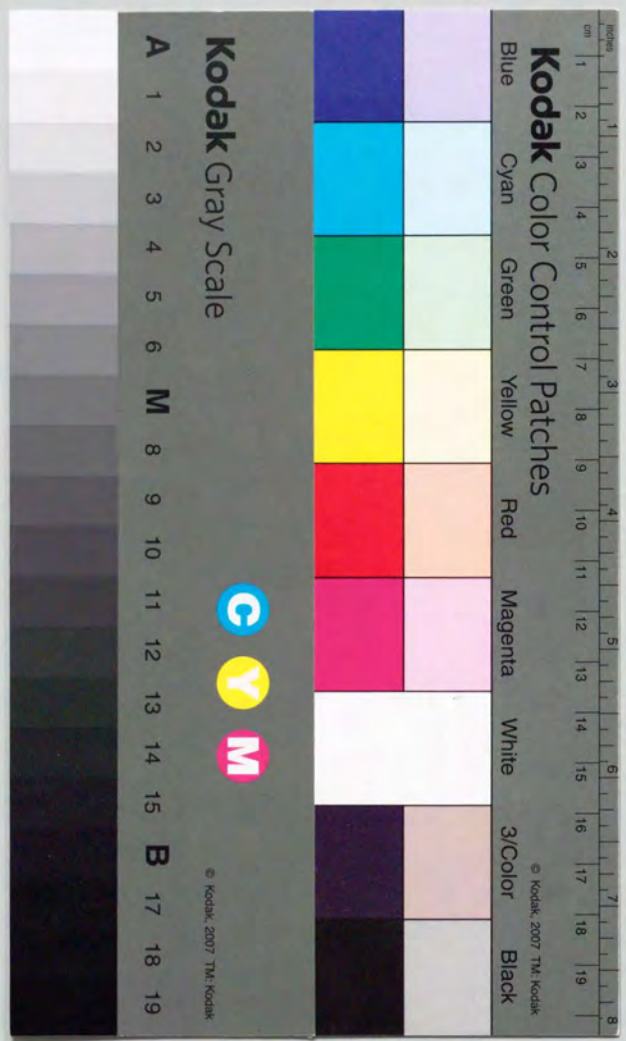


室内空気分布の数値予測法の実用化に関する研究

—Multi-Mesh法の開発とk-εモデルによる非等温室内気流の数値解析—

1991年6月

倉 淵 隆



①

室内空気分布の数値予測法の実用化に関する研究

-Multi-Mesh法の開発とk-εモデルによる非等温室内気流の数値解析-

1991年6月

倉渕 隆

論文内容の要旨

室内空気分布の数値予測法の実用化に関する研究 — Multi-Mesh法の開発と $k-\epsilon$ モデルによる非等温室内気流の数値解析 —

倉 測 隆

室内気流・温度の空間構造は内部の滞在者の温熱気流感覚や汚染空気の分布に決定的な影響を与えるため、その定量的予測法の確立は建築環境工学における主要な課題の一つとなっている。特に最近では快適性と省エネルギー性を兼ね備えた新しい空調方式の開発や、空気膜構造物やアトリウムに代表される大空間を対象とした空調設計方法の確立などの目標に対し、室内気流の予測法に寄せられる社会的な要求と期待は大きい。

本論文では、室内気流の数値計算による予測法によって、これら実用上の要求に応えるため、必要計算分解能が予測対象空間内で大幅に変化する多くの問題に対し、計算負荷の軽減と高精度化の両立を目指した新たな計算手法の開発を行うと共に、現状の室内空気分布数値予測法を、矩体の熱移動現象を包含した総合的室内環境予測法に拡張することを最終目標として、非等温室内気流計算の際に問題となる基礎方程式、境界条件の適用妥当性に関する一連の検討を行ったものである。

従来、この種の問題に対応可能な予測手法としては実物の縮尺模型を用いた実験法があり、実際の多くの問題に適用された実績があるものの、実験で必要となる測定設備、測定技術、測定者の熟練等に高度なレベルが要求される場合が普通であって、限られた研究機関でのみ可能な方法であった。

一方、近年のコンピュータ・テクノロジーの急速な発達に伴い、大規模計算が比較的容易に実行できる環境が整いつつあることを背景とし、数値計算法が模型実験法を代替する新たな手法として注目されつつある。我国の建築環境工学における室内空気分布数値予測法は、野村、松尾、貝塚、坂本、遠藤（日本建築学会論文報告集 第231, 232, 238, 1975年）の研究により実質的に出発して以来、その信頼性と適用範囲に関する実験的検証、差分法の改良、境界条件の整備等に関する精力的な研究がなされ、数値予測法の可能性は著しく広がったといえる。

最近の研究の動向としては、高精度の乱流モデルの適用による、より質の高い計算予測を目指す方向と、実用問題に適した解法や熱に関連する研究部門との連成問題等、応用範囲の拡張を目指す方向に分岐しつつあるが、本論文では主に後者の立場から、現状の数値計算技術でどの程度実用上の問題に迫りうるのか、その場合の問題点はどこにあり、必要

な改良法はどうあるべきかを探ることに力点を置いた研究を行ったものである。

本論文は序論に引き続くⅢ編と結論により構成されている。
序論では、本論文の目的と概要が述べられている。

第Ⅰ編は、室内気流で問題となる乱流現象とそのモデル化、計算手法が概説されており、以下の3章より成る。

第1章ではNavier-Stokes式から検討を開始し、乱流現象を司る様々な方程式群を導出し、洞察力が働く程度に簡略化した流れの状況での各項のふるまいや、オーダー評価等を通して、その物理的な意味や内容についての考察を行っている。

第2章では第1章で展開した方程式を実際の計算に乗せるために必要となるモデリングの手法やその理論的背景を示すと共に、現状で有力となっているDSM, ASM, $k-\epsilon$ モデルの基礎方程式を導く。

第3章では数値解法に関し、特に問題となることの多い移流-拡散系方程式の近似法に焦点を絞り、種々の差分法の得失を多角的に評価すると共に、数値実験結果を示している。

第Ⅱ編では、要求計算分解能が予測対象空間内で大幅に変化する多くの実用問題に適した数値解法(Multi-Mesh法)の開発とその応用例を示しており、以下の5章より成る。

第1章では傾斜吹出しを伴う室内気流に関する数値計算と実験との比較を行うと共に、計算結果の打ち切り誤差の推定を通して差分メッシュの局所的分割法の必要性を指摘しており、以下の一連の研究の導入部分に相当する。

第2章では、Multi-Mesh法の開発の端緒として、その概念を示すと共に、二次元条件の層流と乱流($k-\epsilon$ モデル)に適用し、在来の単一メッシュで分割の粗い場合と細かい場合の計算結果と比較に基づき、新解法の妥当性を検証している。

第3章では、前章の二次元用Multi-Mesh法を三次元に拡張した場合の問題点を層流条件への適用結果から見だし、適切な改良法を考案する。その後三次元乱流条件に適用して、単一メッシュによる計算結果及び実験結果との比較に基づき、計算結果の妥当性を検証している。

以下の章ではMulti-Mesh法の具体的な応用例を示したものであり、第4章では複雑な吹出し口を伴う室内気流問題を取り上げ、新解法による計算を実験結果と比較している。計算結果が吹出し口のディテールの相違による室内気流の変化を正しく再現することから、室内気流の構造を考慮した吹出し口の開発に数値計算法が応用できる可能性を示すものである。

第5章では、在来法では対応が困難なことから、これまで数値計算法の本格的な適用が試みられてこなかった通風の問題を対象としたものである。計算では、まず窓なしの場合の建物周辺気流を対象に行い、計算結果が既往の実験、在来法による計算結果と対応することを確かめた上で、様々な通風条件を想定し室内外の気流場・圧力場の構造を一部既往の実験結果と比較しつつ検討し、乱流モデルの違いを含めて通気抵抗や室内のエネルギーバランスなど、多角的な考察を行っている。これらの結果より、通風現象の解明に数値計算法が有力な検討手段として適用できる可能性を示している。

第Ⅲ編は、非等温室内気流の数値計算法に関し、乱流モデル、境界条件の妥当性、適用範囲を既往文献で示されている研究成果を含めて検討し、最終的に実大居室模型を対象とした実験と計算により、現状の数値計算法の適用範囲とその可能性を提示することを意図して行われたものであり、以下の4章より成る。

第1章では、平面浮力噴流を対象にASMとその一部を加味した $k-\epsilon$ モデル、及び標準 $k-\epsilon$ モデルの計算を行い、実験結果との比較や計算結果を吟味することによって、その特性を明らかにしている。

第2章では、乱流エネルギー散逸方程式中の浮力作用に対し、その影響の顕在化する条件を設定した実験と計算結果の比較を行い、乱流エネルギーの浮力による生産が非常に大きく正の値をとる条件では、浮力生産が計算に顕著な影響を及ぼすことを示すと共に、そのメカニズムに関する検討を行っている。

第3章では、非等温時の壁面境界条件として、まず壁付近の諸量の変化に関する理論的、実験的考察を行った後に、3種類の境界条件を提示している。更に、これらの評価を目的として鉛直加熱平板自然対流を対象に、境界条件や差分メッシュの相違が主に対流伝熱の予測に与える影響について検討している。

第4章では、実大の居室模型を対象とした冷房・暖房条件の実験データを取得した上で、3章までの検討結果を踏まえた一連の計算を行い、乱流モデルと境界条件の妥当性を主に実験結果との比較に基づいて行っている。これらの結果より、今回の検討範囲で推奨される境界条件を示し、将来的な数値計算法の可能性を提示している。

結論では本論文で得られた成果を総括すると共に、今後の課題について述べている。

目 次

序 論 1

第 I 編 乱流の数値解析法 4

第 1 章 基礎方程式 5

1. 1 平均流方程式の導出と変動量の相関項 5

1. 2 エネルギーの伝達過程 8

1. 3 渦度の力学 12

1. 4 変動成分の 2 次モーメント方程式 16

第 2 章 乱流のモデリング 22

2. 1 モデル化の必要性 22

2. 2 等方性散逸の仮定による散逸項のモデル化 23

2. 3 圧力変動-変動量空間微分の相関項 24

2. 4 拡散的輸送 29

2. 5 散逸方程式のモデリング 34

2. 6 DSM と ASM の基礎方程式 38

2. 7 BVM (k-ε モデル) の基礎方程式 41

2. 8 各モデルの特性 45

第 3 章 差分法による数値解法 46

3. 1 偏微分方程式の数値解法 46

3. 2 差分近似式の作成法 47

(1) Taylor 級数による方法

(2) 多項式近似による方法

(3) 有限体積法

3. 3 移流拡散方程式の代表的な差分近似式 52

(1) 中心差分

(2) 1 次精度風上差分

(3) Hybrid 法

(4) Quick 法

3. 4 代表的差分近似式の特性 56

(1) 打ち切り誤差解析

(2) ソースフリー問題への適用

(3) 移動性

(4) 保存性

(5) 帰還感度 (feedback sensibility)

(6) 係数符号の一致

3. 5 運動方程式の解法, MAC 法 68

3. 6 差分近似式が流れの計算結果に与える影響 74

(1) (a) のジオメトリーに関する計算結果

(2) (b) のジオメトリーに関する計算結果

第 II 編 差分メッシュの局所的分割法の開発 83

第 1 章 傾斜吹出しを伴う室内気流の数値計算と打ち切り誤差解析 84

1. 1 緒言 84

1. 2 実験条件 84

(1) 検討室モデル

(2) 実験方法

1. 3 計算方法 86

(1) 乱流モデル

(2) 空間差分分割

(3) 差分近似式と解法

(4) 境界条件

(5) 計算ケース

(6) τ 補外法による打ち切り誤差推定

1. 4 計算結果と実験結果 92

(1) 実験結果

(2) 検討ケース A

(3) 検討ケース B

(4) 検討ケース C

(5) 検討ケース D

1. 5 まとめ 109

第 2 章 Multi-Mesh 法の基礎概念と二次元問題への適用 110

2. 1 緒言 110

2. 2 Multi-Mesh 法の基礎概念 112

(1) メッシュ・システムと変数計算の分担

(2) メッシュ間の解の結合

(3) 解法の特徴

2. 3 計算結果 119

(1) 二次元層流

(2) 二次元乱流

2. 4 まとめ 132

第3章 Multi-Mesh法の三次元への拡張	133
3.1 緒言	133
3.2 三次元Multi-Mesh法	133
(1) メッシュ・システムと変数計算の分担	
(2) メッシュ間の解の結合	
(3) 解法の特徴	
3.3 計算結果	139
(1) 三次元層流	
(2) 三次元乱流	
3.4 まとめ	153
第4章 複雑な吹出し口を伴う室内気流への適用	154
4.1 緒言	154
4.2 計算条件の設定	155
(1) 計算対象	
(2) 実験概要	
(3) 計算概要	
4.3 計算結果と実験結果の気流パターンに関する比較	155
(1) 吹出しtype 1	
(2) 吹出しtype 2	
(3) 吹出しtype 3	
4.4 室内風速特性	158
4.5 まとめ	163
第5章 通風を想定した建物内外気流の同時解析	164
5.1 緒言	164
5.2 計算法, 計算条件の概要	166
(1) 計算対象と差分分割	
(2) 計算法の詳細	
5.3 空間分布に関する計算結果	172
(1) 建物周辺気流の計算結果	
(2) 通風時の建物内外気流の計算結果	
5.4 通風量, 室内平均値, エネルギー損失係数の算出	186
(1) 通風量	
(2) 室内空間平均値	
(3) エネルギー収支とエネルギー損失係数	
5.5 まとめ	190

第III編 非等温室内気流の数値解析	192
第1章 浮力噴流の数値解析	193
1.1 緒言	193
1.2 乱流モデル	194
1.3 計算対象と計算方法	197
(1) 計算対象	
(2) 計算領域, 空間差分分割と設定条件	
(3) 差分近似式と解法	
(4) 境界条件	
1.4 計算結果	200
(1) 平均流	
(2) 乱流エネルギー	
1.5 まとめ	205
第2章 ε 方程式における浮力生産項の作用	206
2.1 緒言	206
2.2 乱流モデル	207
2.3 実験条件	208
(1) 検討室モデル	
(2) 実験方法	
2.4 計算方法	210
(1) 空間差分分割	
(2) 差分近似式と解法	
(3) 境界条件と計算ケース	
2.5 計算結果と実験結果	211
(1) 浮力なしの場合	
(2) $C_{3\varepsilon}$ の影響	
(3) 濃度差分式の影響	
(4) 計算領域の影響	
2.6 まとめ	219
第3章 壁面境界条件に関する検討	220
3.1 緒言	220
3.2 壁付近の諸量の変化と $k-\varepsilon$ モデル	221
3.3 壁関数	224
(1) べき乗法	
(2) カルマンの三層モデルによる方法	
(3) 乱流エネルギー k の計算値による方法	
(4) 粘性底層厚さを考慮する方法	

(5) 浮力生産項について	
3. 4 鉛直加熱平板自然対流に対する境界条件の比較	234
(1) 空間差分の基準長	
(2) 計算法の概要	
(3) type 1, 2 の比較	
(4) type 2, 3 の比較	
3. 5 まとめ	246
第4章 実大居室模型を対象とした数値解析	247
4. 1 緒言	247
4. 2 実大模型実験	248
(1) 実大模型	
(2) 測定項目	
(3) 実験ケース	
(4) 熱収支に関する実験結果	
4. 3 計算概要	254
(1) 乱流モデル	
(2) 空間差分分割	
(3) 差分近似式と解法	
(4) 境界条件	
(5) $k < 0$ の場合の対応	
(6) 計算ケース	
4. 4 計算結果	257
(1) 熱流境界条件による計算結果	
(2) 温度境界条件の影響	
(3) 差分メッシュの影響	
4. 5 まとめ	271
結論	272
本論文に関連する既発表文献	274
参考文献	276
あとがき	284

序 論

室内気流・温度の空間構造は内部の滞在者の温熱気流感覚や汚染空気の分布に決定的な影響を与えるため、その定量的予測法の確立は建築環境工学における主要な課題の一つとなっている。特に最近では快適性と省エネルギー性を兼ね備えた新しい空調方式の開発や、空気膜構造物やアトリウムに代表される大空間を対象とした空調設計方法の確立などの目標に対し、室内気流の予測法に寄せられる社会的な要求と期待は大きい。

従来、計算法による室内気流の予測に関しては、予測対象空間を均質と見なせるブロックに分割して取扱う、いわゆるゾーン・モデル(マクロ・モデル)の適用が検討されてきたが、個別空調や複雑な大空間での空調により実現される局所的な温熱・空気環境を予測するためには、空間的な分解能や実験的に決められる計算パラメータの汎用性に関して困難をなしとせず、むしろ流体力学の一般理論によって立つマイクロ・モデルの方が普遍的適用性の点で原理的に有利と考えられる。但し、マイクロ・モデルの適用には通常膨大な計算を要することと、その適用可能性が必ずしも十分認識されていないために、その応用範囲が建築環境工学の分野で必ずしも広範に渡っていない現状がある。

本論文では、これらの事情を考慮しマイクロ・モデルに基づく室内気流の数値計算予測法に関し、必要計算分解能が予測対象空間内で大幅に変化する実用的な問題に適合する新たな計算手法の開発を行うと共に、現状の室内空気分布数値予測法を、矩体の熱移動現象を包含した総合的室内環境予測法に拡張することを最終目標として、非等温室内気流計算の際に問題となる基礎方程式、境界条件の適用妥当性、及び実大室を対象とした計算による実験結果の再現性に関する一連の検討を行ったものである。

これまで、計算法に依らない室内空気分布の予測手法としては、実物の縮尺模型を用いた実験法があり、実際の多くの問題に適用された実績があるものの、実験で必要となる測定設備、測定技術、測定者の熟練等に高度なレベルが要求される場合が普通であって、限られた研究機関でのみ可能な方法であった。一方、近年のコンピューター・テクノロジーの急速な発達に伴い、大規模計算が比較的容易に実行できる環境が整いつつあることを背景とし、数値計算法が模型実験法を代替する新たな手法として注目されつつある。

我国の建築環境工学における室内空気分布数値予測法は、野村、松尾、貝塚、坂本、速藤(1975a, b, c)の研究報告より、乱流モデルと差分法を組み合わせた方法が提示され、以後の研究の実質的な出発点を示した意味でその功績は大きい。

その後の10余年は、その信頼性と適用範囲に関する実験的検証、差分法の改良、境界条件の整備等に関する精力的な研究がなされ、数値予測法の可能性は著しく広がったと考えられる。

最近の研究の動向としては、当面の実用性は別として、高精度の乱流モデルの適用による、より質の高い計算予測を目指す方向と、実用問題に適した解法や熱に関連する研究部門との連成問題等、応用範囲の拡張を目指す方向に分岐しつつある。両者のアプローチが室内空気分布の予測法の発達に必須であることはいうまでもないが、計算流体力学の研究者は筆者を含めて、とすれば前者の方向に傾斜しがちであることと、専門の研究者以外の人々が計算予測法に抱く過大な期待があいまって、第一線の研究者と他の部門の研究者

や実務技術者との間に認識のずれが生じつつある点は否めない。本論文はこれらの事情を鑑み、現状で確立している数値計算技術でどの程度実用上の問題に迫りうるのか、その場合の問題点はどこにあり、必要な改良法はどうあるべきかを探ることに力点を置いた研究を行ったものである。

本論文は以下に引き続くⅢ編と結論により構成されている。

第Ⅰ編は、室内気流で問題となる乱流現象とそのモデル化、計算手法が概説されており、以下の3章より成る。

第1章ではNavier-Stokes式から検討を開始し、乱流現象を司る様々な方程式群を導出し、洞察力が働く程度に簡略化した流れの状況での各項のふるまいや、オーダー評価等を通して、その物理的な意味や内容についての考察を行っている。

第2章では第1章で展開した方程式を実際の計算に乗せるために必要となるモデリングの手法やその理論的背景を示すと共に、現状で有力となっているDSM, ASM, $k-\epsilon$ モデルの基礎方程式を導く。

第3章では数値解法に関し、特に問題となることの多い移流-拡散系方程式の近似法に焦点を絞り、種々の差分法の得失を多角的に評価すると共に、数値実験結果を示している。

第Ⅱ編では、要求計算分解能が予測対象空間内で大幅に変化する多くの実用問題に適した数値解法(Multi-Mesh法)の開発とその応用例を示しており、以下の5章より成る。

第1章では傾斜吹出しを伴う室内気流に関する数値計算と実験との比較を行うと共に、計算結果の打ち切り誤差の推定を通して差分メッシュの局所的分割法の必要性を指摘しており、以下の一連の研究の導入部分に相当する。

第2章では、Multi-Mesh法の開発の端緒として、その概念を示すと共に、二次元条件の層流と乱流($k-\epsilon$ モデル)に適用し、在来の単一メッシュで分割の粗い場合と細かい場合の計算結果と比較に基づき、新解法の妥当性を検証している。

第3章では、前章の二次元用Multi-Mesh法を三次元に拡張した場合の問題点を層流条件への適用結果から見だし、適切な改良法を考案する。その後三次元乱流条件に適用して、単一メッシュによる計算結果及び実験結果との比較に基づき、計算結果の妥当性を検証している。

以下の章ではMulti-Mesh法の具体的な応用例を示したものであり、第4章では複雑な吹出し口を伴う室内気流問題を取り上げ、新解法による計算を実験結果と比較している。計算結果が吹出し口のディテールの相違による室内気流の変化を正しく再現することから、室内気流の構造を考慮した吹出し口の開発に数値計算法が応用できる可能性を示すものである。

第5章では、在来法では対応が困難なことから、これまで数値計算法の本格的な適用が試みられてこなかった通風の問題を対象としたものである。計算では、まず窓なしの場合の建物周辺気流を対象に行い、計算結果が既往の実験、在来法による計算結果と対応することを確かめた上で、様々な通風条件を想定し室内外の気流場・圧力場の構造を一部既往の実験結果と比較しつつ検討し、乱流モデルの違いを含めて通気抵抗や室内のエネルギーバランスなど、多角的な考察を行っている。これらの結果より、通風現象の解明に数値計

算法が有力な検討手段として適用できる可能性を示している。

第Ⅲ編は、非等温室内気流の数値計算法に関し、乱流モデル、境界条件の妥当性、適用範囲を既往文献で示されている研究成果を含めて検討し、最終的に実大居室模型を対象とした実験と計算により、現状の数値計算法の適用範囲とその可能性を提示することを意図して行われたものであり、以下の4章より成る。

第1章では、平面浮力噴流を対象にASMとその一部を加味した $k-\epsilon$ モデル、及び標準 $k-\epsilon$ モデルの計算を行い、実験結果との比較や計算結果を吟味することによって、その特性を明らかにしている。

第2章では、乱流エネルギー散逸方程式中の浮力作用に対し、その影響の顕在化する条件を設定した実験と計算結果の比較を行い、乱流エネルギーの浮力による生産が非常に大きく正の値をとる条件では、浮力生産が計算に顕著な影響を及ぼすことを示すと共に、そのメカニズムに関する検討を行っている。

第3章では、非等温時の壁面境界条件として、まず壁付近の諸量の変化に関する理論的、実験的考察を行った後に、3種類の境界条件を提示している。更に、これらの評価を目的として鉛直加熱平板自然対流を対象に、境界条件や差分メッシュの相違が主に対流伝熱の予測に与える影響について検討している。

第4章では、実大の居室模型を対象とした冷房・暖房条件の実験データを取得した上で、3章までの検討結果を踏まえた一連の計算を行い、乱流モデルと境界条件の妥当性を主に実験結果との比較に基づいて行っている。これらの結果より、今回の検討範囲で推奨される境界条件を示し、将来的な数値計算法の可能性を提示している。

結論では本論文で得られた成果を総括すると共に、今後の課題について述べている。

... (faint text) ...

第 I 編

乱流の数値解析法

... (faint text) ...

1.1 平均流方程式の導出と変動量の相関項

室内における風速，温度，汚染質濃度等の詳細な分布を予測するためには，流体の運動を支配する最も基礎的な方程式から出発する必要がある。本章では，流れの数値計算法に関連する様々な基礎方程式を導くことにする。

まず，流体の連続式と運動量保存方程式（Navier-Stokes方程式）は以下のように記述される。

$$\frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{\rho} \widetilde{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{u}_i \widetilde{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\widetilde{\rho}} \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu \widetilde{s}_{ij}) + X_i \quad (1.2)$$

ここに， u_i : 速度ベクトルの i 方向成分

p : 圧力

X_i : i 方向に作用する外力

ν : 動粘性係数

ρ : 流体の密度

\sim : 瞬時値を表す

$$\widetilde{s}_{ij} : \text{瞬時歪速度を表す。} \quad \widetilde{s}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

三次元非等温気流の未知数は風速ベクトル3成分，圧力，密度と温度の計6個となるが，式1.1, 2にエネルギー方程式と状態方程式を加えることにより，方程式数は未知数と一致し，原理的には解を求めることが可能である。

なお，予測の対象を室内気流で問題となる常温付近の低速気流に限定すれば，密度変化は温度変化による体積膨張のみを考慮すればよい場合が多い。この条件では，流体温度を基準絶対温度 T_0 とそれからの偏差 $\Delta\theta$ に分解し， $\widetilde{T} = T_0 + \Delta\theta$ と表せば，密度については $\widetilde{\rho} = \rho_0 + \Delta\widetilde{\rho}$ と表すことができる。ここに， ρ_0 は基準絶対温度 T_0 に対応する一定の密度を表す。密度の偏差 $\Delta\widetilde{\rho}$ は，以下のように温度偏差と結び付けられる。

本章では，Hinze (1959)，モーニン，ヤグロム (1975)，ロック (1975)，Tennekes, Lumley (1972)，谷 (1980) の文献を参考とした。

$$\widetilde{\Delta p} = -\beta \rho_0 \widetilde{\Delta \theta} \quad (1.3)$$

ここに、 β は体積膨張率と呼ばれ、流体が気体の場合は $\beta = 1/T_0$ となる。

圧力についても同様にして基準圧力と偏差に分解し、 $\widetilde{p} = P_0 + \widetilde{\Delta p}$ とすると、密度とは異なり基準圧力は鉛直方向の位置によって変化し、下式となる。

$$P_0 = \rho_0 g_i x_i + \text{const} \quad (1.4)$$

なお、添え字 i についての縮約は取らず、 g_i は i 方向の重力加速度を表す。

以上より、式 1. 2 の右辺第 1 項を 1 次の正確度で分解すれば、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial x_i} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_0}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \widetilde{\Delta p}}{\partial x_i} + \frac{\widetilde{\Delta p}}{\rho_0^2} \frac{\partial P_0}{\partial x_i} \\ &= -g_i - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \widetilde{\Delta p}}{\partial x_i} - \beta g_i \widetilde{\Delta \theta} \end{aligned} \quad (1.5)$$

式 1. 5 を式 1. 2 に代入し、更に流体の圧縮性を無視すれば、外力として重力のみが加わる場合の基礎方程式はエネルギー方程式を含めて以下のように簡略化される。

$$\frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{u}_i \widetilde{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu \widetilde{S}_{ij}) - \beta g_i \widetilde{\theta} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \widetilde{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{\theta} \widetilde{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a \frac{\partial \widetilde{\theta}}{\partial x_j} \right) \quad (1.8)$$

ここに、 $\widetilde{\Delta p} \rightarrow \widetilde{p}$ 、 $\widetilde{\Delta \theta} \rightarrow \widetilde{\theta}$ なる記号の書き換えを行い、 a は温度拡散率を表す。

これらの方程式では、状態方程式が省略されているが、密度を未知変数から除いているので、先と同様閉じた系を構成する。但し、解析的に一般解を求めることはできないので、数値的な近似解を求めることを考えてみる。

簡単のため、半径 L 、軸上速度 U の円管長さ $20L$ を対象とする。常用的な範囲の Re 数 $LU/\nu = 5 \times 10^4$ で計算するものとし、粘性底層厚さの $1/10$ にあたる $2.1 \times 10^{-4}L$ で一様差分メッシュを組むとする。

そうすると、流れの場の中に含まれる格子点数は $20\pi / (2.1 \times 10^{-4})^3 = 6.8 \times 10^{12}$ となる。個々の格子点の数値計算を行うのに要する演算回数 10^2 回とし、このような演算を 10^2

回繰り返すものとするれば、演算の総数は $6.8 \times 10^{12} \times 10^2 \times 10^2 = 6.8 \times 10^{16}$ となる。現状のスーパーコンピュータでの演算速度は $1 \text{ GFLOPS} = 1000 \text{ MFLOPS}$ のオーダーの処理速度を持っているので、単位演算当たりの計算時間を 1.0×10^{-9} 秒とすれば、全体の計算時間は、 $6.8 \times 10^{16} \text{ 秒} = 19000 \text{ 時間} = 790 \text{ 日}$ 、2 年強となる。

極めて簡単な円管ダクト内の気流を解くのにこのような時間を要するとすれば、複雑な室内気流を式 1. 6~8 を直接近似して数値解を求めることは、当分の間絶望的であると考えられる。従って、格子点数が少なくすむように、何らかの対策が進められてよいわけである。このような事情から、式 1. 6~8 の従属変数を粗視化する工夫がこれまで進められてきている。

第一の方法は流れの各点で、その近傍の情報を集約し、個々の乱れの変動よりも緩やかに変動する空間的に粗視化された変数のみを相手にしようとする考え方がある。この場合、基礎方程式に空間加重平均操作が施すことにより、格子寸法以下では格子より小さいスケール (subgrid scale) の変動が、格子寸法以上の変動に与える影響を模擬するためのモデルが導入される。逆にいえば、格子寸法以上の変動は、計算で分解されるために、例えば時間平均量のみが予測対象となる場合でも、実現象と同様、非定常計算結果を数値積分する必要がある。

以上の計算法 (LES: Large Eddy Simulation と総称される) が、経済性に欠けることはやむを得ないが、後述する場の方法に比べ、モデルの物理的妥当性や普遍性の点では優れた特徴を持っている。従って、長期的には場の方法による計算法や実験法に代わりうる可能性があり、実際他の方法では捉えられない複雑な現象の解明に成功した報告事例が少なくない。しかし、短期的にはやはり計算規模がネックとなって、当面の目標は、場の方法に現れる諸係数の見積りや、基本的乱流現象の解明など、限られた範囲向けられることになる。なお、建築の研究分野での LES の応用は、持田 (1988a) などに詳述されているのでそちらを参照されたい。

第二の方法は、基礎方程式にアンサンブル平均をとった平均流の方程式から出発し、その方程式を直接に、できるだけ忠実に解こうとする考え方であり、この方法は場の方法 (field model) あるいは微分法 (differential method) と総称される。

場の方法の基礎となる平均流の方程式は以下のように導かれる。

まず式 1. 6~8 中の変数が平均値と平均値回りの変動成分から成るものとし、

$$\widetilde{u}_i = U_i + u_i \quad (1.9)$$

$$\widetilde{\theta} = \Theta + \theta \quad (1.10)$$

等とする。

平均値をオーバーバーで表せば明らかに、

$$U_i = \overline{\widetilde{u}_i} \quad (1.11)$$

$$0 = \overline{u_i} \quad (1.12)$$

となる。また、以下のように変動成分の積の平均が0とならないことを考慮し、

$$\overline{u_i u_j} = U_i U_j + \overline{u_i u_j} + \overline{U_i u_j} + \overline{U_j u_i} = U_i U_j + \overline{u_i u_j} \quad (1.13)$$

これらを用いて式1. 6~8を変形すれば、平均流の方程式を得る。

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial U_i U_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu S_{ij} - \overline{u_i u_j}) - \beta g_i \Theta \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\partial \Theta U_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} - \overline{\theta u_j} \right) \quad (1.16)$$

ここに $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$ は平均流の歪速度を表す。

平均流の方程式中の式1. 15は特にレイノルズの方程式と呼ばれる。

これを式1. 7と比較すると、 $-\overline{u_i u_j}$ なる項が平均操作の過程で新たに追加されたことになるが、この項は乱流による見かけの応力を表すことになることから、レイノルズ応力テンソルと呼ばれる。

平均化された U_i 、 Θ 等は、元々の \widetilde{u}_i 、 $\overline{\theta}$ に比べ空間変化が遙かに緩慢となるので、粗いメッシュを用いてもその空間分布は表現可能なことが期待される。

従って、場の方法では未知の相関項である $-\overline{u_i u_j}$ 、 $-\overline{\theta u_j}$ をいかにして見積もるかが問題の中心となる。

1. 2 エネルギーの伝達過程

レイノルズ応力の作用は、エネルギーが伝達する過程の中で考察することが有用である。平均流のエネルギー方程式は式1. 15の両辺に U_i を掛け、式1. 14を併用することにより、以下のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} U_i U_i \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} U_i U_i U_j \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{P}{\rho_0} U_j + 2\nu U_i S_{ij} - \overline{u_i u_j} U_i \right) \\ &+ \overline{u_i u_j} S_{ij} - \beta g_i \Theta U_i - 2\nu S_{ij} S_{ij} \quad (1.17) \end{aligned}$$

式1. 17の左辺は平均流の運動エネルギーの時間変化と平均流による輸送を表し、三つの成分からなる右辺第1項は、それぞれ圧力による仕事、粘性応力によるエネルギー輸送、レイノルズ応力による輸送を意味する。

右辺第1項にガウスの発散定理を適用すると境界を除いて0となるので、これらは正味の運動エネルギーの増減には寄与せず、空間的なエネルギー分配に関連する項と解釈される。

一方、右辺の残りの項は運動エネルギーの増減に関連する成分を表し、第2項から順番に、レイノルズ応力による仕事（後に別の解釈が与えられる）、浮力による仕事、粘性応力による散逸（常に負）を意味する。

右辺第2項の符号については、若干考察を進める必要がある。

図1-1に示すように $x_1 x_2$ 平面での二次元流を仮定し、 $U_2 = 0$ 、 $\partial U_1 / \partial x_2 > 0$ なる純せん断流れを対象を限定する。この場合、平均流の歪テンソルで0とならない成分は $S_{12} = S_{21} = 1/2 (\partial U_1 / \partial x_2) > 0$ である。

x_2 の低い位置から高い位置に速度変動による移動が生じた場合（即ち $u_2 > 0$ ）、 x_1 方向の速度については、平均速度が低い部分から高い部分への移動となるので、平均的には $u_1 < 0$ となる確率が高いと考えられる。従って $\overline{u_1 u_2} < 0$ となり、移動方向が逆の場合も同様である。

以上の条件では、レイノルズ応力による仕事は負となるが、乱流の多くの条件では、レイノルズ応力は平均流からエネルギーを奪う傾向にあることが知られている。

結局、右辺第2、4項はいずれも、運動エネルギーの散逸成分と解釈されるが、両者のオーダー比較を行うために、変動速度と空間微分中の平均速度の差を v 、空間微分を l で見積もることとする。この場合、 $\nu S_{ij} S_{ij} \sim \nu v^2 / l^2$ となり、変動速度間の相関が高いと仮定すれば、 $\overline{u_i u_j} S_{ij} \sim v^3 / l = \nu v^2 / l^2 (v l / \nu)$ と評価される。

これより両者の比は乱れの Re 数 $v l / \nu$ となるが、この値は高 Re 数流れを対象とする場合は非常に大きいと推定されるので、平均流の運動エネルギーの散逸成分ではレイノルズ応力による仕事が卓越し、粘性応力による散逸は無視できる。

次に、式1. 7の両辺に \widetilde{u}_i を掛け、平均操作の後に式1. 17を差し引くと乱流エネルギーの方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i u_i U_j} \right) &= -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{u_j \left(\frac{u_i u_i}{2} + \frac{p}{\rho_0} \right)} - 2\nu \overline{u_i S_{ij}} \right] \\ &- \overline{u_i u_j} S_{ij} - \beta g_i \overline{\theta u_i} - 2\nu \overline{S_{ij} S_{ij}} \quad (1.18) \end{aligned}$$

ここに $s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ は変動の歪速度を表す。

平均流の運動エネルギー方程式と同様、左辺は乱流エネルギーの時間変化、平均流による輸送であり、右辺第1項の空間分配項は、乱流変動による輸送、圧力変動による仕事、粘性応力による輸送を表す。

右辺第2項は式1.17の右辺第2項と大きさは同じで符号が逆であることから、正の寄与となり乱流エネルギーを増加させる作用がある。即ち、レイノルズ応力によって平均流が失ったエネルギーは乱流エネルギーの生産に転換されるので、応力による乱流エネルギー生産項 (stress production) と呼ばれる。なお、この項を以後 P_k ($\equiv -\overline{u_i u_j} S_{ij}$) と表す。

右辺第3項も広義の生産項となり浮力による生産項 (buoyancy production) と呼ばれるが、応力生産項と異なり流れの状況によって正負の値をとる。

例えば、 $i=3$ を鉛直下向きの座標とすれば、唯一0とまらない浮力生産項は $-\beta g_3 \overline{\theta u_3}$ となるが、図1-2に示すように x_3 方向に平均温度が低下する (即ち $\partial \theta / \partial x_3 < 0$) 条件を考える。

この場合 x_3 軸の上部から下部に向かって速度変動による移動が生じた場合 (即ち $u_3 > 0$)、平均的には高温領域から低温領域への移動となるので $\theta > 0$ となる確率が高く、従って $-\beta g_3 \overline{\theta u_3} < 0$ となって負の寄与となる。即ち、温度成層状態では乱流エネルギーが浮力生産項によって減衰するので、浮力のない場合より乱流エネルギーが小さくなるのが予測される。なお、この項を以後 G_k ($\equiv -\beta g_i \overline{u_i \theta}$) と表す。

式1.18の右辺第4項を考察するため、定常の等温、一様な純せん断流 (壁乱流がこれに近い) を想定すれば、式1.18は近似的に以下のように書ける。

$$-\overline{u_i u_j} S_{ij} = 2\nu \overline{S_{ij} S_{ij}} \quad (1.19)$$

式1.19は応力生産項が、その大きさに見合った散逸作用とバランスすることを意味しており、その意味で右辺を乱流エネルギー散逸項と呼ぶが、純せん断流以外の多くの条件で、右辺は応力生産項と同じオーダーとなることが知られている。

レイノルズ応力は先に述べた事情から、平均流の歪と密接に関連しているので、 $-\overline{u_i u_j} \sim \nu l S_{ij}$ と見積もれば、式1.19のオーダー評価は、

$$\nu l S_{ij} S_{ij} \sim 2\nu \overline{S_{ij} S_{ij}} \quad (1.20)$$

となる。 $\overline{S_{ij} S_{ij}}$ のオーダーは $S_{ij} S_{ij}$ に乱れのRe数 $\nu l / \nu$ を掛けたものに相当するため、変動歪速度は平均流歪速度よりも著しく大きいことになる。

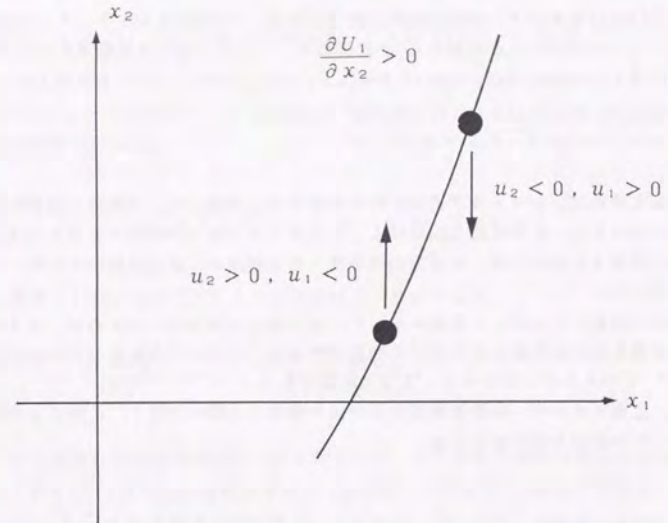


図1-1 応力生産項の符号

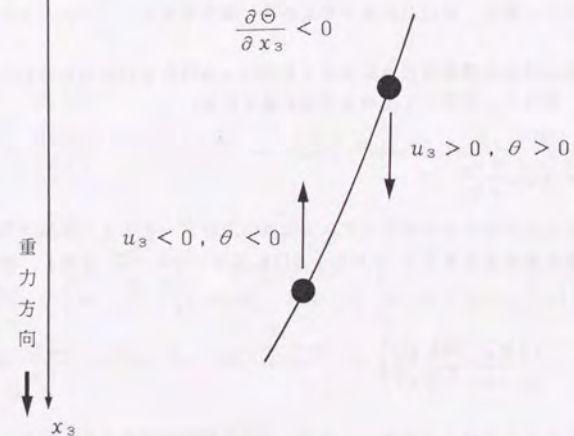


図1-2 浮力生産項の符号

式1. 19左辺のオーダーは先の記号を使用すれば、 v^3/l となるが、 s_{ij} の空間微分の代表スケールは当然のことながら l とは異なる。そこで、新たに変動速度の長さスケールを表す記号 λ : Taylorのmicro-scaleを導入し、式1. 19のオーダーを次のように表す。

$$v^3/l \sim 2\nu \overline{s_{ij}s_{ij}} \sim \nu v^2/\lambda^2 \quad (1.21)$$

以上まとめれば、レイノルズ応力には平均流の歪に関連して、平均流の運動エネルギーを奪う作用があり、これは応力生産項として乱流エネルギーの増加に転換される。

浮力の作用する条件では、鉛直方向の速度-温度相関が、別途乱流エネルギーの増加減少に寄与する。

平均流の運動エネルギー+乱流エネルギーを正味のエネルギーとすれば、エネルギーの減衰に卓越するのは乱流エネルギーの散逸項であり、これは応力生産の行われる長さスケール: l よりも小さいスケール: λ での現象である。

即ち、乱流エネルギーの散逸機構は平均流の構造との関連が低く、このことがモデル化に当たっての重要な指針を与える。

1. 3 渦度の力学

乱流エネルギーの式1. 18に現れた乱流エネルギーの散逸項について考察を進めるため、渦度方程式に触れる必要がある。但し、目標とする変動渦強度方程式は乱流エネルギー散逸方程式のモデル化の過程で直接参照されることはないので、式の導出の詳細はTennekes, Lumley (1972) に譲り、検討の対象を等温条件に限定する。

まず、瞬時の渦度は単位交代テンソル (ϵ_{ijk} : 123, 231, 312 に対して1, 132, 213, 321 に対して-1, 他は0) を用いて次のように定義される。

$$\tilde{\omega}_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_j} \quad (1.22)$$

また、瞬時の変形歪速度 \tilde{s}_{ij} に対応する回転歪テンソル \tilde{r}_{ij} を式1. 23によって定義すれば、

$$\tilde{r}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.23)$$

簡単な計算から以下の関係等が導かれる。

$$\tilde{\omega}_i = \epsilon_{ijk} \tilde{r}_{kj}, \quad \tilde{r}_{ij} = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \tilde{\omega}_k$$

等温時のNavier-Stokes式1. 7の移流項(左辺第2項)と粘性応力項(右辺第2項)を変形すれば以下となる。

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\tilde{p}}{\rho_0} + \frac{1}{2} \tilde{u}_j \tilde{u}_j \right) + \epsilon_{ijk} \tilde{u}_j \tilde{\omega}_k - \nu \epsilon_{ijk} \frac{\partial \tilde{\omega}_k}{\partial x_j} \quad (1.24)$$

更に、演算子 $r \circ t$ を作用させると渦度方程式が得られるが、

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\omega}_i \tilde{u}_j}{\partial x_j} = \tilde{\omega}_j \tilde{s}_{ij} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (1.25)$$

式1. 25の右辺第1項は渦度の生産に関連する項で、渦の伸張(vortex stretching)項と呼ばれる。例えば x_1 方向に加速される流れ(縮流など)では $\tilde{s}_{11} > 0$ となるが、連続条件から $\tilde{s}_{22}, \tilde{s}_{33} < 0$ となる必要がある。この場合、 $\tilde{\omega}_1$ は渦の伸張項の作用によって増加する反面、 $\tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3$ は減少することになる。

式1. 9と同様、渦度を平均値と変動成分に分けて表した後、

$$\tilde{\omega}_i = \Omega_i + \omega_i \quad (1.26)$$

平均操作を施せば、レイノルズ方程式に対応する平均渦度方程式が求められる。

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial t} + \frac{\partial \Omega_i U_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{\omega_i u_j}}{\partial x_j} + \overline{\omega_j s_{ij}} + \Omega_j S_{ij} + \nu \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (1.27)$$

また、平均流の運動エネルギー方程式に対応する平均渦強度の方程式は以下となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \Omega_i \Omega_i \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \Omega_i \Omega_i U_j \right) &= -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\Omega_i \overline{\omega_i u_j} - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \Omega_i \Omega_i \right) \right] \\ &+ \overline{u_j \omega_i} \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_j} + \Omega_i \Omega_j S_{ij} + \Omega_i \overline{\omega_j s_{ij}} - \nu \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_j} \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (1.28)$$

これらから、目標とする変動渦強度の方程式は式1. 29の形で表されることになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \overline{\omega_i \omega_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{\omega_i \omega_i U_j} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2} \overline{\omega_i \omega_i u_j} - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{\omega_i \omega_i} \right) \right] - \overline{u_j \omega_i} \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_j} + \Omega_j \overline{\omega_i S_{ij}} + \overline{\omega_i \omega_j S_{ij}} + \overline{\omega_i \omega_j S_{ij}} - \nu \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \quad (1.29)$$

式1.29の右辺は乱流エネルギー方程式と同様、輸送項と生産項、散逸項から構成されていることが分かるが、各項の検討に入る前に変動渦強度の物理的意味を考えてみる。

まず、渦度、変形歪、回転歪の変動成分は定義より次の関係が得られる。

$$\overline{\omega_i \omega_i} = 2 \overline{r_{ij} r_{ij}} \quad (1.30)$$

$$\overline{S_{ij} S_{ij}} - \overline{r_{ij} r_{ij}} = \frac{\partial^2 (\overline{u_i u_j})}{\partial x_j \partial x_j} \quad (1.31)$$

式1.31の右辺のオーダーは v^2/l^2 となるが $\overline{S_{ij} S_{ij}}$ のオーダーは式1.21より v^2/λ^2 となるので次のように評価できる。

$$\overline{S_{ij} S_{ij}} \approx \overline{r_{ij} r_{ij}} \quad (1.32)$$

これを、式1.30に代入し両辺に ν を掛ければ、

$$\nu \overline{\omega_i \omega_i} \approx 2\nu \overline{S_{ij} S_{ij}} \quad (1.33)$$

となつて、乱流エネルギー散逸項の定義に一致する。

従つて、変動渦強度の方程式に 2ν を掛けたものは、乱流エネルギー散逸の方程式とみなすことが可能である。

以上の点を踏まえて、式1.28の各生産、散逸項のオーダーを調べてみる。

そのための準備として、式1.24に直接平均操作を行えば、

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{P}{\rho_0} + \frac{1}{2} U_j U_j + \frac{1}{2} \overline{u_j u_j} \right) + \epsilon_{ijk} (U_j \Omega_k + \overline{u_j \omega_k}) - \nu \epsilon_{ijk} \frac{\partial \Omega_k}{\partial x_j} \quad (1.34)$$

いま、 $x_1 x_2$ 平面での二次元流で $U_1 \gg U_2$ なる先の図1-1の条件を想定し、乱流圧力、粘性応力を無視し、境界層近似を施せば、式1.34の U_i に関する方程式は以下のように簡略化される。

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_1 U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1 U_2}{\partial x_2} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_1} + \overline{u_2 \omega_3} - \overline{u_3 \omega_2} \quad (1.35)$$

式1.35をレイノルズ方程式1.15と比較すると、右辺第2、3項はレイノルズ応力の x_2 方向微分に相当することが分かる。

従つて、 $\overline{u_j \omega_i}$ のオーダーは v^2/l となることから、式1.29の右辺第2項の生産成分のオーダーは以下となる。

$$- \overline{u_j \omega_i} \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_j} \sim \frac{v^2 v}{l l^2} = \frac{v^3 \lambda^3}{\lambda^3 l^3} \quad (1.36)$$

また、 $\overline{\omega_i S_{ij}} = \overline{\omega_i \partial u_i / \partial x_j} = \partial / \partial x_j (\overline{\omega_i u_i})$ なる関係から右辺第3項は、

$$\Omega_j \overline{\omega_i S_{ij}} \sim \frac{v v^2}{l l^2} = \frac{v^3 \lambda^3}{\lambda^3 l^3} \quad (1.37)$$

となる。また $\overline{\omega_i \omega_j}$ のオーダーは $i=j$ の場合には明らかに v^2/λ^2 となるが、 $i \neq j$ で $\overline{\omega_i \omega_j}$ が単独で現れた場合は、平均流の歪に関連してこれより小さいとされており、Tennekes, Lumley (1972) に従いその補正係数を λ/l と見積もれば、右辺第4項のオーダーは、

$$\overline{\omega_i \omega_j S_{ij}} \sim \frac{\lambda v^2 v}{l \lambda^2 l} = \frac{v^3 \lambda^2}{\lambda^3 l^2} \quad (1.38)$$

となる。また、第5項のオーダーは、

$$\overline{\omega_i \omega_j S_{ij}} \sim \frac{v^3}{\lambda^3} \quad (1.39)$$

となる。

移流項や輸送項についても同様のオーダー評価を行うと、いずれも $v^3/\lambda^3 \cdot \lambda/l$ 以下となり、結局式1.29の生産項は右辺第6項を別として左から順番に大きくなり、第5項が高Re数の条件では卓越することが分かる。

逆にいえば、この条件で第5項と拮抗し得るのはオーダー評価のできない第6項のみとなるので、近似的には式1.19と同様以下の関係式が成立するはずである。

$$\overline{\omega_i \omega_j S_{ij}} = \nu \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \quad (1.40)$$

上式の左辺は式 1. 25 の右辺第 1 項との関連から、変動渦の伸張による生産項と解釈され、これが右辺の散逸項とバランスすることを意味する。式 1. 40 の両辺に 2ν を掛ければ、先の議論から乱流エネルギー散逸の生産項と散逸項に相当することになり、そのオーダーは式 1. 21 を用いて、 $\nu^4/l^2 \cdot l/\lambda$ と推定される。

1. 4 変動成分の 2 次モーメント方程式

乱流におけるエネルギー伝達過程に関する検討結果を踏まえて、変動成分の 2 次モーメント方程式に考察を進める。

まず、レイノルズ応力の方程式は、式 1. 7 の添え字 j を l とした後に u_j を掛けた式 ($\overline{u_j} = 0$ に注意) と、同じ式の添え字 i, j を入れ換えた式の和に平均操作を行うことによって以下となる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i u_j U_l}}{\partial x_l} = \\ & - \frac{\partial}{\partial x_l} \left[\overline{u_i u_j u_l} + \frac{p}{\rho_0} (\delta_{ji} u_l + \delta_{il} u_j) - 2\nu (\overline{u_i s_{jl}} + \overline{u_j s_{il}}) \right] \quad \text{①} \\ & - \left[\overline{u_i u_l} \frac{\partial U_j}{\partial x_l} + \overline{u_j u_l} \frac{\partial U_i}{\partial x_l} \right] \quad \text{②} \\ & - \beta [g_i \overline{u_j \theta} + g_j \overline{u_i \theta}] \quad \text{③} \\ & - 2\nu \left[s_{il} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} + s_{jl} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \right] \quad \text{④} \\ & \frac{p}{\rho_0} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad \text{⑤} \quad (1.41) \end{aligned}$$

式 1. 41 の縮役 ($i = j$) をとって $1/2$ 倍すれば、乱流エネルギーの方程式 1. 18 になることは直ちに分かる。従って右辺各項の物理的解釈も先との類推から、

- ① : 乱流変動, 圧力変動, 粘性応力による空間分配項
- ② : 応力生産項
- ③ : 浮力生産項
- ④ : 散逸項
- ⑤ : ?

となる。なお、②, ③項をそれぞれ P_{ij} , G_{ij} とおけば、 $P_k = \frac{1}{2} P_{ii}$, $G_k = \frac{1}{2} G_{ii}$ となる点に注意。

⑤項の解釈を行う前に、次章のモデル化を意識して、①の一部である粘性応力による空間分配項と④の散逸項を以下のように変形する。

$$\begin{aligned} & 2\nu \frac{\partial}{\partial x_l} \left[\overline{u_i s_{jl}} + \overline{u_j s_{il}} \right] - 2\nu \left[s_{il} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} + s_{jl} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \right] \\ & = \nu \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right) - 2\nu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right] \quad (1.42) \end{aligned}$$

式 1. 42 を用いて式 1. 41 を書き換えれば以下となる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i u_j U_l}}{\partial x_l} = \\ & - \frac{\partial}{\partial x_l} \left[\overline{u_i u_j u_l} + \frac{p}{\rho_0} (\delta_{ji} u_l + \delta_{il} u_j) - \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right] \quad \text{①} \\ & - \left[\overline{u_i u_l} \frac{\partial U_j}{\partial x_l} + \overline{u_j u_l} \frac{\partial U_i}{\partial x_l} \right] = P_{ij} \quad \text{②} \\ & - \beta [g_i \overline{u_j \theta} + g_j \overline{u_i \theta}] = G_{ij} \quad \text{③} \\ & - 2\nu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right] \quad \text{④} \\ & \frac{p}{\rho_0} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad \text{⑤} \quad (1.43) \end{aligned}$$

この変形によって、①項の分子拡散項はレイノルズ応力の粘性拡散となり、物理的意味が明確となるが、④項は本来のレイノルズ応力散逸項とは異なり、その一部を表すことになる。式 1. 43 の表記法に対応する乱流エネルギー方程式は以下となる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k U_l}{\partial x_l} = \\ & - \frac{\partial}{\partial x_l} \left[\frac{1}{2} \overline{u_i u_i u_l} + \frac{p}{\rho_0} u_l - \nu \frac{\partial k}{\partial x_l} \right] \quad \text{①} \\ & - \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_l}{\partial x_l} = P_k \quad \text{②} \\ & - \beta g_i \overline{u_i \theta} = G_k \quad \text{③} \\ & - \nu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \right] \quad \text{④} \quad (1.44) \end{aligned}$$

ここに、 $k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$ とした。

式 1. 43 の縮役をとる段階で⑤項は消えるため、この項は乱流エネルギーの大きさには直接的影響を及ぼさないが、異なる方向の法線応力（言い替えば乱流エネルギーの各方向成分）の分配に関わることが予測される。

考察を進めるために、定常、等温、高レイノルズ数における二次元純せん断流を想定し $U_1=U_1(x_2)$ 、 $U_2=U_3=0$ とすれば、 $U_j \partial / \partial x_j = 0$ 、 $\partial / \partial x_1 = \partial / \partial x_3 = 0$ なる境界層近似が適用できる。この条件での乱流エネルギー方程式は、

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{1}{2} \overline{u_1 u_1 u_2} + \frac{p}{\rho_0} \overline{u_2} \right] - \overline{u_1 u_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \nu \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] \quad (1.45)$$

となり、法線応力の各方向成分（の1/2倍）は、

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{1}{2} \overline{u_1^2 u_2} \right] - \overline{u_1 u_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \nu \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] + \frac{p}{\rho_0} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (1.46)$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{1}{2} \overline{u_2^2 u_2} + \frac{p u_2}{\rho_0} \right] + 0 - \nu \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] + \frac{p}{\rho_0} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (1.47)$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{1}{2} \overline{u_3^2 u_2} \right] + 0 - \nu \left[\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right] + \frac{p}{\rho_0} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (1.48)$$

となる。

式 1. 45 を式 1. 46~48 と比較すると、乱流エネルギーの生産は全て $\overline{u_1^2}$ の生産に費やされ、 $\overline{u_2^2}$ 、 $\overline{u_3^2}$ には応力生産がないことが分かる。

ところが $\overline{u_2^2}$ 、 $\overline{u_3^2}$ は実験事実によれば $\overline{u_1^2}$ より小さいものの、同程度の値（1/2程度）をとることが知られている。式 1. 46~48 の散逸項は常に負であり、分配項は空間の一部で正となれば他の部分では負にならないため、圧力-速度変動の相関項が生産項の役割を果たすと考える以外、実験事実を説明できない。

従って、この場合は $\frac{p}{\rho_0} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} > 0$ 、 $\frac{p}{\rho_0} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} > 0$ となるはずで、更に連続条件 $\frac{p}{\rho_0} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$ より、 $\frac{p}{\rho_0} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} < 0$ となるべきである。

別の観点から考えれば、一般に上述の条件では $\overline{u_1^2} > \overline{u_2^2}$ 、 $\overline{u_3^2}$ となるので x_1 方向の変動が最大となる。図 1-3 に示すように、空間のある一点で瞬間的に圧力が上昇した ($p > 0$) と仮定すれば、その点周囲の速度変動の方向は x_1 方向が点を挟んで内向き（即ち $\partial u_1 / \partial x_1 < 0$ 、主流方向の圧縮を意味する）の場合が、外向き（即ち $\partial u_1 / \partial x_1 > 0$ ）

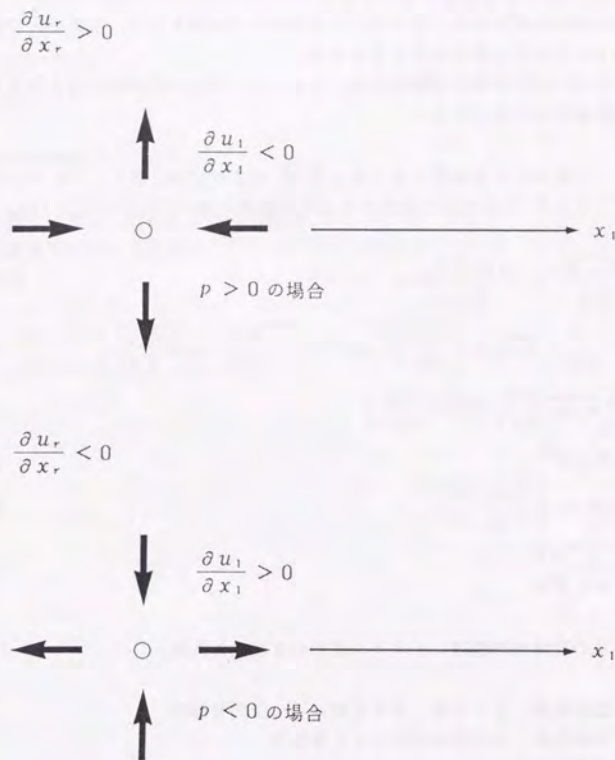


図 1-3 圧力-速度相関項の符号

の場合より確率的に多く現れると考えられる。

従って、連続条件より $\partial u_2 / \partial x_2, \partial u_3 / \partial x_3 > 0$ となる確率が高く、上述の圧力-速度変動相関項の符号と一致した結果を得る。

即ち、 x_1 方向の変動速度は圧力に逆らって仕事をするので運動エネルギーを損失し、他の方向では加速を受けるのでエネルギーが増加する結果として、主流方向の変動速度の持つエネルギーが主流と直交方向に移される。

結局、圧力-速度変動の相関項には、レイノルズ応力の方向別の差をならす作用があるとの物理的解釈が可能である。

同様にして乱流による温度フラックス $\overline{u_i \theta}$ の方程式は、式 1. 8 に u_i を掛けた方程式と、式 1. 7 に θ を掛けた方程式の和に平均操作を施すことにより以下のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i \theta}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i \theta U_j}}{\partial x_j} = & \\ - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\overline{u_i u_i \theta} + \frac{p}{\rho_0} (\delta_{ii} \theta) - a u_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \nu \theta \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] & \quad ① \\ - \left[\overline{u_i u_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \overline{\theta u_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right] & \quad ② \\ - \beta g_i \overline{\theta^2} & \quad ③ \\ - (a + \nu) \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right] & \quad ④ \\ + \frac{p}{\rho_0} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} & \quad ⑤ \quad (1.49) \end{aligned}$$

右辺各項の物理的解釈はレイノルズ応力の方程式と同様、

- ①：乱流変動，圧力変動，分子拡散による空間分配項
- ②：平均温度，平均速度勾配による生産項
- ③：浮力生産項
- ④：散逸項
- ⑤：圧力-温度変動による分配項

となる。

浮力生産成分③項に現れた $\overline{\theta^2}$ については、別途方程式を立てる必要があり、その結果は次の通り。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\theta^2 U_j}}{\partial x_j} = & \\ - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\overline{u_i \theta^2} - a \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_i} \right] & \quad ① \\ - 2 \overline{u_i \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} & \quad ② \\ - 2a \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} & \quad ③ \quad (1.50) \end{aligned}$$

右辺各項の物理的解釈は以下となる。

- ①：乱流変動，分子拡散による空間分配項
- ②：平均温度勾配による生産項
- ③：散逸項

2. 1 モデル化の必要性

前章で示したように、場の方法の出発点となる平均流の方程式には $\overline{u_i u_j}$ や $\overline{u_i \theta}$ といった変動量の2次モーメント項が現れる。そこで、2次モーメント項の支配方程式を導出すると、 $\overline{u_i u_j u_k}$ や $\overline{u_i u_j \theta}$ といった3次モーメント項や $\frac{p}{\rho_0} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]$ などの圧

力変動と変動速度の空間微分項、 $-2\nu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]$ などの変動成分の空間微分どうしの相関項が現れる。これら未知の相関項に関する方程式をたてると更に新たな相関項が現れることになって方程式系を閉じることができない。

一般に高次のモーメント項は低次のモーメント項に比べて、物理的解釈や実験的把握が困難となるので、適当な所で方程式の展開を打ち切り、既知の量を用いて半実験的に未知の相関項の近似を行い、方程式系を閉じる必要が生じる。

工学的な応用に重点をおいて考えれば、なるべく簡単で解き易く、できるだけ応用範囲が広く、かつ精度のよいモデル方程式が求められることになるが、現状でこれらの要請に応えうるモデルとして、最も精巧なレベルのものはDSM (Differential Second Moment closure) と総称される2次モーメントで近似を打ち切るタイプ、更にASM (Algebraic Second Moment closure), BVM (Boussinesq's eddy Viscosity Model) といったその簡略版がある。

本論文ではこの内最も簡単なBVMの代表モデルであるk-εモデルを主に使用することになるが、これら是一群のモデルとして捉えることができ、例えばBVMで用いられる計算定数はDSMで用いられるものの組み合わせで表現できる。

そこで、本章では全般的なモデリングの方針を説明した後、開発の経緯は逆であるがまずDSMの説明を行い、順次簡略化モデルについて概説する。

本章では、ロッタ (1975), Launder (1975a), Launder, Reece, Rodi (1975b), Gibson, Launder (1976), Rodi (1980), Hossain, Rodi (1982), Launder (1987), Aupoixを参考とした。

2. 2 等方性散逸の仮定による散逸項のモデル化

$\overline{u_i u_j}$, $\overline{u_i \theta}$ の方程式はその散逸成分として以下の2つが現れる。

$$2\nu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] = \epsilon_{ij} \quad (2.1)$$

$$(a+\nu) \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right] = \epsilon_{i\theta} \quad (2.2)$$

1. 2で述べたように、散逸項を構成するの変動量の空間スケールは、平均流の長さスケール l に比べて非常に小さいので、大きなスケールの運動の持つ非等方的な傾向は小さいことが期待される。従って、高レイノルズ数の条件では散逸の等方性が仮定できる。

式2. 1, 2で $i \neq j$ とし、 x_i 軸を180°回転させる場合を考える。等方近似が成立すれば、この座標の回転によって値を変えることはないが、この場合 u_i も符号を変えることになるので、矛盾のない値は0となる。即ち、

$$2\nu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] = \epsilon_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \quad (2.3)$$

$$(a+\nu) \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right] = \epsilon_{i\theta} = 0 \quad (2.4)$$

次に、式2. 1で $i=j$ とおき(縮役はとらない)、座標軸を90°回転させることを考える。この場合も相関項の値は等方性の要請から一定値となる必要があるので、3方向成分全てが同一の値をとると結論できる。即ち、

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} \quad (2.5)$$

式2. 5の総和は式1. 44の④項の2倍となって、

$$\epsilon_{ii} = 2\nu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] \quad (2.6)$$

と書け、上式の右辺は前章で述べたように本来の乱流エネルギー散逸の一部を表す。但し、全散逸を表す $2\nu s_{ij} s_{ij}$ を変形すると以下のように表される(一部添え字の変更を行う)。

$$\begin{aligned}
2\nu \overline{s_{ij}s_{ij}} &= \frac{\nu}{2} \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)} \\
&= \frac{\nu}{2} \overline{\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)} \\
&= \nu \left[\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}} \right] + \nu \left[\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}} \right] \quad (2.7)
\end{aligned}$$

式2.7の右辺第1項は式1.44の④項に一致し、第2項はx_i軸の180°の座標の回転で符号を変える。従って第2項は等方性散逸の条件では0となるため、結局式1.44の④項は、等方性散逸の場合の全散逸または、全散逸の内の等方成分と解釈できる。

いずれにしても、全散逸中の主要成分であることは間違いない、モデル化の段階では乱流エネルギーの全散逸を近似的に表すとみなし、記号εで表す。結局散逸成分のモデルは以下となる。

$$\epsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon \quad (2.8)$$

$$\epsilon_{i\theta} = 0 \quad (2.9)$$

2.3 圧力変動-変動量空間微分の相関項

圧力変動と変動成分の空間微分の相関項は1.4で述べたように、変動量の2次モーメントの非等方性を緩和させる作用を持つと推定される。

但し、圧力変動そのものが実測に直接かからない量であるので、なんらかの方法で他の変数に置き換えて、モデル化の指針を得る必要がある。

まず、レイノルズ応力の方程式に現れる相関項を以下のように2つに分けて検討する。

$$\frac{p}{\rho_0} \overline{\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]} = \pi_{ij} = \phi_{ij} + \phi_{ji} \quad (2.10)$$

Navier-Stokes方程式1.7を式2.11の形に書き、

$$\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{u}_i \widetilde{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \widetilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \beta g_i \widetilde{\theta} \quad (2.11)$$

両辺に微分演算子∂/∂x_iを作用させると、

$$\Delta \widetilde{p} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \widetilde{u}_i \widetilde{u}_j}{\partial x_i \partial x_j} - \rho_0 \beta \frac{\partial}{\partial x_i} (g_i \widetilde{\theta}) \quad (2.12)$$

ここに、Δ=∂²/∂x_i∂x_i：ラプラシアン演算子を表す。式2.12を平均値と変動量に分離すれば、

$$\Delta (P+p) = -\rho_0 \left[\frac{\partial^2 U_i U_j}{\partial x_i \partial x_j} + 2 \frac{\partial^2 U_i u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right] - \rho_0 \beta \frac{\partial}{\partial x_i} (g_i \Theta + g_i \theta) \quad (2.13)$$

式2.13に平均操作を施せば、

$$\Delta P = -\rho_0 \left[\frac{\partial^2 U_i U_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_i \partial x_j} \right] - \rho_0 \beta \frac{\partial}{\partial x_i} (g_i \Theta) \quad (2.14)$$

となり、式2.14を式2.13から差し引くことにより、圧力変動を表すポアソン式を得る。

$$\Delta p = -\rho_0 \left[\frac{\partial^2 (u_i u_j - \overline{u_i u_j})}{\partial x_i \partial x_j} + 2 \frac{\partial^2 U_i u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \beta \frac{\partial}{\partial x_i} (g_i \theta) \right] \quad (2.15)$$

式2.15から変動圧力の方程式を求めるには、若干の準備が必要となる。

まず、Vに関する体積分を、境界Fに関する面積分に置き換えるには、次のGreenの定理を用いる。

$$\int_V (v \Delta p + p \Delta v) dV(\vec{x}_1) = \int_F (v \cdot \text{grad}(p) - p \cdot \text{grad}(v)) dF(\vec{x}_1) \quad (2.16)$$

ここに、 \vec{x}_1 ：積分変数、dF：外向き法線方向を持つ面要素、v：任意関数である。

今、 $r = |\vec{x}_1 - \vec{x}|$ (ベクトルのノルム) とし、 $v = 1/r$ とおく。

この時、 $\vec{x} = (0, 0, 0)$ ：座標原点とすれば、 $r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$ となるため、

$\partial^2 v / \partial x_1^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-5/2} (2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ 等を考慮して、

$\Delta v = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-5/2} (2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2) = 0$ となる。

ここで、図 2. 1 を参照し、 V の点 \vec{x} を中心とする半径 r_1 の球面を K とし、 K と F なる表面に囲まれた V の一部である体積要素 V_1 について式 2. 16 を積分する。

$$\int_{V_1} \left(\frac{1}{r} \Delta p \right) dV(\vec{x}_1) = \int_F \left(\frac{1}{r} \text{grad}(p) - p \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \right) dF(\vec{x}_1) + \int_K \left(\frac{1}{r} \text{grad}(p) - p \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \right) dK(\vec{x}_1) \quad (2.17)$$

再び、 $\vec{x} = (0, 0, 0)$ とすれば、 $\text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = \text{grad} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2}$ であるが、
 $\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{2x_1}{2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-3/2} = -x_1 r^{-3}$ より、 $\text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

一方 $dK = -\frac{1}{r} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} dS$ より、 $\text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) dK = \frac{dS}{r^2}$ となる。

以上より、 $\int_K \left(\frac{1}{r} \text{grad}(p) - p \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \right) dK(\vec{x}_1)$ に関し、 $r_1 \rightarrow 0$ なる極限移行を行えば第 1 項は $4\pi r^2 / r$ に比例するので 0、第 2 項は $-\frac{4\pi r^2}{r^2} p = -4\pi p$ となるので、次のようになる。

$$\int_{V_1} \left(\frac{1}{r} \Delta p \right) dV(\vec{x}_1) = \int_F \left(\frac{1}{r} \text{grad}(p) - p \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \right) dF(\vec{x}_1) - 4\pi p(\vec{x}) \quad (2.18)$$

式 2. 18 で V を大きくしていくと表面積分の寄与は消失するため結局以下となる。

$$p(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_1} \left(\frac{1}{r} \Delta p \right) dV(\vec{x}_1) \quad (2.19)$$

式 2. 19 に式 2. 15 を代入すれば変動圧力方程式が得られる。

$$p(\vec{x}) = \frac{\rho_0}{4\pi} \int_V \left[\frac{\partial^2 (u_i u_j - \overline{u_i u_j})}{\partial x_i \partial x_j} + 2 \frac{\partial^2 U_i u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \beta \frac{\partial}{\partial x_i} (g_i \theta) \right] \frac{dV(\vec{x}_1)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}|} \quad (2.20)$$

結局、式 2. 10 の一部は式 2. 21 のように表すことができる。

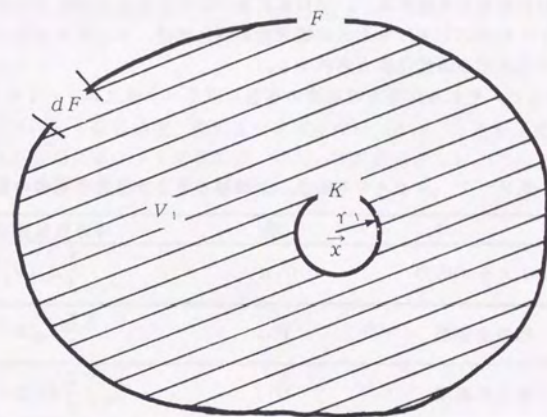


図 2-1 ポアソン方程式の積分

$$\pi_{ij} = \frac{\overline{p \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}}{\rho_0} = \frac{1}{4\pi} \int_V \left[\left(\frac{\partial^2 u_i u_m}{\partial x_i \partial x_m} \right)' \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + 2 \left(\frac{\partial^2 U_i u_m}{\partial x_i \partial x_m} \right)' \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \beta \left(\frac{\partial g_i \theta}{\partial x_i} \right)' \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \frac{dV(\vec{x}_i)}{|\vec{x}_i - \vec{x}|} \quad (2.21)$$

$\phi_{ij,1}$ $\phi_{ij,2}$ $\phi_{ij,3}$

但し、右肩' は \vec{x}_i に関する値を意味する。
式 2. 21 より、圧力変動-速度変動空間微分の相関項は 3 つの成分からなり、式 2. 21 の左から順に、変動速度間の相互作用、平均速度の歪と変動速度の相互作用、浮力と変動速度の相互作用となる。

以上の成分が前章の考察から、いずれも乱流の非等方性を緩和する方向に働くとし、 $\phi_{ij,1}$ がレイノルズ応力そのものの非等方性の緩和作用、 $\phi_{ij,2}$ が応力生産項の緩和作用、 $\phi_{ij,3}$ が浮力生産項の緩和作用と解釈する。

それぞれの項と、それらが等方性乱流の場合に取るべき値は表 2-1 のようにまとめられる。

表 2-1 レイノルズ応力、生産項と等方性乱流の場合の値

項	等方性乱流の場合
レイノルズ応力	$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} \delta_{ij} k$
応力生産項	$P_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} P_k$
浮力生産項	$G_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} G_k$

Launder (1975 a) に従いこれらの 3 成分が、-(各項-各項が等方性乱流でとるべき値) に実験定数をかけた形にまとめられると仮定し、乱れの時間スケール $\frac{k}{\epsilon}$ を用いれば、次のモデル式を得る。

$$\pi_{ij} = \frac{p}{\rho_0} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] = -C_1 \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) \dots \phi_{ij,1} + \phi_{ji,1} - C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_k \right) \dots \phi_{ij,2} + \phi_{ji,2} - C_3 \left(G_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} G_k \right) \dots \phi_{ij,3} + \phi_{ji,3} \quad (2.22)$$

同様のモデルを以下の温度フラックス方程式の圧力-温度変動相関項にも適用する。

$$\frac{\overline{p \frac{\partial \theta}{\partial x_i}}}{\rho_0} = \pi_{i\theta} \quad (2.23)$$

式 2. 21 に対応する厳密式は、同様な手順で以下のように表される。

$$\pi_{i\theta} = \frac{\overline{p \frac{\partial \theta}{\partial x_i}}}{\rho_0} = \frac{1}{4\pi} \int_V \left[\left(\frac{\partial^2 u_i u_m}{\partial x_i \partial x_m} \right)' \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + 2 \left(\frac{\partial^2 U_i u_m}{\partial x_i \partial x_m} \right)' \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \beta \left(\frac{\partial g_i \theta}{\partial x_i} \right)' \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right] \frac{dV(\vec{x}_i)}{|\vec{x}_i - \vec{x}|} \quad (2.24)$$

$\phi_{i\theta,1}$ $\phi_{i\theta,2}$ $\phi_{i\theta,3}$

各項の意味は、 $\phi_{i\theta,1}$: 変動速度、変動温度の相互作用、 $\phi_{i\theta,2}$: 変動速度、変動温度、平均速度勾配の相互作用、 $\phi_{i\theta,3}$: 変動温度、浮力の相互作用となる。これらは、等方性乱流の場合は全て 0 となることから、そのモデル式は以下となる。

$$\pi_{i\theta} = \frac{\overline{p \frac{\partial \theta}{\partial x_i}}}{\rho_0} = -C_{1\theta} \frac{\epsilon}{k} \overline{u_i \theta} \dots \phi_{i\theta,1} + C_{2\theta} \overline{u_i \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \dots \phi_{i\theta,2} + C_{3\theta} \beta g_i \overline{\theta^2} \dots \phi_{i\theta,3} \quad (2.25)$$

なお、 $\phi_{i\theta,2}$ 項に式 1. 49③ 項の内の平均温度勾配による生産を含めないのは、式 2. 24 の厳密式中に平均温度勾配に関連する項が含まれないためである。

2. 4 拡散的輸送

2 次モーメント方程式の中でモデル化を要する他の項としては、変動量の 3 次モーメントによる空間分配項がある。これらは通常は乱流拡散項と解釈され、平均値の空間勾配によって近似(勾配拡散近似)されることになる。なお BVM 系のモデルでは 2 次モーメントそのものに勾配拡散近似が用いられる。

まず平均量 Φ の変動分を ϕ としたときに、 $\overline{u_i \phi}$ は第 1 次近似として Φ の空間に関する 1 階微分の線形結合で表されると仮定すれば、

$$\overline{u_i \phi} = -K_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \quad (2.26)$$

この場合2階テンソル K_{ij} は、空間の拡散性状を表し、要素の次元は(速度)×(長さ)である。なお、分子拡散における対応する拡散テンソルは $K_{ij} = \delta_{ij} K$ なる等方テンソルの形に書き、スカラー K は流体が気体の場合、音速に平均自由行路を掛けたものに相当する。

このことからの類推で、乱流拡散テンソルの要素としては、変動速度スケールに乱れの長さスケールを掛けたものにとることは自然であろう。

モーニン、ヤグロム(1975)は、速度スケールを一定で乱流エネルギーの平方根(\sqrt{k})に等しいとおき、拡散の非等方性を長さスケール l_{ij} で表す以下の方法を提案した。

$$K_{ij} = C\sqrt{k} \cdot l_{ij} \quad (2.27)$$

一方、Daly, Harlow(1970)により提案されたGGDH(Generalized Gradient Diffusion Hypothesis: 一般化勾配拡散仮説)と呼ばれるモデルでは、時間スケール $\frac{k}{\epsilon}$ を一定とおく方法であり、以下ではこのモデルの物理的解釈を試みる。

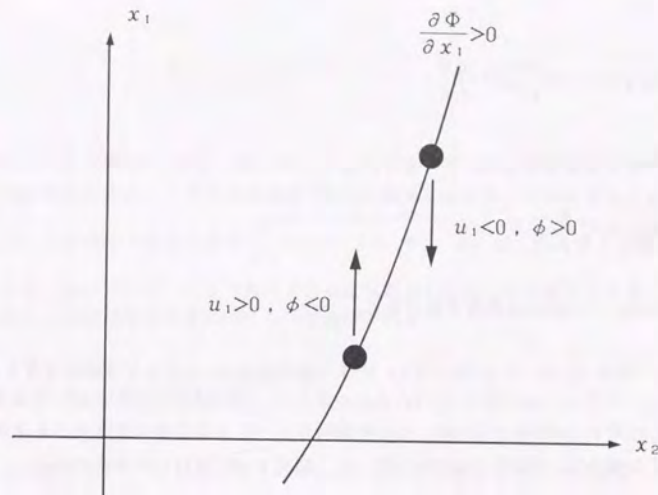
まず、式2.26を行列型で示せば以下となる。

$$\begin{bmatrix} \overline{u_1 \phi} \\ \overline{u_2 \phi} \\ \overline{u_3 \phi} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

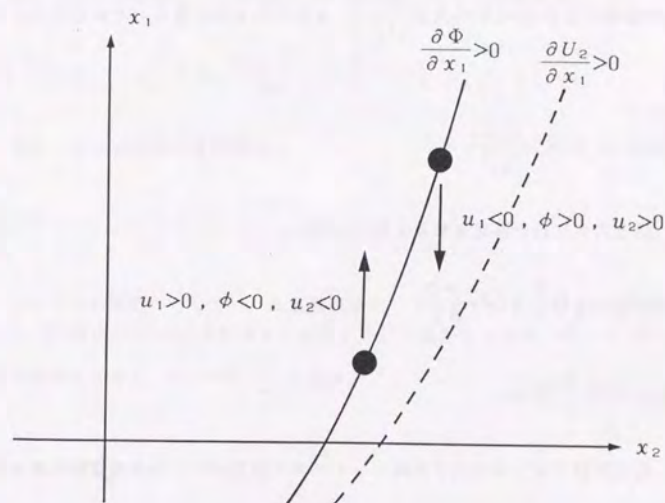
図2-2(a)に示すように、 $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$ を除いて空間勾配が0とおき、 $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} > 0$ なる条件では、 K_{i1} ($i=1,2,3$)のみが要素として陽に現れる。

このとき $\overline{u_1 \phi}$ は x_1 方向の Φ の空間微分と結ばれているが、 $u_1 > 0$ の時は Φ が小なる領域から大なる領域への移動を意味するため、平均的には $\phi < 0$ となり、逆に $u_1 < 0$ の時は、 $\phi > 0$ となる。従って $\overline{u_1 \phi} < 0$ となるので $K_{11} > 0$ となるはずである。

K_{11} は x_1 方向の変動速度が大きいほど、また移動距離が大きいほど大きな値を取ると考えられるので、変動速度、移動距離をそれぞれ $\sqrt{u_1^2}$ 、 $\frac{k}{\epsilon} \sqrt{u_1^2}$ で見積もることが可能と仮定する。従って、



(a) K_{11}



(b) K_{21}

図2-2 GGDHの物理的解釈

$$\overline{u_1 \phi} = -C \frac{k}{\epsilon} \overline{u_1^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \quad (2.29)$$

または,

$$K_{11} = C \frac{k}{\epsilon} \overline{u_1^2} \quad (2.30)$$

と表される。ここにCは実験定数である。

次に、 $\overline{u_2 \phi}$ については $\partial \Phi / \partial x_2 = 0$ であるから u_2 による直接輸送を考えることはできない。そこで、仮に図2-2(b)に示すように、 $\partial U_2 / \partial x_1 > 0$ とおいてみると、 $u_1 > 0$ では同じく $\phi < 0$ となるが、この時同時に $u_2 < 0$ となる点に注意すべきである。同様に $u_1 < 0$ の場合は、 $\phi > 0$ 、 $u_2 > 0$ となって、結局 $\overline{u_2 \phi} > 0$ となるだろう。

以上の考え方を一般化すると $\overline{u_2 \phi}$ は、基準化した x_1 方向の乱流フラックス $\frac{\overline{u_1 \phi}}{\sqrt{\overline{u_1^2}}}$ に、 u_1 と完全相関となる u_2 の平均速度 $\frac{\overline{u_1 u_2}}{\sqrt{\overline{u_1^2}}}$ をかけたものに等しいとおくことができる。

従って、

$$\overline{u_2 \phi} = \overline{u_1 \phi} \frac{\overline{u_1 u_2}}{\overline{u_1^2}} \quad (2.31)$$

式2.31と式2.29を連立させると以下を得る。

$$\overline{u_2 \phi} = -C \frac{k}{\epsilon} \overline{u_1 u_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \quad (2.32)$$

$$K_{21} = C \frac{k}{\epsilon} \overline{u_1 u_2} \quad (2.33)$$

結局、乱流拡散テンソルは以下の様にレイノルズ応力テンソルと相似形で表される。

$$K_{ji} = K_{ij} = C \frac{k}{\epsilon} \overline{u_i u_j} \quad (2.34)$$

以上のGGDHを式1.43①項中の変動速度の3重相関項に対し適用すれば、

$$\overline{u_i u_j u_l} = -C_s' \frac{k}{\epsilon} \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \quad (2.35)$$

となる。但し、上の式は i と l の添え字入れ換えによって左辺は影響を受けないが、右辺は本質的に形を変える。この矛盾は速度3成分を順番に入れ換えた項の追加によって解消されるが、①項の圧力成分である $\frac{p}{\rho_0} (\delta_{ij} u_i + \delta_{il} u_j)$ は、同じ添え字入れ替えによって形を変える。従って式2.35は圧力項を含めた拡散項の近似式とも解釈できる。

同様に式1.49①項中の3重相関について適用すれば、

$$\overline{u_i u_l \theta} = -C_s \frac{k}{\epsilon} \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{u_l \theta}}{\partial x_k} \quad (2.36)$$

となる。この場合も i 、 l の添え字入れ替えて右辺の形は変わるが、圧力成分 $\frac{p}{\rho_0} \delta_{il} \theta$ は、同じ入れ替えによって影響されないため、一般にはこの問題を解消する目的で以下のように1項追加し、圧力項を含めた近似式として使用される。

$$\overline{u_i u_l \theta} = -C_s \frac{k}{\epsilon} \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{u_l \theta}}{\partial x_k} - C_s \frac{k}{\epsilon} \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{u_l \theta}}{\partial x_k} \quad (2.37)$$

また、式1.50の①項の3重相関項は、

$$\overline{u_i \theta^2} = -C_{\theta^2} \frac{k}{\epsilon} \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_k} \quad (2.38)$$

さて、GGDHの簡略判としては、乱流拡散テンソルとして分子拡散と同様の等方テンソル $K_{ij} = \delta_{ij} K$ を用いることが考えられる。両辺の縮役をとれば、 $K_{ii} = 3K$ となるが、式2.34も縮役をとると、 $K_{ii} = 2C \frac{k^2}{\epsilon}$ となり、

$$K_{ij} = C' \frac{k^2}{\epsilon} \delta_{ij} \quad (2.39)$$

と表される。この方法とGGDHを用いた場合の乱流エネルギー方程式1.44の圧力を含む拡散項に適用すれば以下のように表される。

$$\frac{1}{2} \overline{u_i u_i u_i} + \frac{p}{\rho_0} u_i = -C' \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_i} \quad (\text{等方拡散})$$

$$= -C_S \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_i u_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \quad (\text{GGDH}) \quad (2.40)$$

2. 5 散逸方程式のモデリング

k の散逸項 $e = \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$, 及び $\overline{\theta^2}$ の散逸項 $e_s = 2a \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_i}$ は未決定のまま残されている。前章の議論から変動渦強度方程式 1. 29 の移流, 拡散及び主要な生産項のみを残し, 2ν を掛けた以下の式を近似前の ε 方程式とする。

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon U_j}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \overline{\omega_i \omega_i u_j} - \nu \frac{\partial}{\partial x_i} (\nu \overline{\omega_i \omega_i}) \right]$$

$$+ 2\nu \overline{\omega_i \omega_j s_{ij}} \quad (\equiv P_\varepsilon)$$

$$- 2\nu^2 \frac{\partial \overline{\omega_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{\omega_i}}{\partial x_j} \quad (\equiv -\varepsilon_\varepsilon) \quad (2.41)$$

左辺についてはモデル化を要せず, 右辺第 1 項の拡散項について, 前節のモデルを使用するとすれば, モデル化を要するのは右辺第 2 項の生産項と第 3 項の消散項である。

これらの項は変動速度の歪スケール λ に関連しているが, ε そのものはレイノルズ数が大きい条件では, 例えば式 1. 19 のように大スケールの変動によって受動的に自己を調節する機構との解釈が成立することから, モデル方程式には λ や ν を含めないことが考えられる。モデル化の指針を得るため, 乱れの波数領域における相似性の仮定から得られる ε 方程式散逸項の大局的なモデル化について触れる。

検討の対象には風洞格子乱流を取り上げる。この種の流れでは乱流エネルギー方程式 1. 44 の空間分配項, 応力生産項は無視でき, 主流方向の移流による輸送項と散逸項がバランスすることになる。

$$U \frac{\partial k}{\partial x} = -\varepsilon \quad (2.42)$$

ここに, U : 主流速度, x : 主流方向の座標を意味する。

乱流エネルギーは様々な波数(または長さスケール)の変動の持つエネルギーの総和であり, そのパワースペクトルとしては, 図 2-3 に示す以下のモデルの成立を仮定する。

$$\kappa < \kappa_m \quad E(\kappa) = A\kappa^5$$

$$\kappa \geq \kappa_m \quad E(\kappa) = K_0 \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} \quad (2.43)$$

式 2. 43 の後半はコロモゴロフの $-5/3$ 乗スペクトル法則そのものであり, エネルギー散逸領域が乱流エネルギーのレベルに与える影響は小さいとして無視している。式 2. 43 より, 乱流エネルギー k は以下となる。

$$k = \int_0^\infty E(\kappa) d\kappa = \int_0^{\kappa_m} A\kappa^5 d\kappa + \int_{\kappa_m}^\infty K_0 \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} d\kappa$$

$$= \frac{3S+5}{2(S+1)} K_0 \frac{3(S+1)}{3S+5} A \frac{2}{3S+5} \varepsilon \frac{2(S+1)}{3S+5} \quad (2.44)$$

式 2. 44 の導出過程では, 式 2. 43 の交点 (κ_m) でパワースペクトルが同じ値をとることを用いている。格子乱流では k が流れの下流に向かって単調に減少するが, これは ε による高波数領域の選択的散逸によるものとし, 低波数におけるパワースペクトルの形状を不変とおくのは合理的な仮定であろう。

即ち, 高波数領域におけるパワーの減衰は式 2. 43 の ε のみによって生じ, 低波数領域におけるパワーは κ_m が低波数側にずれていく(長さスケールが下流に向かって増加することによって説明される)とする。

以上より, 式 2. 44 では ε のみが x に関連する変数となり, これを直接式 2. 42 に代入して変形すれば, 以下の式を得る。

$$U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = - \frac{3S+5}{2(S+1)} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (2.45)$$

式 2. 45 は ε の移流による輸送項は散逸項とバランスすることを意味しており, 右辺のオーダーは ν^4/l^2 となる。

一方, 1. 3 の議論から式 2. 41 の散逸項のオーダーは $\nu^4/l^2 \cdot l/\lambda$ となるが, 式 2. 41 の生産項は平均流の歪と直接関連のないことに注意すれば, 応力生産のない今回の条件にあっては 0 となる必要はない。従って, 式 2. 45 の散逸項は乱流エネルギーの応力生産がない条件における式 2. 41 の $(P_\varepsilon - \varepsilon_\varepsilon)$ のモデル式と解釈される。

次に乱流エネルギーの応力生産がある条件の流れでは, 必ず散逸を伴うので生産項単独の効果を分離して議論することはできない。そこで最も簡単なモデルとしては, 式 2. 45 からの類推から以下のおくことが考えられる。

$$P_\varepsilon - \varepsilon_\varepsilon = C \frac{\varepsilon}{k} (P_k - \varepsilon) \quad (2.46)$$

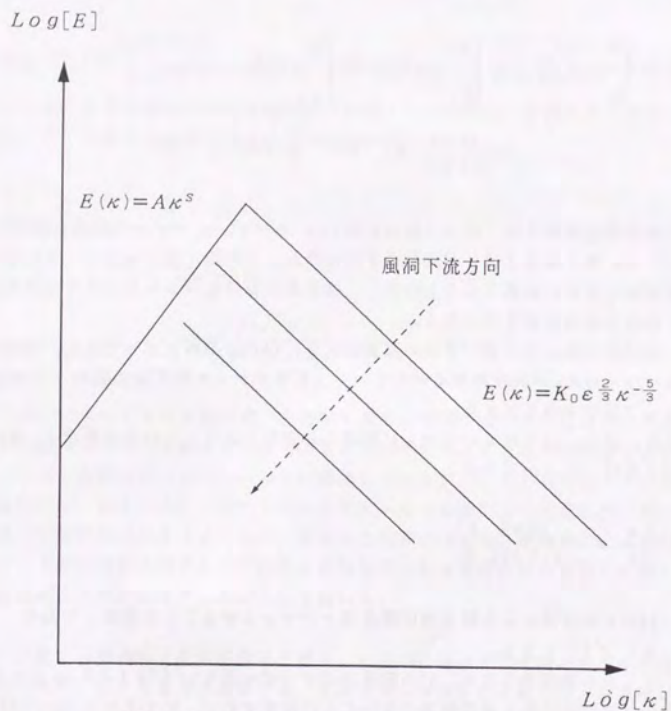


図2-3 エネルギースペクトルの仮定

この方法の明白な欠点は式1.19の壁乱流等におけるエネルギー平衡の成立する流れへの適用の場合に生じる。

壁乱流では平均流による輸送項は無視できるため、乱流変動による空間分配項と生産、散逸項のみが重要となり、(生産項) - (消散項) = 0 の場合は、空間分配項 = 0 が必要となる。

従って、変数が空間で一定値をとることが要請され、実際乱流エネルギーは境界層中で一定となることが知られている。

しかし、 ϵ は第III編で述べるように、壁からの距離が小さくなるにつれて漸近的に無限大となる。従って、正しい ϵ の分布を与えるためには $P_k - \epsilon = 0$ の場合に $P_\epsilon - \epsilon_\epsilon < 0$ となる必要がある。

そこで、式2.46で P_k と ϵ に異なる重み付けを行うDavidov (1961) 以来の現象論的モデルが一般に用いられることになる。

$$P_\epsilon - \epsilon_\epsilon = C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} P_k - C_{2\epsilon} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (2.47)$$

但し、 $C_{1\epsilon} < C_{2\epsilon}$ であり、両実験定数はこのモデルが実験結果とよく合うように調整される。

最後に、 ϵ_s についても、同様のモデル化された輸送方程式を用いる手法はあるが、Launder (1975 a) は、分子運動による温度変動強度の散逸は、速度変動による散逸(即ち ϵ) との関連が強いことを仮定し、以下の式を用いることを提案している。

$$\epsilon_s = \frac{1}{R} \frac{\overline{\theta^2}}{k} \epsilon \quad (2.48)$$

ここに、R は実験定数である。

2. 6 DSMとASMの基礎方程式

以上のモデル化により、一応変動量の2次モーメント方程式は閉じた系となる。DSMの基礎方程式は以下となる。

●レイノルズ応力

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i u_j U_l}}{\partial x_l} = & - \frac{\partial}{\partial x_l} \left[-C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right] \\ & - C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) \\ & + (1-C_2) P_{ij} + \frac{2}{3} C_2 \delta_{ij} P_k + (1-C_3) G_{ij} + \frac{2}{3} C_3 \delta_{ij} G_k \\ & - \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \end{aligned} \quad (2.49)$$

●乱流温度フラックス

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i \theta}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i \theta U_j}}{\partial x_j} = & - \frac{\partial}{\partial x_l} \left[-C_\theta \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{u_i \theta}}{\partial x_k} - C_\theta \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{u_l \theta}}{\partial x_k} \right] \\ & - C_{1\theta} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i \theta} \\ & - (1-C_{2\theta}) \overline{u_i \theta} \frac{\partial U_l}{\partial x_l} - \overline{u_i u_l} \frac{\partial \theta}{\partial x_l} - (1-C_{3\theta}) \beta g_i \overline{\theta^2} \end{aligned} \quad (2.50)$$

●温度変動強度

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\theta^2 U_j}}{\partial x_j} = & - \frac{\partial}{\partial x_l} \left[-C_\theta \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_k} \right] \\ & - 2 \overline{u_i \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \frac{1}{R} \frac{\overline{\theta^2}}{k} \varepsilon \end{aligned} \quad (2.51)$$

●乱流エネルギー散逸

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon U_j}{\partial x_j} = & - \frac{\partial}{\partial x_l} \left[-C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_i u_k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right] \\ & + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} + C_{3\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} G_k \end{aligned} \quad (2.52)$$

但し、分子拡散による空間分配項は省略した。

DSMは以上の11個のモデル方程式から成るが、その簡略版として2次モーメント方程式の平均流による輸送と乱流変動による空間分配項を生産、散逸項によって代数的に表すASMがRodi (1980) によって提案された。

まず、レイノルズ応力のモデル方程式2.49で定常状態を仮定し、右辺第1項の空間分配項を左辺に移行し、新たに以下の記号で書くことにする。

$$T_{ij}(\overline{u_i u_j}) = \frac{\partial \overline{u_i u_j U_l}}{\partial x_l} + \frac{\partial}{\partial x_l} \left[-C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right] \quad (2.53)$$

この時、式2.53の縮約をとれば、式2.49を参照して明らかに、

$$T_{ii}(\overline{u_i u_j}) = 2(P_k + G_k - \varepsilon) \quad (2.54)$$

となって、 T_{ij} の対角成分のトレースは乱流エネルギーの生産、散逸成分の総合計となる。

ここで、式2.54の右辺は各項の絶対値に比べて十分小さいこと（即ち局所的なエネルギー平衡状態から大きな逸脱はないこと）、レイノルズ応力の輸送は、応力の大きさに案分されることを仮定し、

$$T_{ij}(\overline{u_i u_j}) = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} (P_k + G_k - \varepsilon) \quad (2.55)$$

で表されるとする。

式2.55を仮定すれば、レイノルズ応力は乱流エネルギーの生産、散逸成分を既知として、以下のような代数的関係式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\overline{u_i u_j}}{k} (P_k + G_k - \varepsilon) = & - C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) \\ & + (1-C_2) P_{ij} + \frac{2}{3} C_2 \delta_{ij} P_k + (1-C_3) G_{ij} + \frac{2}{3} C_3 \delta_{ij} G_k - \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \end{aligned} \quad (2.56)$$

上式を更に変形すれば、次のようになる。

●レイノルズ応力 (ASM)

$$\overline{u_i u_j} = k \left[\frac{2}{3} \delta_{ij} + \frac{(1-C_2) \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_k \right) + (1-C_3) \left(G_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} G_k \right)}{C_1 \varepsilon + P_k + G_k - \varepsilon} \right] \quad (2.57)$$

次に、乱流温度フラックスの移流、拡散成分を表す式2.58について考える。

$$T_i(\overline{u_i\theta}) = \frac{\partial \overline{u_i\theta} U_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[-C_\theta \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{u_i\theta}}{\partial x_k} - C_\theta \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{u_i\theta}}{\partial x_k} \right] \quad (2.58)$$

この場合は、式2.51の生産、散逸項が速度変動と温度変動に関する成分からなっているために、式2.54のような簡単な関係は成立しない。

そこで、式2.54からの類推で、Gibson, Launder (1976) は乱流エネルギーの生産 $(P_k + G_k - \varepsilon)$ 、温度変動強度の生産 $(P_\theta = -2\overline{u_i\theta} \frac{\partial \Theta}{\partial x_i})$ 、散逸 $(\varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \frac{\overline{\theta^2}}{k} \varepsilon)$ により以下の近似式の成立を仮定した。

$$T_i(\overline{u_i\theta}) = \frac{\overline{u_i\theta}}{\sqrt{k}\sqrt{\overline{\theta^2}}} T(\sqrt{k}\sqrt{\overline{\theta^2}}) = \frac{\overline{u_i\theta}}{2k} (P_k + G_k - \varepsilon) + \frac{\overline{u_i\theta}}{2\overline{\theta^2}} (P_\theta - \varepsilon_\theta) \quad (2.59)$$

これより、乱流温度フラックスの代数表示は以下となる。

$$\begin{aligned} & \frac{\overline{u_i\theta}}{2k} (P_k + G_k - \varepsilon) + \frac{\overline{u_i\theta}}{2\overline{\theta^2}} (P_\theta - \varepsilon_\theta) \\ &= -C_{1\theta} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i\theta} - (1-C_{2\theta}) \overline{u_i\theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} - \overline{u_i u_i} \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} - (1-C_{3\theta}) \beta g_i \overline{\theta^2} \end{aligned} \quad (2.60)$$

更に変形すれば、次のようになる。

●乱流温度フラックス (ASM)

$$\overline{u_i\theta} = k \frac{\left[-\overline{u_i u_i} \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} - (1-C_{2\theta}) \overline{u_i\theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} - (1-C_{3\theta}) \beta g_i \overline{\theta^2} \right]}{C_{1\theta} \varepsilon + \frac{1}{2} (P_k + G_k - \varepsilon) + \frac{k}{2\overline{\theta^2}} (P_\theta - \varepsilon_\theta)} \quad (2.61)$$

残る k , $\overline{\theta^2}$, ε は、以下の微分方程式を解いて求める。

●乱流エネルギー

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k U_j}{\partial x_j} &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[-C_\theta \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_i u_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] \\ &+ P_k + G_k - \varepsilon \end{aligned} \quad (2.62)$$

●温度変動強度

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\theta^2} U_j}{\partial x_j} &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[-C_{\theta^2} \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_k} \right] \\ &+ P_\theta - \varepsilon_\theta \end{aligned} \quad (2.63)$$

●乱流エネルギー散逸

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon U_j}{\partial x_j} &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[-C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_i u_k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right] \\ &+ C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} + C_{3\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} G_k \end{aligned} \quad (2.64)$$

2.7 BVM (k-εモデル) の基礎方程式

ASMの更なる簡略化の方法としては、変動量の2次モーメント間の結合を切ることによって、レイノルズ応力、乱流温度フラックスを陽に計算可能なBVMがある。ここでは、BVMをASMの簡略モデルとして捉え、その説明を試みる。

まず、式2.57, 61において、エネルギー平衡 $(P_k + G_k - \varepsilon = 0, P_\theta - \varepsilon_\theta = 0)$ を仮定すれば、以下となる。

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} \delta_{ij} k + \frac{k}{C_{1\varepsilon}} \left[(1-C_2) \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_k \right) + (1-C_3) \left(G_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} G_k \right) \right] \quad (2.65)$$

$$\overline{u_i\theta} = \frac{k}{C_{1\theta} \varepsilon} \left[-\overline{u_i u_i} \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} - (1-C_{2\theta}) \overline{u_i\theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} - (1-C_{3\theta}) \beta g_i \overline{\theta^2} \right] \quad (2.66)$$

これらは、レイノルズ応力と乱流温度フラックス方程式中の移流、拡散成分を無視したことに相当し、初期のASMとしてHossain, Rodi (1977) が用いたものである。

次に、レイノルズ応力、乱流温度フラックスにおける浮力の直接的影響は小さいとして、両方程式中で浮力の関連した項を全て無視する。

但し、 k , ε 方程式中では浮力の作用は一応生産項の中で評価されるので、間接的な影響は保持される。

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} \delta_{ij} k + \frac{1-C_2}{C_1} \frac{k}{\varepsilon} \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_k \right) \quad (2.67)$$

$$\overline{u_i\theta} = \frac{k}{C_{1\theta} \varepsilon} \left[-\overline{u_i u_i} \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} - (1-C_{2\theta}) \overline{u_i\theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right] \quad (2.68)$$

次に、問題を単純化するために二次元条件とし、式2.67を書き下してみると、

$$\overline{u_1^2} = \frac{2}{3}k + \frac{1-C_2}{C_1} \frac{k}{\varepsilon} \left(P_{11} - \frac{2}{3}P_k \right) \quad (2.69)$$

$$\overline{u_2^2} = \frac{2}{3}k + \frac{1-C_2}{C_1} \frac{k}{\varepsilon} \left(P_{22} - \frac{2}{3}P_k \right) \quad (2.70)$$

$$\overline{u_1 u_2} = \frac{1-C_2}{C_1} \frac{k}{\varepsilon} \left(-\overline{u_1^2} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \overline{u_2^2} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \overline{u_1 u_2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right) \right) \quad (2.71)$$

となる。

予測対象とする流れに卓越風向の存在を仮定し、適当な座標変換によって x_1 軸をその方向に、 x_2 を直交方向に一致させたとする。この条件では乱流エネルギーの応力生産は1.4で述べたように P_{11} に集中するので、 $P_{11}=2P_k$ 、 $P_{22}=0$ となり、これらを代入すれば、

$$\overline{u_1^2} = \frac{2}{3}k + \frac{1-C_2}{C_1} \frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{4}{3}P_k \right) \quad (2.72)$$

$$\overline{u_2^2} = \frac{2}{3}k + \frac{1-C_2}{C_1} \frac{k}{\varepsilon} \left(-\frac{2}{3}P_k \right) \quad (2.73)$$

$$\overline{u_1 u_2} = \frac{1-C_2}{C_1} \frac{k}{\varepsilon} \left(-\overline{u_1^2} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \overline{u_2^2} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) \quad (2.74)$$

更に、エネルギー平衡条件($P_k=\varepsilon$)を用い、 $\omega = \frac{1-C_2}{C_1}$ なる記号の書換えを行えば、

$$\overline{u_1^2} = k \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\omega \right) \quad (2.75)$$

$$\overline{u_2^2} = k \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\omega \right) \quad (2.76)$$

$$\overline{u_1 u_2} = -\omega \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\omega \right) \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\omega \right) \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) \quad (2.77)$$

となってレイノルズ応力間のリンケージは解消される。

なお式2.77では $\partial U_1 / \partial x_2$ を含む項が卓越するので式2.78として良い。

$$\overline{u_1 u_2} = -C_D \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial U_1}{\partial x_2}, \quad C_D = \frac{2}{3}\omega(1-\omega) \quad (2.78)$$

平均流の構造に支配的なレイノルズ応力の成分は主流方向と主流方向に直交する方向の変動速度間の相関であり、法線応力の寄与は小さい場合が多い。そこで、式2.78の表現を優先し、座標変換に関して普遍的な一般化を行うと、BVMで用いられるレイノルズ応力

テンソルの近似式が得られる。

●レイノルズ応力(BVM)

$$-\overline{u_i u_j} = -\frac{2}{3}\delta_{ij}k + \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.79)$$

$\nu_t = C_D \frac{k^2}{\varepsilon}$ は層流における動粘性係数と同等の作用を与えることから(但し、空間的な分布は許容される)、渦動粘性係数とよばれる。右辺第1項は両辺の縮約を取った際の矛盾を回避するための追加項であるが、元々の式2.65と比較すると、法線応力の計算の際には主要項が省略されているため、法線応力の計算精度は高くない。

乱流温度フラックスについても二次元条件を仮定し、式2.68を書き下せば、

$$\overline{u_1 \theta} = \frac{k}{C_{1\theta} \varepsilon} \left[-\overline{u_1^2} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} - \overline{u_1 u_2} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} - (1-C_{2\theta}) \left(\overline{u_1 \theta} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \overline{u_2 \theta} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) \right] \quad (2.80)$$

$$\overline{u_2 \theta} = \frac{k}{C_{1\theta} \varepsilon} \left[-\overline{u_2^2} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} - \overline{u_1 u_2} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} - (1-C_{2\theta}) \left(\overline{u_1 \theta} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \overline{u_2 \theta} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right) \right] \quad (2.81)$$

となる。先と同様、 x_1 軸を卓越風向とすれば、 $U_1 \gg U_2$ 、 $\partial / \partial x_2 \gg \partial / \partial x_1$ となる。

また $\overline{u_2 \theta}$ の近似精度が平均温度分布の決定に支配的であることから、式2.81の主要項のみを残すと、

$$\overline{u_2 \theta} = \frac{k}{C_{1\theta} \varepsilon} \left[-\overline{u_2^2} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right]$$

これに、式2.76を代入すれば、

$$\overline{u_2 \theta} = -\frac{2}{3} \frac{1-\omega}{C_{1\theta}} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = -\frac{C_D}{C_{1\theta} \omega} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \quad (2.82)$$

となる。これを一般化するとBVMにおける乱流温度フラックスの近似式が得られる。

●乱流温度フラックス(BVM)

$$\overline{u_i \theta} = -\frac{\nu_t}{\sigma_\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i}, \quad \sigma_\theta = C_{1\theta} \omega \quad (2.83)$$

式2.83は、先と同様主流と法線方向の乱流温度フラックスの近似精度は接線方向に比

べて低いと推定される。

以上より、レイノルズ応力、乱流温度フラックスを陽な形で記述できたが、残る k 、 ε 方程式は、近似精度のバランスから考えて GGDH を用いず、等方拡散場を仮定し、以下とする。

●乱流エネルギー

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k U_j}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k + G_k - \varepsilon \quad (2.84)$$

●乱流エネルギー散逸

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon U_j}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} + C_{3\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} G_k \quad (2.85)$$

ここに、 $\sigma_k = \omega / C_\sigma$ 、 $\sigma_\varepsilon = \omega / C_\varepsilon$ である。

$k - \varepsilon$ モデルの計算定数は DSM の計算定数と関連が深いが、 $k - \varepsilon$ モデルを単独で用いた場合に基礎的な実験データをよく説明する値が選ばれている。

ε 方程式中の $C_{2\varepsilon}$ は風洞格子乱流の場合の式 2.45 が用いられ、 k の減衰率の測定結果から 1.8~2.0 の範囲とされる。

C_D は、エネルギー平衡の成立する乱流境界層では、式 2.84 が $C_D = (\overline{u_1 u_2} / k)^2$ と簡略化され、実験結果 $\overline{u_1 u_2} / k \sim 0.3$ より決定される。

同じく乱流境界層に式 2.85 を適用すれば、 $C_{1\varepsilon} = C_{2\varepsilon} - \frac{\kappa^2}{\sigma_\varepsilon C_D^{1/2}}$ 、 κ : カルマン定数 ~ 0.4 となるので、 σ_ε が決まれば、 $C_{1\varepsilon}$ は決定される。

σ_k 、 σ_ε は 1 に近い値と仮定され、計算による最適化によって調整された。

Launder, Spalding (1974)、Rodi (1980) による $C_{3\varepsilon}$ を除く推奨値を表 2.1 上段に、Hossain, Rodi (1982) の採用した DSM の計算定数を用いて、対応する値を求めた結果を下段に示す。

表 2.1 $k - \varepsilon$ モデルの計算定数

	C_D	$C_{1\varepsilon}$	$C_{2\varepsilon}$	σ_k	σ_ε	σ_θ
Launder et al.	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3	0.5-0.9
based on DSM	0.108	"	"	0.85	1.35	0.61

2.8 各モデルの特性

DSM は、レイノルズ方程式について 6 個、乱流温度フラックスについて 3 個、及び温度変動強度、乱流エネルギー散逸方程式の計 11 個のモデル方程式、14 個の実験定数から成る非常に複雑な非線形偏微分方程式より構成される。

DSM では、解くべき方程式の数が多いこと、解の存在や一意性などの数学的性質は不明であること、解があるにしてもそれが物理的に実現しうるものであることの保証がないこと（例えば負の乱流エネルギー等）、既往の移流-拡散方程式の数値計算手法がそのまま適用できないこと、等の問題点があって現状では必ずしも適用例は多くはなく、適用例も実用計算を想定したものは未だ現れていない。

従って、現在 DSM はテスト段階にあるといえるが、これらの障害は相当程度計算技術の範疇に属する問題であるので、これらがクリアできれば実用問題への適用も将来的に可能となることが期待される。

一方 ASM は変動量の 2 次モーメントを代数表示することによって、解くべき方程式数の圧縮を計ったものであるが、DSM と同様乱流の非等方性が表現可能である。また、元々の DSM に比べてかなり計算負荷が小さいことが期待されるが、式 2.57、61 の解を求めることは必ずしも容易ではなく、負のエネルギー発生等の懸念は DSM と同様である。

現状では村上、加藤ら (1990)、加藤、村上ら (1991) により、室内気流予測に ASM の適用が着手された段階にあり、ほぼ予想どおりの成果を上げつつあるといえる。

今後、一層の計算の安定化方法、高速解法の開発などが期待される。

$k - \varepsilon$ モデルは 2.4 で述べた勾配拡散輸送モデル中で最も簡単な等方拡散モデルを 2 次モーメントの近似に採用したことに相当するが、2.7 で述べたように主流と法線、接線方向間のレイノルズ応力や接線方向のフラックス等、平均流の構造に支配的影響を与える変動相関成分の近似精度はかなり高く、例えば等温の平面噴流や境界層流れ等では、壁効果を別として ASM とほぼ同一の解を与えることが知られている。

また、建築に限らず工学分野全般で幅広い実験的検証が進められており、また安定性がよく、計算量の少ない優れた解法がいくつか提案されている。従って、 $k - \varepsilon$ モデルは実用問題には今後とも幅広く使用されることになる。

第3章 差分法による数値解法

3.1 偏微分方程式の数値解法

前章までに示した方程式の解は解析的に求めることはできないので、数値計算法による近似解を求めることになる。流れの計算法は大きく分けて有限要素法 (FEM: Finite Element Method) と有限差分法 (FDM: Finite Difference Method) に分類される。

FEMでは、計算対象領域を三角要素、四角要素等によって分割し、個々の要素接点間をつなぐ近似関数によって決定される要素マトリクスを寄せ集め、全体マトリクスを作成し、そのマトリクスの解から各要素接点の値を求めるものである。

要素の空間配置が柔軟に行えるため、複雑な形状への適合性や、計算node点の密度の制御などが容易に行える長所がある反面、キングサイズのマトリクスを解かなければならないこと、要素の空間配置に規則性がないために高速計算機の性能を引き出しにくい等の欠点を併せ持っている。

建築分野では平岡 (1982, 1983, 1984), 石田 (1982, 1983, 1984), 内海ら (1982, 1983, 1984), 松本ら (1984) により一時盛んに研究がなされていたが、その後数年間の中断の後、最近になって田中ら (1990), 齊藤, 大柿ら (1990a, b) によるGSMA C法の適用例が再び発表されている。

現状で境界適合性の最も優れた解法であることから、計算法の高速化等、今後の発展が期待される。

FDMは基本的には、計算予測空間を規則的な直交格子で分割し、各計算格子点での微分を隣接する格子点間の差分に置き換えて近似し、数値解を得るものである。

規則正しい格子配置を用いるため、曲面等の複雑な境界への適合は困難であり、予測領域の計算分解能を部分的に調整することは難しい。その反面規則的な格子構造は、計算機の配列構造や繰り返し演算との相性がよく、高速計算機の性能が容易に引き出せる。

この高速性能によって、これまで一般に計算負荷の大きい乱流計算法の多くはFDMによって開発が進められてきたが、実用的に使える見通しが立ちつつある現状では、規則的な格子配置による適用範囲の制約が問題となり始めている。村上, 加藤, 石田 (1988a, b, 1989, 1990b) によるノーマル・グリッド一般曲線座標系による複雑な建築空間への適合格子の生成と気流予測は、FDMの高速解法としての長所を損なうことなく、FEMの有する境界適合性の特徴を取り入れようとする試みである。また、原子力の分野では越塚 (1990) により、スタガード・グリッドを用いた類似の提案がなされており、これらによって膜構造、大空間建築に見られる不整形な空間への気流計算法の適用が期待されている。

本章では、ローチェ (1978), Peyret, Taylor (1983), Anderson, Tannehill, Pletcher (1984) を参考とした。なお、差分法で数値解法を使用する場合については、Patankar (1980), 有限要素法については矢川 (1983), Baker (1983) を参照されたい。

本論文ではFDMを解法として用いるが、FDMによる流れの数値解法といっても極めて広範である。そこで、次節以降ではこれまで筆者が親しんでおり、また本論文での計算に実際に用いた解法と、FDMでしばしば問題となる移流項の差分近似手法を中心とした解説を行う。他の方法については前ページ脚注の文献等を参照されたい。

3.2 差分近似式の作成法

差分近似式の作成法の代表的な方法としては、Taylor級数による方法、多項式近似による方法、有限体積法 (コントロール・ボリューム法) 等がある。

以下の二次元ラプラス方程式を例に差分方程式の作成法を示す。

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.1)$$

(1) Taylor級数による方法

図3-1に示す二次元セルの中央格子点での解を求めるものとする。x方向、y方向の分割を、それぞれ Δx , Δy とおき、格子点の位置を $\Phi_{i,j}$ と表す。

このとき、 $\Phi_{i+1,j}$, $\Phi_{i-1,j}$ を (i,j) 点回りにTaylor級数展開すれば、

$$\Phi_{i+1,j} = \Phi_{i,j} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \Delta x^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} \Delta x^4 + O(\Delta x^5) \quad (3.2)$$

$$\Phi_{i-1,j} = \Phi_{i,j} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \Delta x^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \Delta x^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} \Delta x^4 + O(\Delta x^5) \quad (3.3)$$

ここに式3.2の $O(\Delta x^5)$ は、省略した項の中で最低次のものが $\frac{1}{5!} \frac{\partial^5 \Phi}{\partial x^5} \Delta x^5$ となっており、 Δx^5 に比例する主要な誤差を含むことを意味する。

(式3.2) + (式3.3)を Δx^2 で割って変形すれば、以下の式を得る。

$$\frac{\partial^2 \Phi_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{\Delta x^2} - \frac{1}{12} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} \Delta x^2 + O(\Delta x^4) \quad (3.4)$$

式3.4は右辺第1項が左辺に対し Δx^2 に比例する主要誤差を含む近似表現になっている。このことを右辺第1項は左辺偏微分の2次精度の差分近似式という。

yについても同様のTaylor展開によってy方向偏微分を差分表示し、足しあわせると、

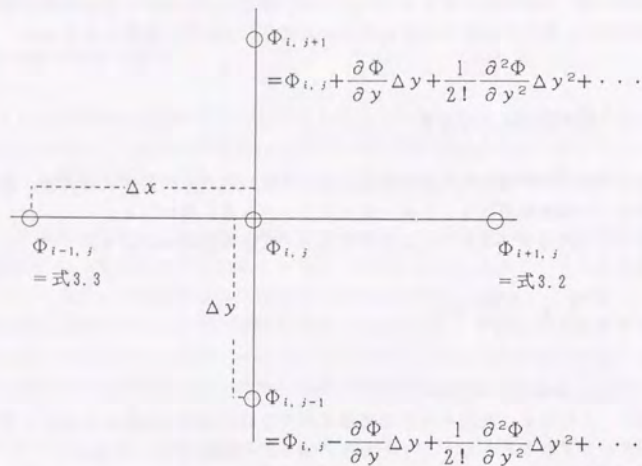


図3-1 Taylor級数による方法

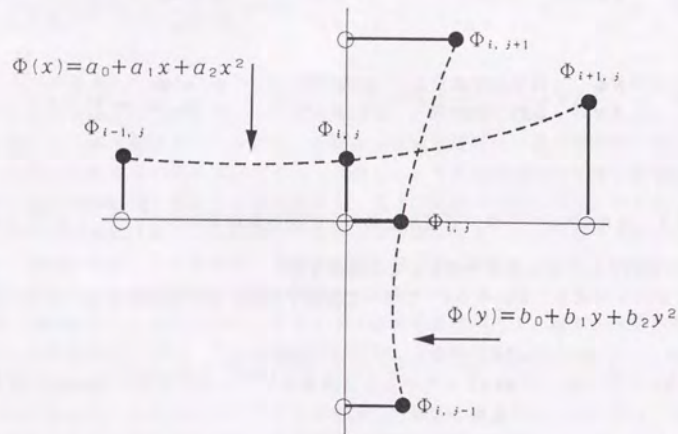


図3-2 多項式近似による方法

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} + O(\Delta x^2, \Delta y^2) \quad (3.5)$$

となってラプラス方程式の2次精度差分近似式が得られる。

(2) 多項式近似による方法

図3-2に示すように、 $\Phi_{i,j}$ を座標原点とする局所座標系を考え、x軸方向の Φ の空間変化を2次多項式によってあてはめることを考える。

$$\Phi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (3.6)$$

$\Phi_{i+1,j}$, $\Phi_{i,j}$, $\Phi_{i-1,j}$ を用いて式3.6にあてはめ、係数を求めると、

$$a_0 = \Phi_{i,j}, \quad a_1 = \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}}{2\Delta x}, \quad a_2 = \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{2\Delta x^2} \quad (3.7)$$

一方、式3.6を直接式3.1に入れて微分を実行すれば、

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (a_0 + a_1x + a_2x^2) = 2a_2 = \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad (3.8)$$

となり、y方向も同様の操作を行えば以下となる。

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} \quad (3.9)$$

結局、式3.5と同じ結果が得られる。

(3) 有限体積法

多くの教科書では有限体積法と積分法を区別しているが、ここでは両者を一括使用して差分式を求める方法を考える。まず先と同様の局所座標系を用い、二次元ラプラス方程式を、図3-3の $\Phi_{i,j}$ を取り囲むセル(コントロールボリューム:有限体積等、様々に呼ばれる)について積分する。

$$\int_{-\Delta y/2}^{+\Delta y/2} \int_{-\Delta x/2}^{+\Delta x/2} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] dx dy = \int_{-\Delta y/2}^{+\Delta y/2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{+\Delta x/2} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{-\Delta x/2} \right] dy + \int_{-\Delta x/2}^{+\Delta x/2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{+\Delta y/2} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{-\Delta y/2} \right] dx \quad (3.10)$$

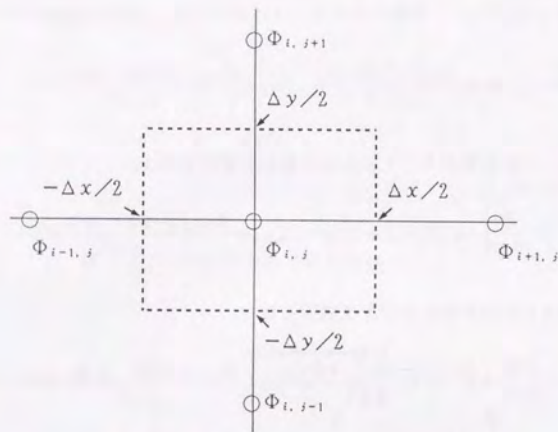


図 3-3 有限体積法 (コントロールボリューム法)

式 3. 10 の変形を進めるには、有限体積表面で表面と法線方向微分の分布に関する仮定が必要となるが、ここでは表面で一様分布とすれば、

$$\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{+\Delta x/2} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{-\Delta x/2} \right] \Delta y + \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{+\Delta y/2} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{-\Delta y/2} \right] \Delta x \quad (3.11)$$

となる。直感的な把握を容易にするため、式 3. 11 を熱伝導方程式と読み換えれば、これは $\Phi_{i,j}$ を取り囲む有限体積の

$$\begin{aligned} & - \left(x = -\frac{\Delta x}{2} \text{ から入る熱フラックス} \right) + \left(x = +\frac{\Delta x}{2} \text{ から出る熱フラックス} \right) \\ & - \left(y = -\frac{\Delta y}{2} \text{ から入る熱フラックス} \right) + \left(y = +\frac{\Delta y}{2} \text{ から出る熱フラックス} \right) \end{aligned}$$

となって、正味有限体積中に残る熱量に -1 をかけた結果を与えることになる。

式 3. 11 の空間微分を差分に置き換えるため、例えば $\Phi_{i,j}$ 、 $\Phi_{i+1,j}$ 間で直線分布を仮定すれば、

$$\left[\frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}}{\Delta x} - \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i-1,j}}{\Delta x} \right] \Delta y + \left[\frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j}}{\Delta y} - \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i,j-1}}{\Delta y} \right] \Delta x \quad (3.12)$$

となり、更に変形すれば以下となる。

$$\left[\frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right] \Delta x \Delta y + \left[\frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right] \Delta x \Delta y \quad (3.12)$$

結局以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{-\Delta y/2}^{+\Delta y/2} \int_{-\Delta x/2}^{+\Delta x/2} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] dx dy = \\ & \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

式 3. 13 では、ラプラス方程式の有限体積中の積分平均値を右辺で近似することになり、若干意味が異なるものの、前と同じ結果を与えることが分かる。

上記差分近似式の作成法の内では、有限体積法が最もよい方法であると断定できるほどの際だった特徴はないが、最も欠点の少ない方法と判断できる。

有限体積法は微分的な連続体力学の法則というよりは、むしろ積分的な（或いは巨視的な）物理法則によっているので、例えば微分不能点を含む問題に対しても、連続条件や運動量保存など、低次の保存性を持つ解を得ることが可能となる。

室内気流の面で最も重要な特性としては、1次量の数値レベルでの保存である。有限体積法では、式3.11で明かなように、有限体積の界面において、流入、流出するフラックスを見積もるため、その方法に統一性を持たせれば（例えば、 $\Phi_{i,j}$ 、 $\Phi_{i+1,j}$ では有限体積が $x = i + \frac{1}{2}$ で接しているが、 $\Phi_{i,j}$ からみてx軸の正の方向に流出するフラックスと

$\Phi_{i+1,j}$ からみてx軸の負の方向から流入するフラックスが大きさが等しいことを意味する）、数値レベルでガウスの発散定理が成立することとなって、物理的に異常な解となる危険性が少なくなる。この特性がないと、例えば室内での汚染質拡散問題を取り扱った場合、流出口の流量平均濃度が瞬時一様拡散濃度にならないなどの不都合が生じる可能性がある。

3.3 移流拡散方程式の代表的な差分近似式

室内気流の計算に関連する方程式は、前章で述べたk-ε型乱流モデルを用いる限りにおいては、全て移流拡散方程式の形にまとめることができる。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial U_j \Phi}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) + S_\Phi \quad (3.14)$$

例えば乱流エネルギーkの方程式は、式3.14で以下とおいた場合に相当する。

$$\Phi = k, \quad \Gamma = \frac{\nu_t}{\sigma_k}, \quad S_k = P_k + G_k - \epsilon$$

2次元条件を想定し、式3.14を $\Phi_{i,j}$ 回りの有限体積で積分した後、 $\Delta x \Delta y$ で割れば、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \iint \frac{\partial \Phi}{\partial t} dx dy = \\ \frac{1}{\Delta x \Delta y} \iint \left[-\frac{\partial U_j \Phi}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) \right] dx dy + \frac{1}{\Delta x \Delta y} \iint S_\Phi dx dy \end{aligned} \quad (3.15)$$

となるが、当面右辺第1項に注目する。先と同様有限体積の表面でフラックスの分布がないことを仮定すれば、次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \left[U \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{-\Delta x/2} - \frac{1}{\Delta x} \left[U \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{\Delta x/2} \\ + \frac{1}{\Delta y} \left[V \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]_{-\Delta y/2} - \frac{1}{\Delta y} \left[V \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]_{\Delta y/2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

式3.16を差分近似式に移行するためには、有限体積界面における Φ 及び $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ に対する仮定が必要であり、この仮定の方法によって様々な差分式のバリエーションが現れることになる。

以下、式3.16のx方向成分を対象に、室内気流の数値計算でしばしば用いられる差分式を示す。

(1) 中心差分

図3-4(a)に示すように $\Phi_{i-1} \sim \Phi_i$ 、 $\Phi_i \sim \Phi_{i+1}$ の各区間で直線分布を仮定する。 U 、 Γ を一定とすれば、以下となる。

$$-U \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2\Delta x} + \Gamma \frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (3.17)$$

(2) 1次精度風上差分

拡散項については中心差分近似と同様、区間別直線分布とするが、移流項に関する有限体積界面の Φ の値については、図3-4(b)に示すように、その点の風向の上流側の値とする。

例えば、 $x = \frac{\Delta x}{2}$ の界面に関し、 $U > 0$ の時は $\Phi_{\Delta x/2} = \Phi_i$ 、 $U < 0$ の時は $\Phi_{\Delta x/2} = \Phi_{i+1}$ とおく。

$$\begin{aligned} -U \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{\Delta x} + \Gamma \frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (U \geq 0) \\ -U \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{\Delta x} + \Gamma \frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (U < 0) \end{aligned} \quad (3.18)$$

(3) Hybrid法

Spalding (1972) により開発された, セルペクレ数 $Pe = \frac{U \Delta x}{\Gamma}$ の値によって差分を以下のように切り替える方法である。

$$|Pe| < 2 \quad -U \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2\Delta x} + \Gamma \frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (3.19)$$

$$|Pe| \geq 2 \quad \begin{aligned} & -U \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{\Delta x} \quad (U \geq 0) \\ & -U \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{\Delta x} \quad (U < 0) \end{aligned} \quad (3.20)$$

即ちセルペクレ数の絶対値が2以下の場合には中心差分とし, 2以上では拡散項を無視した風上差分とする。

(4) Quick法

Leonard (1980) により開発された2次精度風上差分である。

図3-4(c)に示すように, 例えば $x = \frac{\Delta x}{2}$ 地点の Φ については, $U > 0$ の場合, Φ_i, Φ_{i+1} に加えて Φ_{i-1} を用いた放物線分布, $U < 0$ の場合, Φ_{i+2} を加えた放物線分布を仮定し, 以下とする。

$$-\frac{U}{\Delta x} \left(\frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2} - \frac{\Phi_{i+1} - 3\Phi_i + 3\Phi_{i-1} - \Phi_{i-2}}{8} \right) + \Gamma \frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (U \geq 0) \quad (3.21)$$

$$-\frac{U}{\Delta x} \left(\frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2} - \frac{\Phi_{i+2} - 3\Phi_{i+1} + 3\Phi_i - \Phi_{i-1}}{8} \right) + \Gamma \frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (U < 0) \quad (3.22)$$

これらと中心差分を比較すると, 拡散項は不変であるが移流項には, 放物線内挿による修正が追加された形をとる。

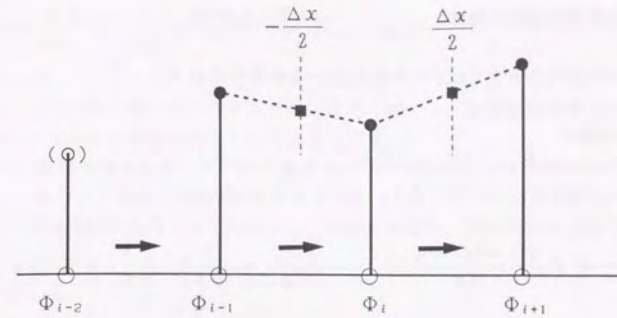


図3-4(a) 中心差分, Hybrid法

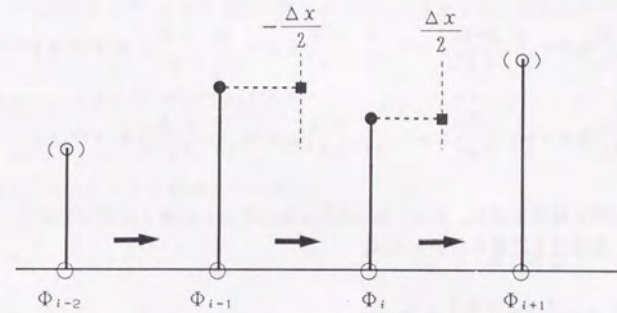


図3-4(b) 一次精度風上差分, Hybrid法

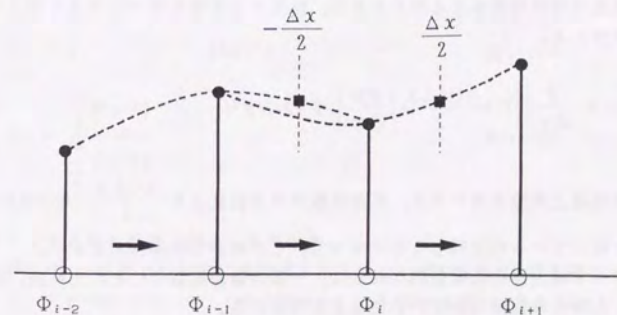


図3-4(c) Quick法

3. 4 代表的差分近似式の特性

前節で述べた差分式の特性をいくつかの観点から評価を試みる。

(1) 打ち切り誤差解析

3. 2 (1)のTaylor級数による差分式の作成法を逆に用いて、各差分式の誤差を評価してみる。まず、中心差分式について、式3. 2, 3を代入すれば、

$$-U \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2\Delta x} + \Gamma \frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{\Delta x^2} = -\frac{\partial U\Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + O(\Delta x^2) \quad (3.23)$$

となって、2次精度の差分式となる。Hybrid法でセルベクレ数の絶対値が2以下の場合も同様である。Quick法の場合は、以下の Φ_{i+2} , Φ_{i-2} に関するTaylor級数を用いれば、

$$\Phi_{i+2} = \Phi_i + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Delta x + \frac{4}{2!} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{8}{3!} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \Delta x^3 + \frac{16}{4!} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} \Delta x^4 + O(\Delta x^5) \quad (3.24)$$

$$\Phi_{i-2} = \Phi_i - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Delta x + \frac{4}{2!} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \Delta x^2 - \frac{8}{3!} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \Delta x^3 + \frac{16}{4!} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} \Delta x^4 + O(\Delta x^5) \quad (3.25)$$

式3. 23右辺と同じ結果を得る。即ち、Quick法は中心差分と同様2次精度差分式である。

1時精度風上差分式も同様に分析すれば、

$$-\frac{\partial U\Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] + O(\Delta x) \quad (3.26)$$

となって1次精度差分式であることが分かるが、誤差の主要項を調べてみると以下のように書けることが分かる。

$$-\frac{\partial U\Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\Gamma + \frac{|U|\Delta x}{2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] + O(\Delta x^2) \quad (3.27)$$

即ち、1次精度風上差分を用いると、拡散係数が原方程式より $\frac{|U|\Delta x}{2}$ だけ増加した問題を2次精度で解いているのと同じことになって、その意味では非常にまずい。

風上差分によって導入された疑似的な拡散は、一般に数値拡散ないし人工拡散、運動方程式を対象とした場合は数値(人工)粘性などと呼ばれる。

Hybrid法でセルベクレ数の絶対値が2以上の場合を分析すると以下となる。

$$-\frac{\partial U\Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{|U|\Delta x}{2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] + O(\Delta x^2) \quad (3.28)$$

即ち、Hybrid法で高いセルベクレ数の問題を解くと、物理拡散係数は無視されて、数値拡散のみによる方程式を解いていることになる。

(2) ソースフリー問題への適用

式3. 14の特別の場合としてPatankar (1980) に従い、以下の式を考えてみる。

$$0 = -\frac{\partial U\Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \quad (3.29)$$

今、図3-5に示すように、x軸の分割 Δx が一定の条件で、 $\Phi_1 = 1$, $\Phi_3 = 0$ とし、両者の中間点である Φ_2 の値を差分計算で求めることを考える。この条件の厳密解は以下となる。

$$\Phi_2 = \frac{\exp(2Pe) - \exp(Pe)}{\exp(2Pe) - 1}, \quad Pe = \frac{U\Delta x}{\Gamma} \quad (3.30)$$

一方、各差分式による値は以下の通り。

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} Pe \right) \quad \text{中心差分} \quad (3.31)$$

$$\Phi_2 = 1 - \frac{1}{2 + Pe} \quad \text{一次精度風上差分} \quad (3.32)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} Pe \right) \quad (Pe < 2)$$

$$\Phi_2 = 1 \quad (2 \leq Pe) \quad \text{Hybrid法} \quad (3.33)$$

$$\Phi_2 = \frac{\frac{3}{4} Pe + 1}{\frac{3}{8} Pe + 2} \quad \text{Quick法} \quad (3.34)$$

これらをまとめた結果を図3-6に示す。

まず $Pe=0$ の条件では、純拡散問題となるのでいずれも0.5と厳密解と一致する解を得る。一方、 $Pe \rightarrow \infty$ では、 ∞ (中心差分), 2.0(Quick法), 1.0(Hybrid法, 1次精度風上差分)となって差分近似法によって解は異なる。Hybrid法と1次精度風上差分の結果は厳密解に一致するが、Quick法, 中心差分では問題の性質上 $0 < \Phi_2 < 1$ となるべきであるが、いずれもこの範囲を逸脱し、特に中心差分の結果は受け入れがたい。

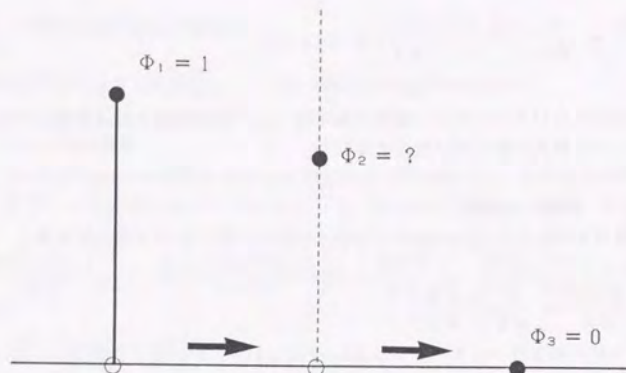


図3-5 ソースフリーの問題

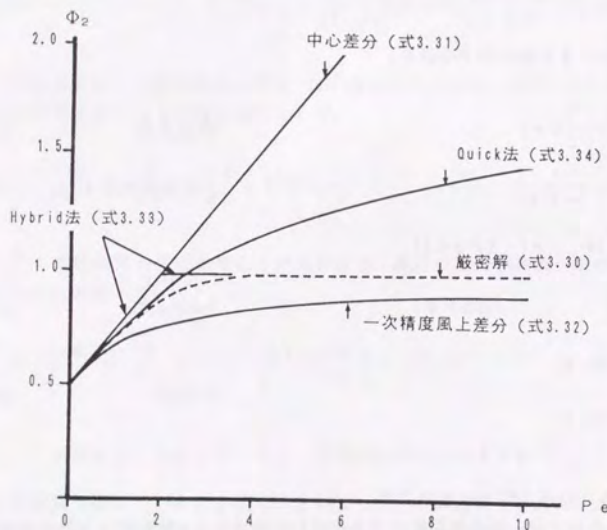


図3-6 各差分式による結果と厳密解の比較

中心差分の式3.17を変形すれば式3.35となるが、左辺の移流項は Φ_1 、 Φ_3 が固定されているので Φ の空間勾配は不変である。従って Pe 数の増加によって左辺の絶対値は単調に増加し、これとバランスするため Φ_2 は1を越えて増加することになる。

$$Pe \frac{\Phi_3 - \Phi_1}{2} = \Phi_3 - 2\Phi_2 + \Phi_1 \quad (3.35)$$

また、Quick法の式3.21を変形すると式3.36となるが、左辺には Φ_2 が含まれているため、この項が Φ の空間勾配を抑える働きをする結果、 Φ_2 は最大2となる($\Phi_2=2$ の時、空間微分が調度0となる)。

$$Pe \left(\frac{\Phi_3 - \Phi_1}{2} - \frac{\Phi_3 - 3\Phi_2 + 3\Phi_1 - \Phi_0}{8} \right) = \Phi_3 - 2\Phi_2 + \Phi_1 \quad (3.36)$$

(3) 移動性

純粋対流問題では空間のある地点で発生した振動の影響は、風下側へのみ対流で運ばれるべきであり、この性質を移動性と呼ぶ。この一見簡単な性質をほとんどの差分式が持たない。検討する方程式は式3.14から拡散項、ソース項を除いたものである。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -U \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (3.37)$$

式3.37の右辺に中心差分を用いれば、 Φ_i に関する差分式は以下となる。

$$\frac{\Delta \Phi_i}{\Delta t} = -U \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2\Delta x} \quad (3.38)$$

ここに、左辺は時間微分項の差分表現であり $\Delta \Phi_i$ は時間 Δt 間の増分を表す。今、時刻 $t=0$ 以前では全空間で $\Phi=0$ であったとし、 $t=0$ で $\Phi_i=e$ なる振動が与えられたとする。これは、一次元のパイプ流中の一点から汚染質をパルス放出した条件に相当し、汚染質は流れに乗って下流側に運ばれ、上流への影響はないはずである。式3.38を用いて i 点周辺の Φ の変化をみると、以下のようになる。

$$i-1 \text{ 点 (上流点)} \quad \frac{\Delta\Phi_{i-1}}{\Delta t} = -U \frac{e-0}{2\Delta x} \rightarrow \Delta\Phi_{i-1} = -\frac{U\Delta t}{\Delta x} \frac{e}{2} < 0 \quad (3.39)$$

$$i \text{ 点 (発生点)} \quad \frac{\Delta\Phi_i}{\Delta t} = -U \frac{0-0}{2\Delta x} \rightarrow \Delta\Phi_i = 0 \quad (3.40)$$

$$i+1 \text{ 点 (下流点)} \quad \frac{\Delta\Phi_{i+1}}{\Delta t} = -U \frac{0-e}{2\Delta x} \rightarrow \Delta\Phi_{i+1} = +\frac{U\Delta t}{\Delta x} \frac{e}{2} > 0 \quad (3.41)$$

摂動の生じた点の下流ではΦが増加して合理的であるが、発生点では一向に摂動は減少せず不合理である。また、摂動とは無関係であるべき上流点でΦは負の変化が生じることになってこの点も不合理である。

中心差分は結局移動性がないことが分かるが、この例で見られるように振幅 $2\Delta x$ の数値的振動や上流側にアンダーシュートを生じる傾向が強いため拡散性の弱い問題への適用は一般に困難である。

同様の計算を他の差分式にも適用した結果を表3-1にまとめて示す。

表3-1 各差分式における移動性の検討

	$\Delta\Phi_{i-1}$ - 上流点	$\Delta\Phi_i$ - 発生点	$\Delta\Phi_{i+1}$ - 下流点
中心差分	$-\frac{U\Delta t}{\Delta x} \frac{e}{2} < 0$	0	$+\frac{U\Delta t}{\Delta x} \frac{e}{2} > 0$
1次精度風上差分 (Hybrid)	0	$-\frac{U\Delta t}{\Delta x} e < 0$	$-\frac{U\Delta t}{\Delta x} e < 0$
Quick法	$-\frac{U\Delta t}{\Delta x} \frac{3e}{8} < 0$	$-\frac{U\Delta t}{\Delta x} \frac{3e}{8} < 0$	$+\frac{U\Delta t}{\Delta x} \frac{7e}{8} > 0$

表によれば、上流側でΦが不変（移動性を有する）なのは、1次精度風上差分のみであり、発生点で減少、下流側で増加となって合理的である。

Quick法の場合は上流点で減少となるので中心差分と同様にアンダーシュートの生じる可能性がある。

但し、発生点では減少となるので中心差分よりは問題が少ない差分式とも評価できよう。

(4) 保存性

式3.14のタイプの移流拡散方程式には解析的には積分的な保存条件が成立しており、この条件が数値レベルで成立する場合を保存性のある差分式と呼ぶ。

検討すべき方程式を式3.14で二次元条件で、拡散項、ソース項を無視した以下の方程式とする。

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\partial U\Phi}{\partial x} - \frac{\partial V\Phi}{\partial y} \quad (3.42)$$

式3.41を全空間で積分すれば、

$$\begin{aligned} \iint_V \frac{\partial\Phi}{\partial t} dx dy &= -\iint_V \frac{\partial U\Phi}{\partial x} dx dy - \iint_V \frac{\partial V\Phi}{\partial y} dx dy \\ &= -\int_y U\Phi dy - \int_x V\Phi dx \end{aligned} \quad (3.43)$$

となって場全体のΦの増分は境界における移流フラックスの合計に等しく、これを1次量の保存という。また、式3.41の両辺に2Φを掛けた後に全空間で積分すれば、

$$\begin{aligned} \iint_V 2\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial t} dx dy &= \iint_V \frac{\partial\Phi^2}{\partial t} dx dy \\ &= -\iint_V 2\Phi \frac{\partial U\Phi}{\partial x} dx dy - \iint_V 2\Phi \frac{\partial V\Phi}{\partial y} dx dy \\ &= -\iint_V \left[\frac{\partial U\Phi^2}{\partial x} + \frac{\partial V\Phi^2}{\partial y} \right] dx dy - \iint_V \Phi^2 \left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right] dx dy \\ &= -\int_y U\Phi^2 dy - \int_x V\Phi^2 dx \end{aligned} \quad (3.44)$$

となって、これを2次量の保存という。

但し、連続条件の成立を仮定し、以下の関係式を用いた。

$$\begin{aligned} \frac{\partial U\Phi^2}{\partial x} &= U \frac{\partial\Phi^2}{\partial x} + \Phi^2 \frac{\partial U}{\partial x} = 2\Phi U \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \Phi^2 \frac{\partial U}{\partial x} = 2\Phi \left[\frac{\partial U\Phi}{\partial x} - \Phi \frac{\partial U}{\partial x} \right] + \Phi^2 \frac{\partial U}{\partial x} \\ &= 2\Phi \frac{\partial U\Phi}{\partial x} - \Phi^2 \frac{\partial U}{\partial x} \end{aligned}$$

まず、1次量の保存が検討している全ての差分式で成立することを示そう。

図3-7に示す記号を用い、式3.43右辺のガウスの発散定理適用前の式を差分表現で書いた後に変形すれば、

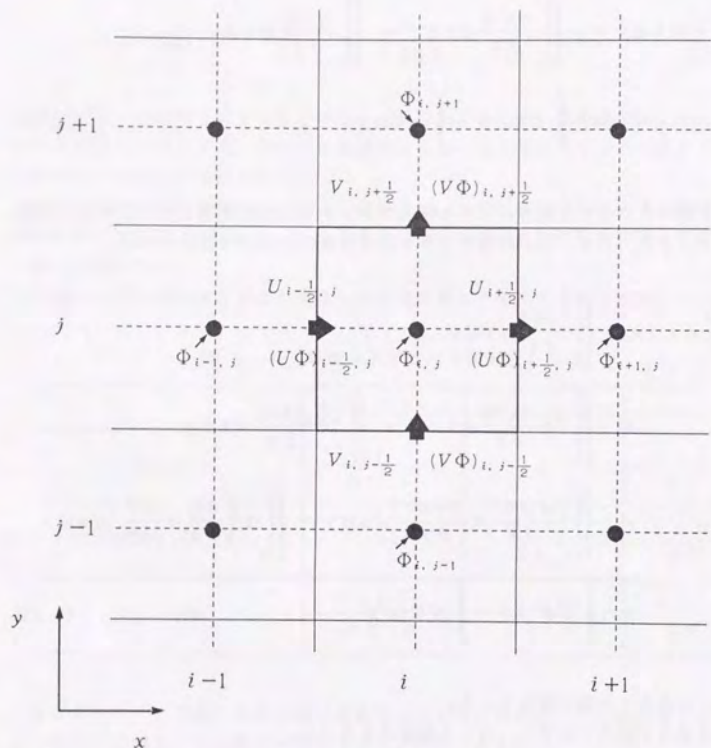


図3-7 差分式の保存性

$$\begin{aligned}
 & - \iint_V \frac{\partial U \Phi}{\partial x} dx dy - \iint_V \frac{\partial V \Phi}{\partial y} dx dy \\
 & = - \sum_j \sum_i \left[\frac{(U \Phi)_{i+\frac{1}{2}, j} - (U \Phi)_{i-\frac{1}{2}, j}}{\Delta x} + \frac{(V \Phi)_{i, j+\frac{1}{2}} - (V \Phi)_{i, j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right] \Delta x \Delta y \\
 & = - \sum_j \sum_i \left[(U \Phi)_{i+\frac{1}{2}, j} - (U \Phi)_{i-\frac{1}{2}, j} \right] \Delta y - \sum_j \sum_i \left[(V \Phi)_{i, j+\frac{1}{2}} - (V \Phi)_{i, j-\frac{1}{2}} \right] \Delta x
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

となって、有限体積の表面で一貫性のある差分式を用いれば、式3.45の内点のフラックスは互いに相殺し、境界値を残して0となる。従って、今回検討している全ての差分近似式は1次量の保存性を有する。

同様の手続きを式3.44について行えば、

$$\begin{aligned}
 & = - \iint_V 2\Phi \frac{\partial U \Phi}{\partial x} dx dy - \iint_V 2\Phi \frac{\partial V \Phi}{\partial y} dx dy \\
 & = - 2 \sum_j \sum_i \left[\Phi_{i, j} \frac{(U \Phi)_{i+\frac{1}{2}, j} - (U \Phi)_{i-\frac{1}{2}, j}}{\Delta x} + \Phi_{i, j} \frac{(V \Phi)_{i, j+\frac{1}{2}} - (V \Phi)_{i, j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right] \Delta x \Delta y \\
 & = - 2 \sum_j \sum_i \Phi_{i, j} \left[(U \Phi)_{i+\frac{1}{2}, j} - (U \Phi)_{i-\frac{1}{2}, j} \right] \Delta y - 2 \sum_j \sum_i \Phi_{i, j} \left[(V \Phi)_{i, j+\frac{1}{2}} - (V \Phi)_{i, j-\frac{1}{2}} \right] \Delta x
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

となる。式3.46のΦの内挿に中心差分を用いる場合は、以下のように更に変形される。

$$\begin{aligned}
 & - 2 \sum_j \sum_i \left[\Phi_{i, j} \left\{ U_{i+\frac{1}{2}, j} \left(\frac{\Phi_{i, j} + \Phi_{i+1, j}}{2} \right) - U_{i-\frac{1}{2}, j} \left(\frac{\Phi_{i-1, j} + \Phi_{i, j}}{2} \right) \right\} \right] \Delta y \\
 & - 2 \sum_j \sum_i \left[\Phi_{i, j} \left\{ V_{i, j+\frac{1}{2}} \left(\frac{\Phi_{i, j} + \Phi_{i, j+1}}{2} \right) - V_{i, j-\frac{1}{2}} \left(\frac{\Phi_{i, j-1} + \Phi_{i, j}}{2} \right) \right\} \right] \Delta x \\
 & = - \Delta x \Delta y \sum_j \sum_i \Phi_{i, j}^2 \left[\frac{U_{i+\frac{1}{2}, j} - U_{i-\frac{1}{2}, j}}{\Delta x} + \frac{V_{i, j+\frac{1}{2}} - V_{i, j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right] \\
 & - \sum_j \sum_i \left[U_{i+\frac{1}{2}, j} \Phi_{i, j} \Phi_{i+1, j} - U_{i-\frac{1}{2}, j} \Phi_{i-1, j} \Phi_{i, j} \right] \Delta y \\
 & - \sum_j \sum_i \left[V_{i, j+\frac{1}{2}} \Phi_{i, j} \Phi_{i, j+1} - V_{i, j-\frac{1}{2}} \Phi_{i, j-1} \Phi_{i, j} \right] \Delta x
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

式3.47の右辺第1項は連続条件が成立していれば0、第2, 3項は境界値を残して0となる。結局中心差分は2次量を保存する。

次に $U, V > 0$ とおき、1次精度風上差分を適用した場合は、

$$\begin{aligned} & -2\sum_j \sum_i \left[\Phi_{i,j} \left\{ U_{i+\frac{1}{2},j} \Phi_{i,j} - U_{i-\frac{1}{2},j} \Phi_{i-1,j} \right\} \right] \Delta y \\ & -2\sum_j \sum_i \left[\Phi_{i,j} \left\{ V_{i,j+\frac{1}{2}} \Phi_{i,j} - V_{i,j-\frac{1}{2}} \Phi_{i,j-1} \right\} \right] \Delta x \\ & = -2\sum_j \sum_i \left[U_{i+\frac{1}{2},j} \Phi_{i,j} \Phi_{i,j} - U_{i-\frac{1}{2},j} \Phi_{i-1,j} \Phi_{i,j} \right] \Delta y \\ & = -2\sum_j \sum_i \left[V_{i,j+\frac{1}{2}} \Phi_{i,j} \Phi_{i,j} - V_{i,j-\frac{1}{2}} \Phi_{i,j-1} \Phi_{i,j} \right] \Delta x \end{aligned} \quad (3.48)$$

となって、一般に0とならない。従って1次精度風上差分は2次量を保存しない。

同様にして、Quick法、Hybrid法も2次量を保存しない差分式である。

なお、実際の方程式は拡散項が存在するので、2次量の保存は必ずしも重要ではない場合が多いが、予測対象となる量が正負いづれの値をもとりうる場合、2次量保存差分式を用いると原理的に解が発散する心配がないので、望ましい性質といえる。

(5) 帰還感度 (feedback sensibility)

Leonard (1980) によって提唱された安定性分析法であり、(3)の移動性と類似した方法である。

ここでは、時間依存型のソース項付き一次元移流拡散方程式を検討する。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial U \Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + S_0 \quad (3.49)$$

式3.49を有限体積法を用いて $\Phi_{i,j}$ を求める離散式にすれば、

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} = -\frac{(U\Phi)_{i+\frac{1}{2}} - (U\Phi)_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} + S_{0i} \quad (3.50)$$

となり、右辺第1項を $(INFLUX)_c$ 、第2項を $(INFLUX)_D$ とおく。今 Φ_{i+1} 、 Φ_{i-1} を一定とし、 Φ_i が ε なる摂動を受けたとする。この場合に $\varepsilon > 0$ で、 $(INFLUX) > 0$ となると、左辺時間項は正となるので再び Φ_i が増加する悪循環が生じ、計算が発散する可能性が強い。そこで、 $(INFLUX)$ を Φ_i で微分した結果を以下とする時、

$$\Sigma_c = \frac{\partial (INFLUX)_c}{\partial \Phi_i}, \quad \Sigma_D = \frac{\partial (INFLUX)_D}{\partial \Phi_i} \quad (3.51)$$

安定条件として $\Sigma_c, \Sigma_D < 0$ を得る。

式3.50を中心差分近似した場合の Σ_c, Σ_D を求めると以下となる。

$$\begin{aligned} \Sigma_c &= \frac{\partial}{\partial \Phi_i} \left[\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\Phi_{i-1} + \Phi_i}{2} U_{i-\frac{1}{2}} - \frac{\Phi_i + \Phi_{i+1}}{2} U_{i+\frac{1}{2}} \right) \right] \\ &= -\frac{U_{i+\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{1}{2}}}{2\Delta x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial U_i}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_D &= \frac{\partial}{\partial \Phi_i} \left[\frac{1}{\Delta x} \left(\Gamma_{i+\frac{1}{2}} \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{\Delta x} - \Gamma_{i-\frac{1}{2}} \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{\Delta x} \right) \right] \\ &= -\frac{\Gamma_{i+\frac{1}{2}} + \Gamma_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (3.53)$$

これらから、中心差分近似を用いた場合、拡散項は常に安定条件を満たすが、移流項は流れの状況によって安定にも不安定にもなりうる事が分かる。

また、1次精度風上差分の場合の移流項については $U > 0$ の条件で、

$$\begin{aligned} \Sigma_c &= \frac{\partial}{\partial \Phi_i} \left[\frac{1}{\Delta x} \left(\Phi_{i-1} U_{i-\frac{1}{2}} - \Phi_i U_{i+\frac{1}{2}} \right) \right] \\ &= -\frac{U_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x} < 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

となって、無条件安定である。同じく $U > 0$ の条件でQuick法の場合は、

$$\begin{aligned} \Sigma_c &= \frac{\partial}{\partial \Phi_i} \left[\frac{U_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \left(\frac{\Phi_{i-1} + \Phi_i}{2} - \frac{\Phi_i - 2\Phi_{i-1} + \Phi_{i-2}}{8} \right) \right] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \Phi_i} \left[\frac{U_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \left(\frac{\Phi_i + \Phi_{i+1}}{2} - \frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{8} \right) \right] \\ &= -\frac{U_{i+\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{1}{2}}}{2\Delta x} - \frac{U_{i-\frac{1}{2}} + 2U_{i+\frac{1}{2}}}{8\Delta x} \end{aligned} \quad (3.54)$$

となり、これと式3.53を比較すると中心差分に安定項を追加した形となっている。

結局、移流項については、中心差分、Quick法、Hybrid法、1次精度風上差分の順に数値的安定度が高いこととなる。

(6) 係数符号の一致

Patankar (1980) によって提唱された”物理的に非現実的な解 (physically unrealistic solution) を得ないための規則”であり、差分式を式 3.55 の形に整理して適用される。

$$a_i \Phi_i = \sum_{n \neq i} a_n \Phi_n + S_i \quad (3.55)$$

但し、 a_n は Φ_i に隣接する Φ に関する係数である。この時、 a_i, a_n が全て正の値を取ることをいう。移流拡散作用はいわば近接作用であることから、ある点の値が大きくなった影響は隣接地点の値の増加となるべきであることを表現したものである。この制約は、連続条件が満たされている場合に、式 3.55 がガウス・ザイデル法によって解が得られるための十分条件ともなっている。ここでは、式 3.56 について検討する。

$$0 = -\frac{\partial U \Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \quad (3.56)$$

中心差分を用いて式 3.56 を $a_i \Phi_i = a_{i-1} \Phi_{i-1} + a_{i+1} \Phi_{i+1}$ の形に変形すれば、

$$a_{i-1} = \frac{U_{i-\frac{1}{2}}}{2} + \frac{\Gamma}{\Delta x}, \quad a_{i+1} = -\frac{U_{i+\frac{1}{2}}}{2} + \frac{\Gamma}{\Delta x}, \quad a_i = a_{i-1} + a_{i+1} + \frac{U_{i+\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \quad (3.57)$$

となるが、 a_{i-1}, a_{i+1} が負とならないための条件は、

$$\left| \frac{U \Delta x}{\Gamma} \right| = |Pe| \leq 2 \quad (3.58)$$

となることが分かる。逆にいえば、この条件を満たす程度に小さい Δx を用いなければ中心差分では係数符号は正とならない。

一方、 $U > 0$ とおいた場合の 1 次精度風上差分では、

$$a_{i-1} = U_{i-\frac{1}{2}} + \frac{\Gamma}{\Delta x}, \quad a_{i+1} = \frac{\Gamma}{\Delta x}, \quad a_i = a_{i-1} + a_{i+1} + \frac{U_{i+\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \quad (3.59)$$

となつて、無条件に制約を満たす。

$|Pe| > 2$ の場合の Hybrid 法では、式 3.59 で $\Gamma = 0$ とおいた場合に相当し、この場合も無条件に制約を満たす。なお $|Pe| \leq 2$ の場合も式 3.57, 58 より制約条件を満たすことは

明らかである。

$U > 0$ の条件での Quick 法の結果は以下となる。

$$a_{i-2} = -\frac{U_{i-\frac{1}{2}}}{8}, \quad a_{i-1} = \frac{6U_{i-\frac{1}{2}} + U_{i+\frac{1}{2}}}{8} + \frac{\Gamma}{\Delta x}, \quad a_{i+1} = -\frac{3U_{i+\frac{1}{2}}}{8} + \frac{\Gamma}{\Delta x}$$

$$a_i = a_{i-2} + a_{i-1} + a_{i+1} + \frac{U_{i+\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \quad (3.60)$$

Quick 法の場合も中心差分と同じく係数は負の値をとり得ることが分かる。

結局、1 次精度風上差分、Hybrid 法は Δx の大きさに無関係に常に”物理的に非現実的な解”は避けられることになる。

以上見てきたように、今回検討した移流項の差分式は、精度、移動性、保存性、安定性の面で全てを満足する方法ではなく、現在提案されている Raithby (1976) の skew upwind 法、Kawamura, Kuwahara (1984) による 3 次精度風上差分等、他の差分式についても同様のことがいえる。

理想的にはセルベクレ数の絶対値が 2 以下の条件で中心差分を用いるのがよいことになるが、このためには非常に細かい差分メッシュが要求されることになって実用予測への適用は困難である。

結局、対象とする問題、方程式のタイプによって優先すべき特性を選び、対応する差分法を用いることになる。

今回検討した中では Quick 法はアンダーシュートは避けられず、2 次の保存性がないものの、中心差分法なみに高精度であること。また、Hybrid 法は高セルベクレ数の問題では数値拡散の混入は避けたいが、その大きさは 1 次精度風上差分より小さいこと、流れと直交方向は中心差分と一致すること、1 次精度風上差分なみの安定性、移動性を有することが特徴である。

従って、精度に振った選択としては Quick 法、安定度を優先した選択としては Hybrid 法となり、Patankar (1980) らの開発した SIMPLE 系の解析コードでは後者が使用される場合が多い。なお、これらの適用結果については後に例示する。

3. 5 運動方程式の解法, MAC法

層流及びk-εモデルにおける乱流を対象とした運動方程式は、等温条件では以下の形となる。

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial U_j U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu_e \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.61)$$

この方程式は式3.14の移流拡散方程式のカテゴリーに属するが、ソース中の圧力の取扱いが他のスカラー方程式と異なる点である。圧力は連続方程式と連成して求める必要があるため圧力項のみを陽に表し、他の項をひとまとめにして以下の様を書く。

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + F_i \quad (3.62)$$

上式に $\frac{\partial}{\partial x_i}$ を作用し変形すると圧力を求めるポアソン式となる。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial P}{\partial x_i} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \quad (3.63)$$

ここで式3.63の右辺第1項は連続条件より0となるが、数値解法では逆に連続条件が満たされるように圧力と速度を求める方針が取られる。

ここで問題となるのは速度成分と圧力成分の配置であって、これまで図3-8に示す方法などが提案されており、現状では直交座標系を用いる場合は(c)に示すスタガード・メッシュ配置が最良とされているがその理由を示そう。

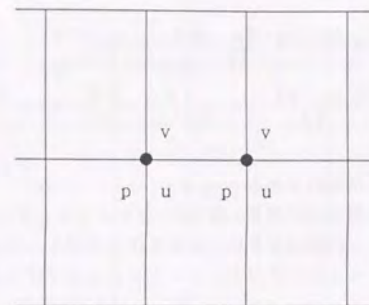
まず(a)の方法の*i*, *j*点での連続条件は、*x*, *y*方向の差分分割間隔をいずれも δ とおけば、

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\delta} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\delta} = 0 \quad (3.64)$$

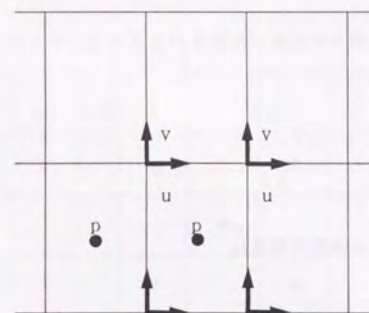
となるが、式3.64に現れる速度成分に関する運動方程式の時間項を単純前進差分、圧力項を中心差分近似した場合は、例えば以下となる。

$$\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i+1,j}^n}{\Delta t} = -\frac{p_{i+2,j} - p_{i,j}}{2\delta} + F_{i+1,j} \quad (3.65)$$

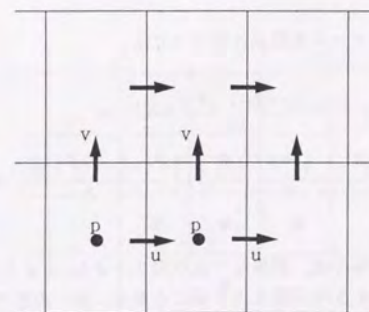
ここに右肩添え字は時間ステップを表す。式*n*+1ステップの速度成分に関して式3.64の成立を仮定し、式3.65等を変形して式3.64に代入し整理すると、



(a) ノーマルグリッド



(b) ALEメッシュ, Hirt, Amsden, Cook (1974)



(c) スタガードメッシュ, Harlow, Welch (1965)

図3-8 圧力・速度成分の配置

$$\frac{(p_{i+2,j}-2p_{i,j}+p_{i-2,j})}{4\delta^2} + \frac{(p_{i,j+2}-2p_{i,j}+p_{i,j-2})}{4\delta^2} =$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\delta} + \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\delta} \right) + \left(\frac{F_{i+1,j} - F_{i-1,j}}{2\delta} + \frac{G_{i,j+1} - G_{i,j-1}}{2\delta} \right)$$

(3.66)

となる。式 3.63 との対応は明白であろう。

ここで問題なのは圧力の参照点が図 3-9 (a) に示すようにとびとびになっている点であって、例えば $p_{i,j}$, $p_{i+1,j}$ の圧力は互いに異なる圧力のグループに属し、相互に影響を与えない 2 つの圧力解 (チェッカーボード・シンドロームと呼ばれる) が得られることになる。

図 3-8 (b) の場合も同様の計算を行えば、参照される圧力は図 3-9 (b) となるのが分かり、圧力振動が避けられない。

さて、 u , v , p が全て異なる位置で定義されるスタガード・メッシュに関し、 i , j 点での連続式は、

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta} = 0$$

(3.67)

となり、式 3.65 に対応する運動方程式は、

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\Delta t} = -\frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\delta} + F_{i+\frac{1}{2},j}$$

(3.68)

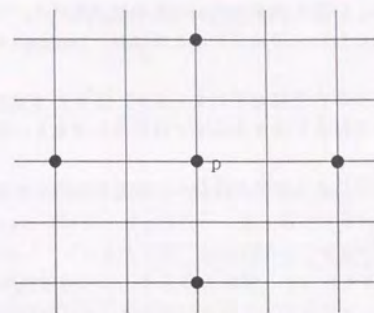
となるので、この場合のポアソン方程式は以下となる。

$$\frac{(p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j})}{\delta^2} + \frac{(p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1})}{\delta^2} =$$

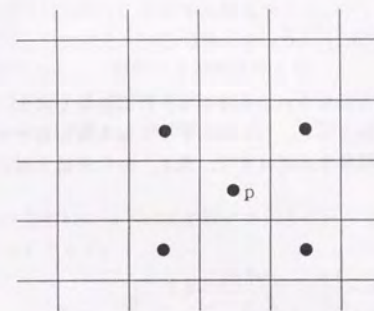
$$\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^n - u_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\delta} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^n - v_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\delta} \right) + \left(\frac{F_{i+\frac{1}{2},j} - F_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta} + \frac{G_{i,j+\frac{1}{2}} - G_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta} \right)$$

(3.69)

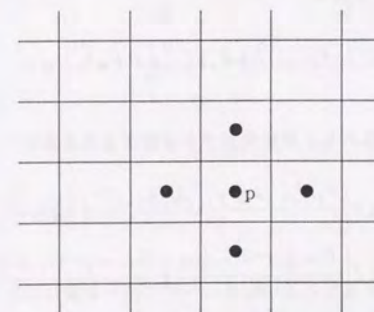
スタガード・メッシュの場合は、参照圧力点が図 3-9 (c) のように隙間のない十字配置となるために、(b), (c) のような問題は生じることなく、単一の圧力解が得られることが重要な特徴である。この長所により、流体計算で差分解法を用いる場合は、一般曲線座標系等を使用する場合を除き、スタガード・メッシュが広く使用され、本論文でもこの方法を用いている。



(a) ノーマルグリッド



(b) ALEメッシュ, Hirt, Amsden, Cook (1974)



(c) スタガードメッシュ, Harlow, Welch (1965)

図 3-9 圧力・速度成分の配置

なお、圧力の計算に式3.69をそのまま使い、その結果を式3.68に代入して圧力を更新する数値アルゴリズムはoriginalのMAC法と呼ばれ、Harlow, Welch (1965) によって開発された原型である。

その後MAC法にはいくつかの変種が現れているが、圧力と速度を同時に緩和するViecelli (1971) によるABMAC法を本論文では採用しており、以下簡単に説明する。

まず、第k回目の速度成分による連続条件からの逸脱を以下とする。

$${}^k D_{i,j} = \frac{{}^k u_{i+\frac{1}{2},j} - {}^k u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta} + \frac{{}^k v_{i,j+\frac{1}{2}} - {}^k v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta} \quad (3.70)$$

$D < 0$ の場合は質量が有限体積に滞留することを意味するため、圧力を増加させて調整する必要がありこれを以下のように書く。

$${}^{k+1} p_{i,j} = {}^k p_{i,j} - \omega {}^k D_{i,j} \quad (3.71)$$

これより $k+1$ 回目の圧力場を求められるので、計算結果を式3.68に代入して速度の更新を行い、得られた速度場を式3.70に代入する手順を繰り返すアルゴリズムを考える。

この圧力の物理的意味を理解するにはまず、式3.68の運動方程式を第k回目の緩和結果と解釈し、

$$\frac{{}^k u_{i+\frac{1}{2},j} - {}^k u_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta t} = -\frac{{}^k p_{i+1,j} - {}^k p_{i,j}}{\delta} + F_{i+\frac{1}{2},j} \quad (3.72)$$

変形して、

$${}^k u_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{\Delta t}{\delta} ({}^k p_{i,j} - {}^k p_{i+1,j}) + F_{i+\frac{1}{2},j} \Delta t + u_{i+\frac{1}{2},j}^n \quad (3.73)$$

等とし、式3.71の右辺に代入し、更に変形すれば以下となる。

$$\begin{aligned} {}^{k+1} p_{i,j} = & {}^k p_{i,j} + \omega \Delta t \left[\frac{{}^k p_{i+1,j} - 2{}^k p_{i,j} + {}^k p_{i-1,j}}{\delta^2} + \frac{{}^k p_{i,j+1} - 2{}^k p_{i,j} + {}^k p_{i,j-1}}{\delta^2} \right] \\ & - \omega \Delta t \left[\frac{F_{i+\frac{1}{2},j} - F_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta} + \frac{G_{i,j+\frac{1}{2}} - G_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta} \right] \\ & - \omega \left[\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^n - u_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\delta} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^n - v_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\delta} \right] \quad (3.74) \end{aligned}$$

これが、上記アルゴリズムで実際に解かれる方程式であるが、これは明らかに次の式の差分近似形となっている。

$$\frac{\partial p}{\partial \omega} = \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial F_i}{\partial x_i} - \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^n \right] \quad (3.75)$$

式3.75が ω について取束すれば左辺は0となることから、右辺の括弧内もまた0となるが、これは式3.64のポアソン式と完全に一致することから、目的は達成されたことになる。但し、このアルゴリズムは圧力場、速度場の修正を別のstepで行うヤコビ法的解法であることと、 ω の制約が強いことから取束は遅いことが知られている。

そこでSOR法的な修正による加速が計られることになる。

修正されたアルゴリズムでは、

- 1) i, j 点について式3.70より逸脱を求める。
- 2) これを式3.71に代入して圧力修正を行う。
- 3) $p_{i,j}$ の変化によって影響する速度成分4個 (三次元では6個) を直ちに修正する。
- 4) 次のポイントに移動し、1)に戻る。

ことを繰り返す。

このアルゴリズムは実際には以下の式を解いていることになり、取束結果は先のアルゴリズムと同一となるはずである。

$$\begin{aligned} {}^{k+1} p_{i,j} = & {}^k p_{i,j} + \omega \Delta t \left[\frac{{}^k p_{i+1,j} - 2{}^k p_{i,j} + {}^{k+1} p_{i-1,j}}{\delta^2} + \frac{{}^k p_{i,j+1} - 2{}^k p_{i,j} + {}^{k+1} p_{i,j-1}}{\delta^2} \right] \\ & - \omega \Delta t \left[\frac{F_{i+\frac{1}{2},j} - F_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta} + \frac{G_{i,j+\frac{1}{2}} - G_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta} \right] \\ & - \omega \left[\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^n - u_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\delta} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^n - v_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\delta} \right] \quad (3.76) \end{aligned}$$

なお、安定性解析の結果より ω の値としては、以下とすべきことが知られている。

$$\omega = \beta \frac{\delta^2}{4\Delta t}, \quad \beta \leq 2 \quad (3.77)$$

これらは、 x, y 方向の差分分割が同一の場合の条件であり、方向別に異なる大きさの分割を用いる場合の制約条件はHirt, Cook (1972) により与えられている。

各方向に任意分割する場合 (いわゆる異形メッシュ) のアルゴリズムも本質的な相違はなく、Hirtらのアルゴリズムを変形した形で野村, 松尾, 加藤 (1980) が導いている。

但し、この場合は安定性の分析ができないので実地の計算を通して安定性を確かめる方がとられてきており、等分割の場合の制約条件を踏襲して余り問題がないことが経験的に知られている。

なお、具体的な異形メッシュへの適用法や計算法の詳細は、Kurabuchi, Fang, Grot (1990)などに詳述されているのでそちらを参照されたい。

3. 6 差分近似式が流れの計算結果に与える影響

3. 4で比較した差分近似式を実際に運動方程式に適用し、差分式が計算結果に与える影響について検討する。解くべき方程式は以下に示す二次元層流の運動方程式である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} &= -\frac{\partial U^2}{\partial x} - \frac{\partial UV}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= -\frac{\partial VU}{\partial x} - \frac{\partial V^2}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2 \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.78)$$

計算対象は図3-10に示すように、正方形空間とし吹出し・吸込み口の配置、大きさにについては(a), (b)の2通りを検討した。

なお、式3.78中のRe数としては、吹出し口幅を代表長さとしており、吹出し、吸込み法線速度は計算境界面で与え、接線速度は壁境界面を含めてno-slip条件とした。

(1) (a)のジオメトリーに関する計算結果

18²分割(吹出し2分割), 36²分割(吹出し4分割)の等分割差分メッシュを用い, Re = 20, 100を検討した。

差分近似法は移流項に中心差分, Quick法, Hybrid法を用い, 他の空間微分項には中心差分を用いた。

時間項は単純前進差分とし, ABMAC法による圧力・速度同時緩和法を解法に用いた。

図3-11にRe = 20, 18²分割の場合の計算結果を示す。

図によれば左側の渦の強さに若干の違いはあるものの全般的な流れの様相は, 差分式の相違による影響をほとんど受けていない。

Re = 20の条件ではセルレイノルズ数 $\frac{U\delta}{\nu}$ の最大が10となることから, Hybrid法は空間の大部分で中心差分に移行していること, 物理粘性作用の強いことから変数の空間勾配が小さいため, Quick法の放物線修正部分の影響が小さいことが原因と推定される。

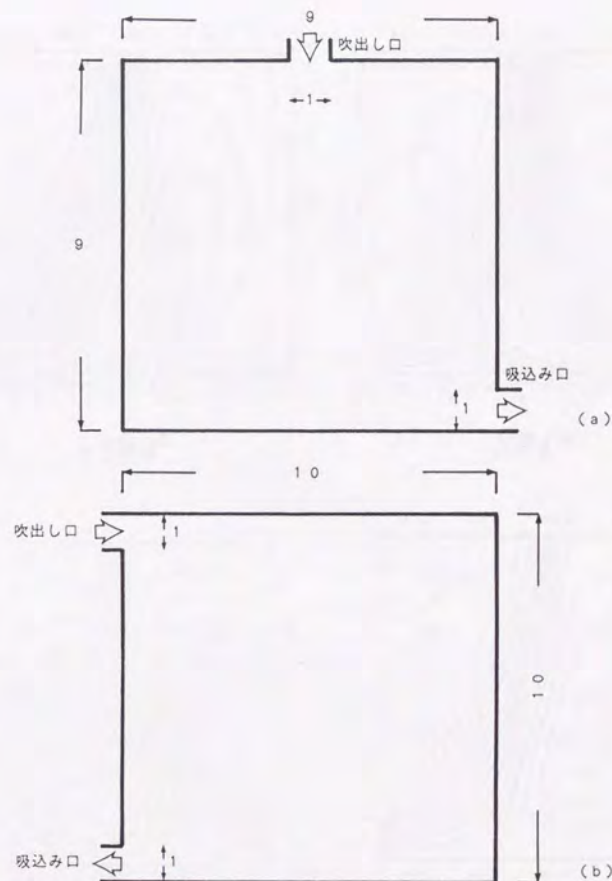
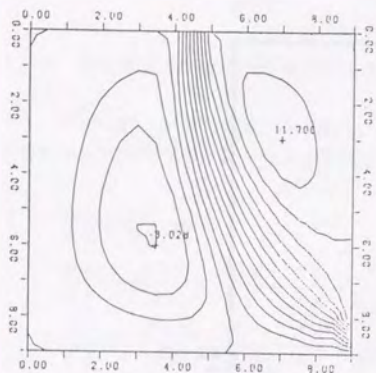
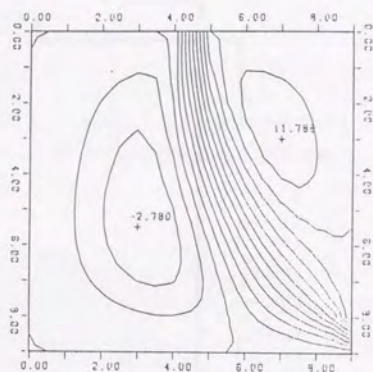


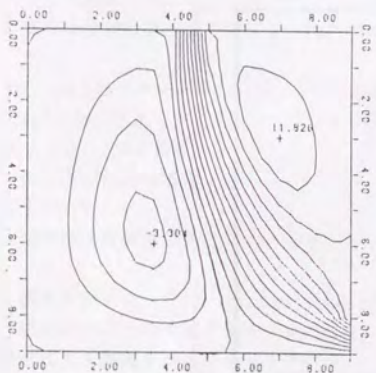
図3-10 二次元層流の計算対象



中心差分

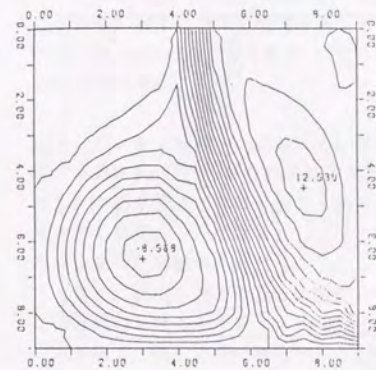


Quick法

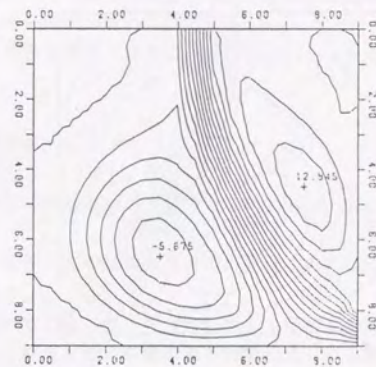


Hybrid法

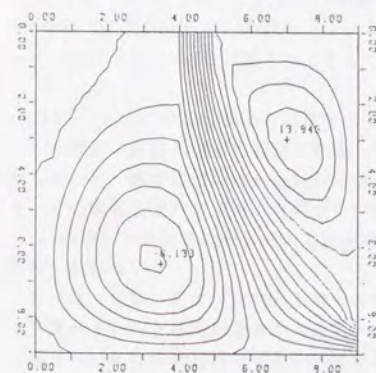
図3-11 (a)のジオメトリー
Re = 20, 18×18分割の計算結果



中心差分

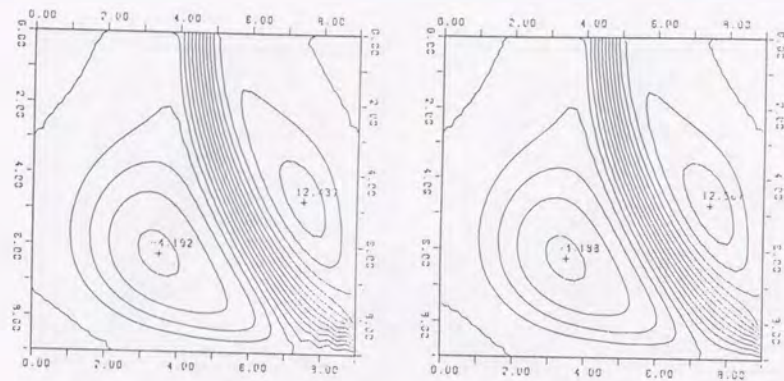


Quick法



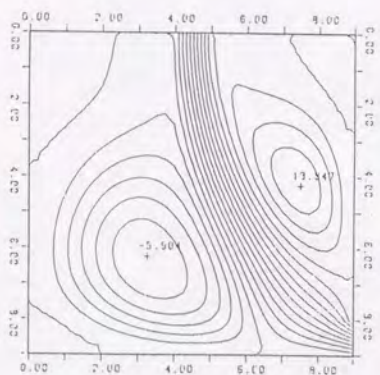
Hybrid法

図3-12 (a)のジオメトリー
Re = 100, 18×18分割の計算結果



中心差分

Quick法



Hybrid法

図3-13 (a)のジオメトリー
Re=100, 36×36分割の計算結果

図3-12に $Re=100$, 18^2 分割の場合の計算結果を示す。差分式によって計算結果は著しく異なることが分かる。

中心差分では流出口付近に、流線が波打ついわゆるwigglingが認められ、主流左側の渦の形状や強度は図3-13に示す 36^2 分割の場合と全く異なる。

但し、主流右側の渦は比較的变化が少ない。また、Hybrid法では流出口付近の流線が広がり、主流左側渦の形状、強度が細かい分割の場合と異なること、主流右側渦の位置が上部に移動し、右上隅の2次循環が消失するなどの変化が認められる。

一方、Quick法の結果は全般的に 36^2 分割の場合と近く、流出口付近のwigglingも生じないことが分かる。

図3-13に $Re=100$, 36^2 分割の計算結果を示す。

中心差分とQuick法の計算結果は非常に近い。

但し、中心差分ではこの分割でも流出口付近にwigglingが生じているのに対し、Quick法の解は非常になだらかである。

Hybrid法の計算結果もなだらかであるが、主流左右の渦の強さが中心差分、Quick法に比べて大きく、流出口付近の流線の広がりが大きい。

この分割におけるセルレイノルズ数は最大25であり、流れが方向転換する領域ではx, yの両方向共、風上差分に移行することから、数値粘性の影響が顕著に現れたものと推定される。

(2) (b)のジオメトリーに関する計算結果

20^2 分割(吹出し2分割), 15×30 分割(吹出し3分割), 30^2 分割(吹出し3分割), 40^2 分割(吹出し4分割)の差分メッシュを用い、 $Re=100$ のみを検討した。差分近似法は中心差分とQuick法を比較することとし、他は(a)の場合に準じた。

図3-14に 20^2 分割の場合の結果を示す。

中心差分の解は主流が対向壁に到達しており、大略細かい分割の場合と一致した傾向となるものの、流出口付近にwigglingの生じること、右上コーナーの2次循環が不自然であり、この影響を受けて主流が天井面を剥離した後に、斜め下方に向かうこと等が異なる。

Quick法による結果はそもそも主流が対向壁に到達しないため細分割の場合と全く解の様相は一致しない。

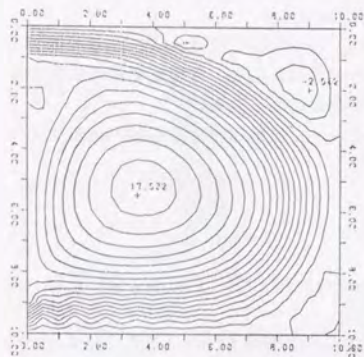
これは、貝塚、岩本(1984)が渦セル場での数値実験で明らかにしたように、Quick法は2次量のドレーン傾向があるため運動エネルギーが減衰した結果と推定される。

図3-15に 15×30 分割の場合の結果を示す。

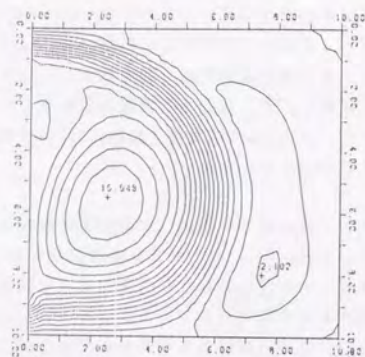
中心差分の解は主流部分の構造が細分割の結果と全般的に対応しているもののwigglingは大きい。

また、右下隅部分の2次循環部分が不自然であるとともに、吹出し口直下の2次循環が再現されず、また 40^2 分割の解に比べ天井面の剥離位置が吹出し口に近すぎる。

一方、Quick法の計算結果は飛躍的に精度が向上し、この分割の段階でほぼ細分割の計算結果と遜色がない。

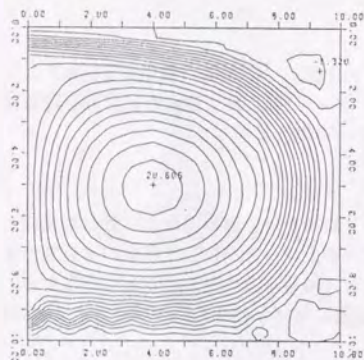


中心差分

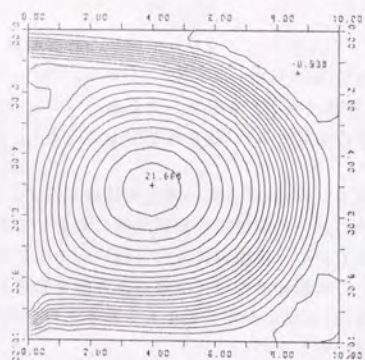


Quick法

図3-14 (b)のジオメトリー, $Re = 100$, 20×20 分割の計算結果

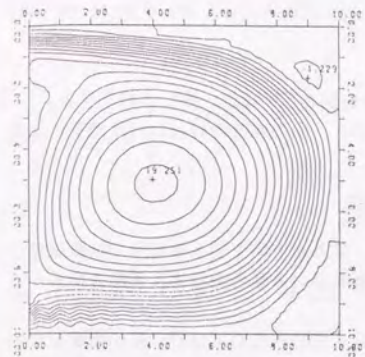


中心差分

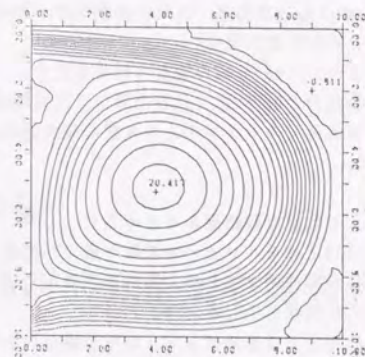


Quick法

図3-15 (b)のジオメトリー, $Re = 100$, 15×30 分割の計算結果

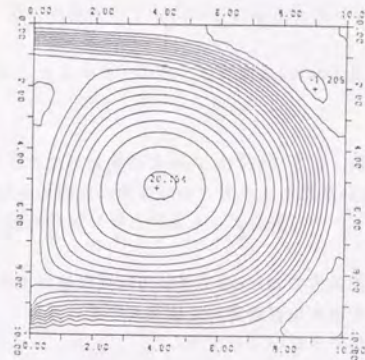


中心差分

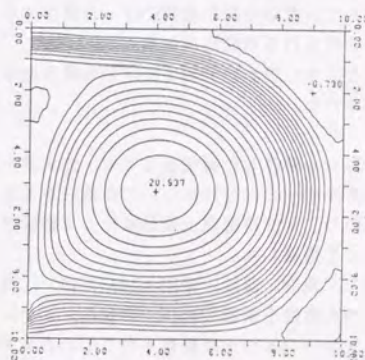


Quick法

図3-16 (b)のジオメトリー, $Re = 100$, 30×30 分割の計算結果



中心差分



Quick法

図3-17 (b)のジオメトリー, $Re = 100$, 40×40 分割の計算結果